Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
(повне найменування вищого навчального закладу)

Фізико-енергетичний факультет
(повне найменування інституту, назва факультету (відділення))

Кафедра фізики нетрадиційних енерготехнологій та екології
(повна назва кафедри (предметної, циклової комісії))

Пояснювальна записка

до дипломного проекту (роботи)
магістр
(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему « Математична модель опису резонансів Шумана »

Виконав: студент 6 курсу, групи НФ-61
напряму підготовки (спеціальності)
8.0402040 - «прикладна фізика»
(шифр і назва напряму підготовки, спеціальності)

Ольховський А.С.
(прізвище та ініціали)
Керівник: Кулик О.П.
(прізвище та ініціали)
Рецензент
(прізвище та ініціали)

Харків - 2017 року

Реферат

Ольховський Антон Стефанович. Математична модель опису резонансів Шумана. - Харків: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2017. – 56 с.

Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків; містить 15 рисунков, 3 таблиці, список використаних джерел з 44 найменувань.

Розроблено математична модель опису резонансів Шумана. Запропоновані розв'язки для векторного і скалярного потенціалів при поширенні стоячих хвиль в резонаторі Земля-іоносфера, графічно показан розподіл електричного потенціалу на поверхні Землі. Отримана модель дозволяє описати експеримент Тесли по бездротовій передачі електрики за допомогою наднизькочастотних хвиль.

Ключові слова: резонанс Шумана, бездротова передча електрики, стоячі хвилі, резонатор, експерименти Тесли.

Зміст

Вступ 3

Розділ 1. Електромагнітні резонанси в системі Земля-іоносфера 6
1.1 Хвильові властивості нижньої атмосфери 6
1.2 Моделі резонатора Земля - іоносфера 7
1.2 Власні частоти резонатора Земля – іоносфера 10
1.4 Комбінована неоднорідність 22
1.5 Зв'язок спектра власних частот резонатора Земля - іоносфера з його симетрією 24
1.6 Чисельні методи опису резонансів Шумана 29

Розділ 2. Теоретична модель 36
2.1 Бездротова передача електроенергії 36
2.2 Рішення для збуреного електричного потенціалу 39
2.3 Рішення для скалярного потенціалу. Прив'язка до умов експерименту Тесли 41
2.4 Векторний потенціал 42
2.5 Графічний аналіз розподілу збуреного електричного потенціалу на поверхні Землі 43

Розділ 3. Результати 45
3.1 Розрахунок резонансів Шумана 45
3.1 Порівняння з експериментальними даними 47

Висновки 50

Список літератури 51

Вступ

На даний момент забезпечення енергетичних потреб людства пов’язане з вирішенням двох глобальних завдань - отриманням енергії і її доставкою до споживача.

Виробництво енергії пов'язано з найбільш екологічно небезпечними способами її виробництва - теплові, гідравлічні, атомні станції. Майже не використовуються екологічно чисті джерела енергії - Сонця, вітру, земного тепла, океанічних і морських течій. Навіть найкращі системи виробництва електроенергії і її розподілу не можуть бути повністю надійними джерелами високоякісного електроживлення. Електроенергія, що виробляється проходить довгий шлях від електростанції, через підстанції, до кінцевого споживача, і чим далі від джерела, тим більше ризик виникнення проблем з якістю і надійністю електропостачання. Виробництво електричної енергії нерозривно пов’язане з її доставлянням до споживача в максимально «якісному» вигляді з мінімальними втратами. Передавання електричної енергії від місця генерування до місця споживання традиційно здійснюється за допомогою електричних мереж, до складу яких входять перетворювачі, лінії електропересилання і розподільчі пристрої. З проблемами електропостачання споживачі стикаються тоді, коли починаються несправності в роботі їх електрообладнання, будь то побутові електроприлади, офісна або виробнича електротехніка. Ці проблеми можуть проявлятися або в неякісність електроенергії - нестабільності напруги, спотворенні його форми і коливання його частоти, недостатню потужність електромережі, або в ненадійності, тобто пропажі напруги [1]. В Україні довжина електромереж - понад мільйон двісті тисяч кілометрів. Втрати енергії при передаванні досягають 20-30-ти відсотків, або мільярд євро щорічно [4]. На модернізацію системи потрібно більш як 20-ть мільярдів гривень.) дають підстави досліджень такого методу передачі електричної енергії [3].

Слід зазначити, що дальність передачі електроенергії використовуваними нині технологіями абсолютно не задовольняє вимогам економічного розвитку промисловості і сільського господарства. При передачі на відстані, необхідні для рівномірного розподілу електроенергії виникають неприпустимо великі втрати (до 50% в сільському господарстві і гірничодобувної промисловості).
Приблизно, 20% виробленої енергії втрачається при передачах. Таким чином, спосіб передачі великої кількості енергії по проводах супроводжується значними енергетичними втратами і пов'язаний з суттєвими технологічними труднощами.
Тому спосіб бездротової передачі електрики може служити гарною заміною для класичного проводового способу транспортування електричної енергії.

Ідея бездротової передачі електричної енергії з’явилася у фізиків і інженерів практично одночасно зі становленням електротехніки, як самостійної галузі техніки (1870 - 1890 рр.). Піонером в області бездротової передачі електричної енергії є Нікола Тесла. У лабораторії в Колорадо-Спрінгс (1899 - 1900) Тесла вперше провів випробування системи бездротової передачі енергії, використовуючи гігантський високочастотний трансформатор з частотою ω_0 =0.15 МГц і довжиною хвилі λ_0=2 км. У своїх експериментах він запалював 200 електричних лампочок розжарювання, розташованих в 26 милях (≈ 42 км) від його лабораторії. Потужність кожної з них становила 50 Вт, а сумарний витрата енергії становив 10 кВт [35].

Стоячі хвилі наднизької частоти які поширюються в атмосфері Землі можуть бути використані для передачі електричних сігналлов з мінімальними втратами енергії.
Передачею електричних сигналів в наднизькочастотній області частотного спектра займався німецький інженер-електрик Вінфрід Отто Шуман. У 1952 році він застосував модель резонатора порожнини Земля-іоносфера для опису таких хвильових процесів. Шуман виявив резонансні частоти електричних сигналів, що згодом отримали його ім'я. ці резонанси представляють собою

набір піків в частотному спектрі. Розмірний аналіз з використанням швидкості світла і довжини кола Землі дозволив йому визначити порядок частоти для мінімально можливого резонансу: $\omega = c/2\pi R_з = 7.5$ Гц [36].

У першому розділі розглядаються раніше розроблені теорії резонансів Шумана, на основі коливань електричної і магнітної напруженостей. Другий розділ містить математичне описання коливань власного заряду Землі. Особливу увагу приділено експерименту Тесли по створенню стоячих хвиль в резонаторі Земля-іоносфера. У третьому розділі отримані більш точні, порівняно з попередніми результатами, значення часот резонансів Шумана і ппроведено порівняння з експерементально даними.

1. Електромагнітні резонанси в системі Земля-іоносфера

1.1 Хвильові властивості нижньої атмосфери

Електрична провідність повітря на малих висотах дуже мала. З віддаленням від Землі вона швидко зростає і вже на висоті в кілька десятків кілометрів, де починається область іоносфери, збільшується в мільйони разів. Такий різкий перепад провідності дозволяє в багатьох радіофізичних завданнях розглядати нижню атмосферу як тонкий діелектричний шар, обмежений зверху (іоносфера) і знизу (Земля) порівняно хорошими провідниками. Так утворюється сферичний хвилевід, в якому можуть поширюватися радіохвилі різних діапазонів. Верхня межа частот хвилевідного каналу визначається дисперсійними властивостями іоносфери, яка стає прозорою при підвищенні частоти до декількох десятків мегагерц. Нижня межа частот не існує, тобто у волноводі Земля - іоносфера можуть поширюватися радіохвилі як завгодно низької частоти, аж до постійного струму. Відсутність нижньої критичної частоти легко зрозуміти, якщо звернути увагу на те, що даний хвилевід не має бічних стінок і, отже, між його межами може існувати постійна різниця потенціалів [6]. Цікаво зауважити, що така різниця потенціалів дійсно існує. Вона досягає сотень тисяч вольт і проявляється у вигляді вертикального електростатичного поля з напруженістю поблизу поверхні Землі близьк 100 В/м. Повільні, добові, варіації напруженості електричного поля добре узгоджуються з рівнем глобальної грозової активності та можуть інтерпретуватися як процеси заряду - розряду сферичного конденсатора Земля - іоносфера. Терміном «конденсатор» користуються зазвичай при вивченні квазістатичних електричних явищ, для яких характерна довжина хвилі у багато разів перевершує радіус Землі. Якщо ж довжина хвилі електромагнітних коливань порівнянна з розмірами земної кулі, то найбільш придатним терміном є «резонатор» [8]. Правда, сферичний хвилевід розумно називати резонатором тільки в тому випадку, коли

затухання радіохвиль на довжині екватора не надто велике. В іншому випадку не виникне інтерференції між хвилями, які огинають земну кулю в протилежних напрямках, і резонансні явища спостерігатися не будуть. Експериментальні дані свідчать про те, що загасання в хвилеводному каналі на низьких частотах дійсно дуже мале. Наприклад, для f = 10 Гц (h = 30 тис. км) воно становить близько 0,2 дБ / тис. км, значить, інтерференція хвиль, що огинають земну кулю, цілком можлива [6].

1.2 Моделі резонатора Земля - іоносфера

Межі резонатора Земля-іоносфера мають складну конфігурацію. Поверхня Землі покрита нерівностями, її електричні параметри змінюються від точки до точки і, крім того, часто не залишаються постійними в межах глибини скін-шару. Іоносфера є багатокомпонентною магнітоактивною плазмою, неоднорідною як у вертикальному, так і в горизонтальному напрямку. Ясно, що повністю врахувати всі перелічені фактори при вирішенні задачі про електромагнітні коливання в резонаторі практично неможливо. Тому вибір спрощеної моделі, грає велику роль. Роботами, з яких почалося вивчення глобальних резонансів, були дві статті Шумана. В одній з них розглядалася гранично проста конфігурація: Земля і іоносфера представлялися у вигляді двох концентричних сфер з нескінченно провідними стінками. Такий резонатор характеризується тільки двома геометричними параметрами: радіусом Землі - **a** й радіусом іоносфери **b**, або радіусом Землі і шириною зазору (висотою іоносфери): H = b – a [7].

Навіть настільки ідеалізована модель дозволяє правильно оцінити значення власних частот резонатора (розрахункові значення власних частот перевищують експериментально спостережувані не більше ніж на 25%), але, зрозуміло, вона абсолютно не придатна для визначення його добротності.

Причину близького збігу власних частот можна зрозуміти, якщо звернути увагу па те, що два характерних розміри резонатора - «поздовжній» (2a) і «поперечний» (h) - дуже сильно відрізняються один від одного. Отже, повинні існувати дві серії власних частот. Перша, найбільш низькочастотна серія, відповідає довжинам хвиль, які укладаються ціле число раз уздовж земної кулі:

$$f_n \sim \frac{c}{2\pi a} \simeq 7.5n \text{ Гц}. \quad (1.1)$$

Резонансні частоти цієї серії потрапляють в діапазон від кількох герц до декількох десятків герц і називаються шуманівськими резонансами. Друга серія пов'язана з поперечним розміром резонатора і перевищує зазначений вище діапазон приблизно в 300 разів: [9]

$$F_n \sim \frac{c}{2h} n \sim 300 f_n \text{ Гц}. \quad (1.2)$$

Звідси випливає, що низькочастотні (шуманівські) і високочастотні резонанси майже не пов'язані один з одним. Відзначимо ще одну обставину, що забезпечує більшу стабільність формули (1.1) в порівнянні з (1.2) стосовно вибору параметрів іоносфери: резонатор не має меж в поздовжньому напрямку. Співвідношення (1.1) є умовою зміни фази коливань на ціле число періодів при зміні азимутального кута на 2 (обхід навколо земної кулі).

Ясно, що вимога періодичності розв’язку повинна виконуватися в будь-якому резонаторі, і в зазначеному сенсі формула (1.1) є точною. На противагу цьому умови поперечного резонансу (формула (1.2)) виникають тільки через відбиття від кордонів і тому істотно залежать від граничних умов на стінках [11].

Таблиця 1.1

Висота h км	Електронна концентрація N. см$^{-3}$		Густина нейтральних частинок n, см$^{-3}$
	День	Ніч	
0			$2{,}7\text{-}10^{19}$
10	–	–	2,7- Ю^{18}
20	–	–	$1{,}5\text{-}10^{18}$
30	–	–	$3{,}2\text{-}10^{18}$
40	–	–	$8{,}1\text{ -}10^{16}$
50	1 - 10	–	$2{,}5\text{-}10^{16}$
60	(4—10). 10	–	$7{,}0\text{-}10^{15}$
70	(0,8— 1)-10*	–	2,0- Ю^{16}
80	(0,2—2)« 10*2	10^1	3,0- Ю^{14}
90	$(0{,}1\text{-}1)\text{-}10^4$	$2\text{-}10^1$	$6{,}0\text{-}10^{13}$
100	$(0{,}4—1)\text{-}10^5$	$(0{,}2—2)\text{-}10^3$	$1{,}0\text{-}10^{13}$

Залежність концентрації частинок від висоти [10]

У другій статті Шумана геометричні характеристики моделі повністю збережені, однак врахована кінцева провідність іоносфери, яка залежить від концентрації заряджених частинок в атмосфері. Залежність кількості заряджених частинок від висоти показана в таблиці 1.1 Таким чином вдається оцінити добротність резонатора Q_n. Облік втрат в іоносфері трохи змінює і власні частоти, оскільки для оцінки в формулу (1.1), строго кажучи, треба поставити не швидкість світла **c**, а фазову швидкість хвилі **v**, що залежить від провідності іоносфери. Однак відмінність **v** від **c** дуже мала, і оскільки мова йде про оцінки, формула (1.1) залишається незмінною. Цим і пояснюється близькість власних частот ідеалізованої моделі до власних частот реального резонатора Земля – іоносфера [12].

Критерієм правильності вибору моделі зазвичай вважається збіг розрахункових значень (f_n і Q_n) з експериментальними даними.

Підбором параметрів одношарової іоносфери вдається досягти досить хорошого збігу власних частот, але добротності виявляються значно нижче за ті, що спостерігаються. Двошарові і багатошарові моделі, що мають більшу кількість вільних параметрів, дозволяють домогтися відповідності з експериментом за значеннями кількох власних частот і Q-факторів одночасно. Ще краще узгоджуються зі спостереженнями моделі іоносфери з безперервною зміною її параметрів за висотою [11].

1.2 Власні частоти резонатора Земля – іоносфера

Для визначення резонансних частот і власних коливань сферичного хвилевідного каналу між Землею та іоносферою необхідно розв'язати систему однорідних рівнянь Максвелла і задовольнити відповідним граничним умовам на стінках резонатора. Система рівнянь Максвелла повинна бути доповнена матеріальним рівнянням, що встановлює зв'язок між D (ω, r) і E. Просторовою дисперсією в наднизькому частотному діапазоні можна знехтувати, тому матеріальне рівняння має вигляд:[18]

$$D = \hat{\epsilon}(\omega, r)E \quad (1.3)$$

де ϵ — тензор діелектричної проникності. Залежність його від просторової координати є наслідком неоднорідності іоносфери.

Розв’язати вихідну систему рівнянь без будь-яких припущень щодо $\hat{\epsilon}(\omega, r)$ не вдається. Надалі ми розглянемо деякі моделі іоносфери, що

дозволяють правильно описати цілий ряд експериментально спостережуваних явищ. При виборі моделей резонатора зосередимося на іоносфері, оскільки нижню стінку (земну поверхню) можна апроксимувати нескінченно провідною сферою [13]. Таке спрощення виправдовується тим, що загасання в резонаторі відбувається головним чином за рахунок втрат в іоносферній плазмі. Тому облік кінцевої провідності Землі дуже слабо вплине на параметри власних коливань резонатора.

У сферичній системі координат г, θ, φ з початком у центрі Землі система рівнянь Максвелла приймає наступний вигляд:[36]

$$\begin{gathered}
\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}r\sin\theta\, E_\varphi - \frac{\partial E_r}{\partial\varphi}\right) = \frac{i\omega}{c}H_\theta\ ; \\
\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}rE_\varphi - \frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right) = -\frac{i\omega}{c}H_\varphi\ ; \\
\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}r\sin\theta\, H_\varphi - \frac{\partial H_r}{\partial\varphi}\right) = -\frac{i\varepsilon\omega}{c}E_\theta\ ; \\
\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}rH_\theta - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right) = \frac{i\varepsilon\omega}{c}E_\varphi\ ; \\
\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\, E_\varphi - \frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}\right) = -\frac{i\omega}{c}H_r\ ; \\
\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\, H_\varphi - \frac{\partial H_\theta}{\partial\varphi}\right) = \frac{i\varepsilon\omega}{c}E_r\ ;
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Введемо скалярні електричний і магнітний потенціали U і V, і визначимо їх наступним чином:[36]

$$\begin{gathered}
E_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\right)\frac{rU}{\sqrt{\varepsilon}} \\
H_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\right)rV
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Тангенціальні компоненти полів E і H виражаються через функції U і V:

$$E_\theta = \frac{rU}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}(rU) - \frac{i\varepsilon\omega}{c\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi});$$

$$H_\varphi = -\frac{i\omega\sqrt{\varepsilon}}{c}\frac{\partial U}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\varphi}(rV);$$

$$E_\varphi = \frac{i\omega}{c}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sqrt{\varepsilon}\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\varphi}(rU); \qquad (1.6)$$

$$H_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}(rV) + \frac{i\sqrt{\varepsilon}\omega}{c\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi});$$

Підставляючи дані рівняння в останні два рівняння Максвелла, отримуємо хвильові рівняння для потенціалів U і V:[36]

$$\left(\frac{1}{r^2} + \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\right) rF = 0 \qquad (1.7)$$

де для скорочення введено позначення

$$\Delta_\perp = \frac{1}{sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{(sin\,\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad (1.8)$$

Рішення будемо шукати, представляючи функцію F у вигляді

$$F(r,\theta,\varphi) = \rho(r)\Omega(\theta)\Phi(\varphi) \qquad (1.9)$$

Функція Φ(φ) визначається рівнянням

$$\Phi"(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) \qquad (1.10)$$

рішення існують лише при цілому m.

Власними функціями рівняння є

$$\Phi_m(\varphi) = e^{\pm im\varphi} \tag{1.11}$$

Функція $\Omega(\theta)$ знаходиться з рівняння

$$\frac{1}{sin\,\theta}\frac{d}{d\theta} sin\,\theta \frac{d\Omega}{dsin\,\theta} + \left(\lambda - \frac{m^2}{(sin\,\theta)^2}\right)\Omega = 0 \tag{1.12}$$

та умов обмеженості при θ =0 и θ =π. Рішення обмежені на сегменті [0, π] тільки при λ= n (n + 1), де n — ціле число. яке дорівнює або перевищує m. Ціле число m при заданому n приймає значення: - n, - n + 1…0… n - 1, n. Рішення, що володіють цими властивостями і утворюють повну ортогональну систему за індексом n для фіксованих m на інтервалі $0< \theta <\pi$.

Зручно розглядати твори кутових функцій

$$Y_{nm}(\theta, \varphi) = P_n^m\,(\cos\theta) e^{im\varphi} \tag{1.13}$$

є власними функціями оператора $\Delta_\perp$. При кожному n існує 2n + 1 різних кутових функцій. Функції Y_{n0} називаються зональними гармоніками, Y_{mn} - секторіальними гармоніками, а функції, що відповідають значенням 0 < m < n, - тессеральнимі гармоніками [18].

Рівняння для радіальної функції ρ_n (r) має вигляд

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right] = \mathrm{r}\,\rho_n(\mathrm{r}) \tag{1.14}$$

Підставляючи рішення рівнянь для ρ_n (r), $\Omega(\theta)$, Φ(φ) отримуємо загальне рішення хвильового рівняння

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} kr \left[A_{nm} h_n^{(1)}(kr) + B_{nm} h_n^{(2)}(kr) \right] Y_{nm}(\theta, \varphi) e^{im\varphi} \quad (1.15)$$

де k=ω/c власне хвильове число, яке визначається з характерестичного рівняння. Розглянемо граничні умови при r = a і r = b, яким повинні задовольняти введені нами потенціали. На поверхні Землі (припускаємо, що вона ідеальний провідник) тангенціальні компоненти електричного поля дорівнюють нулю:

$$\mathrm{E}_\theta(r = a) = \mathrm{E}_\varphi(r = a) = 0 \quad (1.16)$$

На границі резонатора з іоносферою (r = b) тангенціальні компоненти електричного і магнітного полів E і H безперервні.

Досліджуючи співвідношення тангенціальних компонент, бачимо, що це призводить до умов

$$\begin{aligned} \mathrm{u}(\mathrm{r} = \mathrm{b}) &= \sqrt{\varepsilon} u^l(r = b) \\ \frac{\partial}{\partial r}(ru)|_{r=b} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial r}(ru^l)|_{r=b} \\ v(\mathrm{r} = \mathrm{b}) &= v^l(r = b) \\ \frac{\partial}{\partial r}(rv)|_{r=b} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial r}(rv^l)|_{r=b} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Можна розбити системи рівнянь на дві підсистеми, що описують коливання електричного і магнітного типів [21].

1. Електричний або E-тип коливань

$$U = \sum_{n,m} kr \left[A_{nm} h_n^{(1)}(kr) + B_{nm} h_n^{(2)}(kr) \right] Y_{nm}(\theta, \varphi) e^{im\varphi}$$

$$U^l = \sum_{n,m} krC_{nm}h_n^{(2)}(kr)Y_{nm}(\theta,\varphi)e^{im\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rU)|_{r=a} = 0 \qquad (1.19)$$

$$\mathrm{U(r = b)} = \sqrt{\varepsilon}U^l(r = b)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rU)|_{r=b} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial r}(rU^l)|_{r=b}$$

2. Магнітний або H-тип коливань

$$V = \sum_{m,n} kr\left[D_{nm}h_n^{(1)}(kr) + G_{nm}h_n^{(2)}(kr)\right]Y_{nm}(\theta,\varphi)e^{im\varphi}$$

$$V^l = \sum_{n,m} krF_{nm}h_n^{(2)}(kr)Y_{nm}(\theta,\varphi)e^{im\varphi} \qquad (1.20)$$

$$\mathrm{V(r = a) = 0}$$

$$\mathrm{V}^l\mathrm{(r = b) = V(r = b)}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rV)|_{r=b} = \frac{\partial}{\partial r}(rV^l)|_{r=b}$$

$A_{nm}B_{nm}C_{nm}D_{nm}F_{nm}G_{nm}$ – амплітуди визначаються граничними умовами на поверхнях резонатора і умовами її порушення. У рішенні, що описує поле в іоносфері, ми залишили тільки хвилі, що йдуть від границі розділу, так як лише вони задовольняють умові випромінювання [8].

Розглянемо власні частоти коливань E-типу і отримаємо систему рівнянь щодо постійних A_{nm} B_{nm} C_{nm}

$$A_{nm}u_n'(ka) + B_{nm}v_n'(ka) = 0$$

$$A_{nm}u_n(kb) + B_{nm}v_n(kb) = \sqrt{\varepsilon}v_n(\sqrt{\varepsilon}kb)C_{nm} \qquad (1.21)$$

$$A_{nm}u_n'(kb) + B_{nm}v_n'(kb) = C_{nm}v_n'(\sqrt{\varepsilon}kb)$$

Умовою існування ненульового рішення є рівність нулю детермінанта системи. Це дає наступні рівняння для визначення власних чисел:[8]

$$[u_n'(kb)v_n'(ka) - u_n'(ka)v_n'(kb)]v_n\left(\sqrt{\varepsilon}kb\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}[u_n(kb)v_n'(ka) - u_n'(ka)v_n(kb)]v_n'\left(\sqrt{\varepsilon}kb\right) \qquad (1.22)$$

Власні частоти $\omega_{np}=k_{np}$ c , одержані з рівняння. характеризуються в загальному випадку індексами n і p. Індекс п дорівнює числу довжин хвиль, що укладаються уздовж кутової координати, а індекс p - числу півхвиль, що укладаються уздовж радіуса між поверхнею Землі і нижньою межею іоносфери. Допускає два типи рішень. Одне з них виникає при k_{n0} a~1 , p = 0 та описує Е-коливання, довжина хвилі яких порядку розмірів земної кулі; інший k_{n0} a >> 1, p≠0 описує «поперечні» резонанси, частоти яких порядку декількох кілогерц. Загасання хвилевідного каналу Земля - іоносфера на цих частотах настільки велике (близько 20 дБ / 1000 км), що інтерференція хвиль, багаторазово огинають земну кулю, практично відсутня. Глобальні резонанси, аналогічні шуманівським, на цих частотах експериментально не спостерігалися. Для спрощення запису індекс p = 0 всюди опускаємо.

Вирази для полів n-го мода:

$$E_r^{nm} = -A_{nm}\frac{n(n+1)}{k_n r^2}\omega_n(k_n r)Y_{nm}(\theta,\varphi)e^{i\omega_n t}$$

$$E_\theta^{nm} = -A_{nm}\frac{\omega_n'(k_n r)}{r}\frac{\partial Y_{nm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}e^{i\omega_n t}$$

$$E_\varphi^{nm} = -\frac{im}{r\sin\theta}A_{nm}\omega_n'(k_n r)Y_{nm}(\theta,\varphi)e^{i\omega_n t} \qquad (1.23)$$

$$H_r^{nm} = 0$$
$$H_\theta^{nm} = \frac{im}{r\sin\theta} A_{nm}\omega_n(k_n r)Y_{nm}(\theta,\varphi)e^{i\omega_n t}$$
$$H_\varphi^{nm} = -\frac{i}{r} A_{nm}\omega_n(k_n r)\frac{\partial Y_{nm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} e^{i\omega_n t}$$

Функція

$$\omega_n(k_n r) = u_n(k_n r) - \frac{u_n'(ka)}{v_n'(ka)} \quad (1.24)$$

характеризує залежність поля від радіальної координати [9].

Власні частоти, які визначаються рівнянням, що не залежать від параметра m, що характеризує азимутально симетрію коливань. Тому одному значенню власної частоти n відповідає набір різних власних функцій, що розрізняються індексом m і залежністю від азимутальної координати (виродження за індексом m). Оскільки | m | ≤ n, то n-й резонансний рівень буде (2n + 1) -кратноє вироджений: перша резонансна частота (n = 1, m = 1; 0; 1) - трикратно, друга (n = 2, m = - 2; _- 1; 0; 1; 2) - п'ятикратно і т. д. Виродження власних частот є наслідком сферичної симетрії ізотропної і однорідної порожнини [15]. У реальному резонаторі Земля - іоносфера кутова симетрія порушена, що призводить до залежності резонансних частот від азимутального індексу. Залежно від характеру порушення симетрії зняття виродження виявляється частковим або повним.

Дослідимо рівняння (1.22) для власних частот. ННЧ діапазону ($\omega \sim 10^2 c^{-1}$) відповідають розв'язки рівняння для яких $k_n a \sim 1$.

Для однорідної ізотропної іоносфери діелектрична проникність постійно визначається співвідношенням

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - i\nu_{эф})} \quad (1.25)$$

Де $\omega_0 = \sqrt{3\,4\pi e^2 N_0/m}$ - електронна плазмова частота; N- електронна концентрація; e і m- заряд і маса електронів; $v_{эф}$ ефективна частота зіткнень електронів з іонами і нейтралями. Оскільки для нижніх шарів іоносфери ω_0 и $v_{эф}$ набагато більше ω, то $\varepsilon \sim \omega_0^2/i\,\omega v_{эф}$. Використовуючи асимптотику Беселевих функцій при великих аргументах зведемо (1.22) до виду: [20]

$$u_n'(k_n b) - \frac{u_n'(k_n a)}{v_n'(k_n a)} v_n'(k_n b) = -\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}}\left[u_n(k_n b) - \frac{u_n'(k_n a)}{v_n'(k_n a)} v_n(k_n b)\right] \quad (1.26)$$

розкладемо функції $u_n(k_n b)$ $\upsilon_n(k_n b)$, що задовольняють хвильовому рівнянню та їх похідні в ряд по малому параметру μ_n.

З точністю до квадратичних членів отримуємо:

$$F_n(k_n b) \approx F_n(k_n a)\left[1 + \frac{\mu_n^2}{2}\left(\frac{n(n+1)}{k_n^2 a^2}\right)\right] + \mu_n F_n'(k_n a)$$

$$F_n'(k_n b) \approx F_n(k_n a)\left[1 + \frac{\mu_n^2}{2}\left(\frac{n(n+1)}{k_n^2 a^2} - 1\right)\right] + \mu_n \left[\begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{k_n^2 a^2} - 1 - \\ -\frac{\mu_n n(n+1)}{k_n^3 a^3} \end{pmatrix}\right] F_n(k_n b) \quad (1.27)$$

$$(F_n = u_n(k_n b),\, v_n(k_n b))$$

Підстановка (1.26) і (1.27) значно спрощує характеристичне рівняння

$$\frac{n(n+1)}{k_n a}\frac{b-a}{a}\left(1 - \frac{b-a}{a}\right) = k_n(b-a) - iZ - \frac{iZ}{2}k_n^2(b-a)^2\left[\frac{n(n+1)}{k_n^2 a^2} - 1\right] \quad (1.28)$$

Тут $Z \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ и $\frac{b-a}{a}$ – малі величини. Нехтуючи внеском останнього доданка, розв'яжемо його відносно $k_n a$:

$$k_n a \approx \left\{ n(n+1)\left(1-\frac{b-a}{a}\right) - \frac{Z^2}{4}\frac{a^2}{(b-a)^2} \right\}^{1/2} + \frac{iZ}{2}\frac{a}{(b-a)} \qquad (1.29)$$

Розглянемо випадок коли Z = 0 (сферичний резонатор з ідеально провідними стінками). З (1.29) отримуємо

$$\omega_n = \frac{c}{a}\sqrt{n(n+1)\left(1-\frac{b-a}{a}\right)} \qquad (1.30)$$

Нехтуючи малою величиною (b-a)/a~10^{-2} приходимо до формули для власних частот резонатора з ідеально провідними стінками:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \approx \frac{c}{2\pi a}\sqrt{n(n+1)} = 10.6\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \qquad (1.31)$$

(радіус Землі в (1.31) прийнято рівним 6370 км). Підставляючи n = 1, 2, 3, 4, 5, для перших п'яти мод знаходимо значення: f_1 — 10,6 Гц; f_2 = 18,3 Гц; f_3 = 25,9 Гц; f_4 = 33,5 Гц; f_5 = 41,1 Гц [27]. Цей спектр частот зазвичай називається шуманівським. Залежність його тільки від одного розміру резонатора пояснюється тим, що електромагнітні хвилі відповідних коливань резонують за рахунок обігания навколо Землі. Їх електричне поле направлено по нормалі до поверхонь розділу і при ідеальній провідності стінок виявляється «нечутливим» до положення верхньої стінки, якщо висота зазору істотно менше радіуса кулі і довжини хвилі (в цьому випадку сферичний хвилевід подібний хвилеводу між двома нескінченно протяжними паралельними площинами). Електромагнітне поле усередині порожнини слабо залежить від радіальної координати r. У цьому легко переконатися, розкладаючи вираз для полів (1.23) в ряд по малому параметру n. Шуманівські коливання утворюють систему стоячих хвиль, що охоплюють всю земну кулю. Тому характеристики ННЧ коливань, які спостерігаються в будь-якому пункті, залежать від стану

іоносфери над усіма іншими частинами земної кулі. Отже, вивчення резонансних коливань дозволяє визначати глобальні параметри іоносфери, що характеризують її стан в цілому [28]. Експериментально спектр резонансних частот вперше був експериментально визначений Бальсером і Вагнером в 1960р. Вони виявили резонансні максимуми природного електромагнітного шумового фону. На рис. 1.1 представлений характерний енергетичний спектр компоненти E_r на якому чітко видно максимуми, що відповідають першим п'яти модам власних коливань для найпростішого сферичного, об'ємного резонатора рис 1.2 [27].

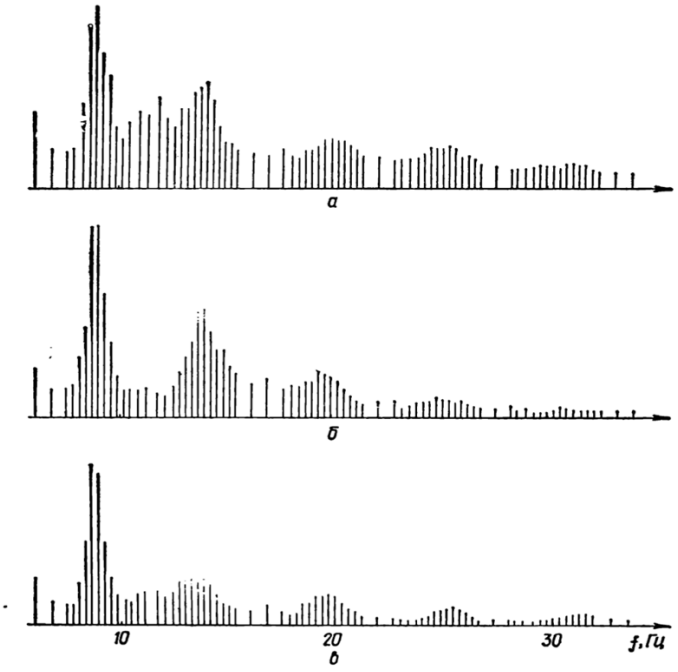


Рис.1.1 Приклади енергетичних і взаємних спектрів ННЧ сигналів:
а, б спектри сигналів прийнятих в Харкові і в Улан-Уде; в - взаємний спектр цих сигналів [7]

Цікаво порівняти резонансні частоти, розраховані за формулою (1.31), з тими, що спостерігаються експериментально [31].

Експериментальні значення власних частот, отриманих узгоджуються. У той же час вони істотно нижче частот, що визначаються виразом (1.31). Ця розбіжність пов’язана з тим,, що при розрахунку не було враховано вплив кінцевої провідності іоносфери. Шуман в наступних роботах уточнив

значення декількох перших резонансних частот з урахуванням кінцевої провідності і показав, що її вплив зменшує величину власних частот в порівнянні з частотами ідеального резонатора.

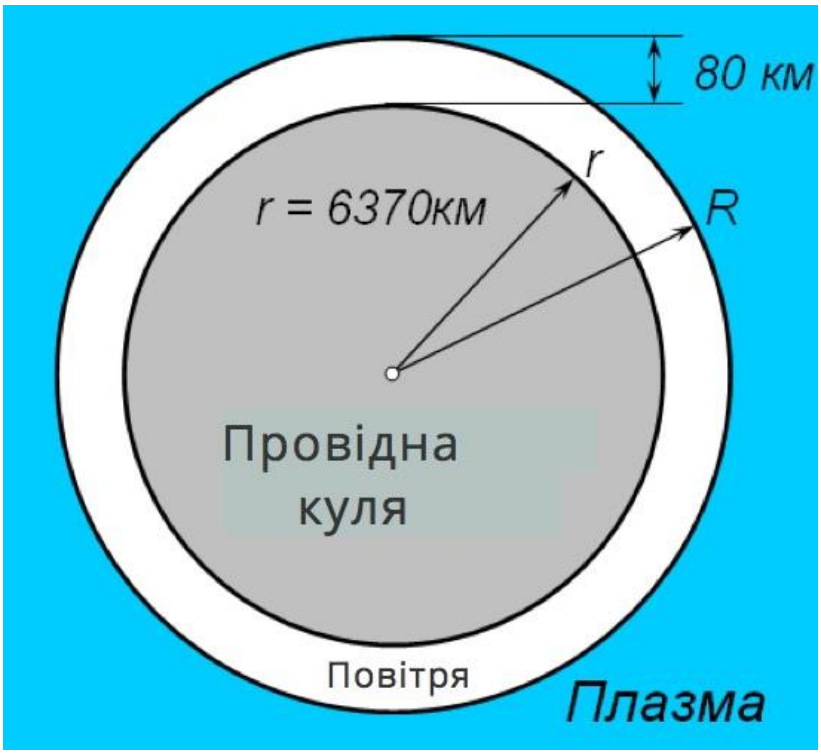


Рис 1.2 Найпростіша модель сферичного об'ємного резонатора

Наступна за складністю з моделей, що використовувалися - двоступенева, має чотири вільних параметра (висоти h_1, h_2 і діелектричні проникностіϵ_1, ϵ_2) [36]. Її можливості значно ширше: підібравши значення h_1, h_2, можна досягти згоди розрахункових значень f_n Q_n, що спостерігаються для кількох перших мод. Ясно, що чим більше вільних параметрів міститься в моделі, тим більше число резонансів буде правильно описано з її допомогою. У цьому сенсі кращими є сферично шаруваті моделі з безперервною залежністю (r), по можливості відповідної «істинного» розподілу в іоносфері. Вибір апроксимуючої функції (r) пов'язаний з можливістю розв’язання хвильового рівняння, а наскільки хороша обрана апроксимація - судять за випадковим збігом результатів розрахунку з експериментом. У цьому сенсі вдалою моделлю виявився експонентний профіль (r), досліджений Дж. Галежем.

Власні коливання порожнини у разі плавного висотного профілю описуються розв'язками системи рівнянь Максвелла. Можна показати, що в сферично шаруватій іоносфері Е- і Н-хвилі незалежні. Тому, вважаючи $H_r = 0$, введемо, електричний потенціал $U_т$:[8]

$$H_\varphi = -ik\sqrt{\epsilon\ (\mathrm{r})}\ \frac{dU}{d\theta} \tag{1.32}$$

Всі інші компоненти поля виражаються через U співвідношеннями:[11]

$$\begin{gathered} E_r = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\varepsilon(r)} - \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{\varepsilon(r)}rU\right] + \sqrt{\varepsilon(r)}k^2 rU \\ E_\theta = \frac{1}{r\varepsilon(r)}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(\sqrt{\varepsilon(r)}r)U \\ E_\varphi = \frac{1}{r\varepsilon(r)\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(\overline{\varepsilon(r)}rU) \\ H_\theta = \frac{ik\sqrt{\varepsilon(r)}}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\ , H_r = 0 \end{gathered} \tag{1.33}$$

1.4 Комбінована неоднорідність

Розглянемо розщеплення власних частот (рис 1.3) при спільному впливі полярної неоднорідності і переходу «день - ніч». Вісь θ = 0 направимо на полюс, а початок відліку азимутального кута виберемо так що б

$$Z = \begin{cases} Z_{01} & \text{при } 0 \le \varphi \le \pi \\ Z_{02} & \text{при } \pi \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \tag{1.34}$$

де

$$Z_i = Z_{0i}\left[1 + \sqrt{1 + \rho_i^2\cos^2\theta}\right]^{1/2} \tag{1.35}$$

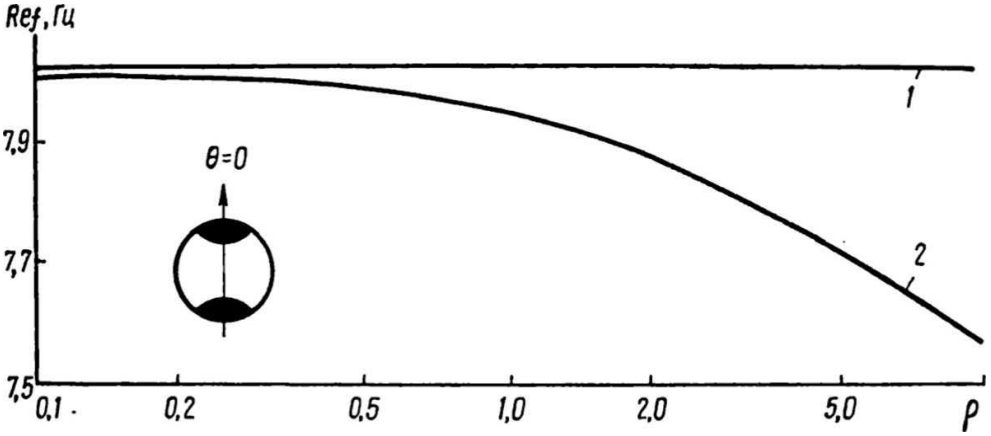


Рис 1.3. Залежність величини розщеплення резонансної частоти першої моди від параметра р в моделі полярної неоднорідності [6]

Можна показати, що в обраній системі координат характеристичне рівняння приводиться до наступного вигляду:

$$D = \Delta_1 \Delta_2 = 0 \qquad (1.36)$$

Тут Δ_i - визначники нескінченних матриць:

$$|\Delta_1| = \begin{matrix} (\omega_1^2 - \omega^2) + i\omega c\Lambda_{1010} & i\omega c\Lambda_{1021} & i\omega c\Lambda_{102-1};\ \ldots\ldots\ldots \\ i\omega c\Lambda_{2110} & (\omega_2^2 - \omega^2) + i\omega c\Lambda_{2121} & i\omega c\Lambda_{212-1};\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \end{matrix} \qquad (1.37)$$

$$|\Delta_2| = \begin{matrix} (\omega_2^2 - \omega^2) + i\omega c\Lambda_{1111} & i\omega c\Lambda_{111-1} & i\omega c\Lambda_{1120};\ \ldots\ldots\ldots \\ i\omega c\Lambda_{1-111} & (\omega_2^2 - \omega^2) + i\omega c\Lambda_{1-11-1} & i\omega c\Lambda_{1-120};\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \end{matrix} \qquad (1.38)$$

Чисельні оцінки показують, що додавання неоднорідності типу «день - ніч» до полярної в лінійному наближенні по импедансу майже не змінює результат [12].

1.5 Зв'язок спектра власних частот резонатора Земля - іоносфера з його симетрією

У нульовому наближенні іоносфера вважається нескінченно провідною, і незбурені поля n-ї моди коливань задовольняють хвильовому рівнянню

$$\Delta u_n + k_n^2 u_n = 0 \tag{1.39}$$

з граничними умовами

$$\frac{\partial}{\partial r} u_n = 0 \text{ на S} \tag{1.40}$$

Симетрія обмежувальної поверхні S визначається тими переміщеннями, які суміщують резонатор сам з собою. Сукупність усіх перетворень симетрії утворює групу симетрії поверхні S, яку позначимо через S. Для сфери група S складається з поворотів і відображень, які є, таким чином, елементами S. Кожному елементу групи можна зіставити певне перетворення системи координат. Відповідний оператор позначимо $\hat{s}$ [10].

Подіємо оператором на рівняння і граничні умови, враховуючи,.що Δ і $\hat{s}$ коммутують один з одним

$$\Delta(\hat{s}u_n) + k_n^2(\hat{s}u_n) = 0 \tag{1.41}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\hat{s}u_n) = 0 \text{ на } \hat{s}S \equiv S \tag{1.42}$$

Власному значеню k_n відповідає не лише функція u_n але і s_n задовольняє тим же граничним умовам на колишній межі S. Отже, n-й рівень є виродженим. Ці міркування базуються на тому, що оператор S не змінює межі резонатора. Іншими словами, виродження є наслідком симетрії резонатора.

Замінимо нульові граничні умови на імпедансні:

$$\frac{\partial u_n}{\partial r} = \hat{Z} u_n \qquad (1.43)$$

Результат дії $\hat{s}$ залежить тепер від властивостей симетрії тензора $\hat{Z}$. Якщо групи симетрії $\hat{s}$ і $\hat{Z}$ однакові, то $\hat{s}$ не змінює $\hat{Z}$ і умова набуває вигляду

$$\hat{Z}(\hat{s} u_n) = \frac{\partial}{\partial r}(\hat{s} u_n) \qquad (1.44)$$

Ми знову отримуємо нову власну функцію $\hat{s}u_n$ при незмінному власному значенні k_n тобто, збурення з тією ж групою симетрії, що і симетрія форми резонатора, не знімає виродження. Якщо ж симетрія збурення $\hat{Z}$ нижча, ніж $\hat{s}$, то тільки частина операторів $\hat{s}$ (позначимо їх $\hat{s}_z$) комутує з $\hat{Z}$. Тому вже менше число власних функцій буде відповідати k_n Таким чином, збурення більш симетрії знижує порядок виродження.

Для того щоб перейти від цих якісних міркувань до визначення конкретної схеми розщеплення виродженого рівня, необхідно звернутися до так званих уявленнь груп симетрії. Як вказувалося, оператор перетворює u_n в нову власну функцію $\hat{s}u_n$, що відповідає тому ж самому власному числу k_n, тобто, дія зводиться до деякого лінійного перетворення в базисі функцій u_{nm} (m - індекс підрівня): [6]

$$\hat{s} u_{nm} = \sum_{l=1}^{i} S_{ml} u_{nl} \qquad (1.45)$$

Сукупність матриць S_{ml}, що відповідають усім елементам групи S, утворює її зображення. Сума діагональних елементів називається характером зображення і поряд з розмірністю зображення грає важливу роль у визначенні структури спектра. Розглянемо деяке зображення розмірності j. Може

виявитися, що в результаті лінійного перетворення функції базису u_{nm} розбиваються на кілька наборів по $j_1, j_2 \ldots$ ($j_1 + j_2 .. = j$) функцій так, що при впливі всіх елементів групи S функції кожного набору перетворюються лише один через одного. Якщо ж число функцій, що перетворюються одна через одну, зберігається за будь-яких лінійних перетворень, то зображення називається неприводним. Прикладом неприводного зображення є зображення групи сферичної симетрії на базисі функцій u_{mn}, $P_n^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}$ (m == — n, — n+1...n). Дійсно, при поворотах навколо різних осей і відображеннях в центральних площинах виникають лінійні комбінації всіх функцій u_{mn} і ніяких відокремлених наборів виділити не можна. Будь-яке звідне зображення може бути розкладене на незвідні зображення. Для цього достатньо так вибрати функції базису, щоб матриця S_{ml} стала квазідіагональною. Структура матриці показує, як відбувається розбиття на незвідні зображення. Видно, що функції першого набору (число їх j_1) перетворюються по незвідному зображенню S_{ml}^1 функції другої групи-по S_{ml}^2 и т. д.

$$\begin{vmatrix} S_{ml}^{(1)}\ \text{матриця порядку}\ j_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_{ml}^{(2)}\ \text{матриця порядку}\ j_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_{ml}^{(3)}\ \text{матриця порядку}\ j_3 \end{vmatrix}$$

Зауважимо, що сума характерів $\chi^{(p)}$ незвідних зображень дорівнюєхарактеру вихідного звідного зображення:

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} + \cdots + \chi^{(r)} \qquad (1.46)$$

Достатньо визначити характери всіх тих елементів S_z, що є загальними для груп S і Z і розкласти на суму (1.46). Після цього кожен з доданків вкаже відповідні незвідні зображення групи Z. Справа в тому, що симетрія

розглянутих вище моделей іоносфери настільки проста, що вдається визначити всі незвідні зображення групи Z, без обчислення характерів. З точки зору симетрії моделі іоносфери можна розбити на три класи, які відповідають різним схемам розщеплення власних частот.

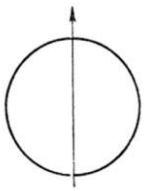
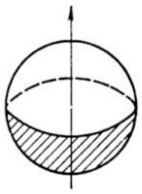
Модель резонатора Земля- іоносфера	Модель	Симетрія	Виродження власних частот
	Ідеальний резонатор абоодноріднаізотропна іоносфера	Сферична	2n+1 - кратне
	Неоднорідність "день-ніч"	Аксіальна	ω_{n0} не вироджена ω_{nm} двократно вироджена

Рис 1.4 Неоднорідність "день-ніч" [13]

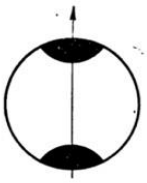
	Неоднорідність "полярні шапки"	Аксіальна	ω_{n0} не вироджена ω_{nm} двократно вироджена
	Комбінована неоднорідність		Всі частоти не вироджені

Рис 1.5 Полярна неоднорідність [13]

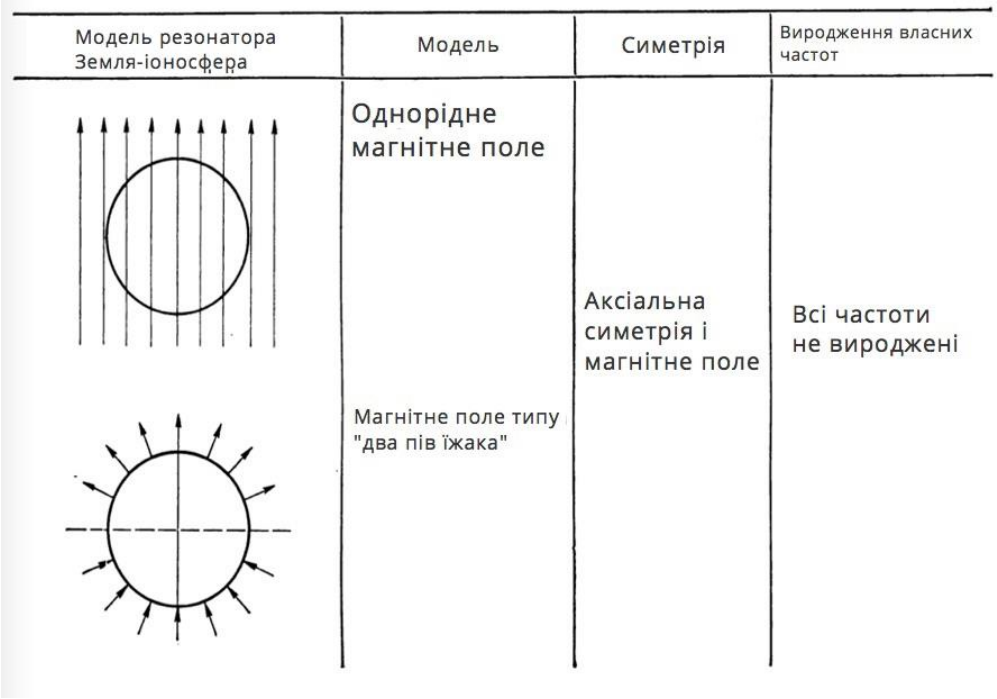


Рис.1.6 Неоднорідність в зовнішньому магнітному полі [13]

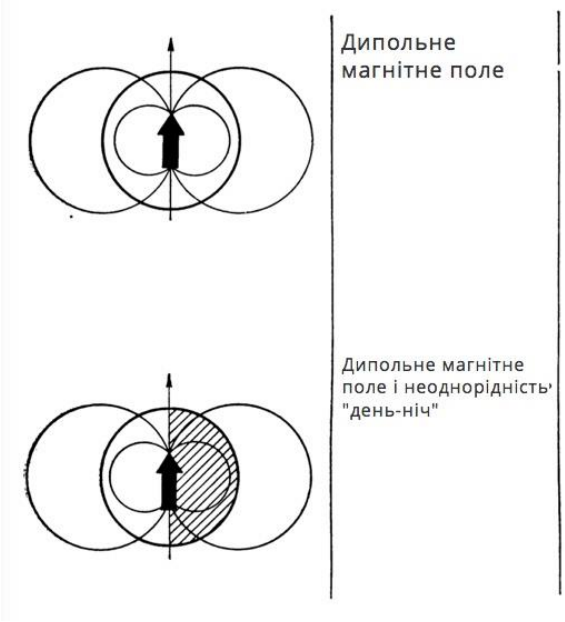


Рис.1.7 Неоднорідність при дипольному магнітному полі [13]

Будь-яка зі згаданих неоднорідностей рис 1.4-1.7 окремо є аксиальною, однак осі симетрії у них різні. Тому комбінована неоднорідність має більш низькою симетрією, що призводить до подальшого (в порівнянні з аксіальної симетрією) зняттю виродження. Зокрема, резонансна частота першого мода розщеплюється не на два, а на три підрівня. Визначення структури спектра

резонатора далеко, не вичерпує всіх можливостей теорії симетрії. З її допомогою можна, наприклад, знайти правильні функції нульового наближення, для яких матриця збурення діагональна або складається з Жорданових блоків. При цьому порядок характеристичного рівняння знижується, що має суттєве значення при знаходженні резонансних частот. Теорія симетрії виявляється корисною і при розгляді вимушених коливань, коли відома симетрія збуджувальних струмів [21].

1.6 Чисельні методи опису резонансів Шумана

Парадоксальна ситуація склалася в дослідженнях глобального електромагнітного (Шуманівського) резонансу. При оцінці власних значень резонансу використовувалася модель для сферичного діелектричного шару між двома ідеально провідними границями. Після експериментального виявлення резонансу на частотах 8, 14, 20 і 26 Гц з добротністю близько 4-5 основні зусилля були спрямовані на розробку моделей резонаторів, які передбачають реалістичні спектри і імпульсні форми хвиль, що отримують від потужних поштовхів. Застосуємо модель рівномірної провідності повітря, що адекватно описує порожнину Земля-іоносфера і одночасно підтримує плавний перехід з прошарку з реальною іоносферою в резонатор, обмежений ідеально провідними стінками. Провідність повітря експоненціально зростає з висотою (висота шкали ζ). Іоносферний вплив на поширення радіохвиль моделюється з використанням двох характерних висот. Нижня висота позначається як h_0. Тут струм провідності стає рівним струму зсуву на даній частоті $\omega = 2\pi f$:

$$\sigma(h_0) = \varepsilon_0 \omega \qquad (1.47)$$

де ε_0 - проникність вільного простору [37].

Електричне поле що падає, проникає в іоносферну плазму до висоти h_0. Друга, більш висока характеристична висота називається «магнітною висотою» h_1, що пояснює дифузію магнітного поля в плазму. Ця висота оцінюється через постійний профіль висоти шкали [38]. У цьому випадку обидві характерні висоти знаходяться з наступних рівнянь:

$$h_0 = G + \zeta \cdot \ln(f/f_G) \tag{1.48}$$

$$h_1 = h_0 - 2\zeta \cdot \ln(2k\zeta) \tag{1.49}$$

Тут G та f_G - еталонна висота і опорна частота профілю, f - частота сигналу, k - число вільних хвиль. Контрольну висоту і опорну частоту визначають за профілем провідності за допомогою рівняння (1.47). Надалі, будемо вважати G = 55 км і = 8 Гц. Висота шкали ζ буде вільним параметром задачі.

Електромагнітне поле в порожнині Земля-іоносфера характеризується наступною постійної поширення [39]:

$$v(v+1) = \frac{h_1 + i\zeta\pi/2}{h_0 - i\zeta\pi/2}(kR_3)^2 \tag{1.50}$$

З даного рівняння легко отримати:

$$v(f) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{h_1(f) + i\zeta\pi/2}{h_0(f) - i\zeta\pi/2}(kR_3)^2} - \frac{1}{2} \tag{1.51}$$

Тут слід зазначити, що рівняння (1.50) - (1.51) при ζ = 0 призводять до власних частот ідеальної порожнини Земля-іоносфера, які були отримані В. О. Шуманом у 1952-1954 рр. [35].

Підхід, заснований на одномасштабному профілі, є найпростішим. Були розроблені більш складні модельні профілі для докладного опису земного і

позаземного електромагнітного резонансу. Останнім часом часом були запропоновані прямі алгоритми в розрахунках поширення радіохвиль в середовищах зі складною діелектричної сталою [41]. Таке моделювання вимагає значних обчислювальних ресурсів, хоча перехід не завжди можливий для ідеальної порожнини.

Рівняння (1.50) - (1.51) дозволяють отримати параметр поширення ν (f) для довільного експоненціального профілю. Ці співвідношення використовувалися для побудови ліній Re [ν] = const. Товсті похилі лінії демонструють ці криві на рис. 1.8. Кожен рядок відповідає окремому режиму коливань, що задовольняє умові Re [ν] = 1, Re [ν] = 2, Re [ν] = 3 і т. д. Ці «модальні» лінії накладаються на двовимірний профіль амплітудних спектрів шуманівского резонансу, які спостерігаються в компоненті вертикального електричного поля. Графік був побудований для джерел (гроз), рівномірно розподілених по земній кулі.

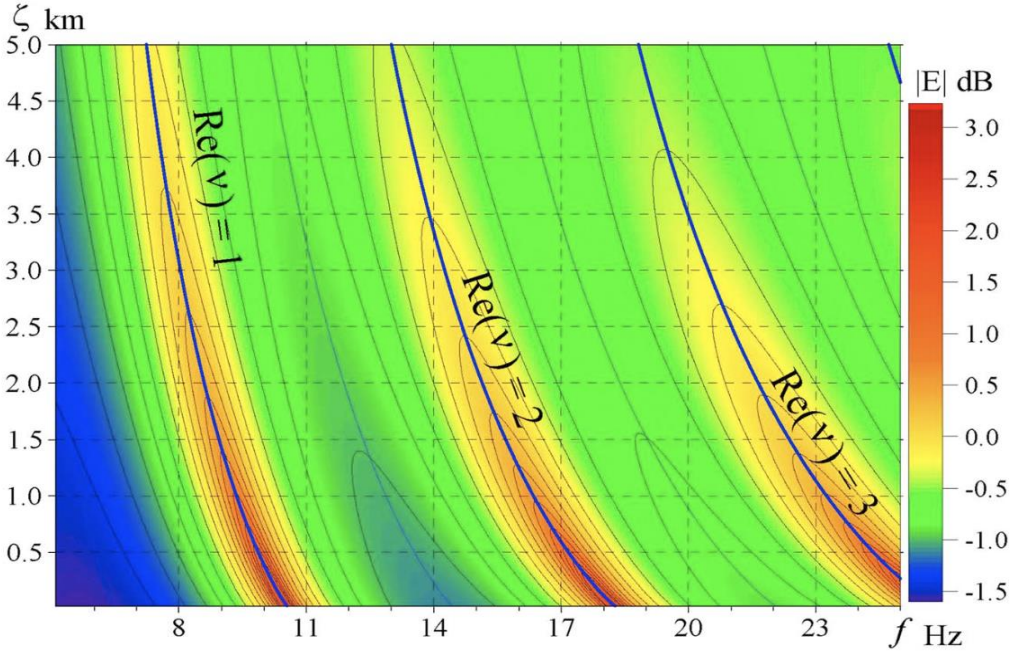


Рис. 1.8. Двовимірний амплітудний профіль резонансної амплітуди Шумана над площиною висот частотної шкали, коли джерела поля рівномірно розподілені по земній кулі. [39]

Амплітуда поля показана кольором в дБ. Лінії однакових амплітуд також показані, і їх контур нагадує параболічні криві. З цього рисунка можна бачити, що резонансні піки стають більш різкими, і їхнє положення зміщується в бік резонансних частот Шумана, коли висота шкали ζ наближається до нуля. Пікові частоти 8, 14 і 20 Гц, що дійсно спостерігаються, відповідають висотам шкали від 3 до 3,5 км.

Вертикальні розряди блискавки є природними джерелами випромінювання, які ми можемо розглядати як точковий вертикальний електричний диполь, що випромінює дельта-імпульс. В цьому випадку спектр потужності вертикального електричного поля в довільних одиницях розраховується за формулою [39]

$$< |E|^2 >= \left|\frac{\nu(\nu+1)}{\omega}\right|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)}{|n(n+1)-\nu(\nu+1)|^2} \qquad (1.51)$$

де n = 1, 2, 3 и т. д. – резонансні моди Шумана.

Спектри потужності, показані на рис. 1.8 , для набору висот від 25 м до 5 км. На рис 1.8 показано, що для висоти шкали 25 м (коли провідність збільшується на порядок, зі зміною висоти на 60 м) резонансні піки знаходяться практично на частотах ідеальної порожнини. Нижня межа іоносфери стає дифузійною при збільшенні ζ і тоді спостерігається зменшення пікових частот.

Для пояснення частотної залежності параметрів, що беруть участь в наших розрахунках, на рис 1.9 зображені функції h_0 (f) і h_1 (f) і відповідні функції Re [ν (f)] і Im [ν (f)] для двох масштабів висоти. Рисунок 2 (ліворуч) відображає електричну і магнітну висоти для ζ = 0,025 км (криві з точками) і ζ = 3 км (криві з зірочками). Можна бачити, що функція h_0 (f) зростає з частотою, а h_1 (f) зменшується. Характерні висоти збільшуються зі збільшенням висоти шкали.

Як показано на рис 1.9 (праворуч), дійсна частина постійної поширення залишається приблизно однаковою, навіть коли ζ збільшується з 25 до 3 км. Це, однак, не знімає залежності швидкості поширення на ζ, як показано нижче. Зміни ефективної висоти порожнини виразно змінюють амплітуду поля для амплітуди фіксованого джерела.

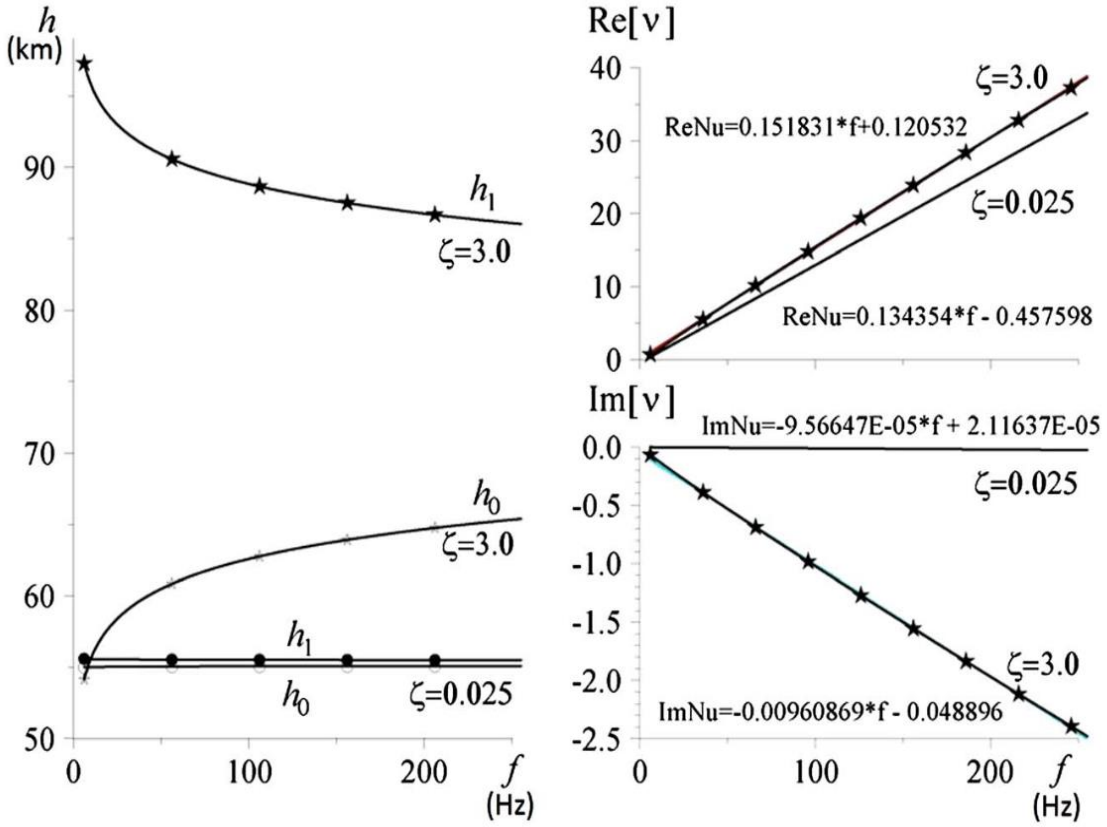


Рис. 1.9 Зміна частоти характеристичних висот (зліва) і постійної поширення (праворуч) для іоносферних профілів з різною висотою (ζ = 3,0 і 0,025 км). [40]

На рис. 1.9 (праворуч) показані комплексні дисперсійні характеристики ν (f) резонатора. На рис 1.9 (праворуч, зверху) зображені функції Re [ν (f)], а на рис. 1.9 (праворуч, внизу) показано поведінку Im [ν (f)]. Гладкі лінії тут відповідають випадку різко обмеженої іоносфери (ζ = 25 м), коли втрати в порожнині дуже малі. Лінії з зірочками відповідають характеристиці «реалістичної» моделі порожнини з висотою шкали 3 км. Можна помітити, що є певні зміни в фазовоїшвидкості, викликані змінами в профілі іоносфери.

Зміни помітно більш виражені в швидкості загасання хвилі (рис. 1.9, праворуч, внизу). Це стає очевидним в загальних рисах спектрів потужності електромагнітних полів.

Загальна схема резонансних спектрів в компонентах як електричного, так і магнітного полів залежить від відстані між джерелом і спостерігачем [40].

Ця залежність широко використовується для оцінки відстані до потужного розряду блискавки, що викликає ЕРС. Загальні зміни амплітудних спектрів обумовлені інтерференцією прямих і навколосвітніх імпульсів, що надходять до спостерігача з відповідними затримками. Останнє залежить від відстані джерело-спостерігач D. Очевидно, резонансні пікові частоти змінюються при зміні властивостей нижньої іоносфери. Представляє інтерес з'ясувати,, яким чином амплітудні спектри змінюються в порожнинах, обмеженими різними частинами іоносфери. Такі порівняння були зроблені хоча і у відносно вузькому діапазоні ефективних параметрів іоносфери, оскільки метою було зіставлення даних що спостерігаються, з результатами модельних розрахунків.. Спектри і відповідні форми хвиль залишалися невідомими для порожнин, утворених різко обмеженою іоносферою [38].

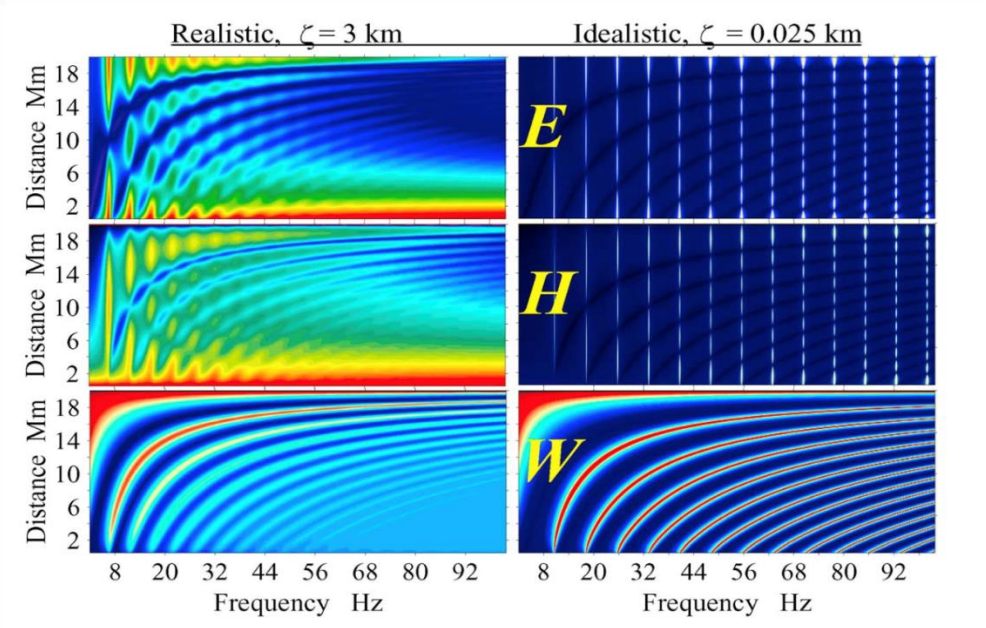


Рис 1.10 Амплітудні спектри компонент поля E і H і хвильовий опір W на площині частотної відстані в реалістичній (ліворуч) і ідеалістичній (праворуч) [40].

На рис 1.10 (ліворуч) представлений нормальний розподіл поля і амплітуди хвильового імпедансу в порожнині Земля-іоносфера [36]. При першому резонансному режимі Шумана (f = 8 Гц) відстань 10 мкм відповідає вузлу в вертикальному електричному полі і максимуму в горизонтальному магнітному полі. Обидва вони добре видні на рисунку 1.10. Видно, що вузли електричного поля завжди відповідають гребеням амплітуди магнітного поля і навпаки: вузли компоненти горизонтального магнітного поля знаходяться там, де вертикальне електричне поле має максимум. Таким чином, кумулятивна потужність електромагнітного поля залишається постійною в порожнині.

В даний час тема резонансів Шумана привертає увагу дослідників не тільки в плані їх теоретичного опису, але і в зв'язку з можливістю практичного застосування. Чисельні методи опису таких резонансів, засновані на представленні їх у вигляді стоячих хвиль в іоносфері Землі, дають порівнянне з реальними даними результати.[36]

У практичному плані резонанси Шумана можуть бути використані для передачі електричних сигналів на великі відстані. Вони тісно пов'язані з глобальною грозовою активністю Землі, і, отже, можуть бути інструментом для вивчення клімату. Резонанси Шумана можуть бути також залучені для вивчення змін в нижній іоносфері Землі, прогнозування землетрусів, дослідження властивостей інших небесних тіл. [37]

Резюмуючи вищевикладене, можна констатувати, що практичне вирішення проблеми бездротової передачі електрики на великі відстані, не дивлячись на досить ґрунтовну теоретичне опрацювання питання, знаходиться в близькому до первісного стані. Тому в наступному розділі запропонована фізична, максимально наближена до умов експерименту Тесли, модель збудження резонансних коливань заряду Землі. За допомогою запропонованої моделі виконані оцінки резонансних частот в високочастотій і наднизькочастотній областях хвильового спектру.

2. Теоретична модель

2.1 Бездротова передача електроенергії

Розглянемо модель для здійснення бездротової передачі електрики. У цій моделі в рівноважному стані Земля являє собою жорстку ідеально провідну сферу радіусом $R_E = 6.371 \cdot 10^6$ м, на якій рівномірно розподілений негативний заряд. Рівноважний стан на увазі відсутність руху зарядів на сфері, рис 2.1. Припущення про ідеальну провідності сфери грунтується на досить високої провідності грунту. Висока провідність грунту неодноразово продемонстрована в експериментах Тесли, а також підтверджується його використанням для заземлення різних електротехнічних пристроїв [42].

Оцінки заряду Землі за різними джерелами дають величину, наприклад, $q_E = -5.7 \cdot 10^5$ Кл, або $q_E = -6 \cdot 10^5$ Кл. При розрахунках в рівноважному стані будемо моделювати Землю ідеально провідної жорсткої сферою з поверхневим зарядом $\sigma_E = Q_E / 4\pi R_E^2$, взявши за основу заряд Землі $Q_E = -6 \cdot 10^5$ Кл. У рівноважному стані з теореми Гаусса випливає, що для радіусів $r > R_E$ напруженість електричного поля дорівнює $E_E(r) = \frac{Q_E}{r^2}$. Відповідний цьому полю потенціал задається виразом $\varphi_E(r) = \frac{Q_E}{r^2}$.

Викликані ззовні обурення заряду на сфері $q(r,t) = q(r,t) - Q_E$, призводять до появи обуреного скалярного потенціалу $\varphi(r,t) = \varphi(r,t) - \varphi_E(r)$,
і відповідної збуреної щільності струму $j(r,t)$.

Визначимо зв'язок обуреного заряду з обуреним потенціалом, яка реалізувалася в експериментах Тесли. У цих експериментах обурений заряд створювався перенесенням частини заряду Землі, яку в спрощеному вигляді можна представити сферичним конденсатором ємністю C_E та повним зарядом Q_E , на приєднаний до нього сферичний конденсатор зі значно меншою ємністю C_{Sp} ($C_{Sp} << C_E$) та зарядом Q_{Sp}.

Сферичні конденсатори ємністю C_{Sp} і C_E з'єднані в батарею паралельно, тому що негативні обкладки конденсаторів приєднані до одного контакту.

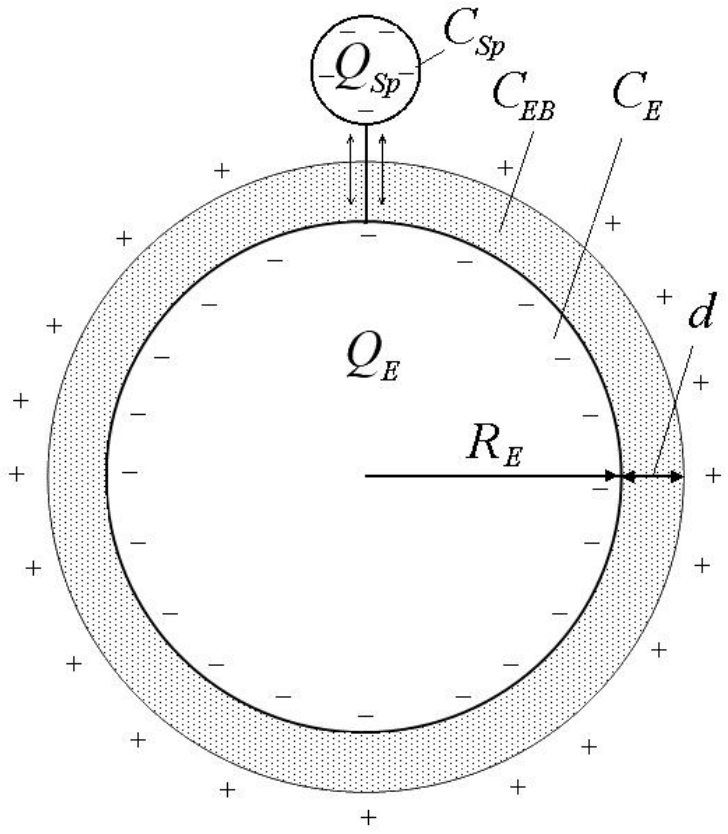


Рис. 2.1 Схематичне зображення експерименту Тесли.
Сферичні конденсатори ємністю C_E (Земля) та C_{Sp} (ємність конденсатора у експерименті Тесли) з'єднані в батарею паралельно. Ємність C_{Sp} показана в збільшеному вигляді. Насправді вона знаходиться всередині прошарку товщиной d.

При паралельному з'єднанні конденсаторів загальний заряд постійний і дорівнює Q_E, а різниця потенціалів на конденсаторах однакова, тобто справедливі вирази:

$$\frac{q(r,t)}{C_{Sp}} = \varphi_E(R_E) + \varphi(r,t)$$

(2.1)

$$\frac{Q_E - q(r,t)}{C_E} = \varphi_E(R_E) + \varphi(r,t)$$

З другого рівності (2.1) випливає зв'язок обуреного заряду з обуреним потенціалом: $q(r,t) = -C_E\varphi(r,t)$.

Залежність збурень скалярного $\varphi(r,t)$ та векторного $A(r,t)$ потенціалів від збурень густини заряду і щільності струму на сфері з ємністю C_E описується рівняннями Даламбера

$$\Delta\varphi(r,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\varphi(r,t) = -4\pi\rho$$

$$\Delta A(r,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,A(r,t) = -\frac{4\pi}{c}j(r,t) \qquad (2.2)$$

з умовою калібрувальної інваріантності:

$$divA(r,t) = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\varphi(r,t)$$

де

$$\rho(r,t) = \rho(r,t) - \rho_E,\ \rho(r,t) = q(r,t)/V_E,\ \rho(r,t) = q(r,t)/V_E,\ \rho_E = Q_E/V_E,$$

V_E - об'єм Землі, c - швидкість світла, Δ - оператор Лапласа, t – час, r - просторова координата.

Рішення рівнянь (2.2) повинні задовольняти умові обмеженості потенціалів на нескінченності: $|\varphi(r,t),\ A(r,t)| = O(1/r)$ при $r \to \infty$, а також їх обмеженості на поверхні сфери: $|\varphi(r,t),\ A(r,t)| < \infty$ при r = R_E

З калібрувальної інваріантності випливає, що в умовах експериментів Тесла обурений векторний потенціал A(r,t) одного порядку з обуреним скалярним потенціалом, тому що $|A(r,t)/\varphi(r,t)| \approx \lambda_0\omega_0/c = 1$.

Тому при розгляді завдання бездротової передачі електрики необхідно описувати, поряд зі зміною в просторі і часі скалярного потенциалу $\varphi(r,t)$, просторово-тимчасова зміна векторного потенціалу $A(r,t)$.

З рівняння безперервності і умови калібрувальної інваріантності, з урахуванням $\rho(r,t) = -C_E\varphi(r,t)/V_E$, можна показати, що $j(r,t) = -c \cdot C_E \cdot$

$A(r,t)/V_E$. Виходячи з симетрії завдання, векторний потенціал має тільки радіальну складову, тобто $A(r,t) = (A(r,t), 0, 0)$

Тому рівняння для радіальної проекції векторного потенціалу перетвориться до виду:

$$\Delta A_r(r,t) - -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} A_r(r,t) = 4\pi \mathrm{C}_E \cdot A(r,t)/V_E \qquad (2.3)$$

Таким чином, в результаті використання знайдених вище зв'язків між обуреними потенціалами і збуреннями зарядів, рівняння (2.2) можна представити у вигляді:

$$\Psi(r,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(r,t) = 4\pi \mathrm{C}_E \cdot \Psi(r,t)/V_E \qquad (2.4)$$

де - $\Psi(r,t) = \{\varphi(r,t\,),\ A(r,t)\}$ - функція, яка приймає значення або першого, або другого виразу в фігурних дужках, $|\Psi(r,t)| = O(1/r)$ при $r \to \infty$,

$|\Psi(r,t)| < \infty$ при r = R_E.

Обурені напруженості електричного і магнітного полів визначаються простим диференціюванням скалярного і векторного потенціалів:

$$H(r,t) = \mathrm{rot}\, A(r,t),\ E(r,t) = -\mathrm{grad}\,\varphi(r,t) - c^{-1}\,\partial A/\partial t\,.$$

2.2 Рішення для збуреного електричного потенціалу

Розглянемо рівняння (2.4) для обуреного електричного потенціалу зарядженої жорсткої сфери $\varphi(r,t\,)$ за умови $|\varphi(r,t)| < \infty$.

Вважаємо його залежність від часу у вигляді $\varphi(r,t\,) = \varphi'(r) \cdot \exp(-i\omega_0 t)$.

Тоді рівняння (2.4) для електричного потенціалу перетворюється в рівняння Гельмгольца для обуреного потенціалу:

$$\Delta\varphi'(r) + k^2\varphi'(r) = 0 \qquad (2.5)$$

де $k^2 = \frac{\omega_0}{c^2} - \frac{4\pi C_E}{V_E} = \frac{\omega_0^2}{c^2}\varepsilon(\omega_0), \varepsilon(\omega_0) = (1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega_0^2})$

$\Omega_e = \sqrt{4\pi c^2 C_E/V_E} \approx 81.189$ Гц - аналог Ленгмюровскої частоти коливань електронів сфери, знак штрих в позначенні обуреного потенціалу далі опускаємо. Слід зазначити, що частота Ω_e розрахована для ідеально провідні кулі, що знаходиться у вакуумі, коли C_E=R_E.

У реальності, Землю можна уявити конденсаторної батареєю, що складається з двох вкладених одна в іншу сфер, між якими знаходиться прошарок з діелектричноюр поникністю $\varepsilon(\omega_0)$ і товщиною d << R_E . Ємність такої конденсаторної батареї буде дорівнювати $C_{EB} = \varepsilon(\omega_0)S_E/4\pi d$, де $S_E = 4\pi R_E^2$ - площа поверхні Землі. Дане уточнення щодо ємності Землі не впливає на хід подальших міркувань, але буде використано нижче для прив'язки отриманих теоретичних уявлень до експериментальних даних.

Рішення рівняння (2.5) для обуреного скалярного потенціалу $\varphi(r, t)$, має вигляд:

$$\varphi(r, \theta, \varphi) = B_1(kr)^{-1/2}\ J_{n+1/2}(kr)P_{n,m}(x)\cos m\varphi \qquad (2.6)$$

де B_1 - константа, яка визначається з граничних умов для залежності рішення від радіуса; $x = cos\theta$; m =0,1,2,3… та n =0,1,2,3… цілі числа ($m \le n$);

$P_{n,m}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{2^n n!}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\left[(x^2-1)^n\right]$ - приєднані

поліноми Лежандра.

Приєднані поліноми Лежандра характеризуються такими властивостями:
де $P_n(x)$ - поліном Лежандра порядка n.

$$P_{n,0}(x) = P_n(x)\,, \qquad m = 0$$
$$P_{n,m}(x) = 0\,, \qquad m > n$$

2.3 Рішення для скалярного потенціалу. Прив'язка до умов експерименту Тесли

Рішення (2.6) має задовольняти граничним умовам на поверхні сфери. Виходячи з проведених Теслой в Колорадо-Спрінгс дослідів, випливає, що обурення заряду Землі схематично можна описати таким чином: до певної точки провідної сфери (Земля) ємністю C_E одним кінцем приєднувався провідник. До другого кінця цього провідника довжиною $l \ll R_E$ приєднувався конденсатор ємністю C_{Sp}. За допомогою трансформатора власної конструкції Тесла перекладав певну частину заряду на конденсатор C_{Sp} , а потім знову накачував його на конденсатор C_E . Таким чином, в певні моменти часу роботи трансформатора в заданій точці на поверхні сфери C_E задавався потенціал:

$$\varphi(R_E, \theta_0, \varphi_0\,) = \Phi_0 \qquad (2.7)$$

де Φ_0 - амплітуда, що задається в експерименті Тесла потенціалу - ($|\Phi_0 \ll Q_E/R_E \approx 10^9$ В|). На підставі граничної умови (2.7) константа в вираженні для обуреного потенціалу на поверхні Землі (2.6) в точці з кутовими координатами, наприклад, $\theta_0 = 0, \varphi_0 = 0$ визначається виразом:

$$\mathrm{B}_1 = \frac{\sqrt{kR_E}}{J_{1/2}(kR_E)} \qquad (2.8)$$

Таким чином, рішення (2.6) з константою (2.8) описує розподіл обуреного електричного потенціалу на поверхні Землі.

Слід зазначити, що завдання координати точки прикладання обуреного потенціалу на поверхні Землі автоматично визначається положенням полюса сферичної системи координат: $r = R_E\ , \theta_0 = 0, \varphi_0 = 0.$

З вигляду граничної умови (2.7) випливає, що в рішенні (2.6) необхідно покласти m=0. В цьому випадку обурений потенціал описується поліномами Лежандра і не залежить від азимутального кута φ.

2.4 Векторний потенціал

Будемо вважати, що граничні умови для векторного потенціалу мають вигляд (2.7), де необхідно замінити $\varphi(R_E, \theta_0, \varphi_0\ ) \rightarrow A_r(R_E, \theta_0, \varphi_0)$ та $\Phi_0 \rightarrow J_0$,
де J_0 - амплітуда щільності струму в експериментах Тесли в точці на полюсі з координатами: $r = R_E\ , \theta_0 = 0, \varphi_0 = 0.$
Тоді, запишемо рішення для радіальної проекції векторного потенціалу:

$$A_r(r, \theta, \varphi\ ) = D_1(kr)^{-1/2}\ J_{n+1/2}\ (kr) P_{n,m}(x) \cos m\varphi \qquad (2.7)$$

де $\mathrm{B}_1 = \frac{\sqrt{kR_E}}{J_{1/2}(kR_E)}\ J_0$

Грунтуючись на експериментальних даних [42], можна оцінити значення обурених амплітуд потенціалу і щільності струму:
$\Phi_0 \approx (3.5 \ldots 4.0) \cdot 10^6 \mathrm{B}\ \ , J_0 \approx 300/S_0\ \ \mathrm{А/мм^2}$, де S_0 - токопровідна площа в поперечному перерізі провідника вторинної котушки трансформатора Тесли.

2.5 Графічний аналіз розподілу збуреного електричного потенціалу на поверхні Землі

Побудуємо графіки розподілу потенціалу на поверхні Землі в сферичної системі координат. Потенціал на поверхні Землі представимо у вигляді суми електростатичного потенціалу Землі і його обурення:

$$\varphi(R_E, \theta_0, \varphi_0) = \varphi(R_E) + \varphi(R_E, \theta, \varphi) \qquad (2.8)$$

При графічному розгляді електростатичний потенціал Землі $\varphi_E(R_E)$ задамо сферою одиничного радіуса. Будемо вважати, що $|\varphi(R_E, \theta_0, \varphi_0)/\varphi_E(R_E)| \ll 1$. При чисельних розрахунках потенціал в безрозмірних одиницях $\hat{\varphi}(R_E, \theta_0, \varphi_0)$ задається виразом:

$\hat{\varphi}(R_E, \theta, \varphi) = 1 + \varphi(R_E, \theta, \varphi)/\varphi_E(R_E) = 1 + Amp \cdot \varphi(R_E, \theta, \varphi)$ (2.9)

При n=0 обурений потенціал не залежить від кутів θ і φ, і одного знака щодо рівноважного потенціалу Землі.

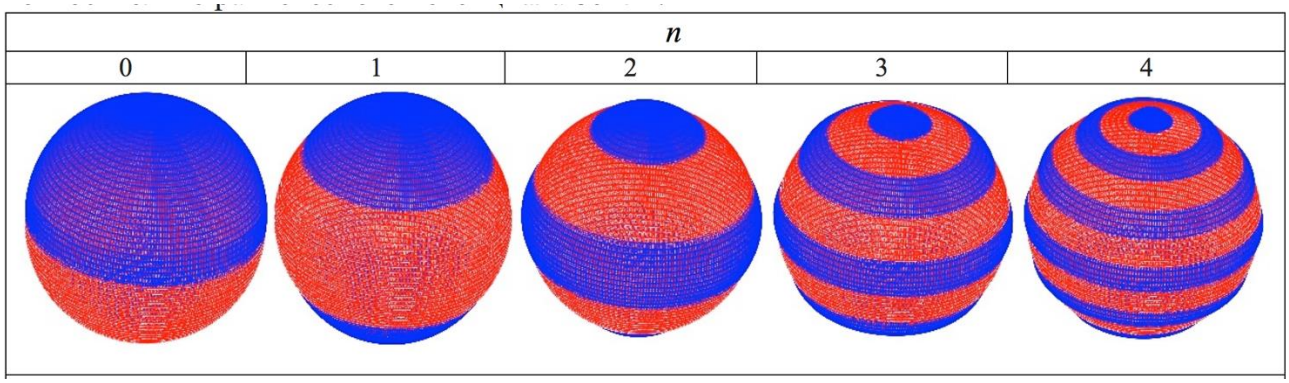


Рис 2.2 Залежність знака розподілу потенціалу на поверхні Землі від числа n для Amp=0.1

З Рис. 2.2 випливає, що обурений потенціал Землі на верхньому полюсі сфери ($\theta_0, = 0\ \varphi_0 = 0$) визначається граничною умовою (2.7), тобто дорівнює Φ_0.

З рисунків випливає що кількість зон N одного знака за широтою сфери дорівнює N=n+1, де n - кількість нулів полінома Лежандра $P_n(x)$ в інтервалі $-1 \le x \le +1$. В експериментах Тесла значення числа n має бути достатньо

великим: n = n_0 >> 1 , тому за широтою сфери довжина хвилі генератора Тесла становить λ_0=2 км. Цю довжину хвилі можна визначити з співвідношення $\lambda_0 = \lambda_{n0} = 2\pi R_E/(n_0 + 1)$. Звідси випливає, що n_0 досить велике: $n_0 \approx 20015$.

Таким чином, в разі ідеально провідної сфери генератор Тесла задає власні коливання заряду, розташованого на провідній жорсткій сфері. З огляду на симетрії завдання азимутальная мода коливань дорівнює нулю: m = 0. Частота генератора Тесли ω_0 пов'язана з довжиною хвилі обуреного потенціалу по широті λ_0 співвідношенням:

$$\omega_0 = \omega_{n0} = \frac{c(n_0+1)}{2\pi R_E} \tag{2.11}$$

У загальному випадку, частоти і довжини хвиль власних високочастотних коливань ідеально провідної зарядженої сфери визначаються з рівності:

$$\omega_n = \frac{c(n+1)}{2\pi R_E} \tag{2.12}$$

3. Результати

3.1 Розрахунок резонансів Шумана

У конденсаторної батареї частоти збудження, або резонанси Шумана ω_n слабо відрізняються в відносних величинах від частот власних коливань провідної сфери, тобто $\omega_{ns} = \omega_{nsp} + \Delta_n$, де $|\Delta_n| \ll \omega_{nsp}$. Зазначена нище розбіжність між частотами, показана в таблиці 3.1

Таблиця 3.1

Частота (Гц)	Номер моди n				
	0	1	2	3	4
Частоти власних коливань провідної сфери (ω_{nsp})	7,8	14,3	20,8	27,3	33,8
Резонанси Шумана (ω_n)	7,5	15	22,5	30	37,5
Відхилення	0,3	-0,7	-1,7	-2,7	-3,7

Порівняння резонансів Шумана з власними частотами ідеально провідної сфери

Розглянемо причини відхилення резонансних частот Шумана від власних частот провідної сфери. Для цього діелектричну проникність прошарку в сферичному конденсаторі умовно представимо у вигляді:

$$\varepsilon(\omega_n) = (1 - \frac{\Omega_n^2}{\omega_n^2}) \qquad (3.1)$$

де Ω_n - власні частоти коливань конденсаторної батареї, $\Omega_n^2 = (1 + \alpha_n)\omega_n^2$, $\alpha_n \ll 1$.

Вираз (2.13) описує внесок діелектричної прошарку в власні частоти ідеально провідної сфери.

Для конденсатороной сферичної батареї на резонансних частотах маємо:

$$(k_n^2)_B = \frac{\omega_n^2}{c^2} - \frac{4\pi C_E}{V_E} = \frac{\omega_n^2}{c^2} - \frac{3\varepsilon(\omega_n)}{R_E d} \quad (3.2)$$

Для ідеально провідної сфери:

$$(k_n^2)_S = \frac{\omega_n^2}{c^2} \quad (3.3)$$

Другий доданок в правій частині (2.15) $4\pi C_E/V_E$ не враховуємо зважаючи на його малість щодо $4\pi C_{EB}/V_E$.

Довжина хвилі для ідеально провідної сфери і для конденсаторної батареї визначається числом нулів функції Лежандра. Звідси випливають рівності $(k_n^2)_B = (k_n^2)_S = (n+1)^2/(2\pi R_E)^2$

З виразів (2.14) і (2.15), вважаючи $\omega_n = \omega_{nsp} + \Delta_n$, де $|\Delta_n| \ll \omega_n$, визначимо умови, при яких зміщені через наявність діелектричної прошарку резонансні частоти ідеально провідної сфери відповідають резонансам Шумана:

$$\Delta_n = -\frac{6\pi^2}{(n+1)^2}\frac{R_E}{d} a_n \omega_n \quad (3.4)$$

Вважаючи, наприклад, товщину діелектричної прошарку малу ($d \ll R_E$) , з таблиці 2.1 і рівності (2.16) визначимо значення параметра α_n:

$$a_n = \frac{1}{6\pi^2}\frac{d}{7.5R_E}(n-0.3)(n+1) \quad (3.5)$$

З (16), (17) випливає вираз для нижчих резонансів Шумана ω_n:

$$\omega_n = \omega_n\left(1 + \frac{(0.3-n)}{7.5(n+1)}\right) \quad (3.6)$$

де n = 0,1,2,3…

Вираз (3.6), на відміну від наведеного виразу $\omega_n = 6\sqrt{n(n+1)}$ Гц з достатнім ступенем точності визначає резонанси Шумана, наведені в таблиці 3.1.

3.1 Порівняння з експериментальними даними

Порівняємо отримані частоти з таблиці 3.1 з експериментальними даними полученими в “Space Observing System” [44]:

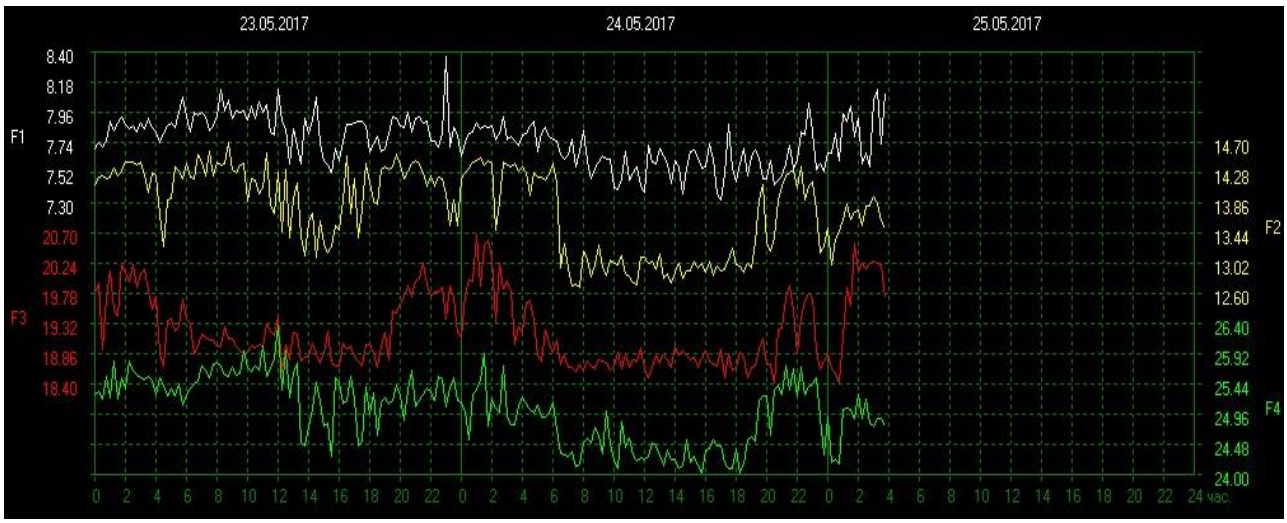


Рис. 3.1 Залежності перших чотирьох мод шуманівского резонансу в герцах від місцевого часу. Місцевий час виражено в годинах Томського річного декретного часу (ТРДЧ). ТРДЧ= UTC + 7часов.

Більш докладно добові зміни для першої моди резонансу Шумана представлені на рис. 3.2.

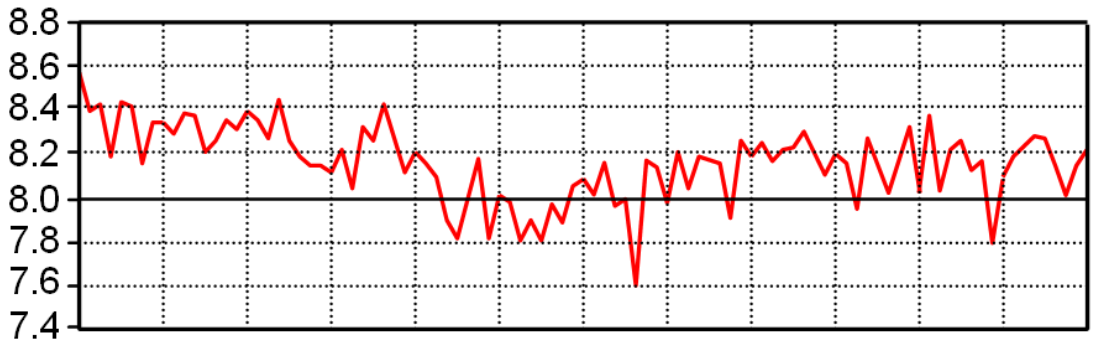


Рис. 3.2 Добовий хід частоти першої гармоніки резонансу Шумана

Такий хід частоти можна пояснити чутливістю резонансних хвиль до погодних умов, які постійно меняються.

На рис. .3.3 представлені середні значення частот для перших п'яти мод коливань.

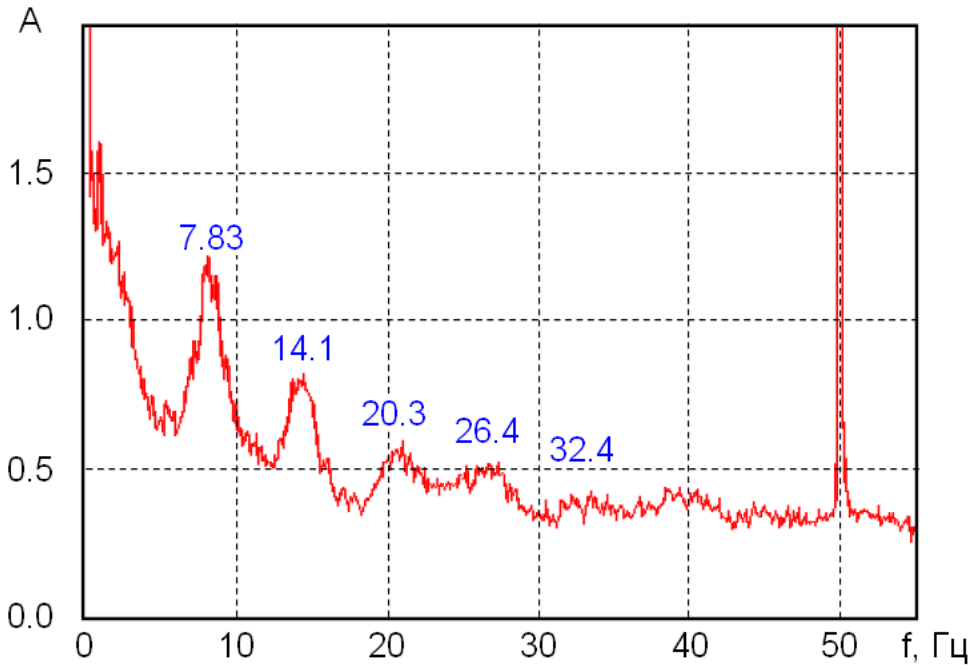


Рис. 3.3 Спектр електромагнітних коливань наднизької частоти з резонансами Шумана. Пік на 50 Гц обумовлений частотою змінного струму в промислової електромережі

У таблиці 3.2 показано порівняння резонансних частот отриманих в даній роботі і частот що реєструються в геофезіческой обсерваторії м. Модра.

Таблица 3.2

Частота (Гц)	Номер моди *n*				
	0	1	2	3	4
Частоти власних коливань провідної сфери	7,8	14,3	20,8	27,3	33,8
Частоти виміряних резонансів Шумана	7,83	14,1	20,3	26,4	32,4
Відхилення	-0,03	0,2	0,5	-0,9	-1,6

Порівняння частоти власних коливань провідної сфери з експериментальними даними

З огляду на добові зміни частоти першої гармоніки резонансу Шумана, число 7,5 у виразі (3.6) може приймати значення в діапазоні від 7 до 11. Таким чином, в цьому розділі визначені резонансні наднизькочастотні коливання зарядженого сферичного конденсатора з діелектричної прошарком, які відповідають першим резонансам Шумана.

Можна сказати, що Земля поводиться як як ідеально гладкий провідник з незначним опором, ємністю і самоіндукцією, рівномірно розподіленою уздовж осі симетрії поширення хвилі, що передає повільні електричні коливання без помітних спотворень і загасання.

Коливання, що мають частотою менше, ніж перша шуманівського мода не будуть резонувати з Землею, і зміна потенціалу буде рівномірно розподілено по всій її поверхні. Одним з умови поширення стоячих хвиль в даній системі, є те, що, незалежно від частоти хвилі, хвиля повинна поширюватися не менше 0.0084 секунди.

Висновки

В дипломній роботі запропоновано заснована на експерименті Тесли модель збудження резонансних коливань заряду Землі. Задача зведена до дослідження рівнянь Даламбера для електричного і магнітного потенціалів зарядженої, ідеально провідної сфери. Виходячи із запропонованої моделі, визначено зв'язок обурених заряду і щільності струму зі збуреними потенціалами. Показано, що для високочастотних, гармонійно змінних в часі збурень потенціалів рівняння Даламбера переходят в рівняння Гельмгольца, вирішення яких в аксіально-симетричному випадку виражаються через поліноми Лежандра. Підстановка граничних умов в отримані рішення дозволяє описати залежність обурених заряду Землі від полярного кута. На підставі знайденого рішення дан графічний аналіз розподілу обуреного потенціалу на ідеально провідній поверхні Землі.

Отримане рішення адекватно описує експерименти Тесла по бездротової передачі електрики, проведені в Колорадо-Спрінгс в 1899 - 1900 р.р. Показано, що в наднизькочастотних області електромагнітного спектра Земля являє собою конденсаторних батарей, що складається з двох вкладених одна в іншу сфер, між якими знаходиться тонка прошарок з діелектричної проникністю $\varepsilon(\omega_0)$ та товщиною $d \ll R_E$. У цій області частот визначені власні частоти коливань заряду Землі. Показано, що величина цих частот найбільш точно відповідає експеріментално виміряним першим резонансам Шумана.

Список літератури:

1. http://westudents.com.ua/glavy/13123-296-ekologchn-problemi-oderjannya-energ.html
2. http://pidruchniki.com/16850303/ekologiya/ekologichni_problemi_oderzhannya_energiyi
3. https://content-watch.ru/text/
4. http://ukurier.gov.ua/uk/articles/koeficiyent-korisnoyi-diyi/
5. Никола Тесла “Тесла. Колорадо-Спрингс. Дневники. 1899-1900”: Самара: Издательский дом “Агни”, 2008. – 460 с.
6. . Блиох П. В., Николаенко А. П., Филиппов Ю. Ф. Глобальные электромагнитные резонансы в полости Земля–ионосфера. – Киев: Наукова дум- ка, 1977. – 198 с.
7. Bliokh P., Nikolaenko A., Filippov Y. Schumann Resonanses in the Earth-Ionosphere Cavity. – London: Peter Peregrines Ltd, 1980. – 166 p.
8. Безродный В. Г., Блиох П. В., Шубова Р. С., Ямпольский Ю. М. Флуктуации сверхдлинных волн в волноводе Земля–ионосфера. – М.: Нау- ка, 1984. – 144 с.
9. Bliokh K. Yu. Instability of Oscillations in the Flow Moving Through a Random Medium as the Counterpart of the Localization of Waves in a Passive Random Medium // Waves Random Media. – 2003. – Vol. 13. – P. 1-8.
10. Bliokh K. Yu. Generalized geometric phase of a classical oscillator // J. Phys. A: Math. Gen. – 2003. – Vol. 36. – P. 1705-1710.
11. Блиох К. Ю., Степановский Ю. П. Об изменении поляризации электромагнитной волны в плавной одномерно неоднородной среде // ЖЭТФ. – 2003. – Т. 124. – С. 529-535.
12. Усиков А. Я., Блиох П. В. Линзовый эффект атмосферы Земли // Геомагнетизм и аэроно- мия.– 1962. – Т.11, 12.– С. 293-304.

13. Блиох П. В., Брюховецкий А. С. Фокусировка радиоволн искусственно созданной ионосферной линзой // Геомагнетизм и аэрономия. – 1969. – Т.9, 13. – С. 545-549.
14. Блиох П. В., Синицын В. Г., Фукс И. М. Рефракция и рассеяние в солнечной короне при затменных наблюдениях космических источников // Астрономический журнал. – 1969. – Т. 46, 12. – С. 348-358.
15. Блиох П. В., Шубова Р. С. О возможности фокусировки СДВ во время солнечного затме- ния // Известия вузов. Радиофизика. – 1979. – Т. 22, 16. – С. 682-689.
16. Colley W., Schild R., Dudinov V., et al. Around the Clock Observations of the Q0957+561 A, B Gravitationally Lensed Quasar II: Results for the Second Observing Season // Astrophys. J. – 2003. – Vol. 587. – P. 71-79.
17. Schild R. & Vakulik V. Microlensing of a Ring Model for Quasar Structure // Astron. J. – 2003. – Vol. 126, No. 2. – P. 689-695.
18. Vakulik V., Schild R., Dudinov V., Minakov A., et al. Color Effects Associated with the 1999 Mi - crolensing Brightness Peaks in Gravitationally Lensed Quasar Q2237+0305. // Astron. Astro- phys. – 2004. – Vol. 420. – P. 447-457.
19. Блиох П. В., Минаков А. А. Гравитационные линзы. – Киев: Наукова думка, 1989. – 240 с.
20. Bliokh P., Sinitsin V., Yaroshenko V. Dusty and Self-Gravitational Plasmas in Space. – Dordrecht Netherlands: Kluwer Acad. Publishers, 1995. – 250 p.
21. Блиох П. В., Ярошенко В. В. Затухание электростатических волн в пылевой плазме // Физика плазмы. – 1996. – Т. 22, 15. – С. 452-457.
22. Yaroshenko V. and Verheest F. Nonlinear Low- Frequency Waves in Dusty Self-Gravitating Plas- mas // J. Plasma Phys. – 2001. – Vol. 64, part 4. – P. 359-370.

23. Yaroshenko V., Morfill G., and Vladimirov S. Vibrational Modes in the Plasma Crystal due to Nonlinear Temperature Distribution in Gas Dis- charge Plasmas // Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 66.
24. Verheest F., Yaroshenko V., and Hellberg M. Dust Distribution in Self-Gravitating Dusty Plasmas // Phys. Plasmas. – 2002. – Vol. 9, No. 6. – P. 2479-2485.
25. Yaroshenko V., Annaratone B., Khrapak S., et al. Electrostatic Modes in Collisional Complex Plasmas under Microgravity Conditions // Phys. Rev. E. – 2004. – Vol. 69.
26. Горбач Н. В., Шарапов Л. И., Гутник В. Г. Особенности статистических характеристик радиоволн трехмиллиметрового диапазона при распространении над взволнованной морской поверхностью // Радиофизика и радиоастроно- мия. – 2002. – Т. 7, 11. – С. 5-10.
27. Гутник В. Г., Кулемин Г. П., Шарапов Л. И. Связь скорости ветра и интенсивности обратного рассеяния от моря в миллиметровом диа-пазоне при скользящих углах // Электромагнит- ные волны и электронные системы. – 2003. – Т. 8, 111/12. – С. 101-108.
28. Шарапов Л. И., Брюховецкий А. С., Вак- сер И. Х., Комяк В. А. О влиянии полосы поглощения молекулярного кислорода на амплитудные флуктуации радиоволн миллиметрово- го диапазона // Известия вузов. Радиофизика. – 1973. – Т. 16, 110. – С. 1505-1509.
29. Горбач Н. В., Михайловский А. И., Фукс И. М., Шарапов Л. И. Спектр интерференционного шума над взволнованной поверхностью моря при малых углах скольжения // Известия вузов. Радиофизика. – 1994. – Т. 36, 111. – С. 1294-1305.
30. Backscattering Effects for Discrete Random Media: Theoretical Results. In: Photopolarimetry in Remote Sensing / V. Tishkovets, P. Litvinov, E. Petrova, K. Jockers, and M. Mishchenko / Eds: G. Videen, Y. Yatskiv and M. Mishchenko. – Kliwer Academic Publisherc, 2004. – P. 221-242.

31. Tishkovets V. P. and Mishchenko M. I. Coherent Backscattering of Light by a Layer of Discrete Random Medium // J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer. – 2004. – Vol. 86, Issue 2. – P. 161-180.
32. Tishkovets V. P., Petrova E. V. and Jockers K. Optical Properties of Aggregate Particles Compa- rable in Size to the Wavelength // J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer. – 2004. – Vol. 86, Issue 3. – P. 241-265.
33. Минаков А. А., Тырнов О. Ф. Статистическая радиофизика. – Харьков: Факт, 2003.– 540 с.
34. Джон О'Нейл. Электрический Прометей // Изобретатель и рационализатор. – 1979. – № 4–11.].
35. Schumann, W. O. (1952), On the freeoscillations of a conducting sphere which is surrounded by an air layer and an ionosphere shell (in German), Z. Naturforsch. 7A, 149–154.].
36. Nickolaenko A. and Hayakawa M. Schumann Resonance for Tyros. Springer Geophysics, Japan, 2014, 348 p.].
37. Toledo Redondo S., Salinas A., Morente-Molinera J.A., Méndez, Fornieles J., Portí J., and Morente J.A., Parallel 3D-TLM algortithm for simulation of the Earth- A. ionosphere cavity, J. Comp. Phys., 236, 367–379, 2013.].
38. Nickolaenko and Hayakawa, 2002; Greifinger and Greifinger, 1978; Greifinger et al., 2007; Mushtak and Williams, 2002; Pechony and Price, 2004; Sentman, 1990; Fullekrug, 2000
39. Greifinger and Greifinger, 1978
40. Nickolaenko and Rabinowicz, 2000
41. Greifinger et al., 2007; Mushtak and Williams, 2002; Pechony and Price, 2004; Sentman, 1990; Fullekrug, 2000; Jones, 1967, 1970; Кириллов, 1993; Кириллов и др., 1997; Кириллов и Копейкин, 2002; Tokano et al., 2001; Morente et al., 2006; Ян и Пасько, 2005; Toledo-Redondo et al., 2013
42. Tesla, Nikola, 1856-1943. Nikola Tesla on his work with alternating currents and their application to wireless telegraphy, telephony, and transmission of

power: an extended interview / Leland Anderson, editor. Originally published: Denver, Colo: Sun Pub., 1992, 242 p.

43. Грей Стефен (Gray Stephen) // Физики: Биографический справочник / Под ред. А. И. Ахиезера. — Изд. 2-е, испр. и дополн. — М.: Наука, 1983. — С. 91. — 400 с.
44. http://sosrff.tsu.ru //Space Observing System/ Данные комплексного мониторинга г. Томск