

# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для практичної роботи з теми №1:

### Мікростани і макростани

**Задача 1.1** Яка ймовірність викинути загалом 6 очок або менше за допомогою трьох шостиграних кісточок?

**Задача 1.2** Розгляньте гру, у якій бросають шість однакових кісточок. Стан кісточки, що відповідає 6 очкам, ми будемо називати тузом. Знайдіть ймовірність отримати: (a) рівно один туз; (b) принаймні один туз; (c) рівно два тузи.

**Задача 1.3** Обирається випадкове число від 0 до 1. Яка ймовірність того, що рівно п'ять із його перших десяти десяткових знаків складаються із цифр менше ніж "5"?

**Задача 1.4** Обчислення моментів біноміального розподілу (до лекційного матеріалу).

**Задача 1.5** Обчисліть кількість можливих комбінацій з п'яти карт у грі в покер, розданих з колоди, що складається з 52 карт. (Порядок карт в комбінації не має значення). Королівський флеш складається з п'яти найвищих карт (туз, король, королева, валет, 10) однієї (будь-якої) масті. Яка ймовірність отримати королівський флеш з першої спроби?

**Задача 1.6.** Припустимо, що ви перегортаєте 20 однакових монет. (a) Скільки є можливих результатів (мікростанів)? (b) Яка ймовірність отримання послідовності НТННТТТНТНННТННННТНТ (саме в такому порядку)? (c) Яка ймовірність отримати 12 орлів та 8 решок (у будь-якій послідовності)?

# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для практичної роботи з теми №2:

### Розподіл Пуассона і нормальний розподіл

**Задача 2.1** Припустимо, що типографічні помилки, допущені при наборі тексту, трапляються повністю випадково. Припустимо, що книга на 600 сторінок містить 600 таких помилок. Використайте розподіл Пуассона для обчислення ймовірності: (а) що сторінка не містить помилок; (б) що сторінка містить щонайменше три помилки.

**Задача 2.2** Метал випаровують у вакуумі з гарячої нитки. Атоми металу потрапляють на кварцову пластину на деякій відстані один від одного і утворюють там тонку металеву плівку. Ця кварцова пластина підтримується при низькій температурі, так що будь-який атом металу, що потрапляє на неї, залишається на місці контакту без подальшої міграції. Можна вважати, що атоми металу з однаковою ймовірністю потрапляють на будь-який елемент площі пластини. Якщо розглядати елемент площі пластини розміром  $b^2$  (де  $b$  - діаметр атома металу), покажіть, що кількість атомів металу, накопичених на цій площі, має розподілятися відповідно до розподілу Пуассона.

Припустимо, що випаровується достатньо металу для утворення плівки середньої товщини, що відповідає 6 атомним шарам. (а) Яка частина площі пластини взагалі не покрита металом? (б) Яка частина покрита металевими шарами товщиною, відповідно, в 3 атоми та в 6 атомів?

**Задача 2.3** Монету кидають 400 разів. Знайдіть ймовірність отримання 215 орлів (підказка: використовуйте наближення Гаусса).

**Задача 2.4** Перевірте точність формули Стірлінга  $N! \approx N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}$  та  $\ln N! \approx N \ln N - N$ , використовуючи кишеньковий калькулятор, для  $N = 1; 10; 100$ .

# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для практичної роботи з теми №3:

### Модель Ейнштейна

**Задача 3.1** Для твердого тіла Ейнштейна з кожним із наведених нижче значень  $N$  і  $q$ : (a)  $N = 3$ ,  $q = 4$ ; (b)  $N = 3$ ,  $q = 5$ ; (c)  $N = 3$ ,  $q = 6$ ; (d)  $N = 4$ ,  $q = 3$ ; (e)  $N = 1$ ,  $q$  - довільне; (f)  $N$  - довільне,  $q = 1$ . Запишіть усі можливі мікростани, порахуйте їх та перевірте комбінаторну формулу:

$$\Omega(N, q) = \frac{(q + N - 1)!}{q!(N - q)!}.$$

**Задача 3.1** Обчисліть кратність макростану твердого тіла Ейнштейна з 30 осциляторами та 30 одиницями енергії (не намагайтеся виписати всі мікростани!).

**Задача 3.3** Розваги з логарифмами: (a) спростіть вираз  $e^{a \ln b}$  (тобто, запишіть цей вираз без використання логарифмів); (b) доведіть, що  $\ln(a + b) \approx (\ln a) + (b/a)$ , якщо  $b \ll a$ ; (c) перевірте за допомогою кишенькового калькулятора точність розкладання  $\ln(1 + x) \approx x$ , де  $|x| \ll 1$ , для  $x = 0.1$  і  $x = 0.01$ ; (d) запишіть число  $e^{10^{23}}$  у формі  $10^x$ , для деякого  $x$ .

**Задача 3.4** Розглянемо систему з двох твердих тіл Ейнштейна,  $A$  і  $B$ , кожне з яких містить 10 осциляторів, і які сумарно містять 20 одиниць енергії. Припустимо, що ці тверді тіла слабо взаємодіють, а їх загальна енергія незмінна. (a) Скільки різних макростанів доступно для цієї системи? (b) Скільки різних мікростанів доступно для цієї системи? (c) Якщо припустити, що ця система знаходиться в тепловій рівновазі, яка ймовірність, що вся теплова енергія міститься у твердому тілі? (d) Яка ймовірність знайти рівно половину загальної енергії в одному з твердих тіл? (e) За яких обставин ця система може проявляти незворотню поведінку?

# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для практичної роботи з теми №4:

### Ентропія і другий початок термодинаміки

**Задача 4.1** Використовуйте методи цього розділу, щоб отримати формулу для кратності макростану твердого тіла Ейнштейна у границі “низької температури”,  $q \ll N$ .

**Задача 4.2** Скільки існує можливих розкладок колоди з 52 гральних карт? (Для простоти розглядаємо тільки порядок карт, незважаючи на те, як вони перевернуті). Припустимо, що Ви починаєте з відсортованої колоди і перетасовуєте її багаторазово, так, що всі розкладки стають "доступними". Скільки ентропії Ви при цьому створите? Свою відповідь виразіть як безрозмірним числом (нехтуючи коефіцієнтом  $k_B$ ), так і в одиницях СІ. Чи значна ця ентропія в порівнянні з ентропією, пов'язаною з упорядкуванням теплової енергії між молекулами в картках?

**Задача 4.3** Розглянемо систему двох твердих тіл Ейнштейна з  $N_A = 300$ ,  $N_B = 200$  і  $q_{total} = 100$  (цей приклад обговорювався на лекції). Обчислити ентропію найбільш ймовірного макростану та найменш ймовірного макростану. Також обчислити ентропію на великих часових масштабах, припускаючи, що всі мікростани є доступними.

# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для самостійної роботи з теми №1:

### Мікростани і макростани

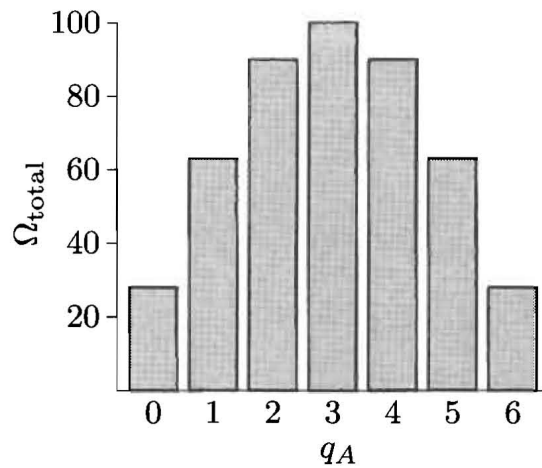
**Задача 1.** Розглянемо  $\alpha$ -частинки, що випромінюються радіоактивним джерелом протягом певного часового інтервалу  $t$ . Оскільки  $\alpha$ -частинки випромінюються у випадкові моменти, ймовірність, що ймовірність радіоактивного розпаду в будь-якому інтервалі часу  $\Delta t$  абсолютно не залежить від того, що відбувається в інші інтервали часу. Припустимо, що інтенсивність радіоактивного джерела така, що середня кількість розпадів у хвилину дорівнює 24. Яка ймовірність отримання  $n$  розпадів за 10 секунд? Отримайте числові значення для всіх цілих значень  $n$  від 0 до 8.

**Задача 2.** Напишіть функцію Matlab, яка підраховує суму довільного числа незалежних випадкових чисел  $n_j \mid j = 1, \dots, N$ , які з рівною ймовірністю можуть приймати одне з двох значень: 1 або 0. Напишіть скрипт в Matlab, який викликає цю функцію  $T$  разів і накреслює гістограму отриманої суми. Такий спосіб отримання розподілу називається методом Монте-Карло. Використовуючи вбудовані функції Matlab для біноміального і гаусового (нормального) розподілу, накресліть біноміальний і нормальний розподіл поверх розподілу, отриманого за допомогою метода Монте-Карло. Підберіть мінімальні значення параметрів, за яких всі три криві ідеально співпадають.

**Задача 3.** Припустимо, що ви перегортаєте 1000 монет. (а) Яка ймовірність отримати рівно 500 орлів та 500 решок? (Рекомендація: спочатку запишіть формулу для загальної кількості можливих результатів. Потім, щоб визначити "кратність" макростану 500-500, використовуйте наближення Стірлінга. Якщо у вас є просунутий калькулятор, який робить наближення Стірлінга непотрібним, помножте всі числа в цій задачі на 10, 100 або 1000, поки не стане необхідним наближення Стірлінга.) (б) Яка ймовірність отримати рівно 600 орлів та 400 решок?

**Задача 4.** Використовуйте комп'ютер, щоб відтворити таблицю та графік для двох твердих тіл Ейнштейна, що знаходяться у тепловому контакті, якщо кожне з них складається із трьох гармонічних осциляторів, а загалом вони містять шість одиниць енергії. Тепер

$q_A$	$\Omega_A$	$q_B$	$\Omega_B$	$\Omega_{\text{total}} = \Omega_A \Omega_B$
0	1	6	28	28
1	3	5	21	63
2	6	4	15	90
3	10	3	10	100
4	15	2	6	90
5	21	1	3	63
6	28	0	1	28
				$462 = \binom{6+6-1}{6}$



зробіть аналогічну таблицю та графік для випадку, коли система складається з двох твердих тіл Ейнштейна А і В, що знаходяться у тепловому контакті, якщо А містить 200 осциляторів, В містить 100 осциляторів, а в цілому в системі є 100 одиниць енергії (подумайте, як краще презентувати отримані результати) і дайте відповідь на такі питання: а) Якщо припустити, що всі мікростани однаково вірогідні, який макростан є найбільш вірогідним і чому дорівнює його ймовірність? б) Який макростан є найменш вірогідним і чому дорівнює його ймовірність? с) Якщо в початковий момент тіло А було нагрітим, а тіло В було максимально охолоджене, як буде змінюватися ентропія системи по мірі того, як система наближається до рівноваги, і чому дорівнює повна зміна ентропії системи у цьому процесі?

# **Статистична фізика і термодинаміка**

## **Розділ II**

### **Термодинаміка**

# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для практичної роботи з теми №5:

### Газові закони термодинаміки

**Задача 1.** Часткові похідні: визначення та приклади використання.

**Задача 2.** Атмосфера складається на 78,08% за обсягом  $N_2$  і на 20,95% з  $O_2$ . Розрахуйте парціальний тиск цих двох газів.

**Задача 3.** Використовуючи наближення ідеального газу, оцініть зміну повної внутрішньої енергії 1,00л  $N_2$  при  $p = 2,00$  атм і  $T = 298,15$  К, якщо його температуру збільшити на 10,0 К. Яка енергія знадобиться для нагрівання 1,00 моль  $N_2$  від 0,0К до 298К?

**Задача 4.** При  $T = 300$  К 1,00 моль  $CO_2$  займає об'єм 1,50 л. Обчисліть тиски, що визначаються рівнянням ідеального газу та рівнянням Ван-дер-Ваальса.

**Задача 5.** Оцініть кількість молекул повітря у кімнаті середнього розміру.



# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для практичної роботи з теми №6:

### Перший закон термодинаміки

**Задача 1.** Розглянувши роботу проти поверхневого натягу при нескінченно малій зміні радіусу краплі води радіуса  $R$ , знайдіть різницю між її внутрішнім тиском і атмосферним тиском. Якою буде відповідна різниця тисків для мильної бульбашки?

**Задача 2.** Крапля води конденсується на твердій поверхні. Маємо три поверхні розділу, яким відповідають три сили поверхневого натягу:  $S_{aw}$ ,  $S_{ws}$  та  $S_{as}$ , де  $a$  - повітря (air),  $w$  - вода (water),  $s$  - тверда поверхня (solid). Обчисліть кут контакта краплі з поверхнею та знайдіть умову створення водяної плівки (повне намокання).

**Задача 3.** У світі “великих” тіл домінуючою силою є гравітаційна сила, а для “малих” тіл домінуючою стає сила поверхневого натягу. При кімнатній температурі, поверхневий натяг води дорівнює  $S_0 \approx 7 \times 10^{-2}$  Н/м. Оцініть типові розміри краплі води, що розділяють “велику” та “малу” поведінку? Наведіть кілька прикладів ситуацій, коли така шкала розмірів стає важливою.

**Задача 4.** Уявіть собі гелій у циліндрі з початковим об'ємом 1 літр та початковим тиском 1 атм. Якимось чином гелій розширюється до кінцевого об'єму 3 літри, причому так, що його тиск зростає прямо пропорційно до його об'єму. (a) Намалюйте графік залежності тиску від обсягу цього процесу. (b) Розрахуйте роботу, виконану над газом під час цього процесу, припускаючи, що ніяких “інших” видів роботи не відбувається. (c) Розрахуйте зміну вмісту енергії в гелії під час цього процесу. (d) Розрахуйте кількість тепла, доданого до гелію або відібраного від нього під час цього процесу. (e) Опишіть, що ви можете зробити, щоб викликати підвищення тиску під час розширення гелію.

**Задача 5.** Застосувавши тиск 200 атм, ви можете стиснути воду до 99% її звичайного обсягу. Зобразіть цей процес (не обов'язково у масштабі) на  $PV$ -діаграмі та оцініть роботу, необхідну для стиснення літра води на цю величину. Чи здивував вас результат?

# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для практичної роботи з теми №7:

### Квазістатичні процеси

**Задача 1.** Отримати вирази для роботи, що виконується газом, і теплоти, переданої газу в ході ізохоричного процесу.

**Задача 2.** Отримати вирази для роботи, що виконується газом, і теплоти, переданої газу в ході ізобаричного процесу.

**Задача 3.** Отримати вирази для роботи, що виконується газом, і теплоти, переданої газу в ході ізотермічного процесу.

**Задача 4.** Отримати вирази для роботи, що виконується газом, і теплоти, переданої газу в ході адіабатичного процесу.

**Задача 5.** Написати формулу для елементарної роботи  $\delta W$  просторово однорідного елемента пружного середовища, пов'язаної з його поздовжньої деформацією.

**Задача 6.** Вивести вирази для елементарної роботи одиниці об'єму  $\delta w = \delta W/V$  ізотропного діелектрика, вибираючи в якості зовнішнього параметра а індукцію  $D$ , поляризацію  $P$  і напруженість електростатичного поля  $E$ .

**Задача 7.** Отримати вираз для роботи одиниці об'єму ізотропного магнетика, вважаючи зовнішнім параметром індукцію  $B$ , намагніченість  $M$  або напруженість магнітного поля  $H$ .

# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для практичної роботи з теми №8:

### Ефективність теплових двигунів

**Задача 1.** Електростанція виробляє 1 ГВт електроенергії з коефіцієнтом корисної дії 40% (типовим для сучасних вугільних електростанцій). (а) З якою швидкістю ця електростанція викидає відпрацьоване тепло в навколишнє середовище? (б) Спочатку припустимо, що холодним резервуаром для цієї станції є річка, швидкість течії якої становить  $100 \text{ м}^3/\text{с}$ . На скільки підвищиться температура річки? (с) Щоб уникнути такого "теплого забруднення" річки, завод можна було б охолоджувати за рахунок випаровування річкової води (це дорожче, але в деяких районах є екологічно кращим). З якою швидкістю повинна випаровуватися вода? Яку частку річки необхідно випаровувати?

**Задача 2.** Запропоновано використовувати тепловий градієнт океану для приведення в дію теплового двигуна. Припустимо, що в певному місці температура води на поверхні океану дорівнює  $22^\circ\text{C}$ , а на дні океану -  $4^\circ\text{C}$ . (а) Який максимально можливий ККД двигуна, що працює між цими двома температурами? (б) Якщо двигун виробляє 1 ГВт електроенергії, то який мінімальний об'єм води він повинен переробляти (відбирати тепло) за кожну секунду?

**Задача 3.** Оцінити максимально можливий ККД побутового кондиціонера. Використовуйте будь-які прийнятні значення температур в резервуарі.

**Задача 4.** Припустимо, що тепло витікає із кухонного холодильника із середньою швидкістю 300 Вт. Припускаючи, що холодильник ідеальний, яку потужність він повинен забирати із мережі?

**Задача 5.** Тепловий насос - це електричний пристрій, який обігріває будівлю, перекачуючи тепло з холодної вулиці всередину. Іншими словами, це те ж саме, що і холодильник, але його метою є нагрівання гарячого резервуару, а не охолодження холодного резервуару (хоча він робить і те, і інше). Визначимо наступні стандартні символи, які за домовленістю вважаються додатними:  $T_h$  = температура всередині будівлі;  $T_c$  = температура ззовні;  $Q_h$  = тепло, закачане в будівлю за 1

день;  $Q_c$  = тепло, забране ззовні за 1 день;  $W$  = електрична енергія, використана тепловим насосом за 1 день.

(a) Поясніть, чому "коефіцієнт ефективності" (ККД) для теплового насосу має визначатися як  $Q_h/W$ .

(b) Яке співвідношення між  $Q_h$ ,  $Q_c$  та  $W$  маєтись на увазі під енергозбереженням? Чи дозволить закон збереження енергії зробити ККД більшим за 1?

(c) Використовуючи другий закон термодинаміки, виведіть верхню границю для ККД виключно з точки зору температур  $T_h$  і  $T_c$ .

(d) Поясніть, чому тепловий насос є кращим за електричну піч, яка просто перетворює електричну роботу безпосередньо в тепло (зробіть деякі чисельні оцінки).

# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для практичної роботи з теми №9: Відношення Максвелла. Адіабатичний процес.

**Задача 1.** Використовуючи перетворення Лежандра, дайте визначення термодинамічним потенціалам і виведіть усі рівняння Максвелла.

**Задача 2.** Доведіть тотожність:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_P = \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V + \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T \cdot \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P.$$

**Задача 3.** Розгляньте ідеальний газ з рівнянням стану  $PV = Nk_B T$  і постійною теплоємністю  $C_V = Nk_B \alpha$ , де  $\alpha$  - деяке число.

- (a) Покажіть, що  $C_P = Nk_B(\alpha + 1)$ .
- (b) Покажіть, що ентропія  $S = Nk_B \log(V/N) + Nk_B \alpha \log T + \text{const}$ .
- (c) Покажіть, що для адіабатичного процесу ( $dS = 0$ ) виконуються рівняння  $VT^\alpha = \text{const}$  і  $PV^\gamma = \text{const}$ , де  $\gamma = C_P/C_V$ .

# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для практичної роботи з теми №10:

### Процес Джоуля-Томсона. Рівняння стану.

**Задача 1.** Розгляньте процес Джоуля-Томсона (також відомий як процес Джоуля-Кельвіна), при якому газ під дією зовнішнього тиску просочується через пористий бар'єр.

(a) Покажіть, що ентальпія  $H = E + PV$  зберігається.

(b) Знайдіть коефіцієнт Джоуля-Томсона  $\mu_{JT} \equiv \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_H$  як функцію

$$\text{від } T, V, C_P \text{ та } \alpha \equiv \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P.$$

(c) Обчисліть  $\mu_{JT}$  для ідеального газу.

**Задача 2.** Рівняння стану накладає обмеження на залежність внутрішньої енергії системи від її термодинамічних координат.

(a) Використовуючи  $dE = TdS - PdV$ , покажіть, що рівняння стану ідеального газу гарантує, що його внутрішня енергія  $E$  може залежити лише від температури  $T$ .

(b) Якою буде найбільш загальна форма рівняння стану для термодинамічної системи, внутрішня енергія якої залежить лише від температури?

(c) Покажіть, що для газу Ван-дер-Ваальса теплоємність залежить лише від температури,  $C_V = C_V(T)$ .

# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для практичної роботи з теми №11:

### Ентропія

**Задача 1.** Припустимо, ви нагріваєте чашку води масою 200 г від  $20^{\circ}\text{C}$  до  $100^{\circ}\text{C}$ . На скільки збільшиться її ентропія?

**Задача 2.** Гарячий об'єкт  $A$  з температурою  $T_A = 500\text{ K}$  привели у тепловий контакт з холодним об'єктом  $B$  з температурою  $T_B = 300\text{ K}$ . Кількість тепла, що протягом певного часу перетікло від  $A$  до  $B$ , дорівнює 1500 Дж. Можна вважати, що тіла  $A$  та  $B$  достатньо великі, щоб їх температури майже не змінилися. Як зміняться при цьому ентропії об'єктів  $A$  та  $B$ , а також їх сумарна ентропія?

**Задача 3.** Кубік льоду з масою 30 г, що має температуру  $0^{\circ}\text{C}$ , залишили на кухонному столі, де він поступово тане. Температура кухні  $25^{\circ}\text{C}$ . (a) Обчисліть зміну ентропії кубіку льоду, коли він перетворюється у воду при температурі  $0^{\circ}\text{C}$ . (b) Обчисліть зміну ентропії води, що з'явилася після того, як кубік льоду розтанув, коли її температура зросла від  $0^{\circ}\text{C}$  до  $25^{\circ}\text{C}$ . (c) Обчисліть повну зміну ентропії кухні у цьому процесі, від танення кубіка льоду до встановлення термодинамічної рівноваги з водою, що залишилась після нього. (d) Обчисліть повну зміну ентропії Всесвіту в цьому процесі. Чи буде повна зміна позитивною, негативною або нулем? Чи відповідає отримана відповідь вашим очікуванням?

**Задача 4.** Коли Сонце знаходиться високо у небі, воно дає у середньому приблизно 1000 Вт енергії на кожний квадратний метр Землі. Температура поверхні Сонця дорівнює 6000 K, а температура земної поверхні - приблизно 300 K. (a) Оцініть ентропію, що кожний рік створюється сонцем завдяки потраплянню сонячних промінів на квадратний метр земної поверхні. (b) Припустимо, що на цьому квадратному метрі земної поверхні ви вирощуєте траву. Дехто може стверджувати, що ріст трави (як і будь-якої іншої живої істоти) порушує другий закон термодинаміки, тому що при цьому хімічні елементи створюють більш організовані структури з меншою ентропією. Як ви зможете на це відповісти?

# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для практичної роботи з теми №12:

### Використання якобіанів в термодинаміці

**Теоретичні відомості 1.** Визначення якобіана, його властивості та приклади використання в термодинаміці.

**Задача 1.** З'ясувати, як змінюється ентропія однорідної системи при її квазістатичному розширенні при постійному тиску. Чи залежить характер зміни ентропії від коефіцієнта теплового розширення  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$  ?

**Задача 2.** Термодинамічна система розширюється таким чином, що її енергія  $U$  залишається постійною. Як змінюється при цьому температура системи? Чи буде такий процес оборотним?

**Теоретичні відомості 2.** Мнемонічне правило для запам'ятовування виразів диференціалів термодинамічних потенціалів (Макс Борн, 1929).



# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для самостійної роботи з теми №2:

### Термодинаміка

**Задача 1.** На електростанції, що виробляє електроенергію з потужністю 1 ГВт ( $10^9$  Вт), парові турбіни вбирають пару при температурі  $500^\circ\text{C}$ , а відпрацьоване тепло викидається у навколишнє середовище при  $20^\circ\text{C}$ . (a) Яка максимально можлива ефективність цієї установки? (b) Припустимо, ви розробили новий матеріал для виготовлення труб і турбін, який дозволяє підвищити максимальну температуру пари до  $600^\circ\text{C}$ . Скільки (приблизно) грошей можна заробити за рік, встановивши своє покращене обладнання, якщо продавати додаткову електроенергію за 5 центів за кіловат-годину? (Припустимо, що кількість палива, що споживається на заводі, не змінилася.)

**Задача 2.** Щоб прийняти гарну теплу ванну, ви змішали 50 літрів гарячої води  $55^\circ\text{C}$  з 25 літрами холодної води  $10^\circ\text{C}$ . Скільки нової ентропії ви створили, змішавши воду?

**Задача 3.** За допомогою якобіанів обчислити значення виразу:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P - \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_V.$$

# Статистична фізика і термодинаміка

## Додаткові задачі за розділом 2:

**Задача 1.** Доведіть еквівалентність температурної шкали ідеального газу  $\Theta$  і термодинамічної температурної шкали  $T$ , виконуючи цикл Карно для ідеального газу. Рівняння стану ідеального газу  $PV = Nk_B\Theta$ , і його енергія залежить лише від температури  $\Theta$ , але ви не можете припускати, що  $E \propto \Theta$ . Ви можете скористатися наступним алгоритмом: (а) Обчислити обмін теплом  $Q_H$  і  $Q_C$  як функції температур  $\Theta_H$ ,  $\Theta_C$  і відношення об'ємів. (b) Обчислити відношення об'ємів при адіабатичному процесі як функцію  $\Theta$ . (c) Показати, що  $Q_H/Q_C = \Theta_H/\Theta_C$ .

**Задача 5.** Який об'єм одного моля повітря при кімнатній температурі та тиску 1 атм?

# **Статистична фізика і термодинаміка**

## **Розділ III**

### **Теорія ансамблів**

# Статистична фізика і термодинаміка

Завдання для самостійної роботи з теми №13:

## Мікроканонічний ансамбль

**Задача 1.** Розгляньте газ класичних осциляторів у мікроканонічному ансамблі. Знайдіть його ентропію як функцію температури. Обчисліть теплоємність газу.

**Задача 2.** Розгляньте газ квантових осциляторів у мікроканонічному ансамблі. Як залежить його енергія від температури? Обчисліть теплоємність газу.

# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для самостійної роботи з теми №14:

### Канонічний ансамбль

**Вправа.** Вивести розподіл ймовірності системи по доступним мікростанам у канонічному ансамблі, розглядаючи відношення ймовірностей двох довільних мікростанів.

**Задача 1.** Розглянемо гіпотетичний атом, який має лише два стани: основний з нульовою енергією та збуджений з енергією 2 еВ. Накресліть графік статистичної суми для цієї системи як функції температури та чисельно оцініть її при  $T = 300 \text{ K}$ ,  $3000 \text{ K}$ ,  $30\,000 \text{ K}$  і  $300\,000 \text{ K}$ .

**Задача 2.** Уявіть собі частинку, що може перебувати лише в трьох станах з енергіями  $-0,05 \text{ eV}$ ,  $0$  і  $+0,05 \text{ eV}$ . Ця частинка знаходиться в рівновазі з резервуаром при  $300 \text{ K}$ .

- (a) Обчисліть функцію розподілу для цієї частинки.
- (b) Обчисліть ймовірність знаходження частинки в кожному із трьох станів.
- (c) Оскільки нульова точка для вимірювання енергій є довільною, ми можемо також сказати, що енергії трьох станів дорівнюють  $0$ ,  $+0,05 \text{ eV}$  та  $+0,10 \text{ eV}$  відповідно. Повторіть частини (a) і (b), використовуючи ці числа. Поясніть, що змінюється, а що ні.

**Задача 3.** Оцініть ймовірність того, що атом водню при кімнатній температурі перебуває в одному зі своїх перших збуджених станів (відносно ймовірності перебувати в основному стані). Не забувайте враховувати виродження. Потім повторіть розрахунок для атома водню в атмосфері зірки  $\gamma \text{UMa}$ , температура поверхні якої становить приблизно  $9500 \text{ K}$ .

# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для самостійної роботи з теми №15:

### Великий канонічний ансамбль

**Вправа.** Вивести розподіл ймовірності системи по доступним мікростанам у великому канонічному ансамблі, розглядаючи відношення ймовірностей двох довільних мікростанів.

**Задача 1.** Хорошим прикладом, що ілюструє використання факторів Гіббса, є залізовмісний кисневий транспорт у крові молекулою гемоглобіну, яка має чотири адсорбційні комірки, кожна з яких містить іон  $\text{Fe}^{2+}$ , оточений різними іншими атомами. Кожна комірка може переносити одну молекулу  $\text{O}_2$ . Для простоти в якості системи візьмемо лише одну з чотирьох комірок і припустимо, що вона повністю незалежна від інших трьох. (а) Припустимо, що кисень є єдиною молекулою, яка може зайняти комірку. Тоді система має лише два можливих стани: незайнятий і зайнятий. Візьмемо енергії цих двох станів рівними 0 і  $\epsilon$ , причому  $\epsilon = 0.7$  еВ. Яка ймовірність, що поблизу легенів комірка зайнята молекулою кисню? (б) Тепер припустимо, що у легенях присутня також деяка кількість монооксиду вуглецю, який також може адсорбуватися коміркою молекули гемоглобіну. Тепер комірка має три стани: незайнятий, зайнятий молекулою  $\text{O}_2$  і зайнятий молекулою  $\text{CO}$ . Якою тепер буде ймовірність, що поблизу легенів комірка зайнята молекулою кисню?

**Вправа.** Довести, що середня енергія у канонічному ансамблі може бути обчислена як  $\langle E \rangle = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$ , де  $Z$  - статистична сума.

**Задача 2.** При дуже високих температурах (як у дуже ранньому Всесвіті) протон і нейтрон можна розглядати як два різних стани однієї і тієї ж частинки, яка називається «нуклоном». (Реакції, що перетворюють протон в нейтрон, або навпаки, вимагають поглинання електрона, позитрона або нейтрино, але всі ці частинки мають тенденцію бути дуже поширеними при досить високих температурах). Оскільки маса нейтрона вища ніж у протона на  $2,3 \cdot 10^{-30}$  кг, його енергія вища на цю різницю мас, помножену на  $c^2$ . Отже, припустимо, що в якийсь дуже ранній час нуклони перебували в тепловій рівновазі з рештою Всесвіту при температурі  $10^{11}$  К. Яку частку нуклонів у той час становили протони, а яку — нейтрони?

# Статистична фізика і термодинаміка

## Завдання для самостійної роботи з теми №3:

### Теорія ансамблів

**Задача 1.** Розгляньте парамагнетик в зовнішньому магнітному полі, що знаходиться у мікроканонічному ансамблі, як систему двох станів. Як залежить його ентропія від енергії? Як залежить його енергія від температури? Знайдіть теплоємність парамагнетика.

**Задача 2.** Молекула води може вібрувати різними способами, але найпростіший тип вібрації для збудження — це режим «згинання», в якому атоми водню рухаються назустріч і віддаляються один від одного, але зв'язки  $HO$  не розтягуються. Коливання в цьому режимі приблизно гармонічні, з частотою  $4,8 \cdot 10^{13}$  Гц. Як і для будь-якого квантового гармонічного осцилятора, рівні енергії становлять  $(1/2)hf$ ,  $(3/2)hf$ ,  $(5/2)hf$  і так далі. Жоден з цих рівнів не є виродженим.

- (a) Обчисліть ймовірність того, що молекула води перебуває в основному вібраційному стані і в кожному з перших двох збуджених станів, припускаючи, що вона знаходиться у рівновазі з резервуаром (скажімо, атмосферою) при температурі 300 К. (Підказка: Обчисліть  $Z$ , додаючи перші кілька коефіцієнтів Больцмана, доки решта не стане незначною.)
- (b) Повторіть розрахунок для молекули води, що знаходиться в рівновазі з резервуаром при 700 К (можливо, у паровій турбіні).