Статистична фізика і термодинаміка

Розділ 1: Вступ до теплової фізики

Задачі до теми №1: Мікростани і макростани

Задача 1.1. Яка ймовірність викинути загалом 6 очок або менше за допомогою трьох шостигранних кісточок?

Задача 1.2. Розгляньте гру, у якій бросають шість однакових кісточок. Стан кісточки, що відповідає 6 очкам, ми будемо називати тузом. Знайдіть ймовірність отримати:

(a) рівно один туз;

(b) принаймні один туз;

(c) рівно два тузи.

Задача 1.3. Обирається випадкове число від 0 до 1. Яка ймовірність того, що рівно п'ять із його перших десяти десяткових знаків складаються із цифр менше ніж "5"?

Задача 1.4. Припустимо, що ви перегортаєте чотири чесних монети. Для кожної монети будемо позначати стан гербом угору, тобто "орел", як H (head), а стан гербом униз, тобто "решку", як T (tail).

(d) Складіть перелік усіх можливих результатів і запишіть їх у таблицю.

(e) Складіть перелік усіх можливих "макростанів" та їх ймовірностей.

(f) Обчисліть кратність кожного макростану за допомогою комбінаторики, і перевірте, чи відповідають ці результати результатам підрахунку "грубої сили".

Задача 1.5. Припустимо, що ви перегортаєте 20 однакових монет.

(a) Скільки є можливих результатів (мікростанів)?

(b) Яка ймовірність отримання послідовності HTHHTTTHTHHHTHH HHTHT (саме в такому порядку)?

(c) Яка ймовірність отримати 12 орлів та 8 решок (у будь-якій послідовності)?

<u>Задача 1.6</u>. Припустимо, що ви перегортаєте 50 однакових монет.

(a) Скільки є можливих результатів (мікростанів)?

(b) Скільки є способів отримати рівно 25 орлів та 25 решок?

(c) Яка ймовірність отримати рівно 25 орлів та 25 решок?

(d) Яка ймовірність отримати рівно 30 орлів та 20 решок?

(e) Яка ймовірність отримати рівно 40 орлів та 10 решок?

(f) Яка ймовірність отримати 50 орлів і відсутність решок?

(g) Накресліть графік ймовірності отримання n орлів як функції n.

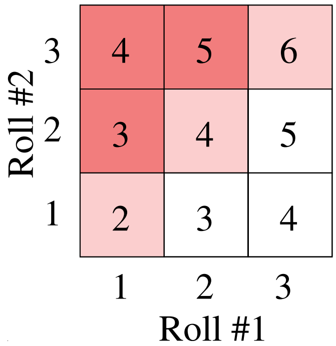
<u>Задача 1.7.</u> Обчисліть кількість можливих комбінацій з п'яти карт у грі в покер, розданих з колоди, що складається з 52 карт. (Порядок карт в комбінації не має значення). Королівський флеш складається з п'яти найвищих карт (туз, король, королева, валет, 10) однієї (будь-якої) масті. Яка ймовірність отримати королівський флеш з першої спроби?

<u>Задача 1.8.</u> У вас є кілька «тристоронніх» гральних кісток, тобто таких, що при їх киданні може випасти сторона з однією, двома або трьома крапками. За допомогою цих кісток можна грати у три гри: “Класична”, “Бозони" і “Ферміони”. У кожен хід будь-якої з цих ігор гравець кидає кістки одну за одною, «перекидаючи», якщо того вимагають правила, поки не вийде дозволена комбінація. У грі “Класична” дозволені будь-які комбінації. У грі “Бозони” комбінація вважається дозволеною тільки в тому випадку, якщо число, що випало, не менше за попереднє. У грі “Ферміони” дозволені тільки такі комбінації, в яких наступне число строго більше попереднього. На рисунку зображена таблиця дозволених комбінацій для двох кісток. Такі правила кидання костей аналогічні правилам квантової статистики частинок.

(a) Нехай кістки «чесні»: кожне число випадає рівно в 1/3 випадків. Яка ймовірність P(4) того, що при киданні двох кісток в грі “Бозони” у сумі випаде 4? А у грі “Ферміони”?

(b) Якщо ми тепер кидаємо три «тристоронні» кістки за правилами гри “Ферміони”, чому дорівнює ймовірність P(6) того, що в сумі випаде 6? (Вказівка: зверніть увагу на те, що працює принцип заборони: у грі “Ферміони” заборонені комбінації, в яких на будь-яких двох кістках випадають однакові числа).

(c) У скільки разів ймовірність викинути триплет (три однакових числа) при киданні трьох кісток за правилами гри “Бозони” підвищується в порівнянні з грою “Класична”? Для довільного M, у скільки разів підвищується ймовірність M-кратного мультиплета (на всіх кістках - однакове число) при киданні M кісток?



<u>Задача 1.9.</u> Розглянемо систему із трьох нерухомих частинок, кожна з яких має спін 1/2, і кожен спін може вказувати або “угору”, або “униз” (тобто, вздовж або навпроти напрямку, вибраного як вісь z). Кожна частинка має магнітний момент μ уздовж осі z, коли він спрямований угору, і $-\mu$, коли він спрямований униз. Система розміщена у зовнішньому магнітному полі H, що спрямоване вздовж цієї осі z.

Стан i-й частинки може бути заданий її магнітним квантовим числом m_i, яке може приймати два значення $m_i = \pm 1/2$. Стан всієї системи заданий, якщо задані значення трьох квантових чисел m_1, m_2, m_3. Частинка має енергію $-\mu H$, коли її спін спрямований угору, та енергію μH, коли її спін спрямований униз.

(a) Випишіть у вигляді таблиці всі можливі стани системи. Для кожного такого мікростану вкажіть загальний магнітний момент і загальну енергію, які характеризують систему в цілому. (Задля скорочення запису $m = 1/2$ можна позначати просто як “+”, а $m = -1/2$ - як “-”).

(b) Припустимо, що загальна енергія системи відома і дорівнює $-\mu H$. Якщо це єдина доступна нам інформація, то в якому із своїх мікростанів і з якою ймовірністю може перебувати система?

Задачі до теми №2: Випадкові блукання

<u>Задача 2.1.</u> Розглянемо задачу про випадкову ходу з $p = q$ і нехай $m = n_1 - n_2$ позначає сумарне зміщення праворуч. Після загальної кількості N кроків обчисліть такі середні значення: m, $\overline{m^2}$, $\overline{m^3}$ і $\overline{m^4}$.

<u>Задача 2.2.</u> Двоє п'яних починають свій шлях із початку відліку, кожен з них має рівну ймовірність зробити крок вліво або вправо по осі x. Знайдіть ймовірність того, що вони знову зустрінуться після N кроків. Потрібно допустити, що чоловіки роблять свої кроки одночасно. (Може бути корисним врахувати їх відносний рух.)

<u>Задача 2.3.</u> Вірогідність W(n), що подія, що характеризується ймовірністю p, трапляється n разів у N випробуваннях, як було показано, визначається біноміальним розподілом,

$$W(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}.$$

Розглянемо ситуацію, коли ймовірність події p мала ($p \ll 1$), а $n \ll N$. (Зауважимо, що якщо N велике, $W(n)$ стає дуже малим, якщо $n \to N$ через малість фактора p^n, коли $p \ll 1$. Отже, $W(n)$ справді помітна лише тоді, коли $n \ll N$.) Тоді можна зробити кілька наближень, щоб звести $W(n)$ до більш простої форми.

(a) Використовуючи результат $\ln(1-p) \approx -p$, покажіть, що $(1-p)^{N-n} \approx e^{-Np}$.

(b) Покажіть, що $N!/(N-n)! \approx N^n$.

(c) Покажіть, що $W(n)$ зводиться до $W(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, де $\lambda \equiv Np$ - середня кількість подій. Це називається розподілом Пуассона.

<u>Задача 2.4.</u> Розгляньте розподіл Пуассона.

(d) Покажіть, що він нормований на одиницю, тобто що $\sum_{n=0}^{N} W_n = 1$.

(суму можна поширити на нескінченність, оскільки $W(n)$ дуже мала, коли $n \geq N$.)

(e) Обчисліть середнє $\bar{n}$ для розподілу Пуассона.

(f) Обчисліть дисперсію $\overline{(\Delta n)^2} \equiv \overline{(n-\bar{n})^2}$ для розподілу Пуассона.

Задача 2.5. Припустимо, що типографічні помилки, допущені при наборі тексту, трапляються повністю випадково. Припустимо, що книга на 600 сторінок містить 600 таких помилок. Використайте розподіл Пуассона для обчислення ймовірності:

(a) що сторінка не містить помилок;

(b) що сторінка містить щонайменше три помилки.

Задача 2.6. Розглянемо частинки, що випромінюються радіоактивним джерелом протягом певного часового інтервалу t. Можна уявити, що цей часовий інтервал слід розділити на багато невеликих інтервалів довжини Δt. Оскільки $\alpha-$ частинки випромінюються у випадкові моменти, ймовірність, що ймовірність радіоактивного розпаду в будь-якому інтервалі часу Δt абсолютно не залежить від того, що відбувається в інші інтервали часу. Крім того, можна уявити, що інтервал Δt вибран достатньо малим, щоб ймовірність виникнення більше одного розпаду за час Δt була дуже малою. Це означає, що існує деяка ймовірність p, що один розпад ядра відбувся за час Δt (при $p \ll 1$, оскільки Δt був обраний досить малим), а $1-p$ - це ймовірність, що розпад за цей інтервал часу не відбувся. Кожен такий часовий проміжок Δt потім може розглядатися як незалежне випробування, і у підсумку протягом часу t відбулося $N = t/\Delta t$ таких випробувань.

(a) Покажіть, що ймовірність $W(n)$ n розпадів, що відбулися за час t, задається розподілом Пуассона.

(b) Припустимо, що сила радіоактивного джерела така, що середня кількість розпадів у хвилину дорівнює 24. Яка ймовірність отримання n розпадів за 10 секунд? Отримайте числові значення для всіх цілих значень n від 0 до 8.

Задача 2.7. Метал випаровують у вакуумі з гарячої нитки. Атоми металу потрапляють на кварцову пластину на деякій відстані один від одного і утворюють там тонку металеву плівку. Ця кварцова пластина підтримується при низькій температурі, так що будь-який атом металу, що потрапляє на неї, залишається на місці контакту без подальшої міграції. Можна вважати, що атоми металу з однаковою ймовірністю потрапляють на будь-який елемент площі пластини. Якщо розглядати елемент площі пластини розміром b^2 (де b - діаметр атома металу), покажіть, що кількість атомів металу, накопичених на цій площі, має розподілятися відповідно до розподілу Пуассона.

Припустимо, що випаровується достатньо металу для утворення плівки середньої товщини, що відповідає 6 атомним шарам.

(a) Яка частіна площі пластини взагалі не покрита металом?

(b) Яка частина покрита металевими шарами товщиною, відповідно, в 3 атоми та в 6 атомів?

Задача 2.8. Молекула в газі рухається між зіткненнями на однакові відстані з однаковою ймовірністю в будь-якому напрямку. Після N зіткнень, яким буде середньо-квадратичне переміщення $\overline{R^2}$ молекули від її початкової позиції?

Задача 2.9. До резистора R підключено акумулятор з загальною напругою V, внаслідок чого в цьому резисторі розсіюється потужність $P = V^2/R$. Сама батарея складається з N окремих елементів, з'єднаних послідовно, так що V просто дорівнює сумі електричних напруг v усіх цих елементів. Однак батарея вже стара, так що не всі елементи знаходяться у бездоганному стані, тобто існує ймовірність p, що напруга будь-якого окремого елемента має своє нормальне значення v, і ймовірність $1-p$, що напруга будь-якого окремого елемента дорівнює нулю. Окремі елементи статистично не залежать один від одного. За цих умов обчисліть середню потужність P, що розсіюється в резисторі, виразивши результат як співвідношення між N, v і p.

Задача 2.10. Розглянемо N подібних антен, що випромінюють лінійно поляризоване електромагнітне випромінювання з довжиною хвилі λ і швидкістю c. Антени розташовані вздовж осі x на відстані λ одна від одної. На осі x на великій відстані від антен знаходиться спостерігач.

Коли одна антена випромінює, спостерігач вимірює інтенсивність (тобто середню амплітуду електричного поля) I.

(a) Якщо всі антени отримують однакову фазу від одного генератора частоти $\nu = c/\lambda$, якою буде загальна інтенсивність, що вимірюється спостерігачем?

(b) Якщо всі антени випромінюють з однаковою частотою $\nu = c/\lambda$, але з повністю випадковими фазами, якою буде середня інтенсивність, що вимірюється спостерігачем? (Підказка: представити амплітуди векторами і вивести спостережувану інтенсивність із отриманої амплітуди.)

Задача 2.11. Радіолокаційні сигнали нещодавно були відбиті від планети Венера. Припустимо, що в такому експерименті імпульс електромагнітного випромінювання тривалістю τ направляється від Землі до Венери. Через час t (що відповідає часу, необхідному для того, щоб світло пройшло від Землі до Венери і знову назад) приймаюча антена на землі вмикається на час τ. Після цього повернене відлуння повинно бути зареєстроване на лічильнику запису, розміщеному на виході електронного обладнання за приймальною антеною, як дуже слабкий сигнал певної амплітуди a_s. Але коливальний випадковий сигнал (через неминучі коливання поля випромінювання у космічному просторі та через коливання струму, які завжди існують у самому чутливому приймальному обладнанні) також реєструється як сигнал амплітуди a_n на вимірювальному приладі. Таким чином, цей вимірювач реєструє загальну амплітуду $a = a_s + a_n$.

Незважаючи на те, що середнє значення $\bar{a}_n = 0$, оскільки a_n з однаковою ймовірністю може бути як позитивним, так і негативним, існує значна ймовірність того, що a_n набуває значень, що значно перевищують a_s; тобто, середнє-квадратичне значення амплітуди $(\overline{a_n^2})^{1/2}$ може бути значно більшим, ніж сигнал a_s, що ми намагаємося зареєструвати. Припустимо, що $(\overline{a_n^2})^{1/2} = 1000\, a_s$. Тоді флуктуації сигналу a_n створюють фоновий "шум", що робить спостереження за потрібним ехосигналом по суті неможливим.

З іншого боку, припустимо, що N таких радіолокаційних імпульсів надсилаються послідовно, а повні амплітуди a, зібрані на записувальному апараті після кожного імпульсу, складуються до відображення на лічильнику. Тоді отримана амплітуда повинна мати вигляд $A = A_s + A_n$, де A_n являє собою результуючу амплітуду шуму (з $\bar{A}_n = 0$), і $\bar{A} = A_s$ представляє собою отриману амплітуду ехосигналу. Скільки імпульсів потрібно відправити до $(\bar{A_n}^2)^{1/2}$, щоб ехосигнал можна було виявити?

Задачі до теми №3: Центральна гранична теорема

Задача 3.1. Монету кидають 400 разів. Знайдіть ймовірність отримання 215 орлів (підказка: використовуйте наближення Гаусса).

Задача 3.2. Припустимо, що ви перегортаєте 1000 монет.

(a) Яка ймовірність отримати рівно 500 орлів та 500 решок? (Підказка. Спочатку запишіть формулу для загальної кількості можливих результатів. Потім, щоб визначити “кратність" макростану 500-500, використовуйте наближення Стірлінга. Якщо у вас є просунутий калькулятор, який робить додаткове наближення Стірлінга непотрібним, помножте всі числа в цій задачі на 10, 100 або 1000, поки не стане необхідним наближення Стірлінга.)

(b) Яка ймовірність отримати рівно 600 орлів та 400 решок?

Задача 3.3. Необхідно прокласти набір телефонних ліній, щоб з'єднати місто A з містом B. У місті A є 2000 телефонів. Якщо кожному з телефонних користувачів A гарантувати миттєвий доступ для здійснення дзвінків на станцію B, знадобиться 2000 телефонних ліній. Але було б досить екстравагантно і неефективно. Припустимо, що в найзайнятішу годину дня кожен абонент в A вимагає, в середньому, телефонного зв’язку з B протягом двох хвилин, і ці телефонні дзвінки здійснюються випадковим чином. Знайдіть мінімальну кількість M телефонних ліній, які потрібно прокласти від A до B таким чином, щоб у час пік не більше ніж $1\ \%$ абонентів міста A не зміг отримати негайний доступ до телефонної лінії до B. (Підказка: використовуйте нормальний розподіл.)

Задача 3.4. Розглянемо газ N_0 невзаємодіючих молекул, що знаходиться у ємності об'ємом V_0. Сфокусуйте увагу на будь-якій частині V цього контейнера і позначте кількість молекул, що знаходяться у цій частині, як N. Кожна молекула з однаковою ймовірністю може бути розташована в будь-якому місці контейнера; отже, ймовірність того, що дана молекула розташована саме в об'ємі V, просто дорівнює V/V_0.

(a) Яке середнє число $\bar{N}$ молекул, розташованих в об'ємі V? Виразіть свою відповідь в термінах N_0, V_0 та V.

(b) Знайдіть відносну дисперсію $\overline{(N-\bar{N})^2}/\bar{N}^2$ кількості молекул, розташованих в об'ємі V. Виразіть свою відповідь через $\bar{N}$, V та V_0.

(c) Якою буде відповідь на питання (b), якщо $V \ll V_0$?

(d) Яке значення має приймати дисперсія $\overline{(N-\bar{N})^2}$, якщо $V \to V_0$? Чи збігається відповідь на питання (b) з цим очікуванням?

Задача 3.5. Припустимо, що в попередній задачі об'єм V такий, що $0 \ll V/V_0 \ll 1$. Яка ймовірність того, що кількість молекул у цьому об'ємі знаходиться між N і $N + dN$?

Задача 3.6. Розгляньте частинки ідеального газу, які розподіляються між двома відсіками з об'ємами V_A і V_B. Якщо загальний об'єм $V = V_A + V_B$, ми, очевидно, маємо ймовірність $P = V_A/V$ знайти окрему частинку у відсіку A, і ймовірність 1 - P знайти її у відсіку B. Нас цікавить розподіл ймовірностей знаходження n із N частинок у відсіку A, якщо відомо P.

(a) Напишіть функцію Matlab, яка підраховує суму довільного числа незалежних випадкових чисел $n_j \mid j = 1,..., N$, які можуть приймати лише одне з двох значень: 1 або 0 (з імовірністю P(1) = P, P(0) = 1 - P). Напишіть скріпт в Matlab, який викликає цю функцію T разів (для P = 0.5) і накреслює гістограму отриманої суми. Такий спосіб отримання розподілу називається методом Монте-Карло.

(b) Використовуючи вбудовані функції Matlab для біноміального і гаусового (нормального) розподілу, накресліть біноміальний і нормальний розподіл поверх розподілу, отриманого за допомогою метода Монте-Карло.

(c) Запустіть програму Matlab із задачі 3.6, використовуючи ряд випробувань T, що призводять до розумної точності результатів методу Монте-Карло, для наступних випадків:

   i) $N = 10, V_A = 0.5$ мм^2;

   ii) $N = 30, V_A = 0.85$ мм^2;

   iii) $N = 150, V_A = 0.03$ мм^2.

Прокоментуйте згоду між теорією та експериментом Монте-Карло, а також точність наближення розподілу Гаусса. У всіх випадках загальний обсяг V становить 1 мм^3.

Задачі до теми №4: Модель Ейнштейна

Задача 4.1. Для твердого тіла Ейнштейна з кожним із наведених нижче значень N і q:

(a) $N = 3, q = 4$;

(b) $N = 3, q = 5$;

(c) $N = 3, q = 6$;

(d) $N = 4, q = 3$;

(e) $N = 1$, q - довільне;

(f) N - довільне, $q = 1$;

запишіть усі можливі мікростани, порахуйте їх та перевірте комбінаторну формулу: $\Omega(N, q) = \dfrac{(q + N - 1)!}{q!(N - q)!}$.

Задача 4.2. Обчисліть кратність макростану твердого тіла Ейнштейна з 30 осциляторами та 30 одиницями енергії (не намагайтеся виписати всі мікростани!).

Задача 4.3. Для твердого тіла Ейнштейна з чотирма осциляторами ($N = 4$) і двома одиницями енергії ($q = 2$) позначте кожний можливий мікростан у вигляді серії точок і вертикальних ліній, як це робиться в лекції.

Задача 4.5. Використовуйте комп'ютер, щоб відтворити таблицю та графік для двох твердих тіла Ейнштейна, кожне з яких містить три гармонічні осцилятори - загалом шість одиниць енергії.

Потім змініть таблицю та графік, щоб показати випадок, коли одне тверде тіло Ейнштейна містить шість гармонічних осциляторів, а інше - чотири гармонічні осцилятори (загальна кількість енергетичних одиниць все ще дорівнює шести).

(a) Якщо припустити, що всі мікростани однаково вірогідні, який макростан є найбільш вірогідним, і чому дорівнює його ймовірність?

(b) Який макростан є найменш вірогідним і чому дорівнює його ймовірність?

Задача 4.6. Використовуйте комп'ютер, щоб створити таблицю та графік (як у задачі 4.5) для випадку, коли система складається з двох твердих тіл Ейнштейна A і B, які слабко взаємодіють одне з одним, якщо A містить 200 осциляторів, B містить 100 осциляторів, а в цілому в системі є 100 одиниць енергії.

(a) Який макростан є найбільш вірогідним, і чому дорівнює його ймовірність?

(b) Який макростан є найменш вірогідним і чому дорівнює його ймовірність?

Задача 4.7. Використовуйте комп'ютер, щоб створити таблицю та графік для двох взаємодіючих парамагнетиків з двома станами, кожен з яких містить 100 елементарних магнітних диполів.

За "одиницю" енергії візьміть кількість, необхідну для перегортання одного диполя зі стану "вгору" (паралельно зовнішньому полю) до стану "вниз" (антипаралельно зовнішньому полю).

Припустимо, що загальна кількість одиниць енергії відносно стану з усіма диполями, спрямованими вгору, дорівнює 80; цю енергію можна будь-яким чином розподілити між двома парамагнетиками.

(a) Який макростан є найбільш вірогідним, і чому дорівнює його ймовірність?

(b) Який макростан є найменш вірогідним і чому дорівнює його ймовірність?

Задача 4.8. Функція натурального логарифму ln визначається так, що $e^{\ln x} = x$ для будь-якого додатного числа x.

(a) Накресліть графік функції натурального логарифму;

(b) Доведіть тотожності $\ln ab = \ln a + \ln b$ і $\ln a^b = b \ln a$;

(c) Доведіть, що $\dfrac{d}{dx} \ln x = 1/x$;

(d) Виведіть корисне наближення $\ln(1+x) \approx x$, що дійсне при $|x| \ll 1$. Використовуйте калькулятор для перевірки точності цього наближення для $x = 0.1$ і $x = 0.01$.

Задача 4.9. Розваги з логарифмами:

(a) Спростіть вираз $e^{a \ln b}$ (тобто, запишіть цей вираз без використання логарифмів);

(b) Припустимо, що $b \ll a$. Доведіть, що $\ln(a+b) \approx (\ln a) + (b/a)$ (підказка: застосуйте наближення із пункта (d) попереднього завдання);

(c) Запишіть число $e^{10^{23}}$ у формі 10^x, для деякого x.

Задача 4.10. Використовуйте кишеньковий калькулятор, щоб перевірити точність наближення Стірлінга для $N = 50$. Також перевірте точність формули $\ln N! \approx N \ln N - N$.

Задача 4.11. Припустимо, що ви перегортаєте 1000 монет.

(a) Яка ймовірність отримати рівно 500 орлів та 500 решок? (Підказка: спочатку запишіть формулу для загальної кількості можливих результатів. Потім, щоб визначити "кратність" макростану 500-500, використовуйте наближення Стірлінга. Якщо у вас є просунутий калькулятор, який робить додаткове наближення Стірлінга непотрібним, помножте всі числа в цій задачі на 10, 100 або 1000, поки не стане необхідним наближення Стірлінга.)

(b) Яка ймовірність отримати рівно 600 орлів та 400 решок?

Задачі до теми №5: Теплова рівновага

Задача 5.1. Розглянемо систему з двох твердих тіл Ейнштейна, A і B, кожне з яких містить 10 осциляторів, і які сумарно містять 20 одиниць енергії. Припустимо, що ці тверді тіла слабко взаємодіють, а їх загальна енергія незмінна.

(a) Скільки різних макростанів доступно для цієї системи?

(b) Скільки різних мікростанів доступно для цієї системи?

(c) Якщо припустити, що ця система знаходиться в тепловій рівновазі, яка ймовірність, що вся теплова енергія міститься у твердому тілі?

(d) Яка ймовірність знайти рівно половину загальної енергії в одному з твердих тіл?

(e) За яких обставин ця система може проявляти незворотню поведінку?

Задача 5.2. Використовуйте методи цього розділу, щоб отримати формулу для кратності макростану твердого тіла Ейнштейна у границі “низької температури”, $q \ll N$.

Задача 5.3. Використовуйте наближення Стірлінга, щоб знайти приблизну формулу для кратності парамагнетика з двома станами. Спростіть цю формулу в границі $N_\downarrow \ll N$, щоб отримати $\Omega \approx (Ne/N_\downarrow)^{N_\downarrow}$. Цей результат повинен виглядати дуже подібним до вашої відповіді на завдання 3.17; поясніть, чому ці дві системи, у розглянутих границях, по суті однакові.

Задача 5.4. Використовуйте наближення Стірлінга, щоб показати, що кратність твердого тіла Ейнштейна для будь-яких великих значень N і q приблизно дорівнює:

$$\Omega(N,q) \approx \frac{\left(\frac{q+N}{q}\right)^q \left(\frac{q+N}{N}\right)^N}{\sqrt{2\pi q(q+N)/N}}.$$

Квадратним корінем у знаменнику часто можна знехтувати, але в деяких задачах він потрібен. (Підказка: спочатку покажіть, що $\Omega = \frac{N}{q+N}\frac{(q+N)!}{q!N!}$. Не нехтуйте $\sqrt{2\pi N}$ у формулі Стірлінга).

__Задача 5.5.__ Припустимо, що вам потрібно зменшити малюнок (див. нижче), поки вся горизонтальна шкала не впишеться на сторінку. Наскільки широким був би пік?

__Задача 5.6.__ Ця задача дає альтернативний підхід до оцінки ширини піку функції кратності для системи двох великих твердих тіл Ейнштейна.

(a) Розглянемо два однакових твердих тіла Ейнштейна, кожне з яких складається з N осциляторів, в тепловому контакті одне з одним. Припустимо, що загальна кількість енергетичних одиниць у об’єднаній системі становить $2N$. Скільки різних макростанів (тобто, можливих значень загальної енергії в першому твердому тілі) існує для цієї об'єднаної системи?

(b) Використовуйте результат задачі 5.4, щоб знайти приблизний вираз для загальної кількості мікростанів для об’єднаної системи. (Підказка: трактуйте об’єднану систему як єдине тверде тіло Ейнштейна. Не відкидайте факторів "великих" чисел, оскільки вам зрештою доведеться розділити два "дуже великих" числа, майже рівних одне одному. Відповідь: $2^{4N}/\sqrt{8\pi N}$.)

(c) Найбільш вірогідним макростаном для цієї системи є (звичайно) той, в якому енергія розподіляється однаково між двома твердими тілами. Використовуйте результат завдання 5.4, щоб знайти приблизний вираз для кратності цього макростану. (Відповідь: $2^{4N}/(4\pi N)$.

(d) Ви можете отримати приблизне уявлення про «різкість» функції кратності, якщо порівняти ваші відповіді на питання (b) і (c). Відповідь на (c) вказує вам висоту піку, а відповідь на (b) -

загальну площу під усім графіком. Як дуже грубе наближення уявіть, що форма вершини прямокутна. У цьому випадку, наскільки вона була б широкою? Яка частина із загальної кількості макростанів має достатньо великі ймовірності? Оцініть цю частину чисельно для випадку $N = 10^{23}$.

Задача 5.7. Розглянемо парамагнетик з двома станами, в якому є 10^{23} елементарних диполів, із загальною енергією, що дорівнює нулю, так що рівно половина диполів спрямовані вгору, а половина - униз.

(a) Скільки мікростанів є "доступними" для цієї системи?

(b) Припустимо, що мікростан цієї системи змінюється мільярд разів за секунду. Скільки мікростанів нарахує система за десять мільярдів років (вік Всесвіту)?

(c) Чи правильно сказати, що, якщо ви будете чекати досить довго, система з часом побуває у кожному "доступному" мікростані? Поясніть свою відповідь та обговоріть значення слова "доступний".

Задача 5.8. Для одного великого парамагнетика з двома станами функція кратності має дуже різкий пік при (приблизно) $N_{\downarrow} = N/2$.

(a) Використовуйте наближення Стірлінга, щоб оцінити висоту піку у функції кратності.

(b) Використовуйте методики цього розділу, щоб отримати формулу функції кратності в районі піку як функцію $x \equiv N_{\downarrow} - (N/2)$. Перевірте, чи відповідає ваша формула вашої відповіді на питання (a) у разі, коли $x = 0$.

(c) Наскільки широкий пік у функції кратності?

(d) Припустимо, що ви перегорнете 1 000 000 монет. Чи були б ви здивовані, отримавши 501 000 орлів і 499 000 решок? Чи були б ви здивовані, отримавши 510 000 орлів та 490 000 решок? Поясніть відповідь.

Розділ 2: Термодинаміка

Задачі до теми №6: Основні закони термодинаміки

<u>**Задача 1.**</u> Розглянувши роботу проти поверхневого натягу при нескінчено малій зміні радіусу краплі води радіуса R, знайдіть різницю між її внутрішним тиском і атмосферним тиском. Якою буде відповідна різниця тисків для мильної бульбашки?

<u>**Задача 2.**</u> Крапля води конденсується на твердій поверхні. Маємо три поверхні розділу, яким відповідають три сили поверхневого натягу: S_{aw}, S_{ws} та S_{as}, де a - повітря (air), w - вода (water), s - тверда поверхня (solid). Обчисліть кут контакта краплі з поверхнею та знайдіть умову створення водяної плівки (повне намокання).

<u>**Задача 3.**</u> У світі "великих" тіл домінуючою силою є гравітаційна сила, а для "малих" тіл домінуючою стає сила поверхневого натягу. При кімнатній температурі, поверхневий натяг води дорівнює $S_0 \approx 7 \times 10^{-2}$ Н/м. Оцініть типові розміри краплі води, що розділяють "велику" та "малу" поведінку? Наведіть кілька прикладів ситуацій, коли така шкала розмірів стає важливою.

<u>**Задача 4.**</u> Доведіть еквівалентність температурної шкали ідеального газу Θ і термодинамічної температурної шкали T, виконуючи цикл Карно для ідеального газу. Рівняння стану ідеального газу $PV = Nk_B\Theta$, і його енергія залежить лише від температури Θ, але ви не можете припускати, що $E \propto \Theta$. Ви можете скористатися наступним алгоритмом.

(a) Обчислити обмін теплом Q_H і Q_C як функції Θ_H, Θ_H і відношеннями об'ємів.

(b) Обчислити відношення об'ємів при адіабатичному процесі як функцію Θ.

(c) Показати, що $Q_H/Q_C = \Theta_H/\Theta_C$.

Задачі до теми №7: Термодинамічні потенціали

<u>Задача 1.</u> Доведіть наступні тотожності.

(a) Використовуючи перетворення Лежандра, дайте визначення термодинамічним потенціалам і виведіть рівняння Максвелла.

(b) Доведіть тотожність:

$$\frac{\partial S}{\partial T}\Big|_P = \frac{\partial S}{\partial T}\Big|_V + \frac{\partial S}{\partial V}\Big|_T \cdot \frac{\partial V}{\partial T}\Big|_P .$$

(c) Доведіть тотожність:

$$\frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V \cdot \frac{\partial T}{\partial V}\Big|_P \cdot \frac{\partial V}{\partial P}\Big|_T = -1.$$

<u>Задача 2.</u> Розгляньте газ с фіксованою кількістю молекул. Нам відомі експериментально C_P і C_V. Доведіть, що:

i) $$C_P - C_V = T\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_P \cdot \frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V .$$

ii) $$\frac{\partial E}{\partial V}\Big|_T = T\frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V - P.$$

iii) $$\frac{\partial E}{\partial P}\Big|_T = -T\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_P - P\frac{\partial V}{\partial P}\Big|_T .$$

iv) $$\frac{\partial G}{\partial V}\Big|_T = T\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\Big|_V .$$

v) $$\frac{\partial C_P}{\partial P}\Big|_T = -T\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\Big|_P .$$

<u>Задача 3.</u> Розгляньте ідеальний газ з рівнянням стану $PV = Nk_BT$ і постійною теплоємністю $C_V = Nk_B\alpha$, де α - деяке число.

(a) Покажіть, що $C_P = Nk_B(\alpha + 1)$.

(b) Покажіть, що ентропія $S = Nk_B \log(V/N) + Nk_B\alpha \log T + \text{const}$.

(c) Покажіть, що для адіабатичного процесу ($dS = 0$) виконуються рівняння $VT^{\alpha} = \text{const}$ і $PV^{\gamma} = \text{const}$, де $\gamma = C_P/C_V$.

Задачі до теми №8: Рівняння стану

Задача 1. Розгляньте процес Джоуля-Томсона (також відомий як процес Джоуля-Кельвіна), при якому газ під дією зовнішнього тиску просочується через пористий бар'єр.

(a) Покажіть, що ентальпія $H = E + PV$ зберігається.

(b) Знайдіть коефіцієнт Джоуля-Томсона $\mu_{JT} \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$ як функцію від T, V, C_P та $\alpha \equiv \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$.

(c) Обчисліть μ_{JT} для ідеального газу.

Задача 2. Рівняння стану накладає обмеження на залежність внутрішньої енергії системи від її термодинамічних координат.

(a) Використовуючи $dE = TdS - PdV$, покажіть, що рівняння стану ідеального газу гарантує, що його внутрішня енергія E може залежити лише від температури T.

(b) Якою буде найбільш загальна форма рівняння стану для термодинамічної системи, внутрішня енергія якої залежить лише від температури?

(c) Покажіть, що для газа Ван-дер-Ваальса теплоємність залежить лише від температури, $C_V = C_V(T)$.

Задачі до теми №9: Математичні методи термодинаміки

Задача 1. Які властивості якобіанів перетворюють їх на потужний інструмент математичного дослідження термодинамічних систем?

Задача 2. З'ясувати, як змінюється ентропія однорідної системи при її квазістатичному розширенні при постійному тиску. Чи залежить характер зміни ентропії від коефіцієнта теплового розширення $\alpha \equiv \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$?

<u>Задача 3.</u> Термодинамічна система розширюється таким чином, що її енергія U залишається постійною. Як змінюється при цьому температура системи? Чи буде такий процес оборотним?

<u>Задача 4.</u> Термодинамічна система розширюється таким чином, що її енергія U залишається постійною. Як змінюється при цьому тиск системи? Якою буде відповідь для ідеального газу?

Задачі до теми №10: Ентропія

<u>Задача 1.</u> Гарячий об'єкт A з температурою $T_A = 500\,\text{K}$ привели у тепловий контакт з холодним об'єктом B з температурою $T_B = 300$ K. Кількість тепла, що протягом певного часу перетікло від A до B, дорівнює 1500 Дж. Можна вважати, що тіла A та B достатньо великі, щоб їх температури майже не змінилися. Як зміняться при цьому ентропії об'єктів A та B, а також їх сумарна ентропія?

<u>Задача 2.</u> Кубік льоду з масою 30 г, що має температуру $0^\circ C$, залишили на кухонному столі, де він поступово тане. Температура кухні $25^\circ C$.

(a) Обчисліть зміну ентропії кубіку льоду, коли він перетворюється у воду при температурі $0^\circ C$.

(b) Обчисліть зміну ентропії води, що з'явилася після того, як кубік льоду розтанув, коли її температура зросла від $0^\circ C$ до $25^\circ C$.

(c) Обчисліть повну зміну ентропії кухні у цьому процесі, від танення кубіка льоду до встановлення термодинамічної рівноваги з водою, що залишилась після нього.

(d) Обчисліть повну зміну ентропії Всесвіту в цьому процесі. Чи буде повна зміна позитивною, негативною або нулем? Чи відповідає отримана відповідь вашим очікуванням?

Задача 3. Коли Сонце знаходиться високо у небі, воно дає у середньому приблизно 1000 Вт енергії на кожний квадратний метр Землі. Температура поверхні Сонця дорівнює 6000 K, а температура земної поверхні - приблизно 300 K.

(a) Оцініть ентропію, що кожний рік створюється сонцем завдяки потраплянню сонячних променів на квадратний метр земної поверхні.

(b) Припустимо, що на цьому квадратному метрі земної поверхні ви вирощуєте траву. Дехто може стверджувати, що ріст трави (як і будь-якої іншої живої істоти) порушує другий закон термодинаміки, тому що при цьому хімічні елементи створюють більш організовані структури з меншою ентропією. Як ви зможете на це відповісти?

Задача 4. Один біт комп'ютерної пам'яті - це деякий фізичний об'єкт, що може перебувати в одному із двох розрізнених станів, які ми можемо називати 0 та 1. Один байт - це вісім бітів, один кілобайт - це 1024 ($=2^{10}$) байт, один мегабайт - це 1024 кілобайт, а один гігабайт - це 1024 мегабайт.

(a) Припустимо, що ваш комп'ютер стирає або перезаписує один гігабайт інформації, не залишаючи ніяких даних про інформацію, що була записана. Поясніть, чому в цьому процесі створюється деяка мінімальна кількість ентропії, і обчисліть, скільки саме ентропії створюється у цьому процесі.

(b) Якщо ця ентропія скидається у навколишнє середовище при кімнатній температурі, скільки тепла при цьому виділяється? Чи можна назвати цю кількість тепла значною?

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. На електростанції, що виробляє електроенергію з потужністю 1 ГВт (10^9 Вт), парові турбіни вбирають пару при температурі $500°C$, а відпрацьоване тепло викидається у навколишнє середовище при $20°C$. а) Яка максимально можлива ефективність цієї установки? б) Припустимо, ви розробили новий матеріал для виготовлення труб і турбін, який дозволяє підвищити максимальну температуру пари до $600°C$. Скільки (приблизно) грошей можна заробити за рік, встановивши своє покращене обладнання, якщо продавати додаткову електроенергію за 5 центів за кіловат-годину? (Припустимо, що кількість палива, що споживається на заводі, не змінилася.)

<u>Задача 2.</u> Використовуючи перетворення Лежандра, дайте визначення термодинамічним потенціалам і виведіть усі рівняння Максвелла.

<u>Задача 3.</u> Розгляньте газ с фіксованою кількістю молекул. Використовуючи рівняння Максвелла, доведіть наступні тотожності:

i) $C_P - C_V = T \frac{\partial V}{\partial T}\Big|_P \cdot \frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V.$

ii) $\frac{\partial E}{\partial V}\Big|_T = T \frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V - P.$

iii) $\frac{\partial E}{\partial P}\Big|_T = -T \frac{\partial V}{\partial T}\Big|_P - P \frac{\partial V}{\partial P}\Big|_T.$

iv) $\frac{\partial G}{\partial V}\Big|_T = T \frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\Big|_V.$

v) $\frac{\partial C_P}{\partial P}\Big|_T = -T \frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\Big|_P.$

<u>Задача 4.</u> За допомогою якобіанів обчислити значення виразу:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P - \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_V.$$

<u>Задача 5.</u> У твердому монооксиді вуглецю кожна молекула CO має дві можливі орієнтації: CO або OC. Припускаючи, що ці орієнтації є абсолютно випадковими (це не зовсім вірно, але близько), обчисліть залишкову ентропію моля оксиду вуглецю.

<u>Задача 6.</u> Щоб прийняти гарну теплу ванну, ви змішали 50 літрів гарячої води $55°C$ з 25 літрами холодної води $10°C$. Скільки нової ентропії ви створили, змішавши воду?

Розділ 3: Теорія ансамблів

Задачі для практичного заняття №11:

<u>Задача 1.</u> Розгляньте парамагнетік в зовнішньому магнітному полі, що знаходиться у мікроканонічному ансамблі, як систему двох станів. Як залежить його ентропія від енергії? Як залежить його енергія від температури? Знайдіть теплоємність парамагнетика.

<u>Задача 2.</u> Розгляньте газ класичних осциляторів у мікроканонічному ансамблі. Знайдіть його ентропію як функцію температури. Визначте теплоємність газу.

<u>Задача 3.</u> Розгляньте газ квантових осциляторів у мікроканонічному ансамблі. Як залежить його енергія від температури?