МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ
Кафедра комп'ютерної фізики

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до кваліфікаційної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр

«Гідропружні коливання лопатей гідротурбін з використанням сингулярних інтегральних рівнянь»

Виконала: студентка 2 курсу, групи НФ-64
Лістрова Д.В.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Комп'ютерна фізика
Керівник: проф. Стрельнікова О.О.
Рецензент:

Харків – 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут комп’ютерної фізики та енергетики

Кафедра комп’ютерної фізики

Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магістр

Спеціальність: 105 Прикладна фізика та наноматеріали

Освітня програма: Комп’ютерна фізика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Костянтин НЄМЧЕНКО

підпис

«_____» _____ 2022 року

ЗАВДАННЯ

на кваліфікаційну роботу магістра студентці

Лістровій Дар’ї Вадимівні

1. Тема роботи «Гідропружні коливання лопатей гідротурбін з використанням сингулярних інтегральних рівнянь», керівник роботи проф. Стрельнікова Олена Олександрівна,

затверджені наказом по університету від 21 грудня 2021 № 0210 – 05/2288.

2. Строк подання студентом роботи 13 травня 2022 р.

3. Перелік питань, які потрібно розглянути:

Ознайомитися з існуючими наразі дослідженнями щодо динамічних характеристик робочих частин гідротурбін та покращення їх міцності. Дослідити шляхи використання сингулярних інтегральних рівнянь для розв’язання поставленої задачі. Розробити аналітичні формули для

обчислення гіперсингулярних інтегралів за заданою в системі функцій форми.

4.План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Ознайомлення з числовими методами розв’язання крайових задач механіки деформованого тіла
2	Формулювання проблеми гідро пружної взаємодії
3	Зведення задачі про гідро пружні коливання елементів конструкцій до сингулярних інтегральних рівнянь
4	Узагальнення числового методу розв’язання гіперсингулярного інтегрального рівняння.
5	Чисельний аналіз частот і форм вільних гідро пружних коливань консольних пластин
6	Визначення та формулювання висновків дипломної роботи

5. Дата видачі завдання 11 квітня 2022 р.

Студентка _____ Дар’я ЛІСТРОВА
підпис

Керівник роботи _____ Олена Стрельнікова
підпис

РЕФЕРАТ

Дар’я Лістрова «Гідропружні коливання лопатей гідротурбін з використанням сингулярних інтегральних рівнянь»
Кваліфікаційна робота магістра з прикладної фізики. – Х. Харківський національний університет імені В. Н.Каразіна, 2022. – 65 с.

У роботі проводиться критичний огляд існуючих досліджень щодо динамічних характеристик робочих частин гідротурбін та покращення їх міцності. Досліджені шляхи використання сингулярних інтегральних рівнянь для розв’язання поставленої задачі. Запропонована нова модифікація методу граничних елементів, яка заснована на використанні нових фінітних базисних функцій у вигляді кубічних многочленів на елементі в якості функцій форми. Застосовані гіперсингулярні рівняння. Отримані аналітичні формули для обчислення гіперсингурлярних інтегралів за заданою в системі функцій форми.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: СИНГУЛЯРНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЛОПАТІ ГІДРОТУРБІН, ГІДРОПРУЖНІ КОЛИВАННЯ, МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

ABSTRACT

Daria Listrova " Hydroelastic oscillations of hydroturbine blades using singular integral equations "

Qualification work of the master of applied physics. – Kharkiv. – V.N. Karazin Kharkiv national university, 2022. – 65 p.

The paper provides a critical review of existing research on the dynamic characteristics of the working parts of hydraulic turbines and improving their strength. The ways of using singular integral equations to solve the problem are investigated. A new modification of the boundary element method is proposed, which is based on the use of new finite basis functions in the form of cubic polynomials on the element as shape functions. Hypersingular equations are used. Analytical formulas for calculating hypersingular integrals according to the form given in the system of function functions are obtained.

KEY WORDS: SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS, HYDROTURBINE BLADES, HYDROELASTIC OSCILLATIONS, BOUNDARY ELEMENT METHOD

РЕФЕРАТ

Дарья Листрова «Гидроупругие колебания лопастей гидротурбин с использованием сингулярных интегральных уравнений»
Кваліфікаційна робота магістра з прикладної фізики. – Х.: Харьковский национальный университет имени В. Н.Каразіна, 2022. – 65 с.

В работе проводится критический обзор существующих исследований касательно динамических характеристик рабочих частей гидротурбин и увеличения их прочности. Исследованы пути использования сингулярных интегральных уравнений для решения поставленной задачи. Предложена новая модификация метода граничных элементов, которая основана на использовании новых финитных базисных функций в виде кубических многочленов на элементе в качестве функций формы. Использованы гиперсингулярные уравнения. Получены аналитические формулы для вычисления гиперсингулярных интегралов по заданной в системе функций формы.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ЛОПАСТИ ГИДРОТУРБИН, ГИДРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ, МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ЗМІСТ

ВСТУП 9

1. ОГЛЯД ОБЛАСТІ ДОСЛІДЖЕННЯ 14

1.1. Числові методи розв’язання крайових задач механіки деформованого тіла 14

1.2. Огляд конструкцій гідротурбін, матеріалів, з яких їх виготовлено 21

1.3. Аналіз діючого на наш час обладнання всередині країни із зазначенням строків заміни 22

2. ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ ПРО ГІДРОПРУЖНІ КОЛИВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ДО СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 25

2.1 Формулювання проблеми гідропружної взаємодії 25

2.2 Задача обтікання лопатей гідравлічних вітряних турбін 26

2.3 Метод заданих форм 27

2.4 Фундаментальний та сингулярний розв’язки рівняння Лапласу 28

2.5 Гіперсингулярні рівняння в задачах обтікання тонкої несучої поверхні 30

3. ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ГІПЕРСИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 32

3.1 Метод коллокацій 32

3.2 Проекційний метод 34

3.3 Метод граничних елементів 36

4. УЗАГАЛЬНЕННЯ ЧИСЛОВОГО МЕТОДУ РОЗВ’ЯЗАННЯ ГІПЕРСИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 42

4.1 Базис Лагранжа та функції форми 42

4.2 Функції форми 44

4.3 Модифікований метод граничних елементів для обчислення елементів матриці. 49

4.4 Метод числового розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння 51

4.5 Модифікований метод граничних елементів для обчислення елементів

матриці 53
5. ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ СЛАБО ЗІГНУТИХ ЛОПАТЕЙ ГІДРОТУРБІН 55
5.1 Постановка задачі про гідро пружні коливання пластин у воді 55
5.2 Чисельний аналіз частот і форм вільних гідро пружних коливань консольних пластин 58
ВИСНОВКИ 60
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 61

Вступ

За останні десятиріччя у інженерній практиці значного прогресу досягнуто в області створення високоефективних та надійних машин, конструкцій та споруд, які працюють в умовах підвищених технологічних навантажень під час взаємодії з середовищем. Тому основна вимога до них на етапі проектування – міцність та жорсткість, а також високі вимоги до точності розрахунків власних частот коливань лопатей. Такі розрахунки використовуються як для прогнозу строку служби для вже робочої конструкції, так і під час проектування нової. В останньому випадку необхідно прогнозувати велику кількість факторів, наприклад, середні напруження, що створюються відцентровою силою та статичним тиском води, змінні напруження, що викликаються зовнішнім навантаженням від тиску води. Все це потребує високоточних та оперативних методик і програм дослідження міцності та динаміки.

Коли інженер-дослідник будує кількісну математичну модель досліджуваної системи, зазвичай він починає з огляду поведінки її нескінченно малого елементу, використовуючи співвідношення між головними змінними. Це призводить до опису моделі за допомогою систем диференційних рівнянь. Реальні задачі механіки зазвичай моделюються диференціальними рівняннями у частинних похідних, які повинні задовольнятися в деякій області G. Розв’язок диференціального рівняння відшукується за певних умов, що задані на межі області G. Якщо область G тривимірна, то G представляє собою поверхню, що її обмежує. В двовимірних задачах G плоска область, а G– контур, що її обмежує.

Багато важливих технічних проблем зводяться до розв’язання крайових задач для диференціальних рівнянь. За допомогою крайових задач можна описати такі процеси як тепло- і масо перенос, дифузію, потік рідини, електромагнетизм, деформування твердого тіла. Для деяких крайових задач вдається знайти аналітичні розв’язки. Зазвичай в цих випадках геометрія області і граничні умови достатньо прості, а визначальні рівняння у

часткових похідних – лінійні. Отримано ряд аналітичних розв'язків, що відповідають точковому збуренню в однорідному нескінченому середовищі. Це збурення являє собою теплове джерело або сток (в задачах теплопровідності), відповідає зосередженій силі (в задачах механіки деформованого твердого тіла) або джерела, або стоку рідини в задачах гідромеханіки. Такі розв'язки прийнято називати фундаментальними (сингулярними) розв'язками. Вони мають достатню гладкість всюди, окрім точки збурення, в якій має місце особливість у поведінці розв'язку. В практичних задачах, що виникають в інженерній справі та прикладних науках, важко розраховувати на отримання аналітичних розв'язків, навіть якщо визначаючі диференційні рівняння лінійні, оскільки для таких задач характерна надзвичайна нерегулярність меж областей і (або) неоднорідність матеріалу, при цьому розв'язок задачі не може бути побудований за допомогою простих математичних функцій. В таких випадках шукають наближені чисельні розв'язки. Теоретичні роботи, спрямовані на розв'язання актуальних задач практики різноманітних областей виробництва, примножуються розвитком комп'ютерної техніки, що відкриває нові можливості для розв'язання складних інженерних задач, створення та розвитку чисельних методів механіки. В цій області у наш час отримані значні результати. Гіперсингулярні рівняння і інтеграли знаходять застосування в математичних та прикладних дослідженнях: під час розв'язання крайових задач теорії тріщин, задач дифракції електромагнітних хвиль на провідних екранах, задач про циркуляційне та безциркуляційне обтікання тонких профілей ті поверхонь. Відмітимо також, що розв'язки отриманих рівнянь мають ясний фізичний сенс. Наприклад, під час розв'язання задач про концентрацію напружень в тілах з тріщинами, шукана густина слугує для визначення коефіцієнтів концентрації напружень, в задачах гідро- та аеродинаміки із розв'язку гіперсингулярного рівняння визначають тиск рідини, діючий на даний елемент конструкції. Ці обставини

надають особливу привабливість методу гіперсингулярних інтегральних рівнянь.

Такий метод буде застосовано в роботі для визначення частот та форм коливань моделей лопатей гідротурбін.

У процесі експлуатації лопаті гідротурбіни відчувають навантаження з боку середовища (рідини), з яким вони взаємодіють. Таке навантаження призводить до їх вимушених коливань. Якщо власні частоти коливань лопатей та частоти коливань діючих сил близькі, то існує ймовірність виникнення резонансу, що призводить до поломки обладнання. Тому основна вимога до нього на етапі проектування – міцність та жорсткість, а також високі вимоги до точності розрахунків власних частот на коливань лопатей.

Такі розрахунки використовуються як для прогнозу строку служби для вже робочої конструкції, так і під час проектування нової. В останньому випадку необхідно прогнозувати велику кількість факторів, наприклад, середні напруження, що створюються відцентровою силою та статичним тиском води, змінні напруження, що викликаються зовнішнім навантаженням від тиску води. Все це потребує високоточних та оперативних методик і програм дослідження міцності та динаміки.

В даній роботі використовуються гіперсингулярні інтегральні рівняння. Багато проблем у науці та техніці, зокрема, в гідро- та аеродинаміці зводяться до інтегральних рівнянь, бо для розв’язання деяких типів задач їх використовувати значно зручніше за диференціальні. Інтегральне рівняння містить всю необхідну інформацію про задачу та для нього не потрібно додаткових умов.

Актуальність теми. Останнім часом набуває актуальності проблема відновлення обладнання, що діє довгий час, або його повна заміна. А зріст рівня вимог до надійності та ефективності електростанцій потребує модернізації гідротурбінного обладнання на гідроелектростанціях. Наприклад, в Україні, остання модернізація за даними Вікіпедії проводилася у Дністровський ГЕС аж у 2015 році. Далі йде модернізація ДніпроГЕС 2008-

2011рр., а решта ГЕС взагалі працює на обладнанні до 2000 року. В наших інтересах зробити строки використання нового обладнання довшими завдяки правильному проектуванню та розрахункам його динамічних характеристик.

Одночасно з цим завдяки правильним оцінкам навантажень та відповідним розрахункам ми маємо можливість створити більш потужне обладнання для подальшої надійної служби.

Для досягнення поставленої мети визначені задачі:

Ознайомитися з існуючими наразі дослідженнями щодо динамічних характеристик робочих частин гідротурбін та покращення їх міцності. Дослідити шляхи використання сингулярних інтегральних рівнянь для розв'язання поставленої задачі. Розробити аналітичні формули для обчислення гіперсингулярних інтегралів за заданою в системі функцій форми.

Об'єкт дослідження Вільні коливання конструкцій, що взаємодіють з рідиною.

Предмет дослідження Використання сингулярних інтегральних рівнянь з метою дослідження гідропружних коливань лопатей гідротурбін у рідині.

Методи дослідження Методи граничних та скінченних елементів.

Наукова новизна одержаних результатів

1. Запропонована нова модифікація методу граничних елементів, яка заснована на використанні нових фінітних базисних функцій у вигляді кубічних многочленів на елементі в якості функцій форми. Перевага таких функцій є в тому, що вони призводять до автоматичного виконання заданих умов на границі області інтегрування.

2. Застосовані гіперсингулярні рівняння. Їх перевага в тому, що невідомий тиск є шуканою густиною гіперсингулярного інтегралу, що дозволяє уникнути додаткових наближених обчислень.

3. Отримані аналітичні формули для обчислення гіперсингурлярних інтегралів за заданою системой функцій форми

4. Отримані чисельні результати, які будуть слугувати як тестові дані для аналізу коливань реальних пластинчатих та оболонкових конструкцій, оскільки використані ефективні та високоточні методи обчислення

Практичне значення отриманих результатів Отримані в роботі результати будуть використані при проектуванні елементів гідротурбінного обладнання. Комп’ютерне моделювання дозволить скоротити кількість коштовних натурних експериментів.

Структура та обсяг роботи Робота складається зі вступу, п’яти розділів, списку використаних літературних джерел (49 найменувань на 5 стор.) висновків і додатку. Робота містить у собі 46 сторінок основного тексту, 2 таблиці і 19 рисунків.

1. ОГЛЯД ОБЛАСТІ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Числові методи розв'язання крайових задач механіки деформованого тіла

Числові методи розв'язання крайових задач механіки твердого тіла, що деформується, умовно можна поділити на два великих класи: перший вимагає апроксимації розв'язку у всій області G, другий – тільки на границі ∂G області G. До першого класу відносяться методи скінченних різниць та скінченних елементів, до другого методи граничних інтегральних рівнянь і граничних елементів.

Одним з перших наближених методів, який було використано для розв'язку крайових задач, був метод скінченних різниць [1]. Сутність цього методу полягає в наступному: область безперервної зміни аргументу замінюється скінченною сукупністю точок (вузлів), які називають сіткою. Шукані функції, які ми розглядаємо в даних точках, називаються сітковими функціями. Похідні, що входять у диференційні рівняння і крайові умови, замінюються тими або іншими різницевими співвідношеннями. Для визначення невідомих значень функцій у вузлових точках отримується система алгебраїчних рівнянь. Методи скінченних різниць привабливі тим, що їх в принципі можна прикласти до будь-якої системи диференційних рівнянь, однак врахування граничних умов задачі часто є громіздкою операцією, яка складно програмується.

В даний час найбільш популярним є підхід, що полягає в характерному для фізики розбиттю тіла на елементі скінченних розмірів. Кожний елемент наближено описує поведінку малої області тіла, яку він представляє. Умови безперервності накладаються зазвичай у вузлах елементів. МКЕ вперше був описаний в роботі А.Хренокоффа [2]. Подальша розробка методу була зроблена Р.Курантом [3], Дж.Аргиросом [4], М.Тернером, Р.Клаффом, Г. Мартином, Л.Топпом [5]. Потім з'явились основні монографії О.Зенкевича [6], Г.Стренга, Дж.Фікса [7], Р.Галлагера [8], А.С.Сахарова та І.Альтенабаха [9] та ін. Діапазон застосовності МКЕ, його ефективність та легкість

врахування граничних умов зробили його одним із найбільш популярних методів розв’язання крайових задач механіки суцільного середовища. Серед недоліків методу слід зазначити, по-перше, необхідність дискретизації всього об’єкта дослідження, що неминуче призводить до великої кількості скінченних елементів, по-друге, вірогідність виникнення нереальних розривів значень фізичних величин (що виражаються через старші похідні від шуканих функцій) між суміжними елементами.

Альтернативним підходом до розв’язання диференційних рівнянь з частинними похідними є зведення їх до інтегральних рівнянь. Це один з найбільш ефективних методів розв’язку крайових задач механіки твердого тіла, що деформується, і математичної фізики. Під час застосування цього методу дані диференційні рівняння інтегрують будь-яким способом або перед переходом до дискретизації, або перед введенням апроксимації. Можна очікувати, що в результаті такої операції буде отримана система рівнянь, що включає значення змінних тільки на границі області. Звідси випливає, що будь-яка схема дискретизації призведе до розбиття на елементи лише поверхонь (контурів), що обмежують дану область *G*. Звідси і прийшла назва методу граничних рівнянь [10]. Цей метод часто називають також методом потенціалу [11]. Сам метод зведення крайових задач до граничних інтегральних рівнянь є достатньо простим: необхідно мати лише фундаментальний розв’язок диференційних рівнянь, щоб отримати граничні інтегральні рівняння для визначення невідомих густин потенціалів [12, 13] шляхом задоволення граничних умов. Головна перевага вказаного методу полягає у зниженні на одиницю розмірності вихідної крайової задачі.

Спочатку методи граничних інтегральних рівнянь розглядались як деякий вид аналітичних методів, що не пов’язані з наближеними обчисленнями. Ці аналітичні методи набули популярності завдяки фундаментальним роботам Н.І. Мусхелишвили [14], С.Г. Міхліна [15], В.Д.Купрадзе [16] і В.І.Смирнова [17], але вони не набули популярності серед інженерів.

Не можна сказати, що скорочення геометричної розмірності на одиницю, що досягаються переходом до граничних інтегральних рівнянь, не привертало уваги своїми прикладними можливостями. Чітке розуміння перспектив розрахункових методів, що засновані на застосуванні граничних інтегральних рівнянь, властиве роботам Н.І.Мусхешвили та його учнів А.Я.Горгадзе і А.К.Рухадзе [18, 19]. Ці статті містять всі компоненти того методу, який нині має назву «метод граничних елементів». Тут використовуються розбиття границі на елементи, апроксимація шуканих функцій у межах цих граничних елементів, зведення інтегрального рівняння до лінійної алгебраїчної системи рівнянь, її розв'язок з подальшим визначенням невідомих функцій на елементах границі, обчислення компонент НДС у внутрішніх точках тіла.

Однак у ті роки трудомісткість розрахунків явно не сприяла розвитку метода.

Граничні інтегральні рівняння можна умовно класифікувати за особливостями, які виникають в ядрах інтегральних рівнянь за $|x - y| \to 0$, де вектор x визначає точку, у якій досліджується поле, а y являє собою змінну інтегрування.

Рівняння з гладкими ядрами або з ядрами, які можна підсумовувати, називаються рівняннями Фредгольму першого і другого роду.

Якщо особливість ядра інтегрального рівняння співпадає з розмірністю області інтегрування, то інтегральні рівняння називаються сингулярними. Інтеграли в цих рівняннях існують у сенсі головного значення за Коші. Загальна теорія одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь розроблена у відомих монографіях Н.І.Мусхешвили [14], С.Г. Міхліна [15]. Завдяки їх роботам теорія одновимірних сингулярних рівнянь набула завершеного вигляду.

Цього не можна сказати про теорію двовимірних сингулярних рівнянь. Відомі також фундаментальні розв'язки для великого класу диференціальних рівнянь, що дозволяє будувати інтегральні уявлення та зводити дані задачі до

інтегральних рівнянь.

Найбільш простим та частим на практиці є фундаментальний розв’язок, що являє собою ядро ньютонівського потенціалу, яке задовольняє гармонічному рівнянню. Розв’язки не тільки рівняння Лапласа, а ще й багатьох бігармонічних рівнянь представляються через комбінації гармонічних потенціалів. Цим досягається можливість зведення бігармонічних крайових задач до граничних інтегральних рівнянь типу ньютонівського потенціалу. У науковій літературі велику увагу приділено теоретичному розгляду двовимірних інтегро-диференційних рівнянь типу ньютонівського потенціалу на різноманіттях з краєм. Під різноманіттям з краєм розуміється поверхня інтегрування, яка є частиною поверхні Ляпунова, що обмежена гладким контуром.

Доволі добре вивчені інтегральні рівняння, які задані на замкнутій поверхні, що має нерегулярні точки. Теоретичні питання, що стосуються цих рівнянь, розв’язуються у рамках теорії псевдодиференційних операторів [20], що наразі активно розвивається. За допомогою таких операторів у [21] досліджується поведінка інтегро-диференційного рівняння у околі нерегулярних точок різного типу.

Більш складними виявились задачі, в яких інтегральне рівняння задано лише на частині замкненої поверхні. Довгий час зусилля математиків, що займаються такими інтегральними рівняннями, були напрямлені на те, аби шляхом спеціальних перетворень привести дані рівняння до інтегральних рівнянь типу Фредгольму. Однак отримані при цьому результати не змогли задовольнити потребам практики у повному обсязі, так як виявились малоефективними для чисельного розв’язку.

Вперше інші шляхи до розв’язку таких рівнянь почали шукати дослідники, що займалися розв’язанням контактних задач теорії пружності. В.І. Моссаковський, Н.Є.Качаловська, С.С.Голикова [22] запропонували такі способи розв’язання контактних задач, які не потребували зведення їх до інтегральних рівнянь типу ньютонівського потенціалу.

Ще одною областю механіки, яка сприяла розвитку інтересу до сингулярних інтегральних рівнянь, є механіка крихкого руйнування. Було встановлено, що розв'язки певного класу сингулярних рівнянь дозволяють знайти так звані коефіцієнти інтенсивності напружень, які характеризують стійкість тіла по відношенню до розповсюдження в ньому тріщини.

Задачі механіки руйнування сприяли інтенсивному розвитку теорії одновимірних сингулярних рівнянь з ядром типу Коші [23]. Найбільш повний виклад цієї теорії був даний Н.І. Мусхелишвілі у [14]. Розвинуті у вказаних роботах методи дозволили розв'язувати багато двовимірних задач механіки руйнування. Однак відсутність ефективних числових методів розв'язання двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь надавало стримуючий вплив на розвиток досліджень тривимірних задач механіки руйнування для тіл з тріщинами.

Чисельні методи розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь і методи обчислення сингулярних інтегралів почали розвиватися значно пізніше. Перші роботи з'явилися у 30-х роках [24]. Але тільки з появою потужних обчислювальних машин метод потенціалу почав використовуватися для чисельного розвитку крайових задач. Обзори сучасного стану чисельних методів розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь надані в [25-27].

У випадку, коли особливість ядра інтегрального рівняння більше за розмірність області інтегрування, інтегральні рівняння називаються гіперсингулярними. Інтеграли з такими особливостями вперше ввів Ж.Адамар [6] під час дослідження задачі Коші для рівнянь гіперболічного типу. Ці його дослідження були стимулом до створення теорії узагальнених функцій. З позиції цієї теорії інтеграли типу Адамара, а також і інші класи розбіжних інтегралів розглянуто в роботах [354, 355, 365, 370, 409, 414]. Такі інтеграли називаються також скінченно-частковими або інтегралами у сенсі скінченної частини за Адамаром.

Методи, що приводять до появи гіперсингулярних інтегралів при розв'язанні крайових задач математичної фізики, останнім часом достатньо

часто використовуються, оскільки клас прикладних задач, які можна звести до гіперсингулярних рівнянь, дуже широкий. Зокрема, до таких рівнянь зводяться контактні задачі теорії пружності, задачі про визначення стаціонарних температурних полів у тілах зі сторонніми включеннями та тріщинами (розрізами), задачі про визначення концентрації напружень в тілах, що містять тріщини, задачі про визначення аеродинамічних навантажень на тонкі несучі поверхні, деякі задачі дифракції, та ін.

Необхідно відмітити, що існує декілька підходів до інтерпретації гіперсингулярних інтегралів.

Під час використання першого підходу, обчислюють пряме значення розбіжного інтегралу та вводять спеціальне визначення розбіжного інтегралу у сенсі головного значення (інтеграли типу Коші) або скінченної частини (інтеграли типу Адамара). Відмітимо, що вперше спосіб регуляризації розбіжних інтегралів, який полягає у виділенні їх скінченної частини, вказав Ж.Адамар [28]. Потім було показано, що так визначена скінченна частина відповідає певному фізичному сенсу задач, які приводяться до гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Виділення скінченної частини розбіжних інтегралів покладено в основу побудови квадратурних формул для їх чисельного інтегрування.

Під час використання другого підходу поняття розбіжного інтегралу не вводять. Сингулярні інтегральні рівняння при цьому розглядають як граничні значення нормальної похідної гармонічного потенціалу подвійного шару (оператора напружень від узагальненого потенціалу подвійного шару в теорії пружності). Саме цей підхід застосований до обчислення інтегралів в роботах В.А.Щербіни [29]. У [30] аналогічний підхід застосований до обчислення гіперсингулярних інтегралів під час розв’язання задач про визначення сил тиску рідини на пружні елементи конструкцій, а в [31] під час розв’язання задач про концентрацію напружень в тілі з тріщиною в пружно-пластичному формулюванні.

З точки зору практики особовий теоретичний і практичний інтерес

представляє проблема взаємодії твердих та пружних тіл з рідиною. Багато прикладних задач механіки тіла, що деформується, приводять до необхідності вивчення сумісного руху твердих рідких середовищ та середовищ, що деформуються.

На основі проведеного аналізу літературних джерел можна зробити наступні висновки.

Розв’язання великої кількості практично важливих задач механіки твердого тіла, що деформується, описується диференціальними рівняннями і системами диференціальних рівнянь, заданих у областях з розрізами. В таких задачах доцільно застосовувати методи теорії потенціалу. Цей підхід приводить до граничних інтегральних рівнянь та дозволяє на одиницю знизити розмірність задачі. Суттєве зниження розмірності дозволяє вивчати задачі, які раніше не розв’язувались у тривимірному формулюванні. Однак у ряді задач отримані інтегральні рівняння є сингулярними і гіперсингулярними, і в них слід спеціальним чином коректно визначити інтеграли. Шукані густини в отриманих рівняннях мають ясний фізичний сенс, що надає особливу привабливість такому підходу. Існують також чималі складності, пов’язані з чисельною реалізацією розглянутих гіперсингулярних рівнянь. Аналітично обчислити скінченні частини отриманих інтегралів вдається лише в деяких випадках. Для гіперсингулярних інтегралів не тільки не досліджена похибка, що виникає при такій апроксимації, а й не обґрунтована правомірність заміни області інтегрування елементом дотичної площини(прямої).

Багато авторів обмежуються вирішенням модельних задач. Ці дослідження важливі з погляду розвитку теорії, а розв'язані задачі можуть бути тестовими для апробації чисельних методів інженерного розрахунку.

Разом з цим є широкий клас інженерних задач механіки твердого тіла, що деформується, які можуть бути ефективно розв’язані з використанням методу граничних інтегральних рівнянь. До них відносяться такі різноманітні задачі як визначення частот і форм вільних коливань лопатей поворотно-

лопатних і радіально-осьових гідротурбін у воді, дослідження напружень, що виникають під час дії вітряного навантаження на лопаті вітроенергетичної установки, просторові задачі теорії тріщин. Ці задачі, проте, подібні з точки зору математики: лопать у воді і тріщина у пружному тілі моделюються розривами суцільності середовища. Це дозволяє зводити задачі різних класів до практично одних і тих самих гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Звідси випливає актуальність розвитку чисельних методів розв'язання таких рівнянь, особливо в задачах гідро- та аеро-пружності. Існують лише наближені підходи оцінки частот та форм коливань просторової конструкції. Тому актуальною задачею залишаються розробка методу розрахунку частот і форм вільних коливань конструкції у воді в тривимірному формулюванні.

1.2. Огляд конструкцій гідротурбін, матеріалів, з яких їх виготовлено

Гідротурбіна (ГТ) – гідравлічна турбіна, водяна турбіна, ротаційний двигун, що перетворює механічну енергію води (енергію положення, тиску та швидкісну) в енергію валу, що обертається. Основним робочим органом гідротурбіни є робоче колесо, в якому і відбувається перетворення енергії. Тому геометричні розміри гідротурбіни характеризуються номінальним діаметром робочого колеса.

За принципом дії гідротурбіни поділяються на два типи:

1. Активна

1.1. Ківшева

2. Реактивна

2.1. Осьова

2.2. Діагональна

2.3. Радіально-осьова

Тип гідротурбін обирається з огляду умов їх роботи. Розглядаються напір, енергетичні та кавітаційні показник та рівень к.к.д. в заданому діапазоні навантажень.

В активних гідротурбінах вода підводиться через сопла, а тиск перед робочим колесом і за ним дорівнює атмосферному.

В реактивних гідротурбінах тиск перед робочим колесом може бути більшим за атмосферний, а за ним може бути і більше, і менше. Вода в них підводиться через направляючий апарат [40].

При виборі матеріалів гідротурбін потребується компромісне рішення. З одного боку, він повинен забезпечувати максимальну статичну міцність деталі за усіх можливих навантажень, високу кавітаційно-ерозійну міцність та високий строк служби. З іншого ж боку, звісно, ми прагнемо найбільш дешевших металів та сплавів і максимально скороченого циклу виготовлення гідротурбіни взагалі. Також необхідно враховувати умови транспортування деталей гідротурбіни на місце монтажу та особливості її зборки. [41]

Підбір матеріалів та вимоги до конструювання залежать від типу та підтипу гідротурбін, які потребується виготовити. Наприклад, для турбін високої потужності, що працюють при напорах більше 100 м, потребується виготовлення робочих коліс з нержавіючої сталі, що забезпечить міцність і захист від кавітаційної ерозії. Також для сталей існує вимога зварюватися без або з мінімальним підігріванням.

Для гідротурбін, що працюють з напорами менш за 100м, можливе виготовлення робочих коліс з менш міцних і не кавітаційностійких нелегованих сталей, які в процесі виготовлення облицьовуються тонколистовою нержавіючою сталлю за допомогою зварювання вибухом [42].

1.3. Аналіз діючого на наш час обладнання всередині країни зі зазначенням строків заміни

Згідно інформації з державного сайту щодо гідроелектростанцій, на наш час потенціал гідроенергетики використовується на 60%. Значною частиною з них є робота Дніпровського каскаду та інших великих ГЕС.

За даними НКРЕКП за 2017 рік в Україні працює більше за 120 ГЕС, включаючи малі.

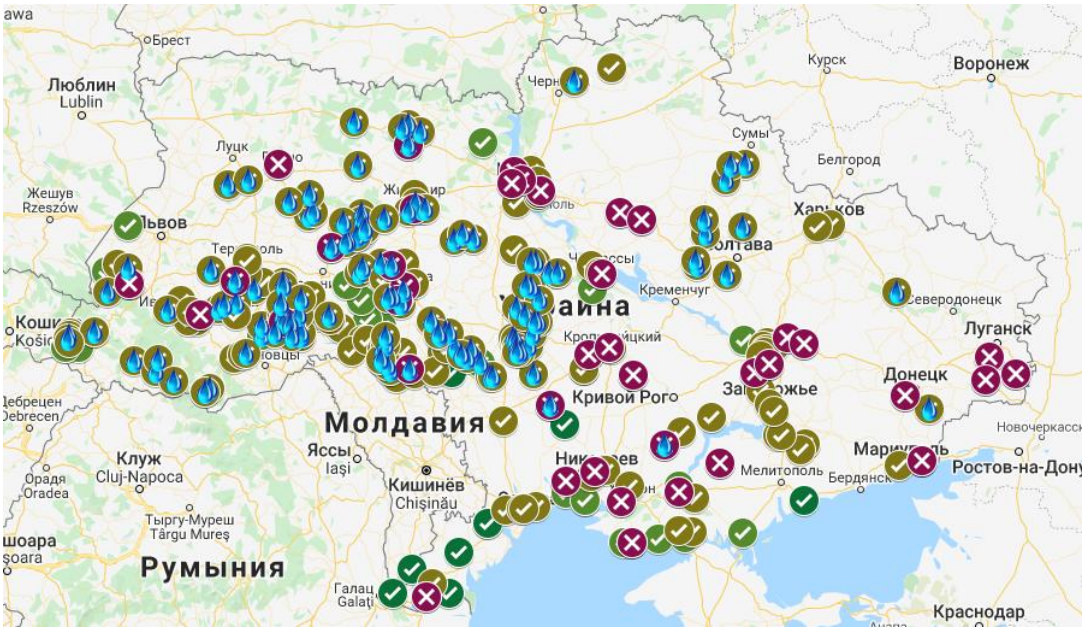


Рис. 1.2 Крапельками позначено діючі ГЕС

Що стосується строків заміни, то заводами для гідротурбін встановлюється строк служби 30 років. Але не обов’язково що через 30 років турбіну потрібно замінювати: проводиться діагностика стану обладнання, за необхідності проводиться заміна деяких його частин. Зазвичай, такими методами строк служби подовжується приблизно на п’ять років. Після чого знов проводяться діагностика та ремонти.

1.4. Аналіз літературних джерел

Інтерес до дослідження власних частот під час взаємодії конструкції з рідиною проявляється у багатьох роботах. Проблема є актуальною не тільки у дослідженні динамічних характеристик лопатей гідротурбін. Актуальними питаннями сьогодення залишаються проблеми обчислення міцносних та динамічних характеристик вказаного обладнання з метою уточнення залишкового ресурсу та забезпечення надійності та безпеки конструкцій при експлуатації. Одним з таких питань є визначення частот та форм вільних коливань конструктивних елементів при врахуванні взаємодії з водним або

повітряним середовищем [36].

Методи скінчених та граничних елементів використовують зокрема в роботах [36], [44], [45], тощо. Це найбільш розповсюджені серед сучасних чисельних методів. В магістерській роботі наведено нову модифікацію методу граничних елементів, що заснована на використанні нових фінітних базисних функцій у вигляді кубічних многочленів на елементі в якості функцій форми. Перевага таких функцій є в тому, що вони призводять до автоматичного виконання заданих умов на границі області інтегрування і дають змогу отримати високу точність.

2. ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ ПРО ГІДРОПРУЖНІ КОЛИВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ДО СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Формулювання проблеми гідропружної взаємодії. Задача обтікання лопатей вітряних та гідравлічних турбін.

Значна кількість сучасного енергетичного, машинобудівного та нафтохімічного обладнання працює в умовах підвищених технологічних навантажень. Елементи конструкцій піддаються дії короткочасних силових та температурних впливів, функціонують при взаємодії з оточуючим середовищем. Актуальними питаннями сьогодення залишаються проблеми обчислення міцносних та динамічних характеристик вказаного обладнання з метою уточнення залишкового ресурсу та забезпечення надійності та безпеки конструкцій при експлуатації.

В сучасному світі багато обладнання відчуває значні технологічні навантаження. Воно піддається дії силових та температурних впливів та взаємодіє з оточуючим середовищем. На сьогодні існує питання визначення міцносних та динамічних характеристик такого обладнання задля уточнення строків його експлуатації та надійності.

Проблема гідропружної взаємодії є актуальною при повній або частковій взаємодії такого обладнання з водним або повітряним середовищем. Під час роботи обладнання відчуває навантаження з боку потоку, що викликає вимушені коливання. При близькості власних частот коливання в обладнанні та частот збуджуючих сил може виникнути резонанс, що призводить до несправності в роботі. Таким чином, одним із актуальних питань є визначення власних частот та форм вільних коливань елементів конструкцій під час взаємодії з водним або повітряним середовищем. На їх визначення значно впливають гідро-пружні ефекти, які варто враховувати.

Існує два класи проблем такої взаємодії: проблеми визначення вищеозначених факторів під час однобічної взаємодії з середовищем та під час двобічного контакту.

2.2 Задача обтікання лопатей гідравлічних вітряних турбін

Для розрахунку частот та форм вільних коливань лопатей гідравлічних та вітряних турбін необхідно вирішити допоміжну задачу визначення перепаду тиску зі сторони рідини на змочені поверхні.

Будемо моделювати лопаті тонкими несучими поверхнями. Швидкість рідини відчуває розрив, що розповсюджується по поверхням лопаті і вихрової пелени за нею.

Формулювати задачу будемо наступним чином: розглянемо задачу обтікання тонкої несучої поверхні потоком ідеальної нестисливої рідини. Уявимо, що всюди зовні несучої поверхні S_1 та вихрового сліду S_2 за нею потік рідини є безвихровим. Тоді існує потенціал **збурених** швидкостей $\Phi(x, t)$ що задовольняє рівнянню Лапласа.

$$\Delta\Phi = 0, \quad \boldsymbol{V} = grad\Phi \tag{2.1}$$

Для визначення тиску рідини на змочені поверхні слугує інтеграл Коши-Лагранжу, що може бути представлений в наступному вигляді:

$$P = -\rho_2 \left[\frac{\partial \Phi^+(x,y,z,t)}{\partial t} - \frac{\partial \Phi^-(x,y,z,t)}{\partial t}\right] - (grad(\Phi^+ - \Phi^-) \cdot \boldsymbol{V}_0) \tag{2.2}$$

де ρ_2 – густина рідини

$\boldsymbol{V}_0$ – швидкість **незбуреного** потоку

Φ^+ і Φ^- – граничні значення потенціалу швидкостей Φ за прямування точки спостерігання до вихрової поверхні вздовж нормалей $\boldsymbol{n}^+$ і $\boldsymbol{n}^-$ відповідно.

Необхідно, щоб на несучій поверхні S_1 була виконана умова непротікання

$$\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial \boldsymbol{n}^{\pm}} = (\boldsymbol{V}_0, \boldsymbol{n})_+ = \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}, \quad x \in S_1 \tag{2.3}$$

а на поверхні вихрового сліду S_2 – умова відсутності перепаду тисків.

$$\frac{\partial(\Phi^+ - \Phi^-)}{\partial t} - (grad(\Phi^+ - \Phi^-)\boldsymbol{V}_0) \quad = 0, \quad x \in S_2 \tag{2.4}$$

де w – прогин деформованого елементу.

Будемо вимагати також виконання умови затухання **збурених** швидкостей на нескінченності (умова Зоммерфельда)

$$grad\Phi|_\infty = 0 \tag{2.5}$$

Визначивши потенціал швидкостей за допомогою інтегралу Коши-Лагранжу, знайдемо перепад тиску рідини на поверхню елементу.

2.3 Метод заданих форм

Тиск є сумою пружних та масових сил, як функцій від вектору переміщення:

$$\mathbf{L(U)+M(U)=P}_{\boldsymbol{a}} \tag{2.6}$$

де **L**, **M** – оператори пружних та масових сил

$\mathbf{P}_{\boldsymbol{a}}$ – тиск рідини на деформований елемент конструкції, який ми розглядаємо

U = (u_1, u_2, w) – вектор-функція переміщень.

Розглянемо задачу малих гармонічних коливаннях пружного елементу конструкції в потоці. Представимо вектор **U** в формі $\mathbf{U} = \mathbf{u}e^{i\Omega t}$ де Ω – частота, а **u** – власна форма коливань елемента в рідині, який ми розглядаємо.

Будемо шукати власні форми коливань в рідині у вигляді

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{N} c_k \boldsymbol{u}_k \tag{2.7}$$

де $\mathbf{u}_k$ – власні форми коливань в вакуумі

c_k– невідомі координати.

Іншими словами, форму коливань елементу, що деформується, в рідині визначимо як лінійну комбінацію власних форм його коливань в вакуумі.

Мають місце наступні співвідношення:

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u_k}) = \Omega_k^2 \boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}_k), \quad \left(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}_k), \boldsymbol{u}_j\right) = \delta_{kj}$$

Звідси:

$$\left(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}_k), \boldsymbol{u}_j\right) = \Omega_k^2 \delta_{kj}$$

де Ω_k– k-а частота власних коливань у вакуумі.

Ці співвідношення вказують що власні форми коливання елемента в вакуумі ортонормовані за матрицею мас.

Розглянемо праву частину рівнянь (2.6). Відмітимо те, що $\mathbf{P}_a$=(0,0,P) внаслідок того що ідеальна рідина створює тільки нормальний тиск на занурене тіло.

Оскільки рідина ідеальна, нестислива, а всюди зовні несучої поверхні S_1 і вихрового сліду S_2 за нею течія рідини є безвихровою**,** то існує потенціал швидкостей, що задовольняє гармонічному рівнянню.

У випадку гармонічних коливань та припущенні, що швидкість набігаючого потоку дорівнює нулю, у відповідності з інтегралом Коши-Лагранжу (2.2) величина P може бути представлена наступним чином:

$$P = -\rho_2 \ \frac{\partial(\Phi^+ - \Phi^-)}{\partial t} = -i\rho_2\Omega(\Phi^+ - \Phi^-)e^{i\Omega t},$$

де $\Phi=\phi e^{i\Omega t}$.

Рівняння руху двох середовищ і гранична умова сполучення в цьому випадку мають вигляд:

$$L(\boldsymbol{u}) + M(u) = (0,0, i\Omega\rho_2(\phi^- - \phi^+)), \qquad \nabla^2\phi = 0. \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}}|_{S^+} = i\Omega w \qquad \nabla\phi \to 0(r \to \infty).$$

Таким чином, нам потрібно визначити функції **u**, ф, що задовольняють системі диференційних рівнянь (2.8), умовам непротікання та затухання збуреної швидкості на нескінченності (2.5), а також умовам закріплення елементу, що деформується.

2.4. Фундаментальний та сингулярний розв'язки рівняння Лапласу

Нехай $x = (x_1,x_2,x_3)$ і $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ – дві точки тривимірного евклідового простору E_3, а декартова відстань r між цими точками дорівнює

$$r = |x - \xi| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - \xi_i)^2}$$

Розглянемо функцію

$$f(x, \xi) = \frac{1}{|x - \xi|} \,. \tag{2.9}$$

Будемо вважати точку $\boldsymbol{x}$ фіксованою, тоді $f(x, \xi)$ можна розглядати як функцію точки ξ. Очевидно, що функція $f(x, \xi)$ розривна за $x = \xi$. У будь-якій області, яка не містить точки $\boldsymbol{x}$, функція $f(x, \xi)$ задовольняє рівнянню Лапласа, неперервна разом з усіма своїми похідними будь-якого порядку, а на нескінченості $f(x, \xi) = (\frac{1}{|\xi|})$. Разом з (2.9) сингулярним розв'язком рівняння Лапласу буде і похідна від (2.9) за будь-яким напрямком l, тобто

$$g(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{|x - \xi|}\right) \tag{2.10}$$

За сингулярними розв`язками (2.9), (2.10) можна побудувати інтегральні зображення розв`язків рівняння Лапласу у вигляді потенціалу простого

$$V(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu(\xi) \frac{1}{|x - \xi|} dS, \quad \xi \in S \tag{2.11}$$

і подвійного шару

$$W(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S Y(\xi) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_\xi} \frac{1}{|x - \xi|} dS, \quad \xi \in S, \tag{2.12}$$

де $\mathbf{n}_\xi$ – нормаль до поверхні S в точці ξ.

$Y(\xi)$, $\mu(\xi)$ – задані на S функції.

Відзначимо, що функції V і W, що визначаються формулами (2.11), (2.12) задовольняють рівнянню Лапласа всюди зовні S.

Потенціал простого шару V неперервний за переходу через S, тобто $V^+ = V^-$ та має розривну нормальну похідну, у той час як потенціал подвійного шару W має розрив під час переходу через S та має неперервну нормальну похідну. Далі, обидва потенціали V і W задовольняють умові затухання на нескінченності, тобто умові (2.5).

Із сказаного вище ясно, що для вирішення задачі обтікання (2.1)–(2.5) слід обрати інтегральне подання (2.12), де інтегрування відбувається по поверхні S_1, будуючи при цьому поверхню вихрового сліду S_2 так, аби була виконана умова (2.4).

2.5. Гіперсингулярні рівняння в задачах обтікання тонкої несучої поверхні

Розглянемо задачу безциркуляційного обтікання тонкої несучої поверхні S_1 потоком ідеальної нестисливої0 рідини, що описується рівняннями (2.1)–(2.5).

Будемо шукати потенціал швидкостей $\Phi(x, t)$, що є вирішенням крайової задачі (2.1)–(2.5), у вигляді потенціалу подвійного шару, що розповсюджений по поверхні $S = S_1 \cup S_2$

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \theta(\xi,t) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} dS \qquad (2.13)$$

де густина $\theta(\xi, t)$ визначена на S функціях, що представляє собою циркуляцію швидкості.

Як відомо, потенціал подвійного шару всюди зовні S задовольняє рівнянню Лапласа, на нескінченості – умові Зоммерфельду, а під час переходу через S потенціал $\Phi(x, t)$, має розрив (що забезпечує можливість отримання перепаду тисків на несучій поверхні) і має неперервну нормальну похідну за вельми загальних уявлень відносно густини $\theta(\xi, t)$. Таким чином, якщо в якості інтегрального уявлення вирішення задачі (2.1)–(2.5) вибрати інтеграл подвійного шару (2.13), то для повного вирішення задачі

залишається лише задовільнити співвідношення (2.2), (2.3). Відмітимо, що в задачах безциркуляційного обтікання не мається на увазі, що вихрова пелена збігає з несучої поверхні, тобто поверхня S_2 відсутня, і потрібно задовольнити лише співвідношення (2.3). Формально, якщо підставити подання (2.13) в (2.3), ми отримаємо інтегральне рівняння.

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\theta(\xi,t)\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{n}_x \partial_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}dS=(\boldsymbol{V}_0,\boldsymbol{n}) \tag{2.14}$$

З віщевказаного ясно, що потенціал подвійного шару найбільш зручний в якості інтегрального подання розв'язку поточної задачі, однак отримане інтегральне рівняння (2.14) відноситься до так званих гіперсингулярних рівнянь або інтегральних рівнянь з ядром типу Адамару. Точні визначення і формулювання, що стосуються питань існування обмеженості інтегральних операторів такого типу будуть надані в наступному розділі.

Відмітимо, що інтеграл (2.14) не існує ані як звичайний невласний, ані у сенсі головного значення за Коші. Ця обставина вельми ускладнює чисельну реалізацію таких сингулярних рівнянь, однак проведене тут теоретичне дослідження дозволяє розробити ефективний алгоритм чисельної реалізації сингулярних рівнянь розглянутого типу і вирішити ряд задач, що цікаві з точки зору практичних застосувань**.**

Інтегральне рівняння (2.14) повністю описує задачу безциркуляційного обтікання тонкої несучої поверхні.

Перевага зведення задач до гіперсингулярних рівнянь полягає в тому, що інтегральне подання одразу містить всі необхідні дані для визначення розв'язку задачі без додаткових граничних або початкових умов.

3. ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГІПЕРСИНГУЛЯРНИХ РІВНЯНЬ

Ідея розкладання невідомої густини в ряд за відомими функціями (із заданим характером поведінки на границі області інтегрування) виявилась доволі плідною під час розв'язання двовимірних сингулярних і гіперсингулярних інтегральних рівнянь. У 3.1, 3.2 пропонуються варіанти методу розв'язання гіперсингулярних рівнянь, що виникають у просторових задачах, заснованого на розкладанні невідомої функції у ряд за поліномами Чебишева (з вагою) у двох напрямках.

3.1 Метод коллокацій

Розглянемо спочатку задачу про безциркуляційне обтікання прямокутної пластини. В розділі 2 показано, що така задача зводиться до визначення невідомої густини Г потенціалу подвійного шару із наступного інтегрального рівняння:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma(\xi)\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{n}_x \partial \boldsymbol{n}_\xi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\xi|}dS = f(\boldsymbol{x}) \qquad (3.1)$$

Далі встановлено, що це інтегральне рівняння є гіперсингулярним, та отримані аналітичні формули для обчислення скіченної частини по Адамару для таких інтегралів по прямокутним підобластям для густини постійної та такої, що змінюється всередині підобласті.

Нехай область інтегрування S представляє собою плоский прямокутник.

$$S = \{[-b, b\} \times [-l, l]\}.$$

Припустимо, що функція Г(ξ) має неперервні частинні похідні, що задовольняють умові Гельдера всюди всередині S.

Будемо вважати, що $\boldsymbol{\xi}=(\xi, \eta)$, $\boldsymbol{x}=(x, y)$. Невідому інтенсивність Г(ξ,η) знаходимо у вигляді ряду за деякими заздалегідь заданими лінійно-незалежними функціями з відомою асимптотичною поведінкою на границі S.

$$\Gamma(\xi,\eta) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{L} C_{mi}\varphi(\xi)\chi_m(\eta) \tag{3.2}$$

де C_{ml} – невідомі коефіцієнти.

Розподіл невідомої густини (циркуляції) вздовж обох напрямків будемо задавати у вигляді рядів за синусами кратних кутів.

$$\varphi_l = sinl\mu = \sin\left(l\arccos\frac{\xi}{a}\right), l = 1,2,\ldots, \tag{3.3}$$

$$\chi_m = \sin m\sigma = \sin\left(m\, arccos\frac{\eta}{b}\right),\ \ m = 1,2,\ldots, \tag{3.4}$$

Відмітимо, що формули (3.3), (3.4), представляють собою функції що виражаються через поліноми Чебишева II роду через рівність

$$\sin(n\arccos t) = U_{n-1}(t)\sqrt{1-t^2}$$

Саме такі ортогональні функції найбільш зручно брати в якості базисних при розв'язанні двовимірних гіперсингулярних рівнянь. Обчисливши гіперсингулярні інтеграли, приходимо до системі алгебраїчних рівнянь відносно C_{ml}

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{L} H_{ml}(M_k)C_{ml} = f(M_k)\,,\quad k = 1,2,\ldots \tag{3.5}$$

де елементи матриці визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} 4\pi H_{ml}(x,y) &= \Gamma_{ml}(x,y)I_0(x,y) + A_{ml}(x,y)I_x(x,y) + B_{ml}(x,y)I_y(x,y) \\ &+ 0.5G_{ml}(x,y)I_{xx}(x,y) + R_{ml}(x,y) \end{aligned} \tag{3.6}$$

$\Gamma_{ml}(x,y) = \varphi_m(x)\chi_l(y),$	$A_{ml}(x,y) = \varphi'_m(x)\chi_l(y)$
$B_{ml}(x,y) = \chi'_l(y)\varphi_m(x),$	$G_{ml}(x,y) = \chi'_l(y)\varphi'_m(x)$

3.2 Проекційний метод.

Розглянемо використання цього методу на прикладі обтікання пластини. Треба знайти розв'язок рівняння (3.1). Будемо шукати невідому густину Г у вигляді:

$$\Gamma(x,y) = \sum_{i=1}^{N_1} c_i \Gamma^{(i)}(x,y)$$

Тут $\Gamma^{(i)}(x,y)$ обчислюється як добуток функцій, що визначаються за формулами (3.3), (3.4) c_i – невідомі коефіцієнти, для визначення яких побудуємо СЛАР проекційного методу.

$$\sum_{i=1}^{N_1} c_i a_{ij} = b_j \tag{3.7}$$

$$a_{ij} = \iint_S N\Gamma^{(i)}(x,y)\Gamma^{(j)}(x,y)dxdy; \qquad b_j = \iint_S f(x,y)\Gamma^{(j)}(x,y)dxdy$$

Величини $N\Gamma^{(i)}(x,y)$ представляють собою результат обчислення гіперсингулярних інтегралів із заданою густиною.

$$N\Gamma^{(i)}(x)\ \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \Gamma^{(i)}(\xi)\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{n}_x \partial \boldsymbol{n}_\xi}\ \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\xi|}dS$$

Обчислення інтегралів у (3.7) здійснюємо по квадратурним формулам Чебишева або Гаусса. Для цього визначимо $N\Gamma^{(i)}(x,y)$ в заданих вузлах. Розіб'ємо область S так, щоб вузли квадратур потрапили в центри прямокутників зі сторонами ε_1, ε_2. Тоді область S буде складатися з під областей $\{U_1\}$(прямокутників розмірами $\varepsilon_1 \times \varepsilon_2$), що містять вузли інтегрування, та підобластей $\{U_2\}$, які не містять вузли інтегрування. Кожну з підобластей множини $\{U_2\}$ розмірами $l_1 \times l_2$ розділимо ще на $([l_1/\varepsilon_1]+1) \times ([l_2/\varepsilon_2]+1)$частин. Таким чином, область S буде розділена на $N \times M$ приблизно однакових прямокутних підобластей. Під час апробації методу ми розглядали квадрат S={[0,1]×[0,l]}.

В якості правої частини обиралась функція $f(x,y)=y^2$; $y\in[0,1]$. Для перевірки точності отриманого розв'язку значення $\text{NГ}^{(i)}$ обчислювались у вузлах інтегрування та ряді проміжних точок і порівнювались зі значеннями $f(x,y)$ у цих самих точках. Відмітимо, що така перевірка не тільки показує збіжність методу, але і дає можливість досліджувати апроксимуючий оператор.

На рис. 3.1 представлені числові результати, що демонструють збіжність розробленого методу в залежності від різноманітних факторів. Крива 1 представляє собою графік функції $f(x,y)$, криві 2 і 3 – значення NГ, що обчислені за x = 0.5. Крива 2 отримана при $M_1 = M_2 = 7$, крива 3 – за $M_1 = M_2 = 13$. В обох випадках вважалося, що $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.004$, $N_1 = 16$ (M_1, M_2 – порядки квадратурних формул, що були використані для обчислення елементів матриці a_{ij} в (3.109), N_1 – кількість базисних функцій).

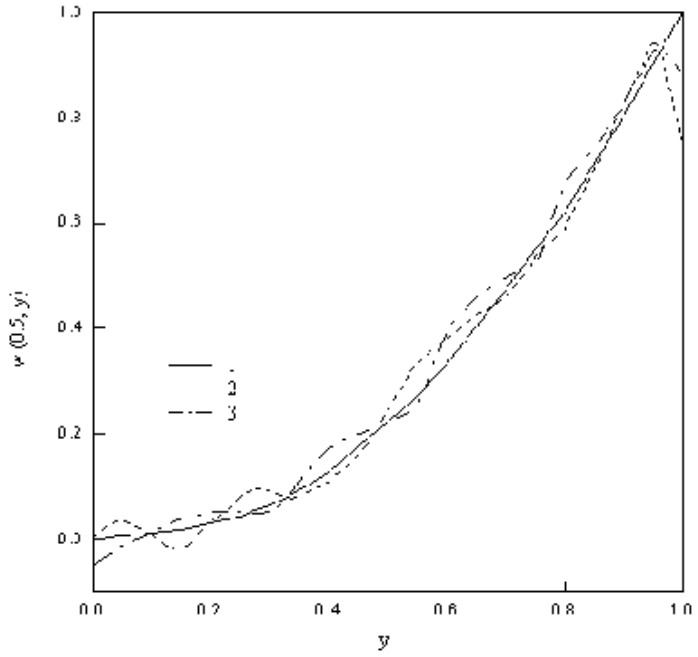


Рис. 3.1. Збіжність проекційного методу

Відмітимо, що у випадку використання граничних елементів з густиною, що неперервна на границях елементів, але має розривну похідну, апроксимуючий оператор буде мати розриви на границях елементів. Перевагою проекційного методу є можливість отримання безперервного

оператору, який апроксимує (3.1), що дозволяє адекватно описати фізичні поля. Відмітимо також, що під час використання проекційного методу, кількість базисних функцій може бути не рівній кількості точок коллокації.

3.3 Метод граничних елементів

Описані вище методі розв'язання гіперсингулярних інтегральних рівнянь ефективні при вирішенні задач, в яких форма поверхні інтегрування може бути добре апроксимована плоским прямокутником. У загальному випадку не завжди вдається описати розв'язання задачі (шукану густину) єдиним аналітичним виразом, наприклад, рядом Бірнбаума. Це пов'язано із складністю геометрії реальних елементів конструкцій. Далі будемо розглядати задачі про визначення тиску рідини на лопаті гідротурбін та вітроенергетичних установок. Такі лопаті можуть розглядатися як прямокутні пластини лише в деякому наближенні. Цьому для розв'язання задач зі складною геометрією використовується метод граничних елементів.

Розділимо область інтегрування S на ряд плоских трикутних та чотирикутних підобластей $S_k (k = 1,2,\ldots,N)$. Опишемо метод граничних елементів з постійною апроксимацією густини для чисельного розв'язку рівняння (3.1). Розглянемо гіперсингулярний інтеграл по поверхні, що апроксимована. Питання існування таких інтегралів розглянуто в [48]. Там же проведені відповідні оцінки похибки. Приходимо до СЛАУ відносно невідомих Γ_i

$$\sum_{k=1}^{N} H_{kj}\Gamma_k = f(x_{0j}); \qquad j = 1,2,\ldots N$$

Елементи матриці H_{kj} визначаються за формулою:

$$H_{kj} = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{[\boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{r}_i]\cdot \boldsymbol{n}}{|[\boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{r}_i]|^2}\left[\frac{(\boldsymbol{l}_i \cdot \boldsymbol{r}_{i+1})}{r_{i+1}} - \frac{(\boldsymbol{l}_i \cdot \boldsymbol{r}_i)}{r_i}\right] \tag{3.8}$$

де $\boldsymbol{n}$ – нормаль до поверхні інтегрування в точці $\boldsymbol{x}_{0j}$;

m– кількість сторін в *k*–ому граничному елементі;

вектори $\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{l}_i, \boldsymbol{n}$ задаються співвідношеннями:

$$\boldsymbol{r}_k = (x_k - x_0, y_k - y_0, z_k - z_0); \quad \boldsymbol{l}_i = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i, z_{i+1} - z_i);$$

$$\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3); \quad i = 1,2, \dots, m; x_{m+1} = x_1; \; y_{m+1} = y_1; z_{m+1} = z_1; \quad r_k = |\boldsymbol{r}_k|$$

Точність методу граничних елементів та його збіжність залежать від вибору контрольних точок. Аналізуючи величини, що обчислюються за формулою (3.8), встановлюємо, що на границях елементів відгук прямує до мінус нескінченності, однак всередині кожного елементу є точка, в якій відгук має скінченний максимум

На рис. 3.2 показано лінії рівня функцій-відгуків, визначених за формулою (3.8), для трикутного та чотирикутного елементів.

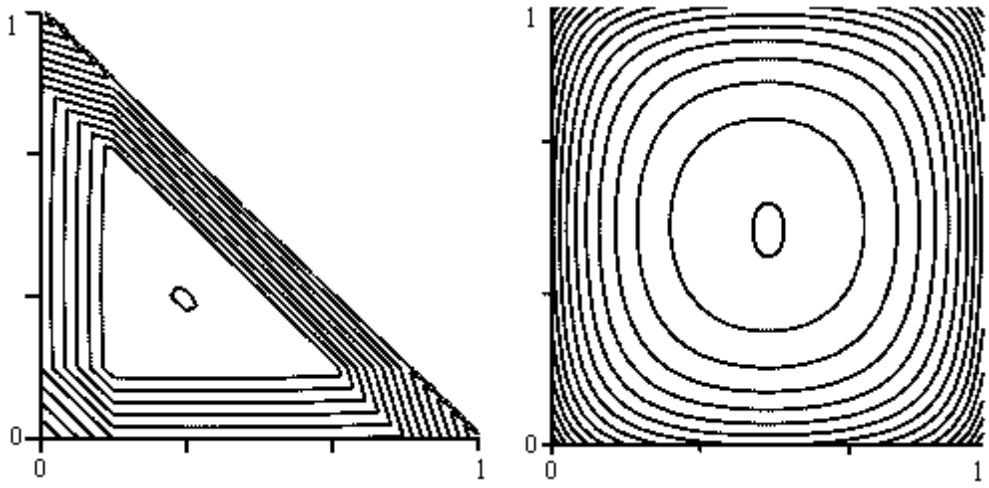


Рис. 3.2. Лінії рівня функцій відгуків від постійної густини

Проведений чисельний аналіз дозволяє зробити висновок про те, що відгуки постійної густини мають скінченний максимум в центрах ваги граничних елементів.

3.4 Чисельний аналіз збіжності методів вирішення гіперсингулярних інтегральних рівнянь в просторових задачах.

Для порівняння методів вирішення гиперсингулярних рівнянь розглянуто наступне інтегральне рівняння:

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\Gamma(x,y)\ \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{n}\partial \boldsymbol{n}_0}\frac{1}{r}dxdy = f(x_0,y_0), \tag{3.9}$$

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

за різних правих частин з областю інтегрування S=[0,1]×[0,1].

На рис. 3.3 показано значення густини Г, обчислені за y=0.5 з використанням описаних методів для $f(x_0,y_0)$=1. Цифрою 1 позначено розв’язок, отриманий проекційним методом. Елементи матриці визначалися за формулою (3.9). Кількість базисних функцій дорівнювала 16. Цифра 2 відповідає розв’язку., що побудовано за допомогою методу коллокацій. Тут також обиралося 16 базисних функцій. Приймалося, що M_1= M_2 = 13; ε_1 = ε_2 = 0.004.

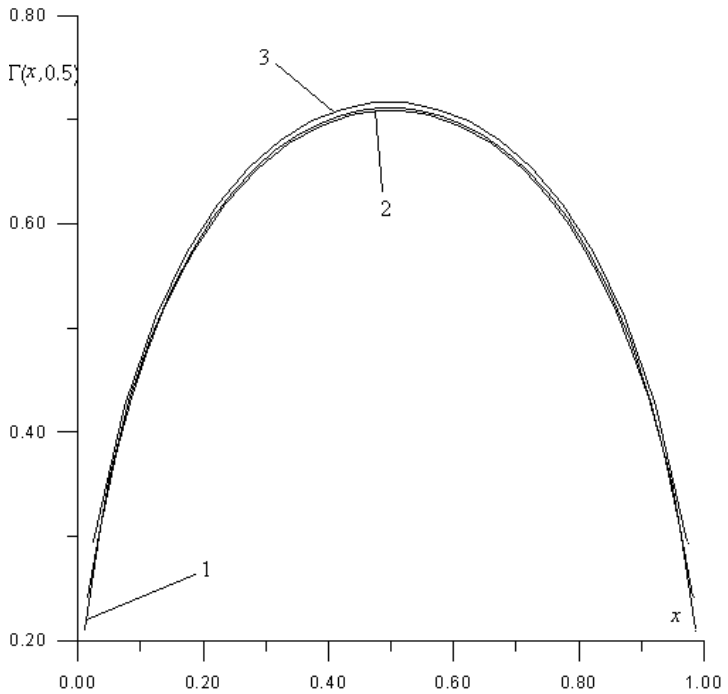


Рис.3.3. Порівняння чисельних розв’язків рівняння (3,112)

Цифрою 3 відмітимо розв’язок, отриманий методом граничних елементів з постійною апроксимацією густини всередині елементу. Кількість граничних елементів дорівнювало 225 (15x15). Бачимо, що всі три методи дали практично однакові результати всередині області інтегрування, але на її границі значення, отримані за допомогою різноманітних методів, відрізняються суттєво.

Оскільки аналітичний розв’язок рівняння (3.1) за $f(x_0,y_0)=1$ невідомий, важко міркувати за точність отриманих розв’язків. Тому було розглянуто таку праву частину $f(x_0,y_0)$, за якої розв’язком в області S = [–1,1]×[–1,1] рівняння (3.112) була функція:

$$\Gamma(x,y) = (x^2-1)^2(y^2-1)^2 \tag{3.10}$$

а саме:

$$f(x_0,y_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S (x^2-1)^2(y^2-1)^2 \ \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{n}\partial \boldsymbol{n}_0}\ \frac{1}{r}\,dxdy \tag{3.11}$$

Інтеграл у сенсі скінченної частини по Адамару в (3.11) можна обчислити аналітично. При цьому використовуються формули, отримані в 3.3. Аналітичний вираз для $f(x_0,y_0)$ занадто громіздкий. В табл. 3.1 наведені значення $f(x_0,y_0)$ у вузлах граничних елементів, що знаходяться у другій чверті за розбиття області інтегрування на 100 (10x10) підобластей.

Таблиця 3.1. Значення функцій (3.11) у вузлах граничних елементів.

Y \ X	-0.9	-0.7	-0.5	-0.3	-0.1
-0.9	0.0963020	0.1594518	0.2387349	0.3097522	0.3511229
-0.7	0.15945181	0.1053032	0.3262367	-0.024156	-0.054244
-0.5	0.2387349	0.3262367	-.2353341	-.4558530	-.5773998
-0.3	0.3097522	-0.024156	-.4558530	-.8132017	-1.011037
-0.1	0.3511229	-0.0542443	-.5773998	-1.011037	-1.251360

На рис.3.4 зображено функції Г(*x*,*y*) і *f*(*x*,*y*).

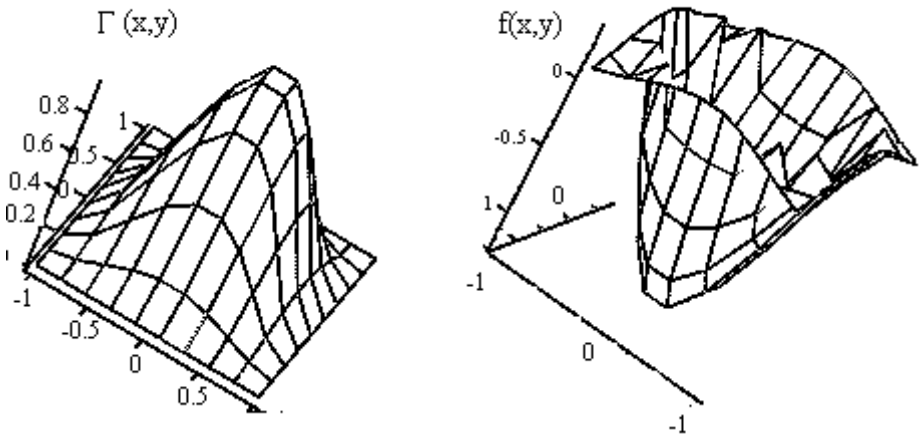
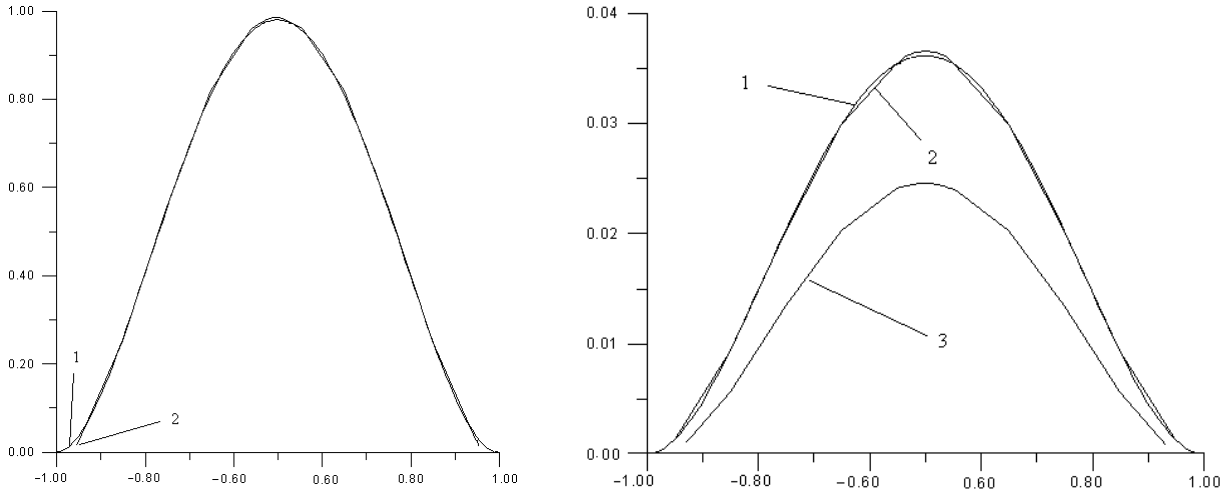


Рис.3.4. Загальний вигляд густини і правої частини (3.11)

Цікаво відмітити, що графік функції *f*(*x*,*y*) («відгук» функції Г(*x*,*y*)) практично повторює форму Г(*x*,*y*).

Для перевірки точності методу граничних елементів було отримано чисельний розв’язок рівняння (3.1) з правою частиною, що визначена формулою (3.11) . При цьому відомий аналітичний вираз для Г(*x*,*y*), який задається за допомогою формули (3.10). Порівняння аналітичного і чисельного рівнянь (3.1) за *y*=–0.1 і *y*=–0.9 дано на рис. 3.5 а, б. На рис.3.5,а показані аналітичні (крива 1) і чисельні (крива 2) значення Г(*x*,0.1) за використання 100 (10x10) граничних елементів з постійною апроксимацією густини за *y*=–0.1. На рис. 3.5, б цифрою 1 відмічено аналітичний розв’язок, що обчислено за формулою (3.11) за *y*=–0.9, цифри 3 і 2 відповідають чисельним значенням густини в центрах елементів, що отримані через розбиття області інтегрування на 100 (10x10) і 400(20x20) граничних елементів відповідно. Під час розбиття області інтегрування на 400 елементів було також проведено згущення сітки на границях областей (при цьому точки, у яких *y*=–0.9 також опинялись в центрах елементів)



а б

Рис. 3.5. Порівняння аналітичного і чисельного розв’язків рівняння (3.1) за y=–0.1(а) і y=–0.9 (б)

Отримані результати дозволяють зробити висновок щодо збіжності методу граничних елементів з постійною апроксимацією густини. Відмітимо також, що безпосереднє аналітичне обчислення відгуків для непостійних густин у просторових задачах призводить до великих затрат машинного часу. Крім того, не вдається проаналізувати відгук для непостійної густини з метою визначення точки елементу, в якій від досягає максимального значення. З вищеозначеного робимо висновок, що для розв’язання практичних задач метод граничних елементів з постійною апроксимацією густини є найбільш ефективним.

4. УЗАГАЛЬНЕННЯ ЧИСЛОВОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГІПЕРСИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

4.1. Базис Лагранжа та функції форми

При здійсненні апроксимації невідомої густини можна використовувати різні методи. Зауважимо, що при використанні методів скінченних (МСЕ) або граничних елементів (МГЕ) область, де задано невідому функцію, розділяють на елементарні підобласті, або елементи. На кожному з цих елементів вважають, що невідома функція має якусь апроксимацію. У простішому випадку приймається, що невідома функція (при розгляданні потенціалу це його густина) є сталою. Це припущення притаманно методу дискретних вихорів [25]. Дійсно, це веде до значного спрощення при обчисленні інтегралів в (3.1). Але, як недолік відмітимо, що таке зображення невідомої функції призводить до розривного нефізичного вигляду шуканих величин, які на межах елементів не мають похідних. Крім того, для отримання придатної точності потрібно використовувати велику кількість елементів, що призводить до необхідності розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності.

При використанні МСЕ та МГЕ основними поняттями є елементи, функції форми та вузлові точки, див. рис. 4.1.

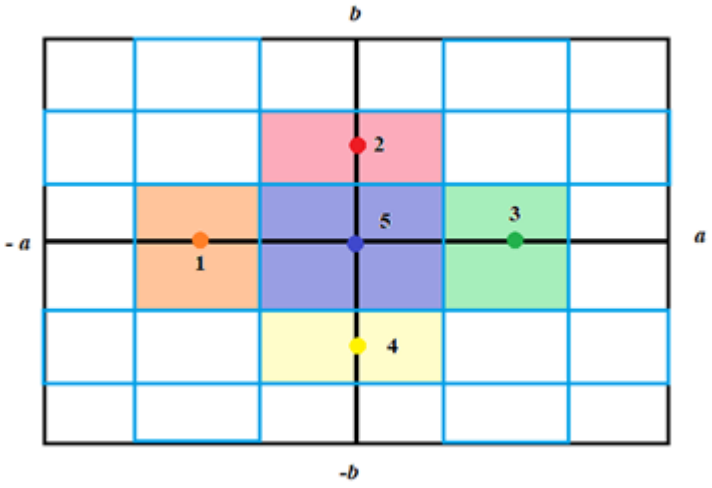


Рис. 4.1 Прямокутна область, елементи та вузли.

Тут прямокутну область $S = [-a, a] \times [-b, b]$ поділено на 4 прямокутні елементи, зазначено 5 (позначених кольоровими крапками) вузлів. Як бачимо, кількість вузлів може бути більшою, ніж кількість елементів.

Будемо будувати базис Лагранжа. Визначальні риси базису Лагранжа:

1. Задаються лінійно-незалежні функції $L_i(\mathbf{x})$ на множині S. Їх кількість має дорівнювати кількості вузлів. Зазначимо, що вектор $\mathbf{x}$ має вигляд $\mathbf{x} = (x, y)$, тобто містить дві компоненти
2. Позначимо вузли як $\mathbf{x}_j$, j=1,2,3,4,5. Має місце така характеристична властивість базисних функцій

$$L_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Доведемо лінійну незалежність функцій $L_i(\mathbf{x})$. Для цього розглянемо лінійну комбінацію

$$\alpha_1 L_1(\mathbf{x}) + \ldots + \alpha_i L_i(\mathbf{x}) + \ldots \alpha_n L_n(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}).$$

Щоб довести лінійну незалежність $L_i(\mathbf{x})$ перевіримо, що

$$Q(\mathbf{x}) \equiv 0 \Leftrightarrow \forall i \quad \alpha_i = 0.$$

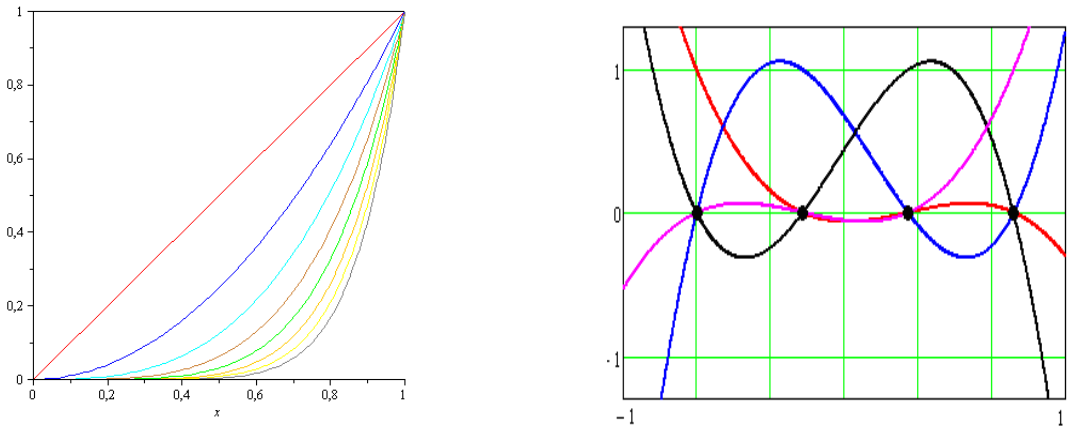
Нехай $Q(\mathbf{x}) \equiv 0$, тобто ця функція дорівнює 0 при всіх $\mathbf{x}$, у тому числі при $\mathbf{x}$= $\mathbf{x_1}$. Звідси отримуємо $Q(\mathbf{x_1}) = 0$, та оскільки $L_1(\mathbf{x}_1) = 1$, то маємо

$$\alpha_1 = 0.$$

Аналогічно здобудемо $\forall i \quad \alpha_i = 0$.

Звідси випливає, що функції $L_i(\mathbf{x})$ є лінійно незалежними і створюють базис. Слід відзначити, що базисні функції Лагранжа є якісно відмінними одна від однієї. Приклад одновимірних базисних функцій у вигляді багаточленів та базисних функцій Лагранжа наведено на рис. 4.2. На рис. 4.2а) зображені лінійно незалежні багаточлени $1, x^2, \ldots x^8$, на рис. 4.2б) подані перші чотири багаточлени Лагранжа. Бачимо, що $1, x^2, \ldots x^8$ стають практично лінійно залежними при зростанні степеню. В той же час багаточлени Лагранжа є лінійно незалежними і суттєво відрізняються одна від одної.

В МГЕ та МСЕ використовується саме базис Лагранжа.



а) б)

Рис. 4.2. Одновимірні базисні функції.

Далі здійснимо побудову базису Лагранжа. Для цього нам будуть потрібні функції форми.

4.2. Функції форми.

Згідно з [8] функції форми задають на кожному скінченному (граничному) елементі як локальні базисні функції Лагранжа. Будемо використовувати функції, запропоновані в [47].

За локальні базисні функції Лагранжа взято вісім наступних функцій. Вони зображені на рис. 4.3-4.10.

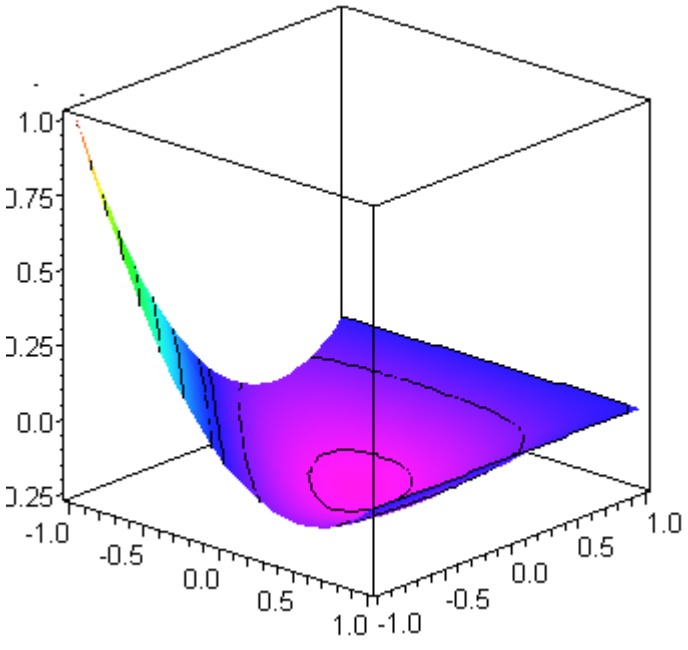


Рисунок 4.3. Функція $L_1 = \frac{1}{16}(1+y^2)(1-x)(3-5x)$

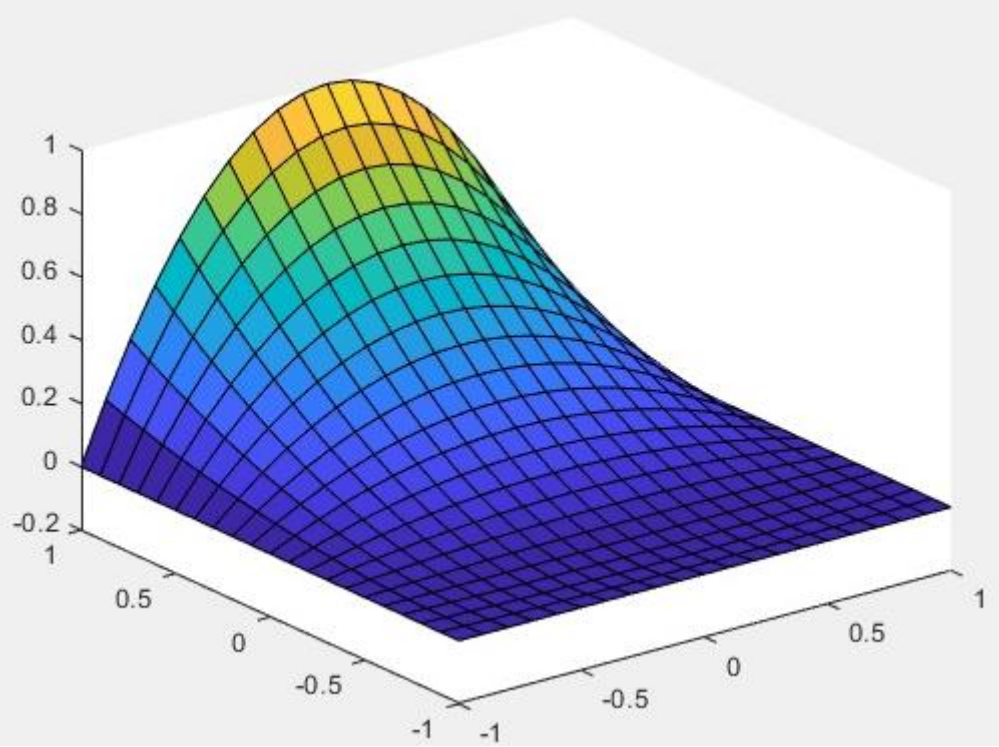


Рисунок 4.4. Функція $L_2 = \frac{1}{16}(1-x^2)(1+y)(3+5y)$

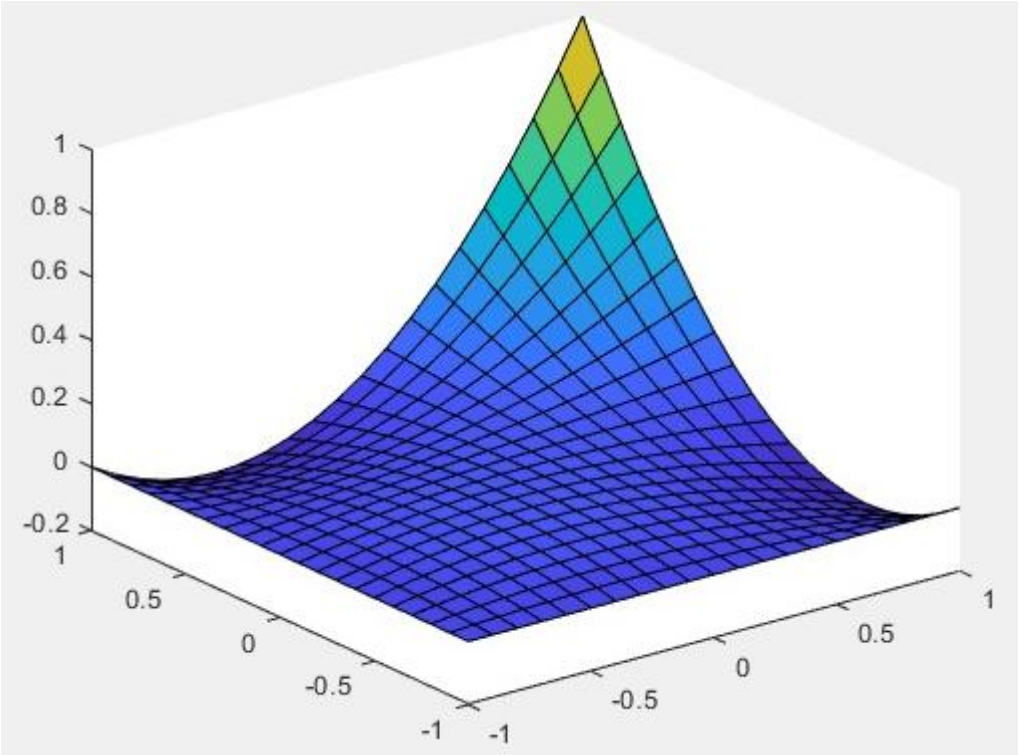


Рисунок 4.5. Функція $L_3 = \frac{1}{16}(1+x)(1+y)(1-x-y+5xy)$

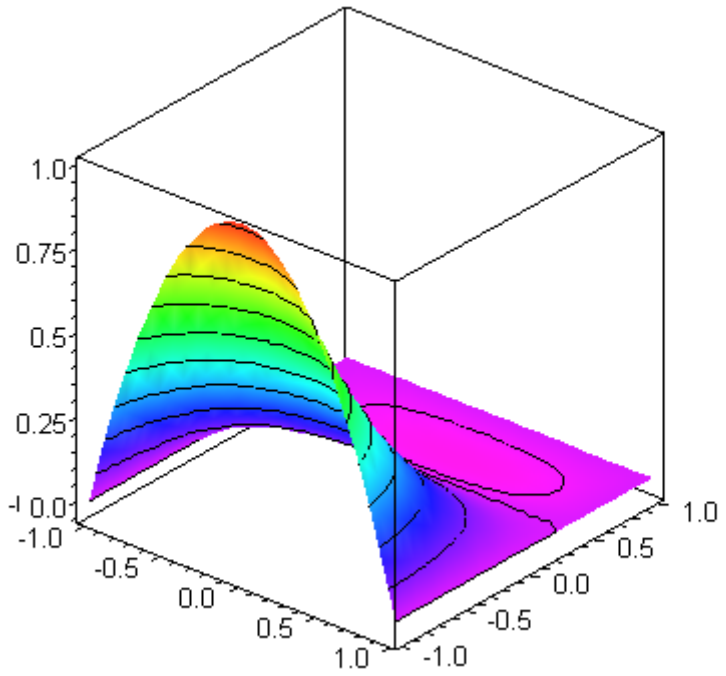


Рисунок 4.5. Функція $L_4 = \frac{1}{16}(1-y^2)(1-x)(3-5x)$.

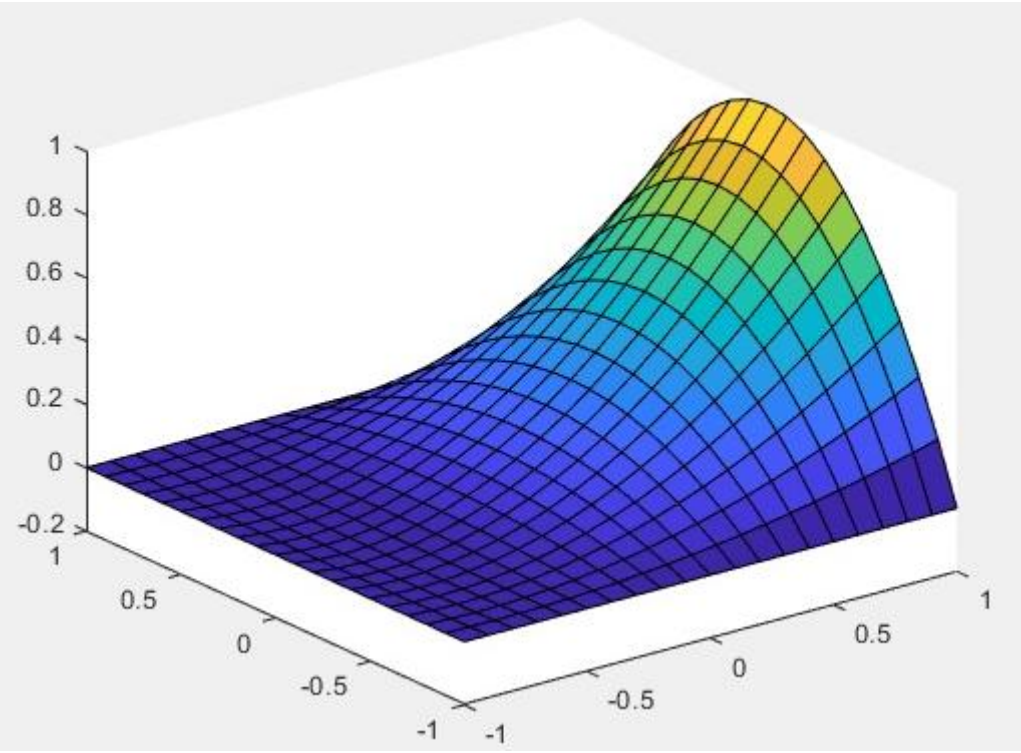


Рисунок 4.6. Функція $L_5 = \frac{1}{16}(1-y^2)(1+x)(3+5x)$

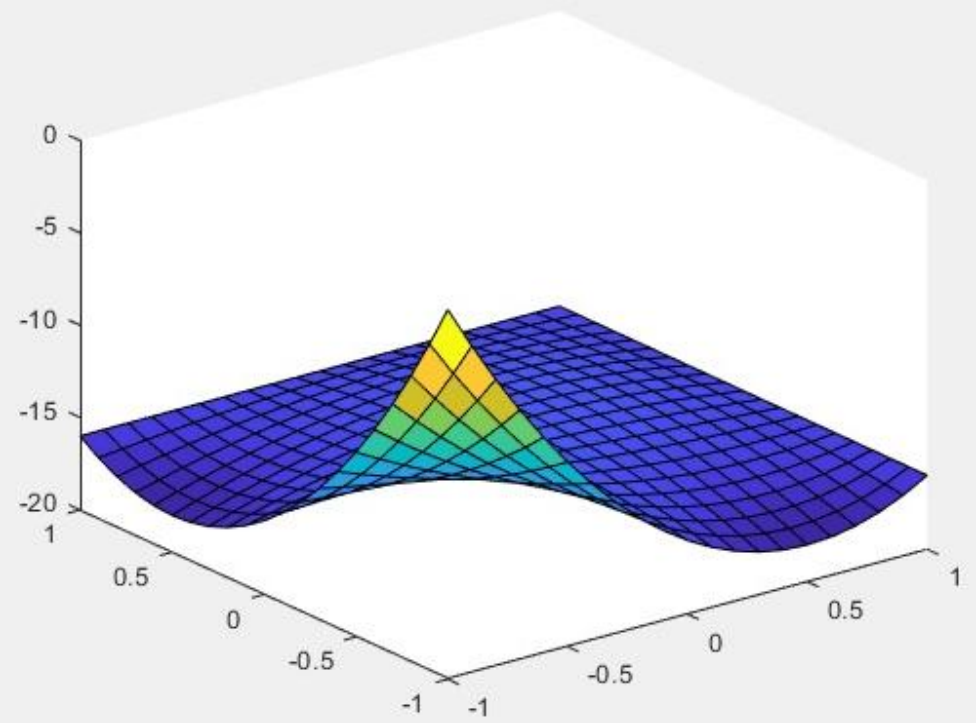


Рисунок 4.7. Функція $L_6 = \frac{1}{16}(1-x)(1-y)(1+x+y+5xy)$.

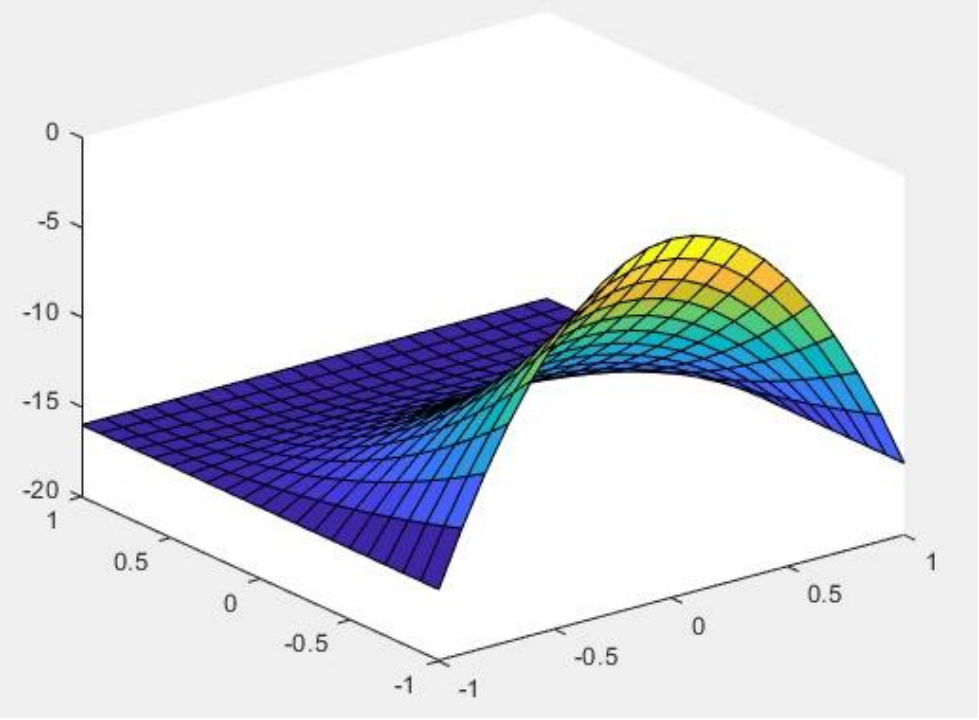


Рисунок 4.9. Функція $L_7 = \frac{1}{16}(1-x^2)(1-y)(3-5y)$.

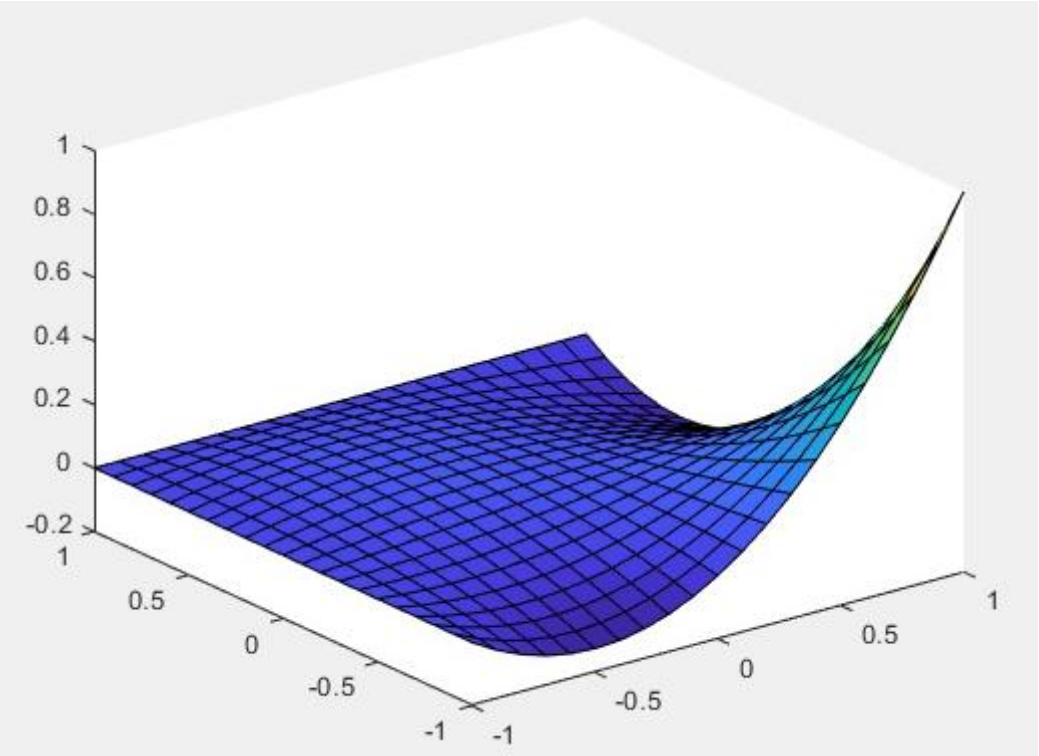


Рисунок 4.10. Функція $L_8 = \frac{1}{16}(1+x)(1-y)(1-x+y-5xy$

На рис. 4.11 зображено граничний елемент у вигляді прямокутника із зазначенням вузлових точок синіми крапками.

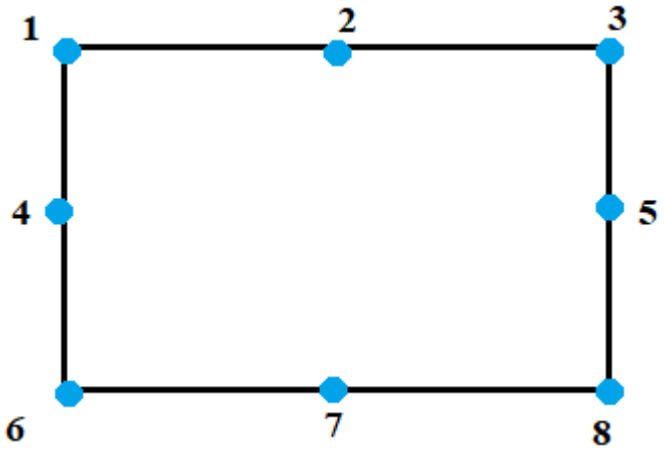


Рисунок 4.11. Граничний елемент з вузловими точками

Зауважимо, що функції L_i дорівнюють нулю у всіх вузлових точках, окрім точки $\mathbf{x}_i$. Всього, в першому наближенні область $S = [-a, a] \times [-b, b]$ поділена на 4 граничні елементи, рис. 4.1.

4.3. Побудова глобального базису.

Для розв’язання гіперсингулярного інтегрального рівняння у вигляді

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma(x,y)\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{n}\partial \boldsymbol{n}_0}\frac{1}{r}dxdy = f(x_0,y_0), \quad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

будемо зображати невідому густину у вигляді ряду по базисним функціям. Зробимо таке зауваження. Вище, у розділі 2 при формулюванні задачі обтікання пластини ідеальною нестисливою рідиною, було вказано, що густина $\Gamma(x,y)$ є перепадом тиску рідини. Таким чином, в цьому випадку ми маємо припустити, що ця густина дорівнює нулю на границях області S, тобто прямокутника, зображеного на рис. 4.1. Звідси маємо, що базисні функції глобального базису дорівнюють нулю на границях цього прямокутника.

Розглянемо окремо граничні елементи зображені на рис. 4.1. Вони подані на рис. 4.12.

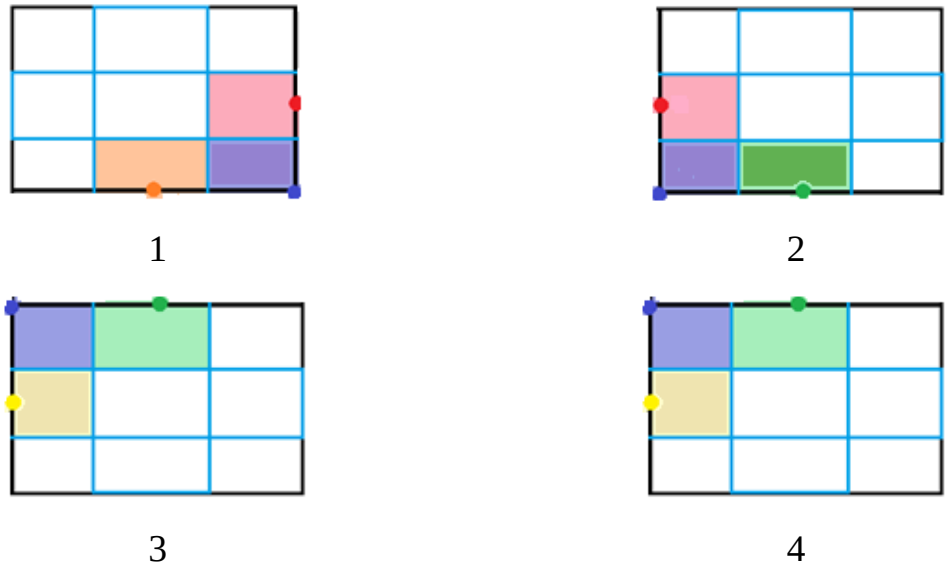


Рисунок 4.12. Граничні елементи

Зауважимо, що на зображених на рис. 4.12 елементах можна ввести такі функції форми.

На 1-ому елементі - це L_5, L_7, L_8, на 2-ому елементі функції L_4, L_6, L_7, на 3-му елементі - це функції L_2, L_3, L_5, на 4-му елементі L_1, L_2, L_4.

Введемо також позначення $S_i, i = 1,2,3,4$ для елементів, зображених на рис. 4.12.

Відмітимо, що для застосування L_i на елементах 1-4 треба буде зробити відповідні заміни змінних. Зробимо це нижче.

Нехай границі кожного елементу S_i є такими

$$a_i \le x \le a_{i+1}, \quad b_i \le x \le b_{i+1}.$$

Вводимо нові змінні ξ, η на кожному елементі S_i за такими формулами

$$x = k_i\xi + c_i, \quad y = q_i\eta + d_i.$$

Після підстановки ξ=±1, η=±1 здобудемо

$$x = \frac{a_{i+1}-a_i}{2}\xi + \frac{a_{i+1}+a_i}{2}, \quad y = \frac{b_{i+1}-b_i}{2}\eta + \frac{b_{i+1}+b_i}{2}.$$

З врахуванням означеного вище, побудуємо базисні функції глобального базису таким чином.

$$N_1(x,y) = \begin{cases} L_5(x,y), (x,y) \in S_1 \\ L_4(x,y), (x,y) \in S_2 \\ 0, \quad (x,y) \in S_3 \\ 0, \quad (x,y) \in S_4 \end{cases},$$

$$N_2(x,y) = \begin{cases} L_5(x,y), (x,y) \in S_1 \\ 0, \quad (x,y) \in S_2 \\ L_2(x,y), (x,y) \in S_3 \\ 0, \quad (x,y) \in S_4 \end{cases},$$

$$N_3(x,y) = \begin{cases} 0, \quad (x,y) \in S_1 \\ L_7(x,y), (x,y) \in S_2 \\ 0, \quad (x,y) \in S_3 \\ L_2(x,y), (x,y) \in S_4 \end{cases} \tag{4.1}$$

$$N_4(x,y) = \begin{cases} 0, \quad (x,y) \in S_1 \\ 0, \quad (x,y) \in S_2 \\ L_5(x,y), (x,y) \in S_3 \\ L_4(x,y), (x,y) \in S_4 \end{cases},$$

$$N_5(x,y)=\begin{cases}L_8(x,y),(x,y)\in S_1\\ L_5(x,y),(x,y)\in S_2\\ L_3(x,y),(x,y)\in S_3\\ L_1(x,y),(x,y)\in S_4\end{cases}.$$

З побудованих функцій бачимо, що виконано характеристичну властивість

$$N_i(\mathbf{x}_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{4.2}$$

В співвідношеннях (4.2) вектори $\mathbf{x}_j$, $j=1,2,3,4,5$ відповідають точкам, зображеним на рис. 4.1. Оскільки виконана характеристична умова, функції $N_i(\mathbf{x})$ складають базис на множині неперервних функцій, які дорівнюють нулю на ¶S - границі області S.

Тому кожна неперервна функція, що дорівнює нулю на ¶S, може бути зображена як лінійна комбінація функцій $N_i(\mathbf{x})$, тобто маємо

$$\Gamma(x,y)=C_1N_1(x,y)+C_2N_2(x,y)+C_3N_3(x,y)+C_4N_4(x,y)+C_5N_5(x,y) \tag{4.3}$$

Для визначення невідомих C_i побудуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

4.4. Метод числового розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння

Розглянемо гіперсингулярне інтегральне рівняння в вигляді

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma(x,y)\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{n}\partial \boldsymbol{n}_0}\frac{1}{r}\,dxdy=f(x_0,y_0) \tag{4.4}$$

Зобразимо невідомий розв'язок у вигляді (4.3). Застосуємо метод колокацій у поєднанні з методом граничних елементів. Підставимо подання (4.3) в рівняння (4.4) та отримаємо

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{5}C_i\iint_S N_i(x,y)\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{n}\partial \boldsymbol{n}_0}\frac{1}{r}\,dxdy=f(x_j,y_j),\ \ j=\overline{1,5}. \tag{4.5}$$

Тут вектори $(x_j,y_j)=\mathbf{x}_j$ точки коллокації, наведені на рис. 4.1.

Таким чином, отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно C_i у вигляді (N=5)

$$\sum_{i=1}^{N} H_{ij} C_k = f(\boldsymbol{x}_j); \qquad j = 1,2,\dots N \tag{4.6}$$

де елементи матриці H_{ij} обчислюються за формулами

$$H_{ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_S N_i(\xi,\eta) \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{n} \partial \boldsymbol{n}_0} \frac{1}{r} d\xi d\eta.$$

Згідно з [48] маємо

$$H_{ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{N_i(\xi,\eta)}{r^3} d\xi d\eta, \;\; r = \sqrt{\left(\xi - x_j\right)^2 + \left(\eta - y_j\right)^2} \tag{4.7}$$

де інтеграл по області *S* слід розуміти в сенсі Адамара.

4.5. Модифікований метод граничних елементів для обчислення елементів матриці.

Згідно з результатами [48] неможливо отримати значення гіперсингулярного інтегралу, навіть у сенсі Адамара, коли точка колокації знаходиться на границі області інтегрування. Нами побудовані такі базисні функції, які мають різну форму на кожному граничному елементі. Щоб врахувати поведінку базисних функцій на області інтегрування, поділимо кожний з граничних елементів на 9 прямокутних частин (під-елементів), як зображено на рис. 4.1. Припустимо, що на кожному з цих під-елементів базисні функції при обчисленні інтегралу є сталими, і значення цих сталих відповідають значенню базисної функції в середині під-елемента.

Введемо такі позначення. Нехай кожна з областей S_j поділена на 9 прямокутних під-елементів $S_{j,lk}$, (l=1,2,3, k=1,2,3) $N^j_{i,lk}$– значення базисної функції N_i в області S_j в центрах під-елементів $S_{j,lk}$.

Для елементів матриці H_{ij} отримаємо такі формули:

$2\pi H_{11} = \sum_{k,l=1,k\neq 1 \& l\neq 1}^{3} N^1_{1,lk} \iint_{S_{1,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta + \sum_{k,l=1,k\neq 1 \& l\neq 1}^{3} N^3_{1,lk} \iint_{S_{2,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta +$

$+ \iint_{S_{1,23} \cup S_{2,21}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta,$

$$2\pi H_{12} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} N_{2,lk}^{1} \iint_{S_{1,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=2}^{3} N_{2,lk}^{3} \iint_{S_{3,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta$$

$$2\pi H_{13} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} N_{3,lk}^{2} \iint_{S_{2,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=2}^{3} N_{3,lk}^{4} \iint_{S_{4,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta,$$

$$2\pi H_{14} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} N_{4,lk}^{3} \iint_{S_{3,,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=2}^{3} N_{4,lk}^{4} \iint_{S_{4,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta,$$

$$2\pi H_{15} = \sum_{i=1}^{5}\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} N_{5,lk}^{i} \iint_{S_{3,,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta.$$

$$2\pi H_{21} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} N_{1,lk}^{1} \iint_{S_{1,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=2}^{3} N_{1,lk}^{2} \iint_{S_{2,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta,$$

$$2\pi H_{22} = \sum_{l=1,l\neq 2}^{3}\sum_{k=1}^{2} N_{2,lk}^{1} \iint_{S_{1,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta + \sum_{l=1,l\neq 2}^{3}\sum_{k=2}^{3} N_{2,lk}^{2} \iint_{S_{2,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta +$$

$$+ \iint_{S_{1,23}\cup S_{2,21}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta,$$

$$2\pi H_{23} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} N_{3,lk}^{2} \iint_{S_{2,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=2}^{3} N_{3,lk}^{4} \iint_{S_{4,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta$$

$$2\pi H_{24} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} N_{4,lk}^{3} \iint_{S_{3,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=2}^{3} N_{4,lk}^{4} \iint_{S_{4,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta$$

$$2\pi H_{25} = \sum_{i=1}^{5}\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} N_{5,lk}^{i} \iint_{S_{3,,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta$$

$$2\pi H_{31} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} N_{3,lk}^{1} \iint_{S_{1,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=2}^{3} N_{3,lk}^{2} \iint_{S_{4,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta$$

$$2\pi H_{32} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} N_{3,lk}^{1} \iint_{S_{1,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=2}^{3} N_{3,lk}^{3} \iint_{S_{4,lk}} \frac{1}{r^3} d\xi d\eta$$

Після побудови елементів матриці H_{ij} будуємо розв'язок системи (4.6).

4.6. Тестування алгоритму

Розглянемо рівняння (4.6) з правою частиною у вигляді

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S (x^2-1)^2 (y^2-1)^2 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{n} \partial \boldsymbol{n}_0} \frac{1}{r} dxdy.$$

Для числового розв'язання застосовано розроблений вище модифікований метод граничних елементів. Використано 5 граничних елементів. При цьому

в якості розв’язку чисельно отримано функцію $(x^2-1)^2(y^2-1)^2$, яка є аналітичним рішенням.

При цьому розв’язок отримано із суттєво меншими обчислювальними витратами.

5. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ СЛАБО ЗІГНУТИХ ЛОПАТЕЙ ГІДРОТУРБІН

Вивчені малі коливання пластин, які моделюють лопаті гідротурбін, що занурені в ідеальну нестисливу рідину. Вивчення частот і форм власних коливань лопатей в рідині є актуальною задачею під час проектування робочих коліс гідротурбін. Такі дослідження необхідно проводити для запобігання резонансу. Наявні для розв'язання таких задач методики звичайно засновуються на спрощуючих гіпотезах (плоских перерізів, збігу форм коливань у вакуумі і рідині та ін..) Такі підходи не можуть бути прикладені без додаткових обґрунтувань до задачі про занурення у рідину оболонці, що моделює лопать робочого колеса, яке взаємодіє з водяним середовищем.

5.1 Формулювання задачі про гідро пружні коливання пластин у воді

Малі коливання пластини описуються рівнянням:

$$D\nabla^2\nabla^2\vec{w} + \rho_1 h\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2} = P \tag{5.1}$$

P – тиск рідини на пластину;

D – циліндрична жорсткість;

h – товщина;

ρ_1 – густина матеріалу пластини.

Швидкість набігаючого потоку приймається рівною нулю. Рух рідини вивчається в тривимірному формулюванні методами теорії потенціалу. Припускається, що рідина ідеальна, вільні вихори не утворюються і не сходять з несучої поверхні. В такому випадку існує потенціал швидкостей, що задовольняє всюди зовні пластини гармонічному рівнянню, а на лицьових поверхнях пластини $S^{\pm}$ – умові непротікання.

При потенційному потоці збурена швидкість рідини представляється у вигляді:

$$\boldsymbol{v}(x,y,z,t) = grad\Phi(x,y,z,t) \tag{5.2}$$

де $\Phi(x, y, z, t)$ – потенціал швидкостей, що індукований малими вільними коливаннями пластини.

Для визначення тиску рідини на змочені поверхні слугує інтеграл Коші-Лагранжу, який у випадку рідини у стані спокою може бути записаний у наступному вигляді:

$$P = -\rho_2 \left[\frac{\partial \Phi^+(x, y, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Phi^-(x, y, z, t)}{\partial t} \right] \tag{5.3}$$

де ρ_2 – густина рідини

Для знаходження тиску на пластину зі сторони рідини необхідно визначити функцію $\Phi(x,y,z,t)$ під час розв'язання рівняння Лапласу за наступної граничної умови:

$$\text{grad}(\Phi \cdot n)|_S = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}, \tag{5.4}$$

де $\boldsymbol{n}$ – зовнішня нормаль до пластини, а права частина рівняння являє собою швидкість нормального переміщення пластини, що деформується.

Таким чином, необхідно визначити функції $\vec{w}(x,y,t)$ $\Phi(x,y,z,t)$, які задовольняють системі диференційних рівнянь (5.1)–(5.3), умовам не протікання (5.4), закріплення пластини і затухання збуреної швидкості на нескінченості.

Систему рівнянь руху символічно записано у вигляді (2.6).

Розглянемо задачу про малі гармонічні коливання пружної лопаті в потоці. Представимо вектор $\boldsymbol{U}$ в формі $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u}e^{i\Omega t}$, де Ω – частота, а $\boldsymbol{u}$ – власна форма коливань в рідині. Будемо шукати власні форми коливань коливань в рідині у вигляді ряду (2.7). Нехай S – поверхня, що обмежує лопать, яку занурено у рідину. Нехай $\Phi(x,y,z,t) = \varphi(x,y,z)\, e^{i\Omega t}$. Зобразимо функцію $\varphi(x,y,z)$ у вигляді потенціалу подвійного шару з невідомою густиною $\Gamma(\xi)$, $\xi \in S$.

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \Gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \left[\frac{1}{|x - \xi|} \right] dS_\xi \tag{5.5}$$

Відомо, що $\varphi^+ - \varphi^- = \Gamma$, тобто перепад тиску пропорційний густині

потенціалу Г.

Обчислюючи нормальну похідну потенціалу подвійного шару (5.5) і підставляючи отриманий вираз в граничні умови (5.4), приходимо до гіперсингулярного інтегрального рівняння:

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \Gamma(\xi)\,\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_\xi}\left[\frac{1}{|x-\xi|}\right] dS_\xi = i\Omega w \tag{5.6}$$

З використанням (2.7) маємо:

$$w = \sum_{k=1}^{N} c_k w_k$$

Нехай функції $\Gamma_k(\xi)$ є розв'язками гіперсингулярного рівняння (5.6) з відповідним чином обраними правими частинами w_k:

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \Gamma_k(\xi)\,\frac{\partial n^2}{\partial n_x \partial n_\xi}\left[\frac{1}{|x-\xi|}\right] dS_\xi = w_k$$

Запишемо таку рівність:

$$\Gamma_k(\boldsymbol{x}) = H(w_k),$$

де H – обернений оператор до інтегрального оператору в (5.6).

Переходимо до проблеми власних значень:

$$c_j\Omega_j^2 = \Omega_j^2 \sum_{k=1}^{N} c_k\left[\delta_{kj} + \left(H(\boldsymbol{u}_k)\cdot \boldsymbol{u}_j\right)\right] \tag{5.7}$$

Визначивши розв'язок (5.7), обчислюємо частоти Ω коливань пружного елементу в рідині, а знаючи коефіцієнти c_k за формулою (2.7), знаходимо форми коливань в рідині. Побудовану в (5.7) матрицю $P_{kj} = \left(H(\boldsymbol{u}_k)\cdot \boldsymbol{u}_j\right)$ називають матрицею приєднаних мас рідини.

5.2 Чисельний аналіз частот і форм вільних гідро пружних коливань консольних пластин

В якості тестової задачі розглядались коливання квадратної пластини зі стороною a і товщиною h (геометричні параметри і механічні властивості взяті з роботи [49]). Досліджено коливання у повітрі та з урахуванням приєднаних мас рідини.

В таблиці 5.1 наведені значення частот коливань цієї пластини в повітрі і воді та проведено порівняння з теоретичними і експериментальними даними з роботи [49].

Розглядався безрозмірний частотний параметр, що обчислюється за формулою:

$$\lambda = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_1 h}{D}}$$

Таблиця 5.1. Безрозмірний частотний параметр для квадратної пластинки

n	В повітрі			У воді		
	Експеримент [49]	МКЕ [49]	МКЕ [37]	Експеримент [49]	Теорія [49]	МГЕ
1	3.43	3.49	3.49	1.475	1.59	1.434
2	8.32	8.55	8.547	4.5	4.7	4.24
3	20.55	21.36	21.33	10.05	10.7	10.00
4	27.15	-	27.81	-	-	13.70
5	30.75	31.10	31.34	17.0	18.74	16.43

Результати демонструють, що запропонований метод може бути успішно застосований для розв’язку задач про гідропружні коливання лопатей у воді.

На рис.5.1 показані дві перші форми коливань консольної прямокутної пластинки в воді. Відмітимо, що в даній задачі форми коливань в рідині і повітрі практично співпадають.

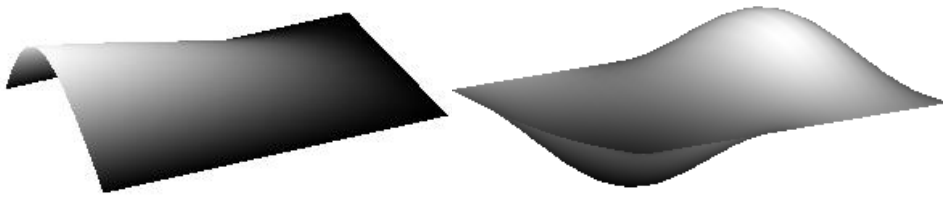


Рис. 5.1. Форми коливань прямокутної пластини в рідині

Аналіз чисельних результатів демонструє, що частоти коливань в воді і вакуумі відрізняються суттєво, при цьому різниця в частотах зменшується зі зростом номера частоти. Розглянута задача є модельною і слугує підставою для подальшого вивчення коливань реальних лопатей.

ВИСНОВКИ

Одним з ефективних методів розв’язку крайових задач механіки деформованого твердого тіла в областях складної форми при взаємодії з середовищем є метод потенціалу, що дозволяє зводити до їх до граничних сингулярних і гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Однак, не дивлячись на велику привабливість, пов’язану зі зниженням розмірності задачі, цей метод до останнього часу не був популярним серед механіків-дослідників, оскільки отримання граничних рівнянь і їх чисельна реалізація потребують застосування складного математичного апарату та потужних сучасних ЕВМ. Числові методи розв’язання граничних рівнянь, як свідчить літературний пошук, недостатньо розвинені. Існують великі складності під час комп’ютерного моделювання в задачах аерогідропружності, в тому числі в задачах визначення частот і форм власних коливань конструкцій з урахуванням приєднаних мас води.

Розроблено ефективний метод розв’язання крайових задач механіки в областях складної форми для тіл, що взаємодіють з повітряним або водним середовищем. Метод заснований на використанні апарату граничних інтегральних рівнянь. Наведено новий варіант методу граничних елементів. Проаналізовані методи чисельного розв’язку сингулярних і гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Розроблено та обґрунтовано метод розрахунку частот і форм коливань елементів турбомашин, що взаємодіють з середовищем (або мають тріщини). Встановлено, що частоти коливань в воді та вакуумі відрізняються суттєво (іноді до 30-40%), різниця їх значень зменшується зі зростанням номеру частоти. Розроблені методи числового розв’язання гіперсингулярних інтегральних рівнянь дадуть можливість перейти від вивчення модельних задач в канонічних плоских областях до дослідження задач механіки суцільного середовища для тіл складної форми.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: В 2-х т. –М.: Наука, 1966.–Т.2 . –480 с.
2. Hrennikoff A. Solution of problem of elasticity by framework method// J. of Applied Mechanics.– 1941.– №8.– P. 169-175.
3. Courant R. Variational methods for solutions of problems of equilibrium and vibration// Bulletine of the American Mathematical Society. – 1943.–№49.– P.1-23.
4. Argiris J.H. Energy theorems of structural analysis. Part I. General theory// Aircraft Engineering.– 1954.–Vol.26, № 308.– P. 347-356
5. Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp J.L. Stiffness and deflection analysis of complex structures//J. of Aeronautic Sciences. – 1956.– №23. – P.805-823.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.–М.: Мир, 1975.–480 с.
7. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. –М.: Мир, 1977.– 350 с.
8. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. –М.: Мир, 1984.–428 с.
9. Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Кирический В.В., Альтенбах И. Метод конечных элементов в механике твердых тел. –Киев: Вища шк., 1982. – 480 с.
10. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. –М.: Мир, 1987. – 524 с.
11. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. –М.: Гостехтеориздат, 1953. – 416 с.
12. Бурчуладзе Т.В., Гегелия Т.Г. Развитие метода потенциала в теории упругости.– Тбилиси: Мецниереба, 1985.–225 с.
13. Кит Г.С., Хай М.В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости для тел с трещинами.–Киев: Наук. думка, 1989.–288 с.
14. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.–М: Наука,

1968. –512 с.

15. Михлин С.Г., Морозов Н.Ф., Паукшто М.В. Граничные интегральные уравнения и задачи теории упругости.–Л.: Изд-во ЛГУ, 1986.–87 с.
16. Купрадзе В.Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения.–Л.: Гос. изд-во техн. лит-ры, 1950. –280 с.
17. Смирнов В.И. Курс высшей математики: В 5-и т. –М.: Физматгиз, 1981.– Т.4.–572 с.
18. Мусхелишвили Н.И. О численном решении задачи теории упругости//Труды Тбилисского мат. ин-та.– 1937.–Т.1.–С.83-87.
19. Горгадзе А.Я., Рухадзе А.К. Об одном численном методе решения интегральных уравнений теории упругости// Сообщения Грузин. филиала АН СССР. – 1940. –Т.1, №4.– с. 225-258.
20. Агранович М.С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы // Успехи мат. наук.– 1965.–Т.20, №5.–С.3-120.
21. Трев Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье: В 2-х т.–М.: Мир, 1984.– Т.1.–360 с.; – Т.2.–400 с.
22. Моссаковский В.И, Качаловская Н.Е., Голикова С.С. Контактные задачи математической теории упругости. –Киев.: Наук. думка,1985. – 176 с.
23. Псесдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. –М.: Мир, 1988.– 494 с.
24. Лаврентьев М.А. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы// Труды ЦАГИ. –1932. –№118. –С.3-56.
25. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – М.: Наука, 1985. – 254 с.
26. Псесдорф З. Линейные интегральные уравнения // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные пробл. математики. Фундаментальные направления. –1988.–Т.27. – С.5-130.

27. Suzan J. Obaiys, Rabha W. Ibrahim, and Ahmad F. Ahmad. Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study Springer Nature Switzerland AG 2019 D. Andrica, T. M. Rassias (eds.), Differential and Integral Inequalities,Springer Optimization and Its Applications 151.
28. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. –М: Наука, 1978.–352 с.
29. Щербина В.А. Дифракция электромагнитных волн на разрезе в R^3// Электромагнитные явления. –1998.– Т.1, №4. –С.447-452.
30. Еселева Е.В., Науменко В.В., Науменко О.В., Стрельникова Е.А. Метод гиперсингулярных интегральных уравнений в задаче определения стационарного поля температур в телах с трещинами. //Вестник Харьков. национального техн. ун-та «ХПИ».–2002.–Т.8, №9.–С.63-68.
31. Науменко В.В., Стрельникова Е.А. Исследование концентрации упруго - пластических напряжений в бесконечной плоскости с разрезом методом граничных элементов в непрямой формулировке//Пробл. машиностроения .–2000.–Вып.1. С. 20-28.
32. Голубев В.В. Лекции по теории крыла.–М.;Л.: Гостехтеориздат, 1949.– 480 с.
33. Михлин С.Г. Курс математической физики.– М.: Физматгиз, 1968. – 576 с
34. В.Н. Ефименко, Б.Я. Кантор, И.Е. Ржевская, А.Н. Гелеврея, Исследование прочности динаиических характеристик рабочего колеса обратимой гидромашины – Динамика и прочность машин- 2013 -№1 – С.39-43
35. А.В. Линник, Р.П. Москаленко, Е.А. Стрельникова – Численный метод построения расчётной области для задач гидроупругих колебаний элементов конструкции – Вісник Харківського Національного університету імені В.Н. Каразіна – 2016 – С. 35-44
36. І.О. Вєрушкін, Є.С. Кононенко. Дослідження гідропружних коливань елементів конструкцій з використанням методів скінчених та граничних

елементів – – Вісник Харківського Національного університету імені В.Н. Каразіна – 2021 – С.16-28

37. Е.В. Ганчин, И.Е. Ржевская, Е.А. Стрельникова – Исследование динамических характеристик лопастей робочих колёс поворотно-лопастных гидротурбин при взаимодействии с жидкостью — Вісник Харківського Національного університету умені В.Н. Каразіна – 2009 – С. 79-86
38. Matthias Michael Arnold, Simulation and evaluation of the hydroelastic responses of a tidal current turbine
39. С.А. Довгий, И.К. Лифанов, Д.И. Черний – Метод сингулярных интеральных уравнений и вычислительные технологии – Киев, 2016
40. Гидротурбины и обратимые гидромашины [Електронне джерело] URL: http://energetika.in.ua/ru/books/book-3/part-2/sectoin-5/5-2
41. Справочник по гидротубинам – Материалы, применяемые для гидротурбин [Електронне джерело] URL: https://leg.co.ua/arhiv/generaciya/spravochnik-po-gidroturbinam/Page-81.html
42. Г.Г. Герасимов. Виготовлення гідротурбінного обладнання ГЕС – Рівне, 2016.
43. T. Medvedovskaya Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers / T. Medvedovskaya, E. Strelnikova, K. Medvedyeva // Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART). – 2015. – Vol. 1, No 1. – P. 45 - 50. – DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961.
44. В.А. Баженов, А.И. Гуляр, И.И Солодей. Численное моделирование динамических процессов упруго-пластического взаимодействия неоднородных пространственных тел на основе полуаналитического метода конечных элементов – Проблемы прочности - №5 – 2013 – С. 13-27
45. В.Б. Курзин, С. Н. Коробейников, В. П. Рябченко, Ткачева Л. А., Собственные колебания лопастей однородной решётки гидротурбин в жидкости – Прикладная механика и техническая физика – 1997 - №2 – С. 80-90.

46. Гідроенергетика, Державне агентство з енергоефективності та енергозбереження України. [Електронне джерело] URL: https://saee.gov.ua/uk/ae/hydroenergy
47. А.Н. Хомченко, А.В. Варшамов О.І. Литвиненко. Скінченні елементи біквадратичної інтерполяції: стандарти та альтернативи. Комп'ютерні науки та інформаційні технології кораблебудування. N 1, 2020, с. 97-102.
48. Кантор Б.Я. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды /Б.Я. Кантор, Е.А. Стрельникова. – Харьков: Новое слово, 2005.– 252 с.
49. Muthuveerappan, G.; Ganesan, N.; Veluswami, M. A.. Vibration of square cantilever plate immersed in water. Journal of Sound and Vibration, Volume 61, Issue 3, p. 467-470, 1978