МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАУКОВО-НАВЧАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ
Кафедра комп'ютерної фізики

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до кваліфікаційної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр

«Стійкість руху циліндричних та конічних оболонок при сумісних горизонтальних та вертикальних навантаженнях»

Виконав: студент 6 курсу, групи НФ-64
Науменко Ю.В.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Комп'ютерна фізика

Керівник: д. т. н., проф. Стрельнікова О.О.

Рецензент:

Харків – 2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики

Кафедра комп'ютерної фізики

Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магістр

Спеціальність 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Костянтин НЄМЧЕНКО

(підпис)

«____» _____ 2024 р.

ЗАВДАННЯ

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

Науменку Юрію Віталійовичу

1. Тема роботи «Стійкість руху циліндричних та конічних оболонок при сумісних горизонтальних та вертикальних навантаженнях», керівник роботи: Стрельнікова Олена Олександрівна, доктор технічних наук, професор, затверджені наказом по університету від 23 січня 2024 року №4201- 5/144.
2. Строк подання студентом роботи 20.05.2024.
3. Перелік питань, які потрібно розробити:

- провести аналіз сучасного стану питання стійкості руху оболонкових конструкцій частково заповнених рідиною;

- здійснити огляд публікацій, присвячених дослідженню коливань рідинц та стійкості її руху в циліндричних та конічних резервуарах;

- сформулювати задачу дослідження стійкості руху рідни в резервуарі

- сформулювати спектральну проблему;

- провести дослідження вимушених коливань рідини в циліндричних та конічних резервуарах;

- побудувати алгоритми та комп’ютерні коди;

- провести числові дослідження.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми, узгодження, а також затвердження її на кафедрі
2	Ознайомлення з літературними джерелами щодо методів визначення стійкості руху рідини в резервуарах та паливних баках
3	Формулювання проблеми стійкості руху рідини при комбінованих вертикальних та горизонтальних навантаженнях
4	Формулювання спектральної проблеми
5	Побудова системи базисних функцій для розв’язання задачі
6	Зведення спектральної задачі до системи сингулярних інтегральних рівнянь
7	Розвинення числового методу розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь. Проведення тестових розрахунків
8	Досліження стійкості руху рідини в конічних і циліндричних резервуарах при комбінованих горизонтальних та вертикальних навантаженнях та впливу перегородок
9	Визначення та формулювання висновків та перспектив подальшого дослідження
9	Подача науковому керівнику
10	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
11	Попередній захист
12	Захист

5. Дата видачі завдання 23 лютого 2024 року

Студент _____ Юрій НАУМЕНКО
підпис

Керівник роботи _____ Олена СТРЕЛЬНІКОВА
підпис

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ ТА АБРЕВІАТУР

КЗ-крайова задача

МГЕ – метод граничних елементів

МСЕ - метод скінченних елементів

МПа - мегапаскаль

РЕФЕРАТ

Науменко Юрій Віталійович «Стійкість руху циліндричних та конічних оболонок при сумісних горизонтальних та вертикальних навантаженнях»

Кваліфікаційна робота магістра з Комп'ютерної фізики. – Х.: ХНУ імені В. Н.Каразіна, 2024. – 55 с.

Робота присвячена питанням оцінки висоти вільної поверхні в жорстких циліндричних та конічних резервуарах, заповнених рідиною, за зовнішніх навантажень. Передбачена можливість установки перегородок. Вважається, що заповнювач є ідеальною нестисливою рідиною, рух якої є потенціальним. Розглянуто коливання рідини, спричинені поперечними та поздовжніми гармонійними навантаженнями. Розглянуто вільні, вимушені та параметричні коливання. Сформульовано спектральну крайову задачу відносно коливань рідини в жорстких оболонках обертання. Форми вільних коливань рідини розглядаються як базисні функції для аналізу вимушених і параметричних коливань. Отримано форми вільних коливань рідини в циліндричних та конічних резервуарах з перегородками та без перегородок за допомогою методів граничних елементів. Досліджено ефекти установки перегородок. Задачі вимушених коливань зводяться до розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Для параметричних коливань отримано систему рівнянь Матьє. Виконано числове моделювання висоти підйому вільної поверхні при різних навантаженнях і конфігураціях перегородок. Розглядаються ефекти явищ биття. Досліджено явище параметричного резонансу при поздовжніх гармонічних збудженнях.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: КОЛИВАННЯ РІДИНИ, ЖОРСТКІ ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ, МЕТОДИ СКІНЧЕННИХ І ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ, ПАРАМЕТРИЧНИЙ РЕЗОНАНС

ABSTRACT

Yuriy Naumenko “Movement stability of cylindrical and conical shells under simultaneous horizontal and vertical loads”

Qualification work of the master of computer physics. – Kharkiv. – V.N. Karazin KhNU, 2024. – 55 p.

The work is dedicated to the issues of assessing the height of the free surface in rigid cylindrical and conical tanks filled with liquid under external loads. The possibility of installing partitions is provided. It is assumed that the filler is an ideal incompressible liquid, whose motion is potential. The oscillations of the liquid caused by transverse and longitudinal harmonic loads are considered. Free, forced, and parametric oscillations are analyzed. A spectral boundary value problem is formulated regarding the oscillations of the liquid in rigid shells of revolution. The modes of free oscillations of the liquid are considered as basis functions for the analysis of forced and parametric oscillations. The modes of free oscillations of the liquid in cylindrical and conical tanks, with and without partitions, are obtained using boundary element methods. The effects of installing partitions are investigated. The problems of forced oscillations are reduced to solving systems of second-order ordinary differential equations. For parametric oscillations, a system of Mathieu equations is obtained. Numerical modeling of the height of the free surface rise under various loads and partition configurations is performed. The effects of beating phenomena are considered under horizontal harmonic excitations. The phenomenon of parametric resonance under longitudinal harmonic excitations is investigated.

KEYWORDS: LIQUID VIBRATIONS, RIGID SHELLS OF REVOLUTION, FLEXIBLE MEMBRANE, FINITE AND BOUNDARY ELEMENT METHODS, PARAMETRIC RESONANCE

ЗМІСТ

ВСТУП 8
1. ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ СТІЙКОСТІ РУХУ РІДИНИ В РЕЗЕРВУАРАХ 10
2. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ 14
2.1 . Основні рівняння для опису динамічної поведінки резервуарів, частково заповнених рідиною…… 14
2.2 Метод заданих форм…… 18
2.3 Спектральна проблема. ..... ….20
2.4 Визначальна система диференційних рівнянь…… .20
2.5 Проблема власних значень…….…… 21
3.ВИЗНАЧАЛЬНІ СИСТЕМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 22
3.1. Двовимірні системи сингулярних інтегральних рівнянь……..23
3.2 Зведення до системи одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь 26
3.3 Метод граничних елементів з під-областями…….. ..26
4.ЧИСЛОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ ТА СТІЙКОСТІ РУХУ РІДИНИ В РЕЗЕРВУАРАХ 27
4.1 Оцінка точності та вірогідності запропонованого методу……..29
4.2 Коливання рідини в циліндричних резервуарах з перегородками та без перегородок ..... .29
4.3 Коливання рідини в конічних резервуарах з перегородками та без перегородок 34
4.4 Врахування пружних ефектів……36
4.5. Стійкість руху рідини в резервуарах при комбінованих горизонтальних та вертикальних збудженнях…… ……37
ВИСНОВКИ..... 48
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 50

ВСТУП

Інженери та конструктори стикаються з багатьма проблемами під час проектування та сейсмічного моделювання резервуарів для зберігання рідини. Ємності для зберігання рідин є важливими компонентами рятувальних і промислових об'єктів. При інтенсивних силових впливах на резервуари спостерігається явище плескань вільної поверхні. коли поверхня рідини може утворювати значні хвилі або впливати на стінки резервуара зі значною силою. Наземні циліндричні резервуари використовуються для зберігання різноманітних рідин, води для пиття та пожежогасіння, сирої нафти, вина, зрідженого природного газу тощо. Поломка резервуарів після руйнівних землетрусів може призвести до екологічної небезпеки, втрати цінного вмісту та пожеж. Неналежним чином розроблені резервуари зазнали значних пошкоджень під час минулих землетрусів, що призвело до катастрофічних наслідків. На цей час також існує велика ймовірність руйнування резервуарів внаслідок терористичних актів та вибухів. Потужні вибухі поблизу резервуарів призводять до інтенсивних плескань вільної поверхні заповнювачів. В свою чергу, плескання рідини може пошкодити дах і верхню оболонку резервуарів. Високі напруження поблизу анкерів можуть розірвати стінку бака. Вони також можуть призвести до тертя, що спричиняє ковзання баку з його подальшим падінням або руйнуванням. Конструювання резервуарів, що містять різні заповнювачі, вимагає ретельного вивчення поведінки рідини в них в реальних умовах експлуатації. Тому великого значення набувають методи дослідження умов демпфування плескань. Демпфування має значну роль у забезпеченні стабільності та зменшенні потенційних небезпек при експлуатації резервуарів та паливних баків, частково заповнених рідиною. Амортизація за рахунок демпфування сприяє розсіюванню енергію руху плескань рідини. Але, в свою чергу, відсутність амортизації може призвести до нестабільності руху. У рухомих резервуарах з рідиною будь-які порушення руху, такі як раптове прискорення, уповільнення, поворот, інші маневри можуть спричинити надмірні плескання. Без належної амортизації, плескання можуть навіть

посилюватися, потенційно призводячи до неконтрольованих і небезпечних ситуацій, особливо в транспортних засобах або в сховищах для збереження небезпечних рідин. В резервуарах для збереження нафти інтенсивне плескання може виникнути внаслідок потужних вибухів поблизу сховища, або сейсмічного впливу. Демпфування забезпечує контроль над динамікою плескань, приводить до більш плавну та передбачувану поведінку рідини. За допомогою гасіння надмірних коливань конструктори можуть гарантувати, що рідина залишається стабільною всередині бака, що зменшує ризик надмірних динамічних навантажень на конструкцію бака або транспортний засіб, який його перевозить. Демпфування допомагає пригнічувати хвилі плескань, зменшуючи ймовірність руйнівних ударів і забезпечуючи цілісність бака. Таким чином, демпфування має вирішальне значення при гасінні плескань рідини в жорстких резервуарах через його роль у забезпеченні стабільності, контролю, безпеки, продуктивності обслуговування різних систем і обладнання. Належні механізми амортизації, за допомогою плавучих кришок, перегородок, або їх комбінації, є важливими для оптимізації поведінки наповнених рідиною жорстких резервуарів у широкому діапазоні застосувань. Тому розроблення методів оцінки стійкості руху рідини в резервуарах є актуальною проблемою.

.

1. ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ СТІЙКОСТІ РУХУ РІДИНИ В РЕЗЕРВУАРАХ

Тонкостінні конструкції знайшли широке застосування в різних галузях машинобудування: хімічній та аерокосмічній промисловості, транспорті, нафто-газовидобутку. Зазвичай ці конструкції працюють при інтенсивних термічних і силових навантаженнях, при взаємодії з рідинами, що знаходяться в їх контейнерах. Багато питань і викликів виникає при проектуванні, сейсмічному моделюванні та моделюванні ударів по резервуарах для зберігання рідини. Поломки цих резервуарів після руйнівних землетрусів або вибухівки можуть призвести до екологічних катастроф, втрати цінного вмісту та зриву заходів з гасіння пожежі. Розбризкування рідини часто відбувається, коли на конструкції з відсіками, частково заповненими різними рідинами, діють високі навантаження. Тому актуальною тут є проблема оцінки частот і форм коливань таких установок. Перші дослідження, присвячені взаємодії рідини і структури, з'явилися в 60-х роках минулого століття, коли перші місії до Юпітера зазнали невдачі. Серед них слід згадати роботу [1].

Подальші дослідження були присвячені вільним коливанням призматичних і циліндричних резервуарів у 2D постановках здійснено в [2]. Плескання рідини також є причиною пошкодження даху і верхніх стінок резервуарів. Невідповідно сконструйовані резервуари та сховища рідини були пошкоджені під час минулих сильних землетрусів.

Частоти та форми плескання для дво- та тривимірних прямокутних резервуарів були отримані в [3] методом розділення змінних. Комплексний огляд явища плескання зроблено в [4]. Слід зазначити, що важко або неможливо отримати аналітичні рішення для резервуарів з перегородками та резервуарів складної геометричної форми. Отже, для розв’язування лінійних крайових задач про розплескування рідини застосовано багато чисельних методів. В [5]

розроблені методи скінченних елементів для аналізу плескання рідини у вертикальному циліндричному резервуарі під дією бічних збуджень. Зауважимо, що такий тривимірний скінченно-елементний аналіз взаємодії рідини, конструкції та ґрунту в нелінійній постановці є складним і займає надзвичайно багато часу. Було проведено декілька спрощених теоретичних досліджень. В [6] розроблено інші чисельні методи. В [7] розробили аналітичні лінійні мультимодальні методи для аналізу розплескування рідини в сферичних резервуарах. Метод скінченних об'ємів був розроблений в [8] та [9]. Динамічний аналіз заповнених рідиною оболонкових конструкцій з використанням поєднання методів скінченних і граничних елементів виконано в [10-11].

Для гасіння коливань руху рідини, зменшення конструктивних навантажень і запобігання нестабільності було запропоновано багато пристроїв для гасіння плескань [12]. Ці пристрої є жорсткими або пружними кільцевими перегородками різних розмірів і орієнтації, вертикальними перегородками, різноманітними пластинами або мембранами, що частково покривають вільну поверхню [13-14]. Конструкція таких пристроїв також вимагає високої точності оцінки характеристик плескання. Зазвичай ефект від перегородок можна побачити тільки після установки перегородок. Але ця експериментальна робота надто коштовна та не завжди безпечна, особливо при виконанні натурних експериментів. Тому розробка обчислювальних технологій для якісного числового моделювання впливу перегородок є дуже актуальною проблемою.

Одна з піонерських статей у цій галузі - це робота [15]. Вплив перегородок на власні частоту плескання також вивчено в [16] за допомогою методу граничних елементів. Цей метод має певні переваги та надає нові якісні можливості в моделюванні процесу взаємодії рідини та конструкції [17]. В визначальних рівняннях функції та їх похідні визначені лише на межах області. Це дозволяє різко зменшити розмірність задачі. Але отримані при дискретизації

матриці лінійних алгебраїчних систем рівнянь є щільними та несиметричними, що призводить до збільшення обчислювальних витрат. Це стало причиною того, що для вирішення крайових задач були розроблені макро-елементні методи, засновані на використанні граничних елементів [17-19]. Основна ідея цього підходу полягає в поділі початкової області на більш дрібні (під-області або макро-елементи). Для поділу області задіяні допоміжні поверхні розділу, і невідомими тут є потенціал швидкості та потік. На фіктивних границях розподілу сформульовано умови неперервності. Потім для кожного макро-елементу будуються системи лінійних алгебраїчних рівнянь; а глобальна система рівнянь формується шляхом складання рівнянь усіх макро-елементів з використанням умов узгодженості в загальних вузлах інтерфейсу. Цей підхід особливо ефективний при числовому моделюванні плескання в резервуарах з перегородками [13,18,19].

На сьогоднішній день поширене використання резервуарів у вигляді циліндричних оболонок із закругленими краями [20], тороїдальних і співвісних оболонок [21]. Найбільш точну оцінку міцності резервуарів, заповнених рідиною під впливом інтенсивних зовнішніх сил, можна отримати за допомогою складних повномасштабних польових експериментів. Однак проведення таких експериментів дороге і часто дуже ризиковане. У зв'язку з цим віртуальні експерименти набувають популярності в наукових дослідженнях як безпечний і ефективніший альтернативний метод. В даний час розроблено ряд ефективних методів комп'ютерного моделювання динамічних процесів. Серед них методи скінченних [22] та граничних [23] елементів, методи скінченних об’ємів [24]. та методи розкладення в ряди [25]. Першим етапом моделювання динаміки танків є визначення частот і форм їх власних коливань без врахування рідини. Цей аспект досліджували в роботах [26-27]. В [28] розроблено аналітичні методи для аналізу вібрацій у закритих оболонках, наповнених рідиною. Мембранні покриття для гасіння вібрації розглядаються в

[29-30]. Власні частоти циліндричних оболонок при низькій гравітації визначені в [31]. Теоретичні та експериментальні дослідження стійкості циліндричних оболонок проводились в [32-36]. Для налаштування від небажаних резонансних частот необхідно вивчити весь частотний спектр власних коливань, при різних рівнях заправки паливом і різних рівнях навантаження. Фундаментальні частоти та форми далі використовуються як базові функції при дослідженні вимушеної вібрації.

Незважаючи на значну кількість досліджень у цій галузі, існує багато проблем, які потребують ретельного вивчення. Ця робота присвячена вільним і вимушеним коливанням рідини в циліндричних та конічних резервуарах з перегородками і без перегородок, заповнених нестисливою ідеальною рідиною. Розглядаються резервуари з горизонтальними перегородками. Для всіх резервуарів розв’язано спектральні задачі, тобто отримані частоти і форми коливань рідини в жорстких оболонках. Отримано системи базисних функцій, які використовуються далі при вивченні вимушених коливань. До конструкцій, що розглядаються, прикладаються поперечні та поздовжні гармонічні навантаження. Аналізуються ефекти биття та параметричні резонанси.

2. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

2.1. Основні рівняння для визначення динамічної поведінки резервуарів, частково заповнених рідиною.

Розглянемо зв'язану задачу динамічної поведінки пружної оболонки обертання, частково заповненої рідиною, під дією короткочасного імпульсного навантаження. Будемо вивчати вільні та вимушені коливання таких оболонок. Вважаємо, що рідина всередині оболонки є нестисливою та нев’язкою.

Припустимо, що в заповненій рідиною пружній оболонці обертання довільного меридіана встановлені внутрішні перегородки для гасіння плескання рідини. Оболонка має однакову товщину h, виготовлена з однорідного ізотропного матеріалу з модулем пружності E, коефіцієнтом Пуассона ν і густиною матеріалу ρ_s. Конструкцію оболонки та її ескіз показано на рис. 2.1.

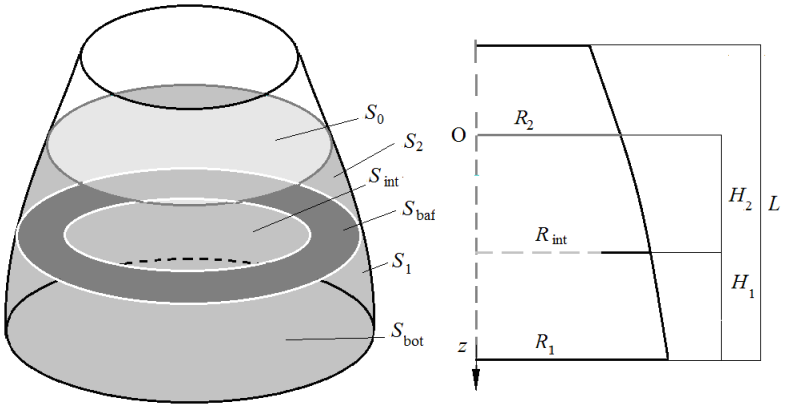


Рисунок 2.1: Конструкція оболонки з внутрішньою перегородкою та її ескіз.

Позначимо через σ змочену частину поверхні оболонки, а вільну поверхню рідини позначимо як S_0. Об’єм рідини тут розділений на дві області Ω_1 і Ω_2 поверхня, S_{int} – поверхня розділу (або інтерфейсу) [9], рис.2.1. Змочена поверхня оболонки σ складається з чотирьох частин,

$$\sigma = S_{w1} \cup S_{w2} \cup S_{bot} \cup S_{baf}.$$

Тут S_{w1} і S_{w2} - бічні поверхні першої і другої частини об'єму рідини відповідно, S_{baf} – це поверхня перегородки, а S_{bot} - поверхня днища резервуара.

Позначимо як $U = (U_1, U_2, U_3)$ вектор-функцію переміщень оболонки.

Розглянемо спочатку вільні коливання оболонки без рідини (тобто, розглянемо порожню оболонку). Для аналізу вільних коливань порожньої оболонки припускаємо, що залежні від часу переміщення оболонки задані як

$$\mathbf{U} = \mathbf{u}\exp(\mathrm{i}\Omega t);\ \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3).$$

Тут Ω - частота коливань, надалі множник $\exp(\mathrm{i}\Omega t)$ буде опущено. Тоді рівняння рівноваги оболонки без рідини описуються системою трьох диференціальних рівнянь у частинних похідних

$$\sum_{i=1}^{3} L_{ij}u_i = \Omega^2 u_j, \quad j = 1,2,3,$$

де $-L_{ij}$ лінійні диференціальні оператори теорії оболонки Кірхгофа – Лява.

Метод скінченних елементів [37] було застосовано для обчислення власних частот Ω_k і форм коливань оболонки обертання $\boldsymbol{u}_k$, $k = \overline{1,N}$ без рідини. Після формування глобальних матриць жорсткості **L** та маси **M** в було отримано таке рівняння руху оболонки, що містить рідину:

$$\mathbf{LU} + \mathbf{M\ddot{U}} = p_d\mathbf{n} + \mathbf{Q}\,, \tag{2.1}$$

де **n** - зовнішня одинична нормаль до змоченої поверхні оболонки, $p_d\boldsymbol{n}$ дає динамічний тиск рідини на оболонку, перпендикулярно її поверхні, **Q** є вектором зовнішнього навантаження.

Для моделювання руху рідини була розроблена математична модель, заснована на наступних гіпотезах: рідина нестислива та нев'язка, рух її безвихровий, необхідно враховувати лише малі коливання (лінійна теорія). Отже, можна ввести скалярний потенціал швидкості Φ(*x*,*y*,*z*,*t*), градієнт якого представляє швидкість рідини.

Тиск рідини $p = p(x, y, z, t)$, що діє на змочену поверхню оболонки, отримується з лінеаризованого рівняння Бернуллі для потенційного потоку Лемба [38]

$$p = -\rho_l\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz\right) + p_0; \quad p_s = -\rho_l gz; \quad p_d = -\rho_l\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{2.2}$$

Якщо припустити, що потік нев'язкий і бевихровий, рух нестисливої рідини в 3D резервуарі описується рівнянням Лапласа для потенціалу швидкості Ф

$$\nabla^2 \Phi = 0. \qquad (2.3)$$

Для визначення цього потенціалу сформульовано мішану крайову задачу для рівняння Лапласа в області $\Omega_1 \cup \Omega_2$ (рис. 2.2). Умова непротікання на змочених поверхнях резервуару σ наступна [39]:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right]_{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial t}, \; w = (\mathrm{U}, \mathrm{n}). \qquad (2.4)$$

Нехай функція $\zeta(t, x, y)$- висота підйому вільної поверхні. Кінематичну та динамічну граничні умови на S_0 можна виразити наступним чином [25]:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{n}}\right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial \mathrm{t}}; \quad \mathrm{p} - \mathrm{p}_0|_{\mathrm{S}_0} = 0. \qquad (2.5)$$

Щоб застосувати метод макро-елементів розділяємо область рідини на дві під-області Ω_1 і Ω_2, показані на рис. 2.2. Тут введено штучну поверхню розділу (інтерфейсу) S_{int}. Нехай $\sigma_1 = S_1 \cup S_{bot} \cup S_{baf}$ і $\sigma_2 = S_2 \cup S_{baf}$ – поверхні оболонки, що контактують з рідиною в під-областях Ω_1 і Ω_1. Тоді межі під-областей Ω_1 і Ω_2 є такими

$$\Sigma_1 = \sigma_1 \cup S_{int}, \; \Sigma_2 = \sigma_2 \cup S_0.$$

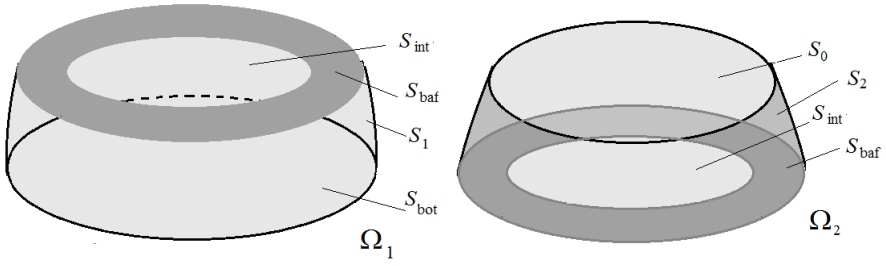


Рисунок 2.2. Під-області (макро-елементи)

Позначимо через φ_1, φ_2, φ_0 значення потенціалу у вузлах σ_1, σ_2 та S_0 відповідно. Потоки на σ_1, σ_2 відомі з граничної умови непроникнення як w_1, w_2, а на вільній поверхні невідомий потік позначається як q_0. Значення потенціалу та потоку на поверхні розділу S_{int} будуть невідомими функціями φ_{ji} та q_j, і

маємо таку умову спряження [40]

$$\phi_{2i} = \phi_{1i}, \quad q_1 = -q_2 \tag{2.6}$$

Рівняння (2.1), (2.3) розв'язуються одночасно з використанням умов фіксації оболонки відносно **U**, граничних умов (2.4)-(2.5) відносно Ф та наступного виразу для динамічної складової тиску рідини на пружні стінки:

$$p_d = (\mathbf{P}, \mathbf{n}) = -\rho_l \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Щоб визначити форми вільних коливань оболонки в поєднанні з плесканням рідини, представимо переміщення заповненого рідиною резервуара як $\mathbf{U}=\mathbf{u_f}\cdot\exp(i\omega t)$. Тут ω і $\mathbf{u_f}$ — власні частоти та форми коливань заповненої рідиною оболонки.

2.2. Метод заданих форм

Зобразимо форми коливань резервуару, заповненого рідиною, таким чином

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{u}_k, \tag{2.7}$$

де $c_k = c_k(t)$– невідомі коефіцієнти, а $\mathbf{u}_k$ – власні форми коливань порожнього бака. Іншими словами, форма вібрації резервуара, заповненого рідиною, визначається як лінійна комбінація власних форм коливань порожньої оболонки. Зауважимо, що виконуються такі співвідношення [39]:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_\mathrm{k}) = \Omega_\mathrm{k}^2 \mathbf{M}(\mathbf{u}_\mathrm{k}) \ , \ (\mathbf{M}(\mathbf{u}_\mathrm{k}), \mathbf{u}_\mathrm{j}) = \delta_{kj} \ .$$

Звідси

$$(\mathbf{L}(\mathbf{u}_\mathrm{k}), \mathbf{u}_\mathrm{j}) = \Omega_k^2 \delta_{kj} \ , \tag{2.8}$$

де Ω_k – k-та частота коливань порожнього бака. Рівняння (2.8) показують, що вищезазначені форми коливань повинні бути ортонормовані відносно матриці мас. Розглянемо потенціал Ф як суму двох потенціалів , як це було зроблено у [15]. k – k-та частота коливань порожнього бака. Рівняння (7), (8) показують, що вищезазначені моди коливань повинні бути ортонормовані відносно матриці

мас. Розглянемо потенціал Ф як суму двох потенціалів $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, як це було зроблено в роботі [15].

Ряд для потенціалу Φ_1 можна записати як

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{N} \dot{c}_k(t)\phi_{1k}.$$

Тут залежні від часу коефіцієнти $c_k(t)$ визначені в рівнянні (2.7). Для визначення функцій ϕ_{1k}k формулюються наступні крайові задачі:

$$\Delta\phi_{1k} = 0, \left.\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\sigma} = w_k,\ \phi_{1k}|_{S_0} = 0, w_k = (\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{n}),\ k = \overline{1,N} \tag{2.9}$$

Розв'язок крайових задач (2.9) було виконано у [40]. Таким чином, динамічний стан пружних оболонок обертання з рідиною, нехтуючи силою тяжіння, формулюємо в термінах функцій **U** та Φ_1. Наведені вище функції задовольняють системі диференціальних рівнянь (2.1), (2.3) умові непротікання та відсутності тиску на вільній поверхню, а також умови фіксації оболонки. Розв'язки крайових задач (2.9) можна представити в символьному вигляді як $\phi_{1k} = i\Omega \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}_k)$, де $\boldsymbol{H}$ – обернений оператор гідродинамічної задачі [38].

Припустимо, що $c_k(t) = C_k\, exp(i\omega t)$, де ω – власна частота коливань оболонки з рідиною. Виходячи з рівнянь (2.1), (2.3), (2.9) отримуємо

$$\left(\Omega_k^2\delta_{kj} + \delta_{kj}\right)C_j = \omega^2\rho_l \sum_{k=1}^{N} C_k\left(\mathbf{H}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j\right). \tag{2.10}$$

Наведене вище рівняння представляє узагальнену задачу на власні значення. Розв'язування цієї задачі дає власні частоти ω коливань пружної оболонки, що містить рідину, але без впливу гравітації.

2.3. Спектральна проблема

Спектральна проблема полягає в знаходженні частот та форм коливань рідини в жорстких оболонках. Тобто, при розв'язанні цієї проблеми нехтуємо пружністю стінок резервуара. Крім того, вважається, що формулювання задачі

лінійне, а саме припускається, що рух рідини відбувається без розбризкування та падіння хвиль. В розглянутому випадку – це задача визначення часткового потенціалу Φ_2.

Використаємо ряд

$$\Phi_2 = \sum_{k=1}^{M} \dot{d}_k(t)\phi_{2k},$$

де d_k(t) – невідомі коефіцієнти, функції ϕ_{2k} – власні форми плескання рідини в жорсткій ємності. Для отримання цих форм розглядаються наступні крайові задачі:

$$\Delta\phi_{2k} = 0; \quad \frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\sigma} = 0; \quad \frac{\partial\phi_{2k}}{\partial t} + g\zeta\Big|_{S_0} = 0; \quad \frac{\partial\phi_{2k}}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{S_0} = \frac{\partial\varsigma}{\partial t}, k = \overline{1,N} \quad (2.11)$$

Очевидно, що існує нульове власне значення для задачі (2.11), але ми виключаємо його за допомогою такої умови ортогональності:

$$\iint_{S_0} \frac{\partial\phi_{2k}}{\partial\mathbf{n}} dS_0 = 0.$$

Продиференціюємо третє рівняння у (2.11) за t і підставимо туди вираз для з четвертого рівняння в (2.11). Припустимо, що $\varphi_{2k}(t,x,y,z) = e^{i\chi_k t}\varphi_{2k}(x,y,z)$. Отримаємо наступні умови на вільній поверхні для кожної форми φ_{2k} з частотою плескання χ_k

$$\frac{\partial\phi_{2k}}{\partial\boldsymbol{n}} = \frac{\chi_k^2}{g}\phi_{2k}, \quad k = 1, M. \quad (2.12)$$

Це веде до наступних проблем власних значень

$$\Delta\varphi_{2k} = 0; \quad \frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\sigma} = 0; \quad \frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\chi_k^2}{g}\varphi_{2k}, \iint_{S_0}\varphi_{2k}dS_0 = 0, \quad k = \overline{1,M}. \quad (2.13)$$

Вирішення цих задач дає частоти та форми коливань плескань, що в літературі мають назву фундаментальних частот та форм.

Отже, щоб розв’язати задачу про вільні коливання пружної оболонки обертання в поєднанні з плесканням рідини, необхідно визначити три системи основних функцій: режими рідини в твердій оболонці під дією сили тяжіння;

власні режими порожньої оболонки; режими заповненої рідиною пружної оболонки без урахування сили тяжіння.

Таким чином, проблема, що розглядається, передбачає наступні кроки.

По-перше, необхідно отримати частоти та форми плескання, використовуючи припущення жорсткої стінки, тобто розв'язати спектральну проблему.

По-друге, отримуємо власні частоти і форми порожнього бака з пружними стінками. Слід зазначити, що тут використовується теорія оболонок Кірхгофа-Лява тонких оболонок, але для визначення базисних функцій можна застосувати іншу теорію оболонок.

Потім ми визначаємо частоти і форми вільних коливань пружного бака без урахування ефектів плескання.

Для знаходження потенціалу та висоти підйому вільної поверхні метод заданих форм дає такі залежності:

$$\zeta(r,\theta,t)=\sum_{l=0}^{m}\cos(l\theta)\sum_{k=1}^{n}d_{kl}(t)\zeta_k(r),$$

$$\Phi(r,\theta,z,t)=\sum_{l=0}^{m}\cos(l\theta)\quad\sum_{k=1}^{n_2}\dot{d}_{kl}(t)\varphi_k(r,z).$$

Тут $\varphi_k(r,z)$, $\zeta_k(r)$- базисні функції, між якими на вільній поверхні існує такий зв'язок $\left.\frac{\partial\varphi_k(r,z)}{\partial \mathrm{n}}\right|_{z=H}=\zeta_k(r)$.

2.4. Визначальна система диференціальних рівнянь

Остаточно, для суми потенціалів $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$ маємо

$$\Phi=\sum_{k=1}^{N}\dot{c}_k(t)\phi_{1k}+\sum_{k=1}^{M}\dot{d}_k(t)\phi_{2k}. \qquad (2.14)$$

Невідома функція ζ приймає такий вид:

$$\zeta=\sum_{k=1}^{N}c_k(t)\frac{\partial\phi_{1k}}{\partial n}+\sum_{k=1}^{M}d_k(t)\frac{\partial\phi_{2k}}{\partial n}. \qquad (2.15)$$

Таким чином, сумарний потенціал задовольняє рівнянню Лапласа та умові непротікання

$$\Delta\Phi = 0; \qquad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_1} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

завдяки (2.11),(12.3), а також такій умові

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

внаслідок співвідношення (2.15).

Задовольняв умову

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t} + gz\right|_{s_0} = 0$$

на вільній поверхні отримаємо

$$\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k\phi_{1k} + \sum_{k=1}^{M}\ddot{d}_k\phi_{2k} + g\left(\sum_{k=1}^{N}c_k\frac{\partial\phi_{1k}}{\partial z} + \sum_{k=1}^{M}d_k\frac{\partial\phi_{2k}}{\partial z}\right) = 0.$$

Коли функції φ_{1k} і φ_{2k} знайдені, підставимо їх в (2.1),(2.5) і отримаємо таку систему диференціальних рівнянь

$$\mathbf{L}\left(\sum_{k=1}^{N}c_k(t)\boldsymbol{u}_k\right) + \mathbf{M}\left(\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k(t)\boldsymbol{u}_k\right) = -\rho_l\left(\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k(t)\phi_{1k} + \sum_{k=1}^{M}\ddot{d}_k(t)\phi_{2k}\right);.$$

$$\sum_{k=1}^{M}\ddot{d}_k\phi_{2k} + g\sum_{k=1}^{N}c_k\frac{\partial\phi_{1k}}{\partial n} + \sum_{k=1}^{M}d_k\chi_k^2\phi_{2k} = 0. \qquad (2.16)$$

Перше рівняння тут виконується для функцій, що задані на поверхні оболонки, а друге для функцій, заданих на вільній поверхні.

Розглядаючи результат скалярного добутку першого рівняння в (2.16) на $\mathbf{u}_j$ і другого на ϕ_{2l}, враховуючи також співвідношення (2.7), (2.8) і ортогональність власних форм коливань рідини в твердій посудині, приходимо до наступної системи $N+M$ диференціальних рівнянь другого порядку для визначення невідомих коефіцієнтів:

$$c_j(t)\Omega_j^2 + \ddot{c}_j(t) = -\rho_l\left(\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k(t)\left(\phi_{1k}, w_j\right) + \sum_{k=1}^{M}\ddot{d}_k(t)\left(\phi_{2k}, w_j\right)\right) \qquad (2.17)$$

$$\ddot{d}_j(t) + g\sum_{k=1}^{N}c_k(t)\left(\frac{\partial\phi_{1k}}{\partial n}, \phi_{2j}\right) + g\chi_j^2 d_j(t) = 0.$$

2.5. Проблема власних значень

Щоб визначити зв'язані форми гармонічних коливань, представляємо залежні від часу невідомі коефіцієнти як

$$c_k(t) = C_k e^{i\omega t};\ d_k(t) = D_k e^{i\omega t}\ , \qquad (2.18)$$

де ω – власна частота, а – C_k- невідомі константи.

Беручи до уваги рівняння (2.18), можна отримати, що рівняння (2. 17) можна виразити у вигляді

$$C_j\Omega_j^2 - \omega^2 C_j + \rho_l\left(\omega^2 \sum_{k=1}^{N} C_k\left(\phi_{1k}, w_j\right) + \omega^2 \sum_{k=1}^{M} D_k\left(\phi_{2k}, w_j\right)\right) = 0. \qquad (2.19)$$

Вводимо наступні матриці та вектори

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_m \end{pmatrix};\quad D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_n \end{pmatrix}; H_\chi = \begin{pmatrix} \chi_1^2 & .0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \chi_n^2 \end{pmatrix}; H_\omega = \begin{pmatrix} \Omega_1^2 & .0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \Omega_m^2 \end{pmatrix};$$

$$P = \{p_{kj}\};\quad p_{kj} = \left(\phi_{1k}, w_j\right);\quad k, j = \overline{1, N};$$

$$B = \{b_{jk}\};\quad b_{jk} = \left(\phi_{2j}, w_k\right); A = \{a_{jk}\};\quad a_{jk} = \left(\frac{\partial \phi_{1k}}{\partial n}, \phi_{2j}\right);\quad ,$$

$$k = \overline{1, N};\ j = \overline{1, M}$$

приходимо до наступної проблеми власних значень

$$\omega^2 EC + H_\omega C + \omega^2 \rho_l PC + \omega^2 \rho_l BD = 0;$$

$$\omega^2 ED + gAC + H_\chi D = 0.$$

Введемо також для простоти вектори та матрицю подвоєної розмірності

$$X = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} E + \rho_2 P & \rho_2 B \\ 0 & E \end{pmatrix};\qquad G = \begin{pmatrix} H_\omega & 0 \\ gA & H_\chi \end{pmatrix}.$$

Це приводить до наступної проблеми власних значень

$$(G - \omega^2 H)X = 0. \qquad (2.20)$$

Таким чином, аналіз вільних коливань пружної оболонки в поєднанні з плесканням рідини зводиться до розв'язання узагальненої задачі на власні значення (2.20), де враховуються як ефекти пружності, так і сили тяжіння [15].

Слід зазначити, що раніше ми не припускали, що розглянута оболонка є лише оболонкою революції. Ефективну чисельну процедуру розв’язування цієї задачі на власні значення з використанням класичних методів граничних елементів та методу граничних елементів з під-областями було розроблено в [41].

3.ВИЗНАЧАЛЬНІ СИСТЕМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Система двовимірних інтегральних рівнянь

Для визначення функцій ϕ_{1k} та ϕ_{2k} використовуємо метод граничних елементів у його прямій формулюванні [42]. Нехтуючи індексами 1k і 2k, можна отримати основне інтегральне рівняння в такому вигляді

$$2\pi\phi(P_0) = \iint_S q\frac{1}{|P-P_0|}dS - \iint_S \phi\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\frac{1}{|P-P_0|}dS. \qquad (3.1)$$

Тут $S = \sigma \cup S_0$, точки P та P_0 належать поверхні S. Значення $|P-P_0|$ це декартова відстань між точками P і P_0. Отже функція φ визначена на зможені поверхні та зображує тиск, а функція q визначена на поверхні S_0, це, $q = \partial\varphi/\partial\mathbf{n}$.

Для обчислення потенціалу Φ_2 вводимо такі інтегральні оператори:

$$A\psi_1 = 2\pi\psi_1 + \iint_{S_1}\psi_1\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{(P,P_0)}}dS_1; B\psi_0 = \iint_{S_0}\psi_0\frac{1}{r}dS_0;$$

$$C\psi_0 = \iint_{S_0}\psi_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)dS_0; D\psi_1 = -\iint_{S_1}\psi_1\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|}dS_1; F\psi_0 = \iint_{S_0}\psi_0\frac{1}{r}dS_0.$$

Тоді крайова задача (2.13) набуває вигляд

$$A\psi_1 = (\chi^2/g)B\psi_0 - C\psi_0; P_0 \in S_1; D\psi_1 = 2\pi E\psi_0 - (\chi^2/g)F\psi_0;\ P_0 \in S_0.$$

Після знаходження функції ψ_1 з наведених рівнянь, отримаємо проблему власних значень, а її розв'язок визначить власні частоти та форми коливань рідини в жорсткій оболонці.

$$(DA^{-1}C + E)\psi_0 - \lambda(DA^{-1}B + F)\psi_0 = 0; \lambda = \chi^2/g.$$

Слід зазначити, що в інтегральних операторах, введених вище, є два типи ядер, а саме

$$A(S,\sigma)\psi = \iint_S \psi\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\frac{1}{|P-P_0|}dS;\ \ B(S,\sigma)\psi = \iint_S \psi\frac{1}{|P-P_0|}dS;\quad P_0 \in \sigma.$$

Інтегруванням за θ зазначені інтеграли можна звести до одновимірних.

3.2. Зведення до системи одновимірних інтегральних рівнянь

Основна процедура полягає в тому, щоб почати зі стандартного граничного інтегрального рівняння для потенціалу (3.1), замінити декартові координати (*x*, *y*, z) на циліндричні (*r*, θ, *z*), та інтегрувати по θ, враховуючи що

$$|P - P_0| = \sqrt{r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2 - 2rr_0\, cos(\theta - \theta_0)},$$

де точки P і P_0 мають такі координати:

$$P = (r, z, \theta); \quad P_0 = (r_0, z_0, \theta_0).$$

Далі невідомі зображаємо як ряди Фур'є за θ

$$w_k^i(r, z, \theta) = w_k^i(r, z)\cos\alpha\,\theta;\ \phi_{jk}^i(r, z, \theta) = \phi_{jk}^i(r, z)\cos\alpha\,\theta; \qquad (3.2)$$

$$i = 1{,}2;\ j = 1{,}2;\ \ k = 1{,}2{,}\ldots,$$

де α - задане ціле число (кількість вузлових діаметрів). У цьому випадку розв'язок не залежить від кутової координати θ, а тривимірна задача зводиться до двовимірної в радіальній координаті *r* і осьовій координаті z.

Нехай Г - твірна поверхні σ. Використовуючи (3.1), (3.2), отримано таку систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно φ і q

$$2\pi\phi(z_0) + \int_\Gamma \phi(z)Q\,(z, z_0)r(z)d\Gamma - \int_0^R q(\rho)\Psi(P, P_0)\rho d\rho =$$

$$= \int_\Gamma w\,(z)\Psi(P, P_0)r(z)d\Gamma_1; P_0 \in \sigma \qquad (3.3)$$

$$\int_\Gamma \phi(z)Q\,(z, z_0)r(z)d\Gamma - \int_0^R q(\rho)\Psi(P, P_0)\rho d\rho = \int_\Gamma w\,(z)\Psi(P, P_0)r(z)d\Gamma_1;.$$

$$P_0 \in S_0$$

Тут

$$Q(z,z_0)=\frac{4}{\sqrt{a+b}}\left\{\frac{1}{2r}\left[\frac{r^2-r_0^2+(z_0-z)^2}{a-b}E_\alpha(k)-F_\alpha(k)\right]n_r+\frac{z_0-z}{a-b}E_\alpha(k)n_z\right\};$$

$$\Psi(P,P_0)=\frac{4}{\sqrt{a+b}}\mathsf{F}_\alpha(k);E_\alpha(k)=(-1)^\alpha(1-4\alpha^2)\int_0^{\pi/2}\cos 2\,\alpha\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi;$$

$$F_\alpha(k)=(-1)^\alpha\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2\alpha\psi\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}};a=\rho^2+\rho_0^2+(z-z_0)^2;\quad b=2\rho\rho_0;\,k^2=\frac{2b}{a+b}.$$

Якщо $\alpha=0$ в (3.3), то отримуємо стандартні еліптичні інтеграли першого і другого роду.

Для числового розв'язання системи (3.3) використано метод, запропонований в [42].

Оскільки еліптичні інтеграли першого роду є несингулярними, для їх числового обчислення можна успішно використовувати стандартні гауссові квадратури. Для еліптичних інтегралів другого роду тут застосовано підхід, заснований на характеристичній властивості середнього арифметичного геометричного AGM(a,b), Вищезазначена характерна властивість полягає в наступному:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}=\frac{\pi}{2AGM(a,b)}.$$

Для знаходження *AGM*(*a*,*b*) існує ефективний алгоритм Гауса

$$a_0=a;\quad b_0=b;\quad a_1=\frac{a_0+b_0}{2};\quad b_1=\sqrt{a_0b_0};\ldots.a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2};\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n};\ldots$$

$$AGM(a,b)=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n. \qquad (3.4)$$

Це дуже ефективний метод обчислення еліптичних інтегралів другого роду. Збіжність $\varepsilon=|a_n-b_n|<10^{-8}$ досягається після 6 ітерацій (а саме, n=6 в (3.4)).

Отже, маємо ефективні числові процедури для оцінки внутрішніх

інтегралів, але інтегральні рівняння (3.3) включають зовнішні інтеграли логарифмічних сингулярностей, і, отже, числова обробка цих інтегралів також повинна враховувати наявність цієї інтегрованої сингулярності. Тут інтегральні вирази розподілені вздовж елементу сильно нерівномірно, і стандартні квадратури інтегрування не відповідають точності. Тому ми обчислюємо ці інтеграли числовим методом за допомогою спеціальних квадратур Гауса [10] і застосовуючи техніку, запропоновану в [43].

Розв'язок системи (3.3) не залежить від кутової координати, а тривимірна задача зводиться до двовимірної в циліндричних координатах r та z. Використовуючи залежність $z = z(r)$, остаточно зводимо систему двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь до одновимірної.

Таким чином. тривимірна задача визначення тиску та висоти підйому вільної поверхні зводиться до розв'язання одновимірної системи сингулярних інтегральних рівнянь.

3.3. Метод граничних елементів з під-областями

Для розрахунків власних частот і форм коливань рідини в баках з перегородками в [43] розроблено метод під-областей, основні ідеї якого запропоновано засновником методу граничних елементів Карлосом Бреббія в фундаментальній монографії [44].

З використанням методу граничних елементів з під-областями отримані такі інтегральні рівняння [45]:

$$\begin{gathered} A_{11}\phi_1 + A_{12}\phi_{1i} = B_{11}w_1 + B_{12}q_1; \quad P_0 \in \sigma_1; \\ A_{21}\phi_1 + A_{22}\phi_{1i} = B_{21}w_1 + B_{22}q_1; \quad P_0 \in S_{int} \\ A_{32}\phi_{1i} + A_{33}\phi_2 = B_{33}w_2 - B_{32}q_1 + B_{34}q_0; \quad P_0 \in \sigma_2; \\ A_{22}\phi_{1i} + A_{23}\phi_2 = B_{23}w_2 - B_{22}q_1 + B_{24}q_0; \quad P_0 \in S_{int} \\ A_{42}\phi_{1i} + A_{43}\phi_2 = B_{43}w_2 - B_{42}q_1 + B_{44}q_0; \quad P_0 \in S_0. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Зауважимо, що умови спряження використані в системі (3.5).

Після розв'язання системи (3.5) отримуємо

$$\phi = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{w}, \quad \phi = \{\phi_i\}|_{i=1}^{2};\ \boldsymbol{w} = \{w_i\}|_{i=1}^{2}; \quad \boldsymbol{Q} = \{Q_{ij}\}\Big|_{i,j=1}^{2},$$

де Q_{ij} отримані в [45]. Таким чином, для кожного φ_{1k} тиск на поверхні σ буде обчислюватись таким чином:

$$p_k = -\rho_l \ddot{c}_k(t)\phi_{1k}^{i}(P);\ P \in S_1 \cup S_{bot} \cup S_2;$$

$$p_k = -\rho_l \ddot{c}_k(t)[\phi_{1k}^{1}(P) - \phi_{1k}^{2}(P)];\ P \in S_{baf}.$$

Крайова задача для визначення Φ_2 розв’язана в роботі шляхом використання методу граничних елементів з під-областями [45]..

4.ЧИСЛОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ ТА СТІЙКОСТІ РУХУ РІДИНИ В РЕЗЕРВУАРАХ

4.1 Оцінка точності та вірогідності запропонованого методу

Розглядаємо жорсткі циліндричні та конічні оболонки з перегородками та без них. На рис. 4.1 показані ескізи оболонок з дискретизованою геометрією на основі МГЕ. Введено такі позначення: N_0 – кількість граничних елементів по радіусу вільної поверхні; N_w – кількість граничних елементів уздовж стінки оболонки; N_{inf} – кількість граничних елементів уздовж поверхні розділу; N_{baf} – кількість граничних елементів уздовж перегородки; N_{bot} – кількість граничних елементів уздовж днища оболонки.

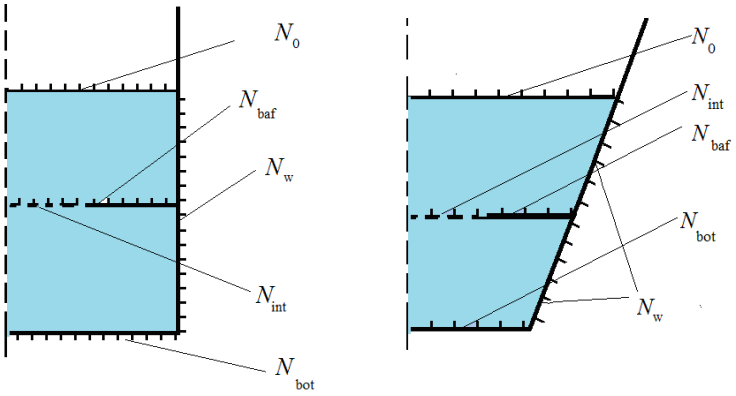


Рисунок 4.1 Дискретизація розрахункових областей на граничні елементи

Для перевірки запропонованого методу розглядається жорсткий циліндричний резервуар. Перший крок розрахунків полягає у визначенні необхідної кількості граничних елементів для точного визначення власних частот. Розглядаємо плескання рідини в жорсткій циліндричній оболонці. Для підтвердження запропонованого числового алгоритму використаємо аналітичний розв'язок [12] у вигляді:

$$\frac{\chi_k^2}{g} = \frac{\mu_k}{R}\tanh\left(\mu_k \frac{H}{R}\right),\ k = 1,2,..\ \phi_{2k} = J_\alpha\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)\cosh\left(\frac{\mu_k}{R}z\right)\cosh^{-1}\left(\frac{\mu_k}{R}H\right) \quad (4.1)$$

Тут R – радіус оболонки, H – її висота, значення μ_k – корені рівняння $J'_\alpha(x) = 0$, де $J(x)$– функція Беселя першого роду, χ_k, ϕ_{2k}– частоти та форми

плескання рідини в жорсткій циліндричній оболонці. Чисельний розв'язок отримано за допомогою МГЕ, як було описано раніше. Розглянемо жорстку круглу циліндричну оболонку з плоским дном, без перегородок і такими параметрами: радіус і висота R = 1 м, H = 1 м. У таблиці 4.1 нижче наведено числові значення власних частот плескання рідини для вузлових діаметрів α =0,1, що отримані запропонованим чисельним методом для різних чисел N_0, N_w і N_{bot}, а також аналітичні значення, отримані за формулою (4.1). Тут обрано $N_0 = N_w = N_{bot}$, тому що радіуси вільної поверхні і днища, а також висота змоченої частини дорівнюють 1м. Отже, розглянемо такі розміри одновимірних граничних елементів за числами $N_0 = N_w = N_{bot}$: 0,04м; 0,02 м і 0,01м.

Результати табл. 4.1 свідчать про збіжність запропонованого МГЕ. Слід зазначити, що точність $\varepsilon = 10^{-4}$ тут досягнута для $N_0 = N_w = N_{bot} = 100$. Тому далі ми розглядаємо граничні елементи довжиною близько 1% від характерного розміру.

Таблиця 4.1. Параметри частоти плескань заповненої рідиною жорсткої циліндричної оболонки

α	МГЕ			n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
0	N_0	N_w	N_{bot}					
	25	25	25	3.8289	7.0163	10.1761	13.3152	6.47089
	50	50	50	3.8285	7.0159	10.1735	13.3243	6.47066
	100	100	100	3.8281	7.0156	10.1732	13.3233	6.47060
	Аналітичний розв'язок			3.8281	7.0156	10.1734	13.3236	6.47063
1	N_0	N_w	N_{bot}	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
	25	25	25	1.6590	5.3301	8.5385	11.7071	14.8684
	50	50	50	1.6579	5.3297	8.5372	11.7082	14.8655
	100	100	100	1.6573	5.3293	8.5366	11.7066	14.8635
	Аналітичний розв'язок			1.6573	5.3293	8.5363	11.7060	14.8635

На рис. 4.2 подані розподіли перших трьох форм плескання для α = 0 на

вільній поверхні. Суцільні лінії позначають моди, отримані за аналітичним виразом (4.1) при z = *H*. Лінії, зазначені кружками та квадратами, позначають числові рішення при $N_0 = N_w = N_{bot}$.

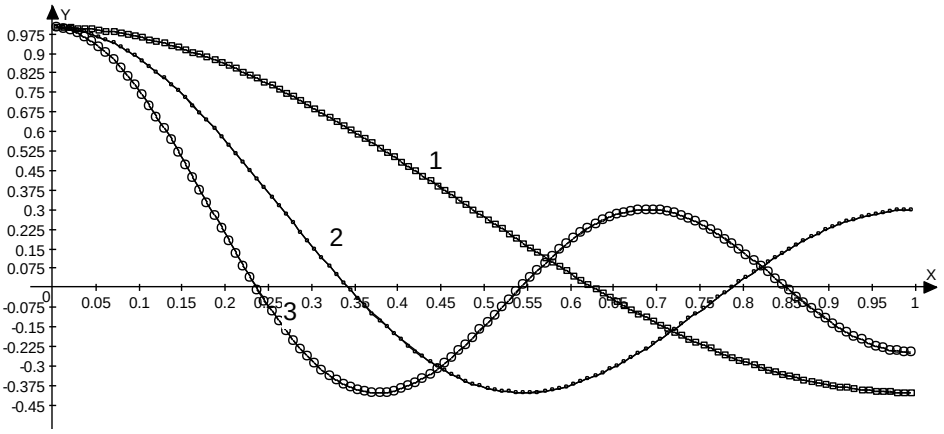
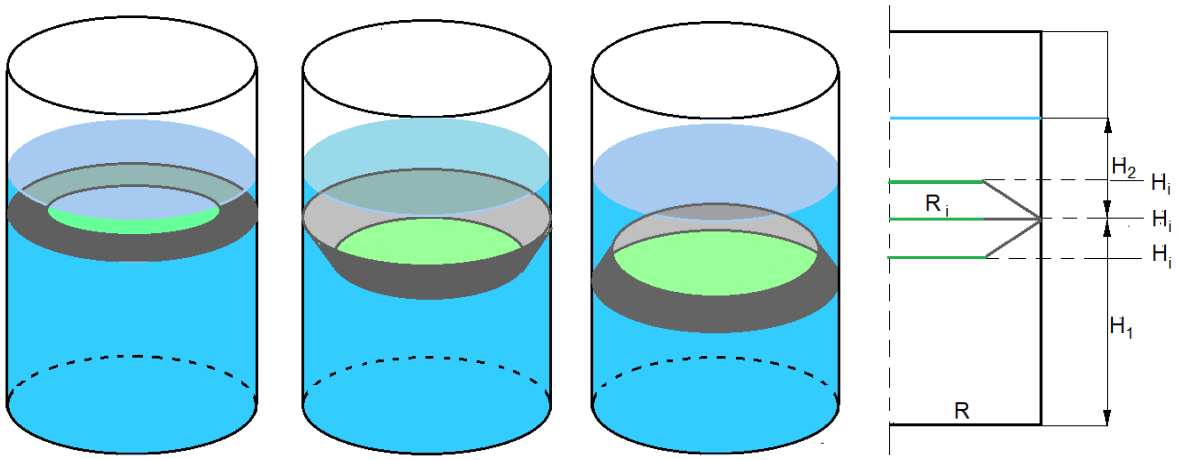


Рисунок 4.2: Чисельно та аналітично отримані форми коливань.

Рис. 4.2 також демонструє добру узгодженість числових і аналітичних даних.

4.2 Коливання рідини в циліндричних резервуарах з перегородками та без перегородок

Надано дослідження характеристик вільних коливань жорсткої циліндричної оболонки, що містить рідину. Розглянуті плоскі та конічні перегородки. Припускається, що α=0,1 у рівнянні (2.22), тобто ми розглядаємо як осесиметричні, так і неосесиметричні форми. Розглянемо круглу циліндричну оболонку з плоским дном і такими параметрами: радіус R = 1 м, товщина h = 0,01 м, довжина L = 2 м. Рівень наповнення рідиною позначається як H. Перегородка розглядається як плоска пластина у вигляді кола з центральним отвором (кільцева перегородка), рис. 4.3. Вертикальна координата положення перегородки (висота перегородки) позначається як H_1 ($H_1 < H$). Радіус поверхні розділу позначається як R_{int} і ми також маємо $H = H_1 + H_2$. Отже, радіус перегородки дорівнює $R_{baf} = R - R_{int}$.



а) б) и) г)

Рисунок 4.3 Циліндричні оболонки з перегородками

Розраховано власну частоту плескання при H_1=0,5 м, H_1=0,9 м і з R_{int}=0,7 м, H=1,0 м. Порівняння результатів, отриманих із запропонованим МГЕ та аналітично орієнтованим підходом І. Гаврилюка та ін. в [46] показано в табл. 4.2 для α=0 та для α=1 в табл. 4.3

Таблиця 4.2 Порівняння даних для α=0

перегородка	метод	n=1	n=2	n=3	n=4
H_1=0.5	МГЕ	3.756	7.012	10.176	13.328
	[46]	3.759	7.010	10.173	13.324
H_1=0.9	МГЕ	2.278	6.200	9.609	12.810
	[46]	2.286	6.197	9.608	12.808

Таблиця 4.3 Порівняння даних для α=1

перегородка	метод	n=1	n=2	n=3	n=4
H_1=0.5	МГЕ	1.3663	5.2941	8.5359	11.7097
	[46]	1.3662	5.2940	8.5357	11.7092
H_1=0.9	МГЕ	0.7078	4.5066	8.1947	11.5556
	[46]	0.7079	4.5068	8.1945	11.5550

Три перші форми коливань рідини показані на рисунку 4.4. Тут розглянуто кільцеву перегородку з R_{int}=0,2м і висотою установки перегородки H_1=0,9м.

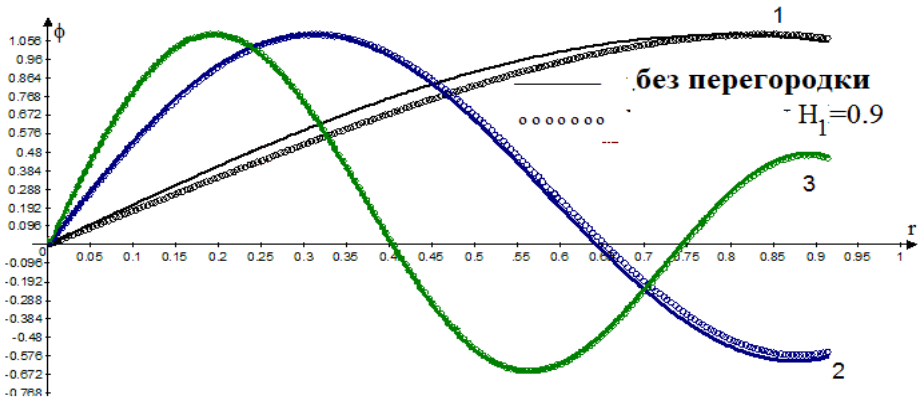


Рисунок 4.4. Перші форми коливань рідини в циліндричному резервуарі

Криві з номерами 1,2,3 відповідають першій, другій і третій режимам плескання при α=1.

У таблицях 4.4-4.5 нижче значення H_1=Hi=0,5м відповідають плоскій перегородці (рисунок 4.1а), значення H_1=0,5м, Hi=0,4м відповідають конічній перегородці (рисунок 4.1б)), а значення H_1 =0,5 м, Hi=0,6 м відповідають конічній перегородці (Рис.4.1в)). Конфігурація перегородки, показана на малюнку 4.1г) при Ri=0,3 м, забезпечує більше зниження частот.

Таблиця 4.4. Параметр частоти для резервуарів з плоскими та конічними перегородками, Ri=0,7м

H_i, m	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
0.5	3.7553	7.0124	10.1762	13.3290	16.4791
0.4	3.8186	7.0141	10.1760	13.3289	16.4791
0.6	3.7345	7.0061	10.1761	13.3290	16.4791

Таблиця 4.5. Параметр частоти для резервуарів з плоскими та конічними перегородками, Ri=0,3м

H_i, m	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
0.5	3.6698	7.0056	10.1759	13.3290	16.4791
0.4	3.7281	7.0117	10.1762	13.3290	16.4791
0.6	3.5663	6.9878	10.1746	13.3289	16.4791

Результати, представлені тут, можуть служити основою для проектування

контейнерів з рідиною, що піддаються зовнішнім збудженням, частоти яких можуть бути близькими до найнижчої власної частоти вільної поверхні.

4.3 Коливання рідини в конічних резервуарах з перегородками та без перегородок

Конічним оболонкам при взаємодії з рідиною приділено недостатньо уваги в науковій літературі, незважаючи на те, що використання тонкостінних конічних оболонок широко розповсюджено в ряді різних галузей техніки. В аерокосмічній техніці такі конструкції використовуються для баків літаків і супутників. У океанічному будівництві вони використовуються для підводних човнів, торпед, водних балістичних ракет і морських бурових установок, у цивільному будівництві конічні оболонки використовуються як захисні ємності у резервуарах для збереження води. Складність використання аналітичних методів виникає через те, що стінки не паралельні осі симетрії. Метод граничних елементів у цьому випадку зберігає свої переваги.

Розглянуті як V-подібні, так і Λ-подібні конічні резервуари з радіусом R_1=1.m і θ=π/6, рис. 4.5. Для V-подібного резервуара R_1 є радіусом вільної поверхні, тоді як для Λ- форму резервуара R_1 – радіус днища, для V-подібного резервуара R_2 – радіус днища, тоді як для Λ-подібного резервуара R2 – радіус вільної поверхні.

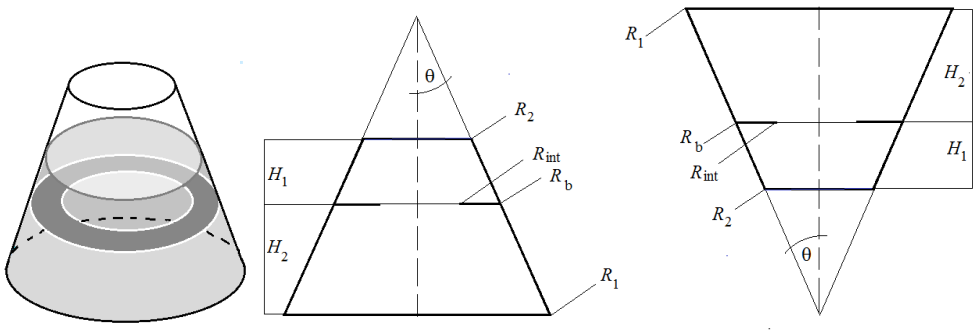


Рисунок 4.5. Конічні резервуари

Якщо R_1, R_2 і θ є відомими величинами, то відповідне значення H можна

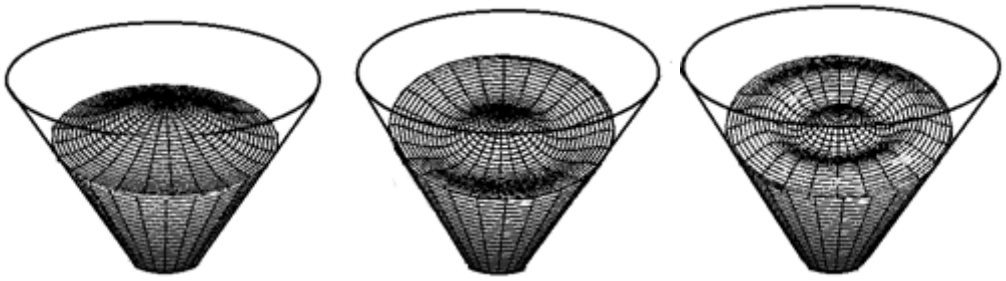
легко знайти як $H = (R_1 - R_2)\cot\theta$.

У таблиці 4.6 представлені результати чисельного моделювання частот безперешкодних резервуарів для α =0, 1, 2 та різних значень R_2. Числове моделювання здійснено для α =0, 1,2 і k =1, оскільки це найнижчі власні частоти, які дають істотний внесок у гідродинамічне навантаження.

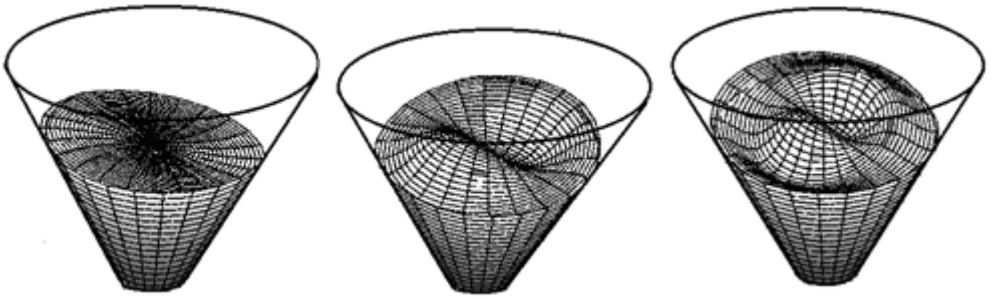
Таблиця 4.6 Частотний параметр для V та Λ подібних конічних резервуарів

	V – ФОРМА					Λ – ФОРМА				
R_2	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
α =0, *k* =1										
[46]	3.38	3.38	3.38	3.13	2.18	24.15	10.01	6.66	4.55	2.68
МГЕ	3.38	3.39	3.39	3.19	2.20	20.02	10.03	6.669	4.545	2.678
α =1, *k* =1										
[46]	1.304	1.302	1.254	0.934	0.542	11.332	5.629	3.515	1.661	0.726
МГЕ	1.305	1.307	1.259	0.954	0.574	11.303	5.626	3.481	1.651	0.732
α =2, *k* =1										
[46]	2.263	2.263	2.255	2.015	1.361	17.760	8.967	5.941	3.724	1.923
МГЕ	2.265	2.270	2.269	2.048	1.394	17.939	8.965	5.941	3.726	1.951

Порівняння результатів, отриманих запропонованим методом, з даними І.Гаврилюка та ін. [46] представлено в табл. 4.6. Результати добре узгоджуються, за винятком даних для резервуара Λ-форми з для α =0 і R_2=0,2 м. Але в [46] зазначено, що в цьому випадку низька збіжність була досягнута за допомогою запропонованого там аналітичного методу. На рис. 4.6а) зображені форми коливань рідини в конічному резервуарі, а на рис.4.6б) ці ж форми зображені для циліндричного резервуару.

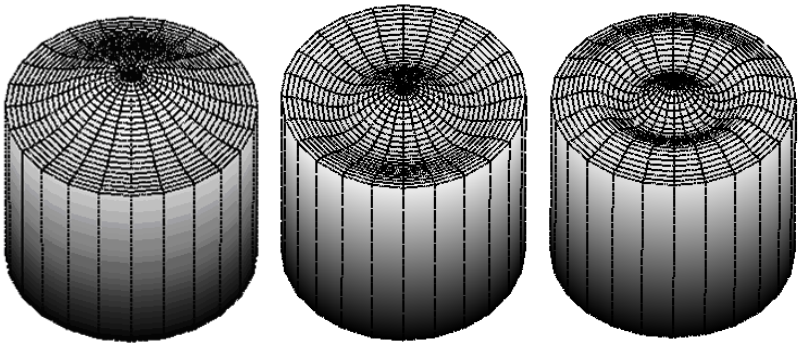


α =0

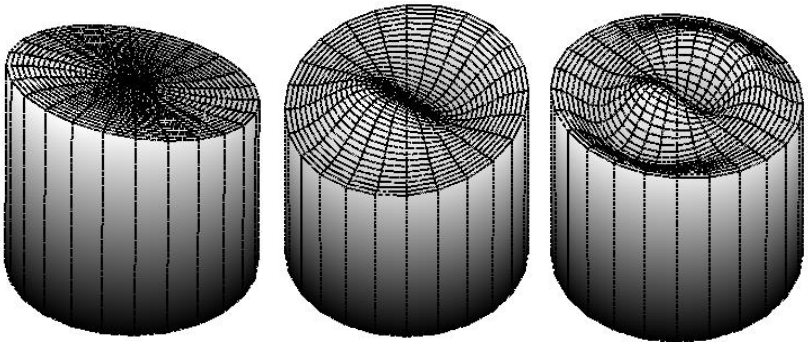


α =1

а) Форми коливань рідини в конічному V резервуарі



α=0: *n* =1 *n*= 2 *n*= 3



α=1: *n* =1 *n*= 2 *n*= 3

б) Форми коливань вільної поверхні рідини в циліндричному резервуарі

Рис. 4.6. Форми коливань вільної поверхні в резервуарах.

Далі проведене числове моделювання власних частот плескання рідини для резервуарів з перегородками. Розглядаються резервуари як V-подібної, так і Λ-подібної форми. Розглянуті резервуари висотою $H=H_1+H_2$=1,0 м з різними положеннями перегородок H_1. Використовуємо R_1 = 1,0 м і R_2 = 0,5 м для обох типів резервуарів (рис.4. 5).

У таблиці 4.7 надані результати числового моделювання для α =0, 1 і різних положень перегородки, що описуються висотою H_1.

Тут розглянуто чотири власні значення для α=0,1. Радіус конічної оболонки в положенні перегородки позначається як R_b, а радіус вільної поверхні якR_{int} (рис. 4.5). По-перше, отримали власні частоти V-подібних і Λ-подібних конічних баків без перегородок. Це відповідає значенням H_1= H_2 =0,5m, R_{int}/R_b=1. Значення H_1 і H_2 можна вибрати довільно, але H_1+H_2=1,0 м. Потім здійснено розміщення перегородки в різних положеннях H_1=0,5 м і H_1=0,8 м і розглянуто різні розміри перегородок, а саме R_{int}/R_b=0,5 і R_{int}/R_b=0,2.

Таблиця 4.7. Частоти коливань рідини в конічних оболонках

n			1	2	3	4	1	2	3	4
			V-ФОРМА				Λ-ФОРМА			
H_1	H_2	R_{int}/R_b	α =0							
0.5	0.5	1	3.466	6.681	9.845	12.99	7.985	14.37	20.70	27.01
0.5	0.5	0.5	3.408	6.668	9.843	12.99	7.968	14.37	20.69	27.01
0.5	0.5	0.2	3.405	6.635	9.843	12.99	7.960	14.37	20.69	27.01
0.8	0.2	0.5	2.527	6.387	9.724	12.92	7.344	14.25	20.66	26.99
0.8	0.2	0.2	2.443	6.059	9.565	12.88	7.113	14.20	20.65	26.99
			α =1							
0.5	0.5	1	1.416	4.997	8.206	11.37	4.424	11.09	17.46	23.79
0.5	0.5	0.5	1.228	4.974	8.197	11.37	4.192	11.06	17.46	23.79
0.5	0.5	0.2	1.172	4.943	8.196	11.37	4.037	11.06	17.45	23.79
0.8	0.2	0.5	0.815	4.742	8.003	11.20	3.128	10.78	17.42	23.77
0.8	0.2	0.2	0.630	4.191	7.849	11.23	2.529	10.66	17.36	23.75

Слід зазначити, що частоти першої гармоніки нижчі за осесиметричні як для V-подібних, так і для Λ-подібних конічних резервуарів.

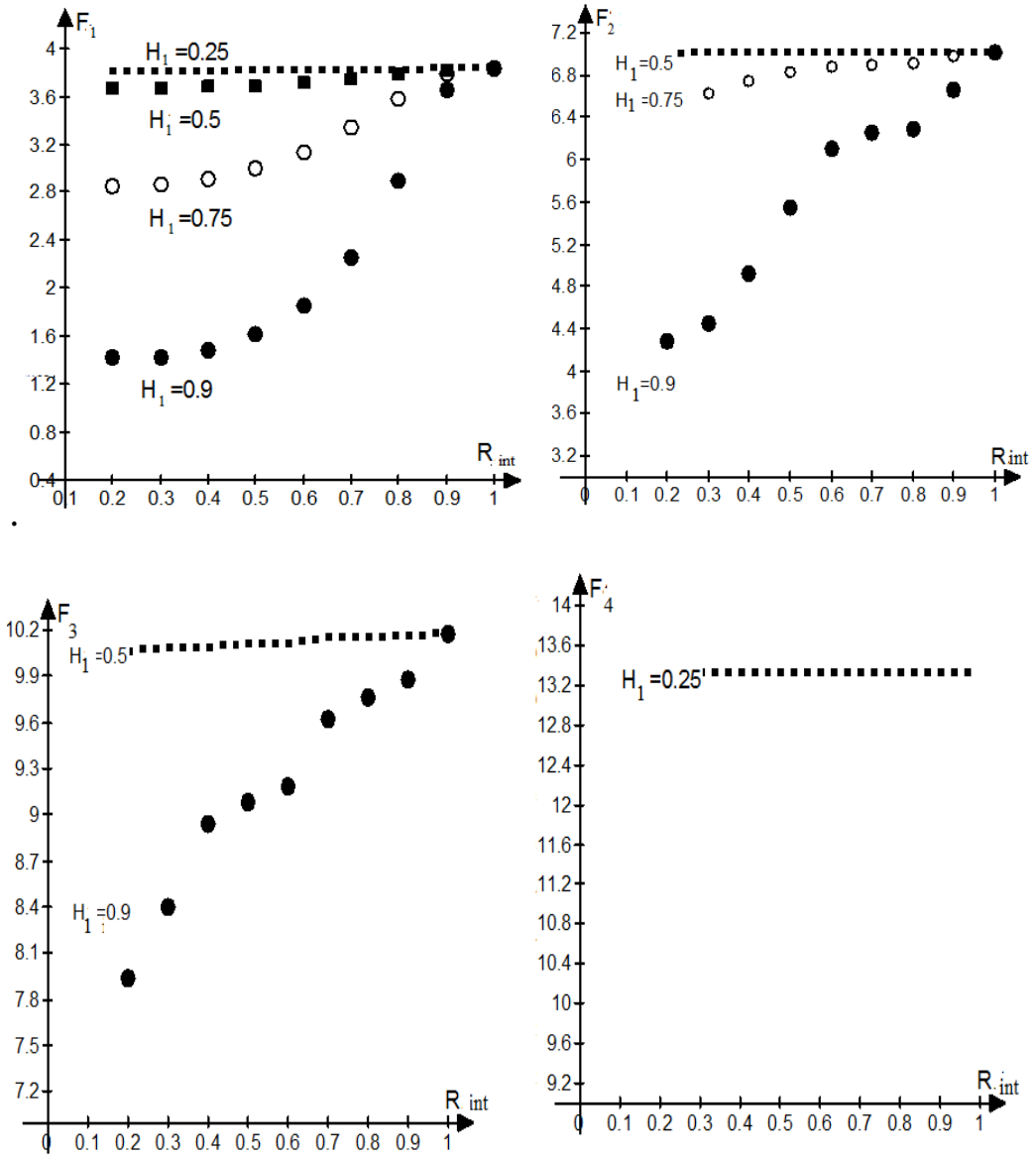
Чисельна-аналітична обробка конічних контейнерів як у [46] може вимагати вибору системи координат, де більшість граничних умов можуть бути точно задоволені. Запропонований МГЕ не потребує будь-яких перетворень вихідних рівнянь і залучення спеціальної системи координат, що можна підкреслити як його перевагу.

4.4 Врахування пружних ефектів

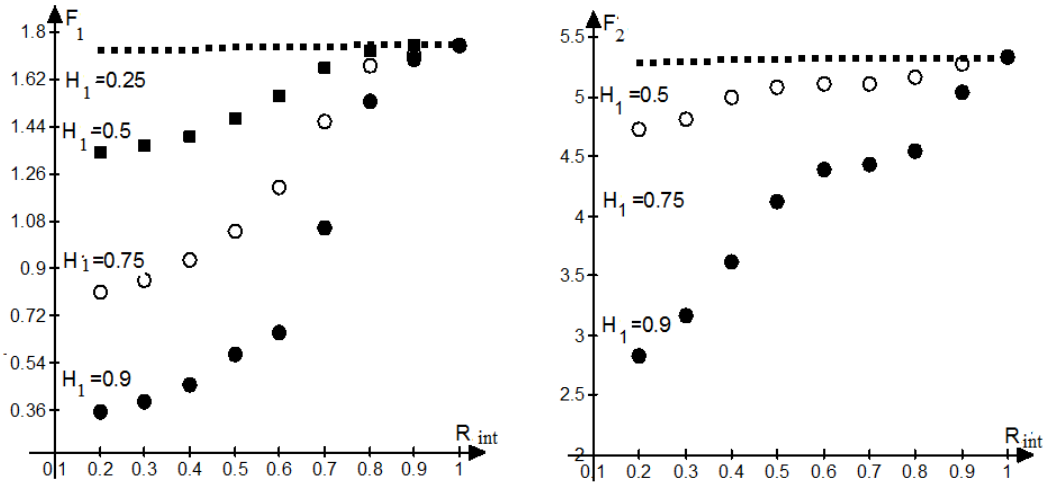
Розглянемо пружну круглу циліндричну оболонку з плоским днищем (днище жорстко закріплено, інший край – вільний, рис. 4.3) і з геометричними та фізичними параметрами, описаними вище. Власні форми коливань порожньої оболонки (другий набір основних функцій) отримані за допомогою МСЕ, як це було описано в [45]. Форми заповненої рідиною пружної оболонки без урахування сили тяжіння (третя система основних функцій) розраховуються за методом, розробленим у [26].

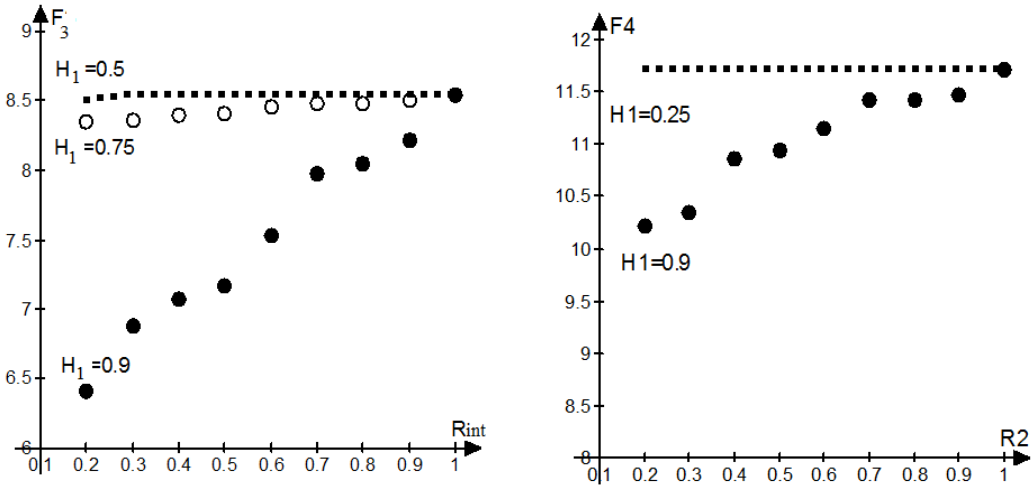
Для завершення числового аналізу треба отримати першу систему базисних функцій. Для цього розглянемо частково заповнену жорстку циліндричну оболонку з такими параметрами: радіус R = 1 м, довжина L = 2 м. Рівень заповнення H=1,0м. Перегородка розглядається як кругла плоска пластина з центральним отвором (кільцева перегородка). Вертикальна координата положення перегородки (висота перегородки) позначається як H1. Радіус поверхні розділу позначається як R_{int}, (рис.4.2).

На рис. 4.7 a), b) демонструються монотонні залежності перших 4 власних значень, позначених там як F_1, F_2, F_3, F_4, відносно радіусу поверхні розділу, позначеного R_{int} за різні позиції перегородки H_1. Розглядаються обидва хвильові числа α=0 і α=1.


F1
H1 =0.25
H1 =0.5
H1 =0.75
H1 =0.9
R int
F2
H1=0.5
H1 =0.75
H1=0.9
Rint
F3
H1 =0.5
H1 =0.9
R int
F4
H1 =0.25
Rint

a) α=0

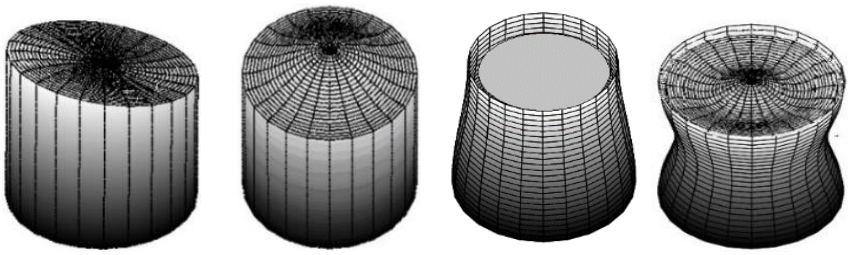

F1
H1 =0.25
H1 =0.5
H1=0.75
H1 =0.9
R int
F2
H1 =0.5
H1 =0.75
H1 =0.9
Rint



б) α=1

Рисунок 4.7 Власні частоти для різних R_{int} при H=1m та різних H_1

З цих результатів можна зробити висновок, що графіки як функції R_{int} суттєво відрізняються для різних і та H_1. Наявність перегородки суттєво вплинула лише на нижні частоти, хоча невеликі перегородки (коли R^{int} є відносно великим) не впливають на нижні частоти. Цей висновок відповідає результатам Гаврилюка та ін. [46]. На рис. 4.8 зображені форми коливань циліндричного резервуару, що розглядається зв'язаному формулюванні, тобто враховуються як плескання відьної поверхні, так і пружність стінок.



а) б) в) г)

Рисунок 4.8 Форми коливань циліндричного резервуару з рідиною.

Тут а) відповідає формі плескань з α=1, б) показує осесиметричну форму плескань з α=0, в) – це перша форма коливань пружних стінок, г) демонструє одночасні вібрації стінок та вільної поверхні. Відповідні цим формам частоти є такими ω_{11} =4.035Гц, ω_{01}=6.128Гц, $\omega_{0,26}$ =44.386Гц і $\omega_{0,34}$=258.658Гц. Тобто, можна зробити такі висновки: Найнижчі частоти- це частоти плескань, частоти коливань рідини в контейнерах з пружними стінками належать високому

спектру.

Аналогічні результати спостерігаються й при вивченні частот коливань пружних резервуарів з перегородками. Тут також найнижчі частоти відпвідають плесканням рідини. Форми коливань циліндричного резервуару з рідиною за наявності кільцевої перегородки зображені на рис. 4.9.

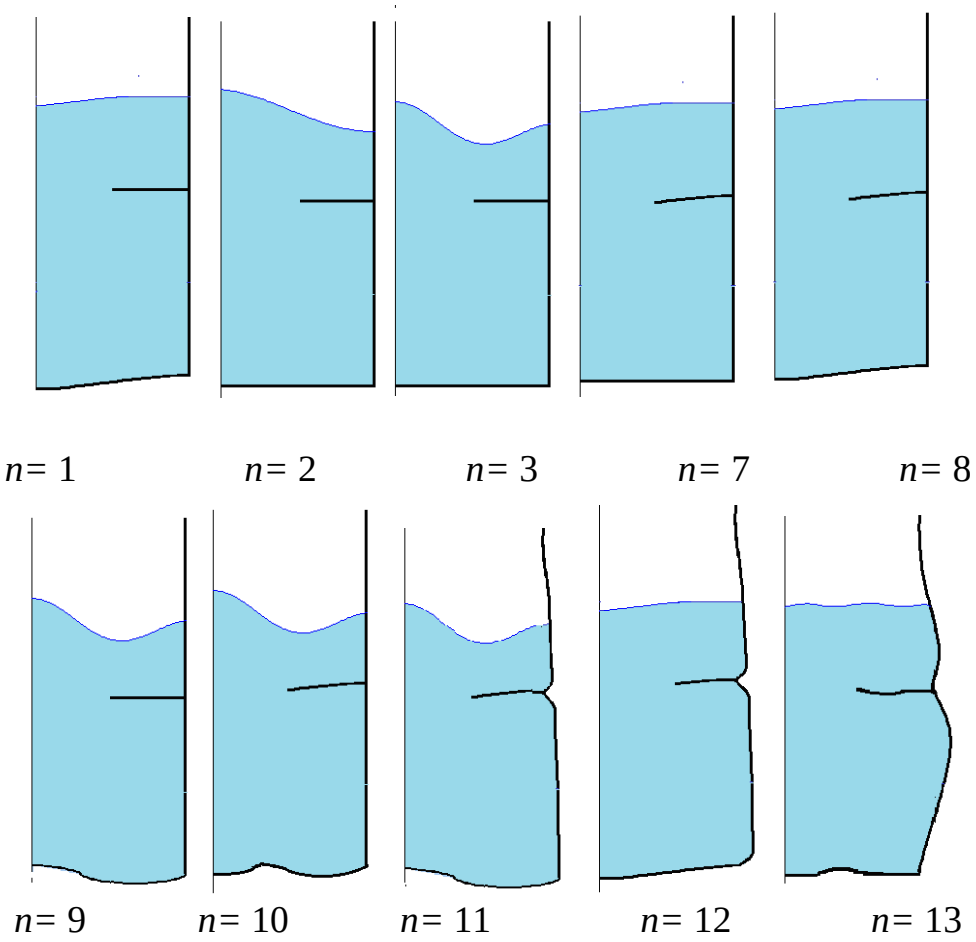


Рисунок 4.9. Форми коливань циліндричної оболонки з рідиною за наявності кільцевої перегородки.

Перший форма відповідає коливанням днища оболонки в поєднанні з першою формою плескання. Форми з номерами 2-6 є суто формами плескань. Сьома форма описує коливання перегородки; восьма і десята форми є суперпозицією коливань перегородки і днища. Дев'ята форма описує коливання днища. Форми коливань вертикальних стінок відповідають вищим частотам (n=11-13 на рис. 4.9).

Таким чином, поєднаний аналіз коливань пружних оболонок і плескання

рідини може виявити складну природу взаємодії рідини та конструкції, яка є досить різною для різних форм резервуарів і наповнення рідиною.

4.5. Стійкість руху рідини в резервуарах при комбінованих горизонтальних та вертикальних збудженнях

Вище було вказано, що для побудови визначальної системи диіеренціальних рівнянь треба знайти базисні функції. Тобто, були знайдені частоти та форми порожніх оболонок з перегородками та без них, розв'язано спектральну проблему, внаслідок чого були визначені фундаментальні частоти та форми, що відповідають плесканням рідини, та базисні форми коливань оболонки, в припущенні відсутності плескань.

Було з'ясовано, що найнижчими частотами коливань системи «оболонка-рідина» є саме частоти плескань вільної поверхні, принаймні для тих циліндричних резервуарів, що розглядалися. Тому при вивченні стійкості руху в цьому дослідженні обмежимось класом жорстких оболонок.

Для вивчення проблем стійкості руху рідини будемо використовувати такий вираз для тиску [47]

$$\frac{p}{\rho_l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \big(g + a_v(t)\big)z + a_h(t)x + \frac{p_0}{\rho_l}, \tag{4.2}$$

е $a_h(t)$ та $a_v(t)$ прискорення сили збудження в горизонтальному та вертикальному напрямках.

Наведемо визначальну систему диференційних рівнянь

$$\ddot{d}_{k0}(t) + \omega_{k0}^2 \left(1 + \frac{a_v(t)}{g}\right) d_{k0}(t) = 0, \tag{4.3}$$

$$\ddot{d}_{k1}(t) + \omega_{k1}^2 \left(1 + \frac{a_v(t)}{g}\right) d_{k1}(t) + a_h(t) F_{k1} = 0,\ F_{k1} = \frac{(r,\varphi_{k1})}{(\varphi_{k1},\varphi_{k1})},$$

$$\ddot{d}_{kl}(t) + \omega_{kl}^2 \left(1 + \frac{a_v(t)}{g}\right) d_{kl}(t) = 0, k = \overline{1,n}; l = \overline{2,m}.$$

Для знаходження однозначного розв'язку системи рівнянь (4.3) необхідно задати початкові умови, тобто

$$d_{kl}(t) = d_{kl}^0,\ \dot{d}_{kl}(t) = d_{kl}^1, \qquad k = \overline{1,n}, \qquad l = \overline{0,m}$$

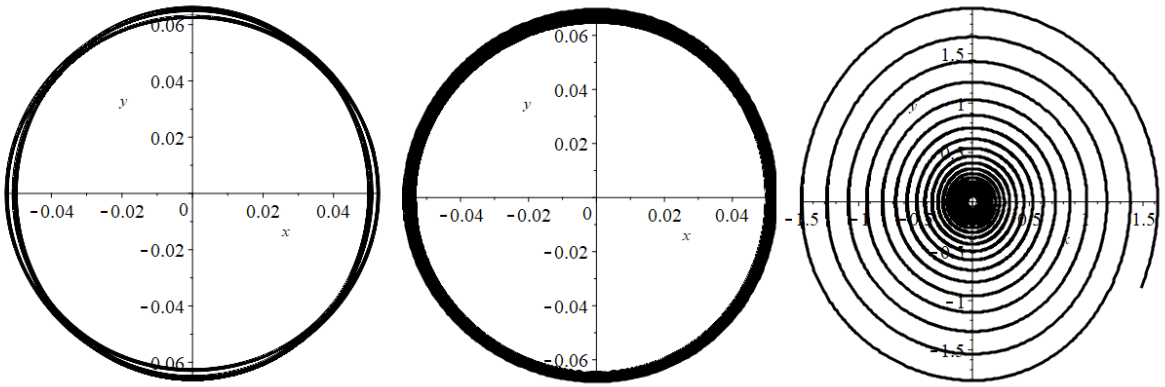
Як числовий приклад, розглянемо конічну оболонку з рідиною під дією комбінованого гармонічного навантаження

$$a_x(t) = a_h \cos(\omega_h t)\,, a_z(t) = a_v \cos(\omega_v t). \tag{4.4}$$

Вважаємо, що розглядається V-подібна усічена конічна оболонка, геометричні параметри якої наведені вище, у пункті 4.2. Проведено розрахунки руху вільної поверхні за різні значення параметрів навантаження a_h, a_v та $\omega_h,\ \omega_v$. Спочатку розглянуто суто вертикальні навантаження.

Фазові портрети рухів в координатах $(\zeta, \dot{\zeta})$ зображені на рис.4.10.

Тут рис. A) відповідає $a_h = 0, a_v = 1,\ \omega_v = 1$, а для рисунків B) та C) прийнято $a_h = 0,\ a_v = 1,\ \omega_v = 1.464$Гц та $a_h = 0, a_v = 1,\ \omega_v = 2.9328$Гц, відповідно. З наведених результатів бачимо, що в перших двох випадках рухи є стабільними, але при $\omega_v = 2.9328$Гц відбувається необмежене зростання амплітуди, що відповідає випадку параметричного резонансу (частота сили, шо змушує, дорівнює подвійній фундаментальній частоті).

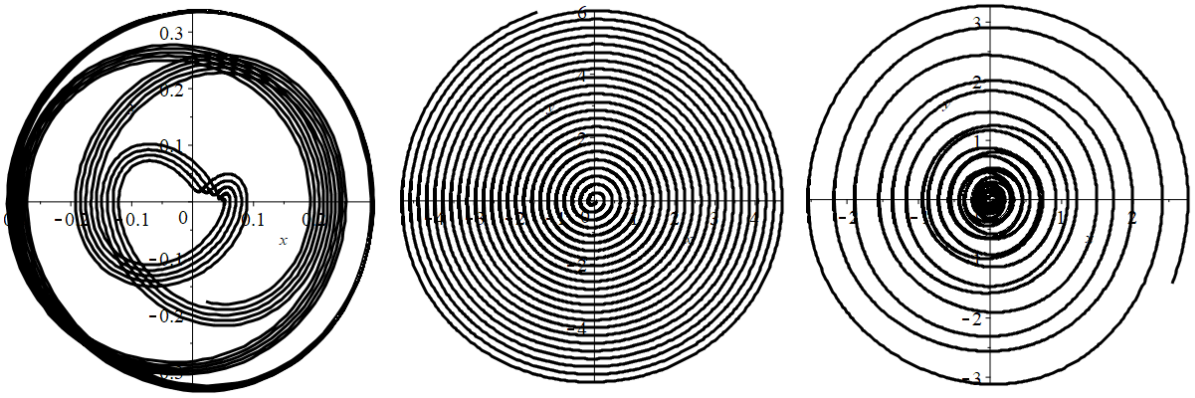


A B C

Рисунок 4.10. Фазові портрети руху рідини при вертикальних навантаженнях, t=200c.

Потім вивчені розглянуті сумісні вертикальне й горизонтальне навантаження, тобто додано горизонтальне навантаження. В результаті

розрахунків отримані фазові портрети в координатах $(\zeta, \dot{\zeta})$, що наведені на рис.4.11



A B C

Рисунок 4.11. Фазові портрети руху рідини при комбінованих навантаженнях, t=200с.

Були застосовані такі параметри комбінованого навантаження:

6. $a_h = 0.1,\ a_v = 1,\ \omega_h = \omega_v = 1;$
7. B) $a_h = 0.1, a_v = 1,\ \omega_h = \omega_v = 1.464$Гц;
8. C) $a_h = 0.1, a_v = 1,\ \omega_h = \omega_v = 2.932$ Гц.

Зауважимо, що в цьому випадку спостерігається ще один резонанс, пов'язаний із горизонтальним навантаженням.

Зони стійкого руху рідини при лише вертикальних навантаженнях.3 можна з'ясувати за допомогою діаграми Айнса-Стретта [48], яка поділяє площину зміни параметрів навантаження на деякі частини, що відповідають стабільним та нестабільним рухам, рис.4.12. Вводяться такі змінні

$$\kappa = \frac{\omega_{jk}^2}{\omega_v^2}, \quad \mu = \frac{a_v}{g}, \quad k = \overline{1,n},\ j = 0,1$$

для кожної фундаментальної частоти. Криві 1-5 на рис. 4.12 поділяють площину в координатах (κ, μ) на області, що відповідають нестійким рухам (темні

області) та стійким рухам, які залишаються обмеженими в часі (білі області), зображено також точки A, B, C.

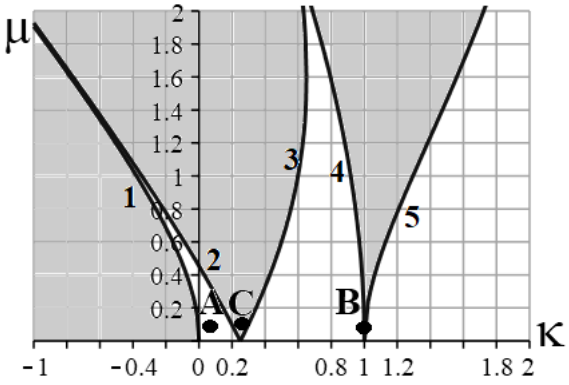


Рис.4.12. Діаграма Айнса - Стретта

Точка A знаходиться в зоні стійкості точка B – на межі зони стійкості а точка C потрапляє в зону нестійкості руху. При чому збільшення амплітуди сили, що збуджує, виводить всі вказані точки в зони нестабільного руху.

Графіки кривих 1-5 на рисунку 4.12 побудовані за наступними формулами [49]

$$\mu_1(\kappa) = 2\sqrt{\kappa(\kappa-1)(\kappa-4)/(3\kappa-8)}, \quad \kappa < 0,$$

$$\mu_2(\kappa) = \frac{1}{4}\sqrt{(9-4\kappa)(13-29\kappa)} - (9-4\kappa), \quad 0 < \kappa < 1/4,$$

$$\mu_3(\kappa) = \frac{1}{4}\left(9-4\kappa \mp \sqrt{(9-4\kappa)(13-29\kappa)}\right), \quad 1/4 < \kappa < 13/20,$$

$$\mu_4(\kappa) = \sqrt{2(\kappa-1)(\kappa-4)(\kappa-9)/(\kappa-5)}, \quad 13/20 < \kappa < 1,$$

$$\mu_5(\kappa) = 2\sqrt{\kappa(\kappa-1)(\kappa-4)/(3\kappa-8)}, \quad \kappa > 1.$$

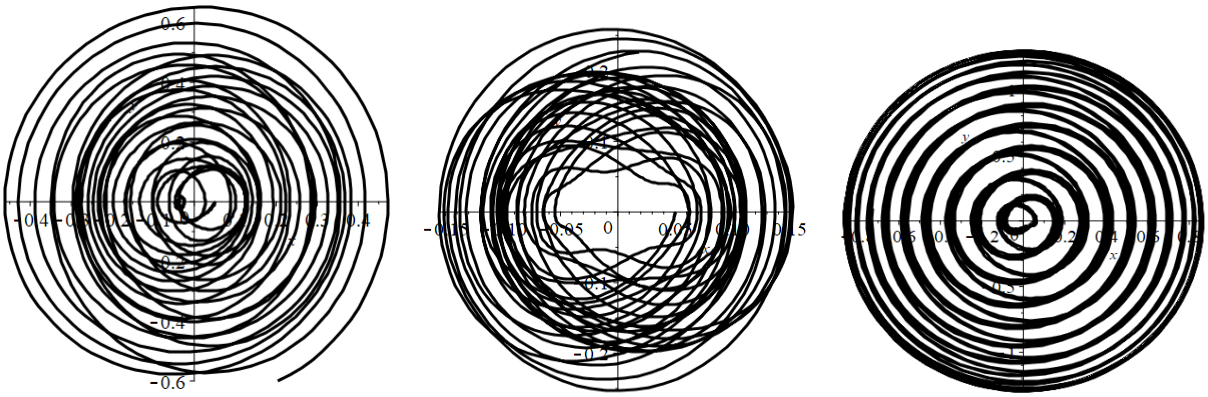
Окрім параметричного резонансу, в системі «оболонка-рідина» можуть з’явитись і додаткові суб-резонанси. Вони виникають, коли сума або різниця частот збудження дорівнює першій фундаментальній частоті

На рис. 4.12 наведені приклади руху, що породжують суб-резонансні ефекти. Тут

A) $a_h = 0.1,\ a_v = 1,\ \omega_h = 2.414$Гц, $\omega_v = 1$;

B) $a_h = 0.1, a_v = 1,\ \omega_h = 1$ Гц, $\omega_v = 0.464$Гц;

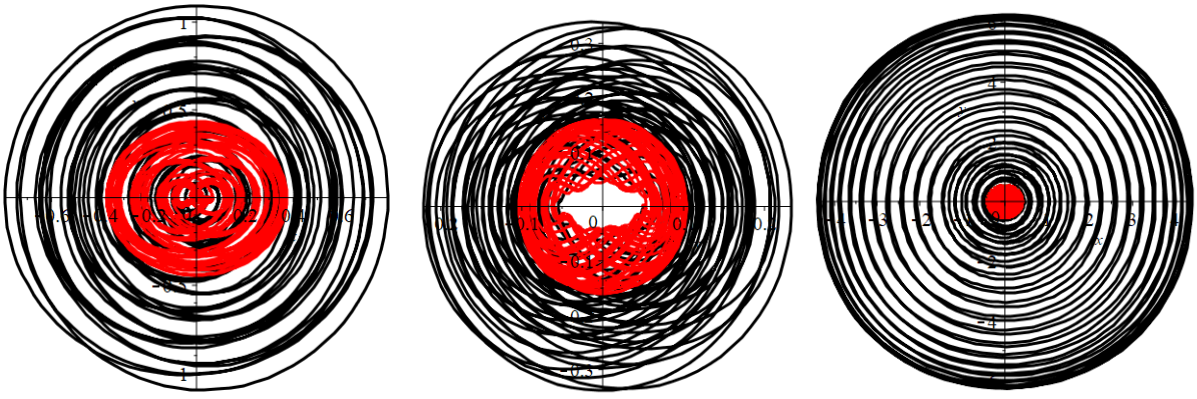
C) $a_h = 0.1, a_v = 1,\ \omega_h = 1.414$Гц, $\omega_v = 0$ Гц.



A B C

Рисунок 4.13. Фазові портрети руху рідини при комбінованих навантаженнях та появи суб-резонансів, t=200с.

Встановлення перегородок веде до покращення ситуації. Відбувається демпфування плескань рідини. Відповідні фазові портрети подані на рис. 4.14.



A B C

Рисунок 4.14. Порівняння фазових портретів руху рідини при комбінованих для резервуарів з перегородками та без них, t=200с.

Тут наведені дані, що характеризують рух рідини за тих же параметрів, що і в розрахунках A), B), C) для фазових портретів, зображених на рис. 4.13,

але за наявності кільцевої перегородки з такими параметрами $H_1=H_2=R_{int}/R_b=0.5$.

Тут чорні лінії відповідають фазовим портретам руху рідини в резервуарах без перегородок, а червоні показують зменшення амплітуди за рахунок встановлення перегородок.

ВИСНОВКИ

Побудовано математичну моделі для дослідження вільних та вимушених коливань рідини в жорстких та пружних резервуарах. Розроблений метод, в якому для розв’язання задачі в тривимірному формулюванні використовується специфіка геометрії розглядуваних об'єктів. Це дозволило застосовувати одновимірні граничні і скінченні елементи, що описують розгалужений меридіан оболонки та використати метод граничних супер-елементів. Для визначення тиску рідини на оболонку використані граничні інтегральні рівняння.

Визначення частот та форм в зв’язаному формулюванні з урахуванням як пружності стінок, так і плескань рідини, здійснюється шляхом використання трьох систем базисних функцій. Перша система – це форми коливань незаповненої пружної оболонки. Друга система є результатом розв’язання спектральної крайової задачі, яку сформульовано відносно коливань рідини в жорсткому резервуарі. Третя система відповідає за пружні коливання стінок резервуару, ала без врахування сил тяжіння. Метод заданих форм дає змогу скористатися всіма трьома системами для побудови зображень розв’язку зв’язаної задачі.

Для циліндричних та конічних оболонок, частково заповнених рідиною, побудовані всі вказані базисні функції. Розглянуті також горизонтальні перегородки у вигляді пластини з круговим отвором. Проведено аналіз частот і форм таких оболонок, та здійснено порівняння з даними для оболонок без перегородок. Хоча лише натурний експеримент дає змогу точно з’ясувати, яке місце розташування та який радіус отвору в перегородці є оптимальними, проведення таких експериментів є коштовною та не завжди безпечною процедурою, особливо, якщо мова йде про паливні баки ракет-носіїв, або нафтосховища, або резервуари для збереження вибухонебезпечних речовин. Це

дослідження дає змогу провести комп’ютерне моделювання резервуарів з перегородками.

В роботі досліджено також вимушені коливання циліндричних та конічних резервуарів з рідиною під дією комбінованого вертикального та горизонтального збуджень. Встановлені зони нестійкості руху з використанням діаграми Айнса-Стретта. Знайдені умови появи параметричного резонансу та суб-резонансів, пов’язаних із співвідношеннями між частотами силу, що збуджує, в вертикальному та горизонтальному напрямках.

Удосконалено метод розрахунку частот та форм вільних коливань оболонок обертання, частково заповнених рідиною, заснований на застосуванні методу граничних елементів та граничних макро-елементів. Метод дозволяє досліджувати вплив пружності стінок, плескань вільної поверхні, різного рівня заповнення рідиною, наявності перегородок.

У подальшому перебачено узагальнення методики на складені резервуари з перегородками та формулювання задачі руху рідини в нелінійному формулюванні, з можливістю врахування й нелінійних ефектів при деформуванні пружних резервуарів.

Це дослідження спирається на деякі попередні роботи автора [43,50] та роботи, виконані під час магістерського дослідження [51,52].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Kumar, R.(1971): Flexural vibrations of fluid-filled circular cylindrical shells.– Acoustica, Vol.24, No.3, pp. 137-146.

2. Biswal, K. C., Bhattacharyya, S. K. & Sinha, P. K. (2004): Dynamic characteristics of liquid filled rectangular tank with baffles. – IE (I) Journal-CV, Vol.84, pp. 145-148.

3. Abramson, H.N. (2000): The Dynamic Behaviour of Liquids in Moving Containers. – NASA SP- 106, Washington, D.C., 1966, updated by Dodge, F.T., Southwest Research Institute, pp. 23-37.

4. Ibrahim, R.A. (2005): Liquid Sloshing Dynamics. Theory and Applications. – Cambridge University Press.

5. Ru-De, F. (1993): Finite element analysis of lateral sloshing response in axisymmetric tanks with triangular elements. – Computational Mechanics, Vol.12, pp. 51-58.

6. Cho, J. R., Lee, H. W. and Ha, S. Y. (2005): Finite element analysis of resonant sloshing response in 2-D baffled tank. – Journal of Sound and Vibration, Vol.288, pp. 829-845.

7. Faltinsen, O.M., Timokha, A.N. (2012): Analytically approximate natural sloshing modes for spherical tank shape. J. Fluid Mech, Vol. 703, pp. 391-401.

8. Kim, M. S. and Lee, W. I. (2003): A new VOF-based numerical scheme for the simulation of fluid flow with free surface. Part I: New free surface-tracking algorithm and its verification. – International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.42, pp. 765-790.

9. Kim, M. S., Park, J. S. and Lee, W. I. (2003): A new VOF-based numerical scheme for the simulation of fluid flow with free surface. Part II: application to the cavity filling and sloshing problems. – International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.42, pp. 791-812.

10. Choudhary N., Degtyarev K., Strelnikova E., Rana S.. Liquid induced vibrations of partially liquid-filled elastic cylindrical-conical shells Vibroengineering

Procedia, 2024; vol. 54 pp 122-127; DOI:10.21595/vp.2024.24033

11. Karaiev A. Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells / A. Karaiev, E. Strelnikova // Springer, Cham: Lecture Notes in Mechanical Engineering. – 2020. – P. 3-13. doi.org/10.1007/978-3-030- 50491-5_1.

12. Choudhary, N., Bora, S.N. (2017): Linear sloshing frequencies in the annular region of a circular cylindrical container in presence of a rigid baffle. –Sadhana-Academy Proceedings in Engineering Sciences, Vol. 42, No.5, pp. 805–815.

13. Sierikova O., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K. Boundary Calculation Models for Elastic Properties Clarification of Three-dimensional Nanocomposites Based on the Combination of Finite and Boundary Element Methods. 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek). 2021, pp. 351-356. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570086.

14. Wang, J., Wang, Ch., Liu, J. (2019): Sloshing reduction in a pitching circular cylindrical container by multiple rigid annular baffles. – Ocean Engineering, Vol.171, No.1, pp. 241-249.

15. Miles, J.W. (1958): Ring Damping of Free Surface Oscillations on a Circular Tank. – J Appl. Mech., Vol.25, No.2, pp. 274-276.

16. Gedikli, A. and Erguven, M. E. (2003): Evaluation of sloshing problem by variational boundary element method. – Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.27, pp. 935–943.

17. Ravnik J. Boundary-domain integral method for vorticity transport equation with variable viscosity/ J.Ravnik J.Tibaut// Int. J. Comp. Meth. and Exp. Meas. – 2018. – Vol. 6, № 6. – P. 1087–1096.

18. Varchanis S. Asymmetric flows of complex fluids past confined cylinders: A comprehensive numerical study with experimental validation/ S. Varchanis, C. C. Hopkins, A. Q. Shen J. Tsamopoulos, S. Haward //Phys. Fluids. – 2020. – Vol. 32. – P. 53-93.

19. Krutchenko D. V., Strelnikova E. A., Shuvalova Y. S. Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs. Вісник

Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», т. 35, С. 31-37, 2017, http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/13113/1/Krutchenko.pdf

20. Degtyariov K., Gnitko V., Kononenko Y., Kriutchenko D., Sierikova O., Strelnikova E. Fuzzy Methods for Modelling Earthquake Induced Sloshing in Rigid Reservoirs. 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (3.KhPIWeek). (3.2022): 297-302. DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916466

21. Murawski K. Technical Stability of Very Slender Rectangular Columns Compressed by Ball-And-Socket Joints without Friction, Int. Journal of Structural Glass and Advanced Materials Research, vol. 4(3.1), pp. 186-208, 2020. DOI: 10.3844/sgamrsp.2020.186.208

22. Avramov, K. V. and E. A. Strelnikova. (2014). Chaotic vibrations of plates two-sided interacting with flux of moving fluid. Int. Appl. Mech 50, 329-335.

23. Sierikova O., Strelnikova E., Degtyarev K. Srength Characteristics of Liquid Storage Tanks with Nanocomposites as Reservoir Materials. 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek). (2022): 151-157. DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916369

24. Sierikova O., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K. Boundary Calculation Models for Elastic Properties Clarification of Three-dimensional Nanocomposites Based on the Combination of Finite and Boundary Element Methods. 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek). (2021): 351-356. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570086

25. Lukovsky I.A. Multimodal method in sloshing / I.A. Lukovsky, A.N. Timokha//Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 220, № 3. – P. 239-253.

26. Choudhary N. Study on Liquid Sloshing in an Annular Rigid Circular Cylindrical Tank with Damping Device Placed in Liquid Domain/ N. Choudhary, S.N. Bora, E. Strelnikova // Journal of Vibration Engineering & Technologies. – 2021. – DOI: 10.1007/s42417-021-00314-w

27. Choudhary N. Liquid vibrations in a container with a membrane at the free surface/ N. Choudhary, E. Strelnikova // Vibroengineering PROCEDIA, 2021. –Vol. 37. – P. 13-18. https://doi.org/10.21595/vp.2021.21996

28. Liquid vibrations in cylindrical tanks with and without baffles under lateral and longitudinal excitations / E. Strelnikova, D. Kriutchenko, V. Gnitko, A. Tonkonozhenko // International Journal of Applied Mechanics and Engineering. – 2020. – Vol. 25, № 3. – P. 117-132. doi.org/10.2478/ijame-2020-0038.

29. Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without baffles under horizontal and vertical excitations / E.A. Strelnikova, N. Choudhary, D.V.Kriutchenko, V.I. Gnitko, A.M. Tonkonozhenko // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2020. – Vol. 120 – P. 13-27. doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.07.024

30. Karaiev A. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics / A. Karaiev, E. Strelnikova //International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. – 2020. – Vol. 11, № 1. – 2050003.

31. Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquidfilled shells / V.I. Gnitko, K.G. Degtyariov, A.O. Karaiev, E.A. Strelnikova // WIT Transactions on Engineering Sciences. – 2019. – Vol. 126. – P. 189–200.

32. Liquid vibrations in cylindrical tanks with and without baffles under lateral and longitudinal excitations / E. Strelnikova, D. Kriutchenko, V. Gnitko, A. Tonkonozhenko // International Journal of Applied Mechanics and Engineering. – 2020. – Vol. 25, № 3. – P. 117–132.

33. BEM analysis of gravitational-capillarity waves on free surfaces of compound shells of revolution / V.I. Gnitko, A.O. Karaiev, M.L, Myronenko, E.A. Strelnikova // International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. – 2021. – Vol. 9, № 1. – P. 38–50.

34. Karaiev A. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method / A. Karaiev, E. Strelnikova // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2021. – Vol. 101. – p.e201800339. DOI:

10.1002/zamm.201800339

35. Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes / N. Choudhary, N. Kumar, E. Strelnikova, V. Gnitko, D. Kriutchenko, K. Degtyariov // Journal of King Saud University Science. – 2021. – Vol. 33, № 8. – 101589.

36. Boundary element method analysis of boundary value problems with periodic boundary conditions/ V.I. Gnitko, A.O. Karaiev, N. Choudhary, E.A. Strelnikova // WIT Transactions on Engineering Sciences. – 2021. – Vol. 131. – P. 31-44.

37. Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnyk U., BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 67, 2016, pp. 13-25. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.02.006

38. Lamb, H. Hydrodynamics, 6th ed., Cambridge University Press, 1993.

39. Sierikova, O., Strelnikova, E., Kriutchenko, D. (2023). Membrane installation in stor-age tanks for seismic loads impact protection. Acta Periodica Technologica, 54, 209-222, DOI: 10.2298/APT2354209S

40. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Tonkonozhenko A., Liquid Vibrations in Cylindrical Tanks with and Without Baffles Under Lateral and Longitudinal Excitations. International Journal of Applied Mechanics and Engineering, vol. 25(3), pp.117-132, 2020. DOI:10.2478/ijame-2020-0038

41. E. Strelnikova, D. Kriutchenko, V. Gnitko, Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations, Journal of Mathematics and Statistical Science, 2019, Vol. 5, P. 31-41. http://www.ss-pub.org 2019/03 › JMSS18122001

42. C.A Brebbia, The birth of the boundary element method from conception to application, Engineering Analysis With Boundary Elements, 2017. vol. 77, pp. iii-x, https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.12.001

43. Y.V. Naumenko, V.I. Gnitko, E.A. Strelnikova. Liquid Induced Vibrations of Truncated Elastic Conical Shells with Elastic and Rigid Bottoms International Journal of Engineering & Technology 2018, 7 (2.23), 335-339

https://doi.org/10.14419/ijet.v7i2.23.15327

44. Brebbia, C.A, Telles, J.C.F & Wrobel, L.C., Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.

45. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L. & Strelnikova, E. (2016). Multi-Domain Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Tanks with Baffles. J. of Basic and Appl. Research Int., 17(1), 75–87. ISSN: 2395-3438 (3.P), ISSN: 2395-3446 (O).

46. Gavrilyuk I., Hermann M, Lukovsky I., Solodun O., Timokha A., Natural Sloshing frequencies in fuel Tanks. Engineering Computations, Vol. 25 No 6, 2008, pp.518-540.

47. Choudhary N., Bora S.N. and Strelnikova E. (2021). Study on liquid sloshing in an annular rigid circular cylindrical tank with damping device placed in liquid domain, J. Vib. Eng. Tech., 9, 1–18, DOI:10.1007/s42417-021-00314-w

48. Avramov, K. V. and E. A. Strelnikova. (2014). Chaotic vibrations of plates two-sided interacting with flux of moving fluid. Int. Appl. Mech 50, 329-335

49. Kulczycki T. The shape of the fundamental sloshing mode in axisymmetric containers / T. Kulczycki, M. Kwaśnicki, B. Siudeja // Journal of Engineering Mathematics. – 2016. – Vol. 99, № 1. – P. 157-193

50. V.I. Gnitko, Yu. V. Naumenko, E.A. Strelnikova, Discrete singularities method in problems of liquid vibrations in spherical tanks. Bulletin of VN Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control system, 2017, vol.34, pp. 29-37

51. E. Sierikova, E. Strelnikova, Y. Naumenko. Free and forced oscillations modeling of shell structures with compartments ISARC 2nd International Science and Art Research, P.653-655., 2023.

52. Дегтярьов К.Г., Вєрушкін І.О., Крютченко Д.В., Стрельнікова О.О., Зайденварг О.Л., Науменко Ю.В. Метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь в крайових задачах механіки руйнування, Прикладні питання математичного моделювання, 2023, т. 6, №2, с. 39-48.