Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Спеціальність ____________________________________
Навчальна дисципліна «Механіка»

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Варіант X

Задача 1. Кут повороту обертового тіла $\varphi = -3t^2 - 2t + 5$. Як обертається тіло? (1 бал)

а) з $\omega = const$; б) з $d\omega/_{dt} = 0$ с) з $d\omega/_{dt} > 0$ д) з $d\omega/_{dt} < 0$.

Правильна відповідь д) з $d\omega/_{dt} < 0$.

$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -6t - 2$.

Задача 2. Рівняння руху матеріальної точки вздовж осі x має вигляд $x = A + Bt + Ct^3$, де $A = 2$ *м;* $B = 1$ *м/с*; С = - *0,5 м/с*^{3}. Знайти координату швидкість і прискорення точки в момент часу 2с.

Дано:
$x = A + Bt + Ct^3$
$A = 2$ *м*
$B = 1$ *м/с*
$C = - 0,5$ *м/с*^{3}
$t = 2$ *с*

$x - ?$ $\upsilon - ?$ $a - ?$

Розв’язання. Координату точки знайдемо, підставивши в рівняння руху числові значення коефіцієнтів *A, B, C* і часу *t*:

$$x = (2+1\cdot 2 - 0,5\cdot 23)\ м = 0\ .$$

Оскільки потрібно знайти швидкість і прискорення в певний момент часу ($t = 2$ *с*), то це означає, що потрібно визначити миттєві величини υ_x і a_x .

Миттєва швидкість є першою похідною від координати за часом

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2 .$$

Прискорення точки знайдемо, взявши першу похідну від швидкості за часом,

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = 6Ct .$$

Виконавши необхідні обчислення для моменту часу $t = 2$ *с*, одержимо

$$\upsilon_x = (1 - 3 \cdot 0{,}5 \cdot 22) \text{ м/с} = -5 \text{ м/с},$$
$$a_x = 6(-0{,}5) \cdot 2 \text{ м/с}^2 = -6 \text{ м/с}^2.$$

Задача 3. Диск радіусом *0,1 м*, що перебував у стані спокою, почав обертатися з постійним кутовим прискорення $0{,}5 рад/с^2$. Знайти тангенціальне, нормальне й повне прискорення точок на ободі диска через дві секунди після початку обертання.

Дано:

$R = 0{,}1$ м

$\omega_{(0)} = 0$

$\beta = 0{,}5$ рад/с^2

$t = 2$с

$a_\tau - ?$ $a_n - ?$ $a - ?$

Розв'язання. Тангенціальні й нормальні прискорення точок тіла, яке здійснює обертальний рух, виражаються формулами

$$a_\tau = \beta R, \tag{1}$$

$$a_n = \omega^2 R, \tag{2}$$

де β – кутова прискорення тіла;

a_τ, a_n – відповідні прискорення точок на ободі диска;

R – радіус диска.

В умові задачі задане кутове прискорення, яке визначається формулою

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}. \tag{3}$$

Отже, кутова швидкість точок через час t дорівнює

$$\omega = \omega_{(0)} + \beta t, \tag{4}$$

причому за умовою задачі початкова кутова швидкість $\omega_{(0)} = 0$.

Виходячи із співвідношень (2) і (4), одержуємо формулу для нормального прискорення

$$a_n = \omega^2 R = \beta^2 t^2 R.$$

У момент часу $t = 2$ *с* нормальне прискорення дорівнює

$$a_n = \beta^2 t^2 R = 0{,}5^2 \cdot 2^2 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}1 \text{ м/с}^2,$$

тангенціальне прискорення

$$a_\tau = \beta R = 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}05\ м/с^2,$$

повне прискорення

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{10^{-2} + 0{,}25 \cdot 10^{-2}} = 1{,}1 \cdot 10^{-1}\ \frac{ì}{ñ^2}.$$

Задача 4. Тіло обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де A = 10 рад, B = 20 рад/с, C = =-2 рад/c^2 (рис.4). Знайти повне прискорення точки, що знаходиться на відстані r = 0,1 м від осі обертання, для моменту часу t = 4 с.

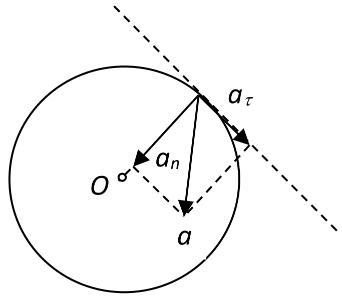

Рисунок 4 – Тангенціальне та нормальне прискорення тіла при русі по колу

Розв'язання. Повне прискорення a точки, що рухається вздовж кривої лінії, може бути знайдене як геометрична сума тангенціального прискорення a_τ, направленого по дотичній до траєкторії, і нормального прискорення a_n, направленого до центру кривини траєкторії (рис.4):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Оскільки вектори a_τ і a_n взаємно перпендикулярні, то модуль прискорення дорівнює

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (9)$$

Модулі тангенціального і нормального прискорення точки тіла, що обертається, визначаються формулами

$$a_\tau = \varepsilon r, \quad a_n = \omega^2 r, \qquad (10)$$

де ω - модуль кутової швидкості тіла; ε - модуль його кутового прискорення; r – відстань від точки до осі обертання. Підставляючи співвідношення (10) у формулу (9), одержимо

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \qquad (11)$$

Кутову швидкість ω знайдемо, взявши першу похідну від кута повороту тіла за часом

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct.$$

У момент часу t = 4 с модуль кутової швидкості дорівнює

$$\omega = [20 + 2(-2)4] = 4 \text{ рад/с}.$$

Кутове прискорення знайдемо, узявши першу похідну від кутової швидкості за часом

$$\varepsilon = d\omega / dt = 2C = -4 \text{ рад/с}^2.$$

Підставляючи значення ω, ε і r у вираз (11), одержимо відповідь

$$a = 0{,}1\sqrt{(-4)^2 + 4^4} = 1{,}65 \ м/с^2.$$

Відповідь: a = 1,65 м/с^2.

Задача 5. На похилій площині, що утворює з горизонтом кут $\alpha = 30^0$, знаходиться тіло масою m_1 = 2 кг (рис. 5). Тіло рухається вгору по похилій площині під дією зв'язаного з ним невагомою і нерозтяжною ниткою, перекинутою через блок, вантажу масою m_2 = 20 кг. Початкові швидкості тіла і вантажу дорівнюють нулю, коефіцієнт тертя тіла μ = 0,1. Визначити прискорення, з яким рухаються тіла, і силу натягу нитки. Блок вважати невагомим, тертям знехтувати.

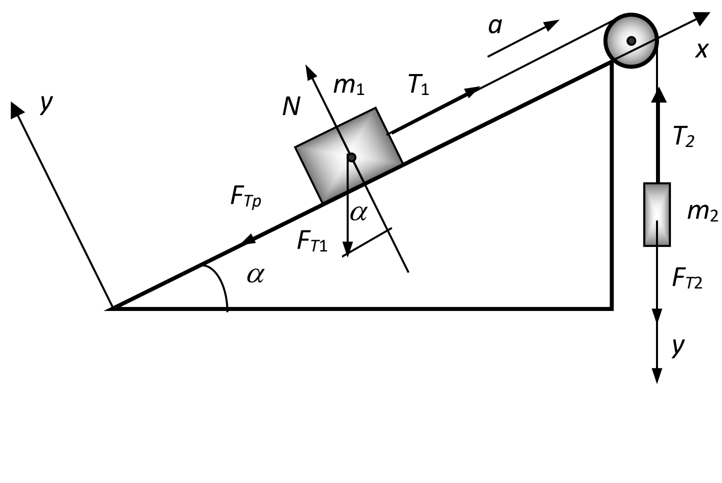

Рисунок 5 - Тіло на похилій площині

Розв'язання. На тіло m_1, яке рухається по похилій площині, діє сила тяжіння $\vec{F}_{T1} = m_1\vec{g}$, сила натягу нитки T_1, сила
тертя $\vec{F}_{Tp}$ і сила реакції опори $\vec{N}$. На вантаж m_2 діє сила тяжіння $\vec{F}_{T2} = m_2\vec{g}$ і сила натягу нитки T_2. Тут g – прискорення вільного падіння. Другий закон Ньютона (рівняння руху) для цих тіл буде мати вигляд

$$\vec{T}_1 + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{Tp} = m_1\vec{a}_1, \qquad (12)$$

$$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2, \qquad (13)$$

де a_1, a_2 - прискорення руху тіл.

Із умови невагомості і нерозтяжності нитки та відсутності тертя випливає, що $a_1 = a_2 = a$, $T_1 = T_2 = T$.

Виберемо для тіла m_1 систему відліку *xOy* так, як показано на рисунку 5. Тоді рівняння руху цього тіла в проекціях на осі *x* і *y* запишеться так

$$T - mg\sin\alpha - F_{Tp} = m_1 a, \qquad (14)$$

$$N - mg\cos\alpha = 0. \qquad (15)$$

Із співвідношення (15) знайдемо N та підставимо у рівняння (14), врахувавши, що $F_{Tp} = \mu N$, тоді отримаємо

$$T - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = m_1 a, \qquad (16)$$

де μ - коефіцієнт тертя.

Рівняння руху вантажу m_2 у проекції на вертикальну вісь y' має вигляд

$$m_2 g - T = m_2 a. \qquad (17)$$

Розв'язавши систему рівнянь (16) та (17) відносно *a*, після простих перетворень отримаємо

$$a = \frac{(m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha))g}{m_1 + m_2}. \qquad (18)$$

Знаючи *a*, підставивши співвідношення (18) у вираз (17) знайдемо силу натягу нитки

$$T = \frac{m_1 m_2 g(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2}.$$

Після підстановки числових значень фізичних величин отримаємо

$$a = \frac{\left(20 - 2 \cdot \left(\sin 30^0 + 0{,}1\cos 30^0\right)\right) \cdot 9{,}8}{20 + 2} = 8{,}4 \text{ м/с}^2,$$

$$T = \frac{2 \cdot 20 \cdot 9{,}8 \cdot \left(1 + \sin 30^0 + 0{,}1\cos 30^0\right)}{20 + 2} = 28{,}2 \text{ Н.}$$

Перевіримо розмірності отриманих величин

$$\frac{[m] \cdot [a]}{[m]} = \frac{кг \cdot м/с^2}{кг} = м/с^2,$$

$$\frac{[m] \cdot [m] \cdot [a]}{[m]} = \frac{кг \cdot кг \cdot м/с^2}{кг} = кг \cdot м/с^2 = Н.$$

Відповідь: $a = 8{,}4$ м/с^2, $T = 28{,}2$ Н.