1. Кінематика матеріальної точки та твердого тіла

- Швидкість та прискорення точки:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \qquad \boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.$$

- Прискорення точки в проекціях на дотичну і нормаль до траєкторії:

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R},$$

де R – радіус кривизни траєкторії в даній точці.

- Шлях, пройдений точкою:

$$s = \int v dt,$$

де $v -$ абсолютне значення швидкості точки.

- Кутова швидкість та прискорення твердого тіла:

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \frac{d\boldsymbol{w}}{dt}.$$

- Зв'язок між лінійними та кутовими величинами:

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{wr}], \quad a_n = w^2 R, \quad a_\tau = \beta_z R,$$

де $\boldsymbol{r}$ – радіус-вектор точки, що розглядається, відносно довільної точки осі обертання, R – відстань від осі обертання.

- Середні вектори швидкості та прискорення точки:

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}, \quad < \boldsymbol{a} >= \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t},$$

де $\Delta \boldsymbol{r}$ – переміщення (приріст радіус-вектора).

- Середнє значення функції $\mathrm{f}(x)$ на проміжку (x_1, x_2):

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

* * *

Приклад 1.1.

Частинка рухається зі сталим прискоренням $\boldsymbol{a}$. У початковий момент часу вона знаходилась у точці з радіус-вектором $\boldsymbol{r_0}$ і мала швидкість$\boldsymbol{v_0}$ Написати вираз для:

1) приросту швидкості $\Delta \boldsymbol{v}$ частинки за час t;
2) проекції швидкості частинки на вісь y у момент часу t;
3) переміщення частинки $\Delta \boldsymbol{r}$ за час t;
4) приросту координати z за час t.

Розв'язання.

1) $\Delta v = \int_0^t a dt = at.$

2) $v = v_0 + at \;\; => \;\; v_y = v_{0y} + a_y t.$

3) $\Delta r = \int\limits_0^t v dt = \int\limits_0^t (v_0 + at)dt = v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

4) $\Delta z = v_{0z} t + \frac{a_z t^2}{2}$.

Приклад 1.2.

Чи може приріст модуля вектора Δa бути більшім за модуль приросту вектора $|\Delta \boldsymbol{a}|$?

Розв'язання.

Приріст модуля вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\Delta a = a_2 - a_1 \Rightarrow (\Delta a)^2 = a_2^2 + a_1^2 - 2a_1 a_2.$$

Розрахуємо модуль приросту вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\Delta \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1 \Rightarrow (\Delta \boldsymbol{a})^2 = a_2^2 + a_1^2 - 2\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2.$$

Оскільки

$$\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \leq a_1 a_2,$$

то

$$|\Delta \boldsymbol{a}| \geq \Delta a.$$

Тобто приріст модуля вектора не може бути більшим від модуля приросту вектора $\boldsymbol{a}$. Рівність має місце лише при

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = a_1 a_2,$$

тобто при

$$\cos(\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{a}_2) = 1,$$

коли кут між векторами

$$\alpha = 0.$$

Приклад 1.3.

Точка рухається в площині *xy* за законом:

$$\begin{cases} x = A \sin \omega t, \\ y = A(1 - \cos \omega t), \end{cases}$$

де A і ω – додатні константи. Знайти:

а) шлях s, який проходить точка за час τ;

б) кут між швидкістю та прискоренням точки.

Розв'язання.

а)
$$ds = v dt,$$
$$v_x = \dot{x} = \omega A \cos \omega t,$$
$$v_y = \dot{y} = \omega A \sin \omega t,$$
$$s = \int_0^\tau v dt = \int_0^\tau \omega A dt = \omega A \tau.$$

б) Для визначення кута $\angle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})$ врахуємо скалярний добуток

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = va \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})\,;$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}v_x + \boldsymbol{j}v_y = \boldsymbol{i}\dot{x} + \boldsymbol{j}\dot{y} = \boldsymbol{i}\omega A\cos\omega t + \boldsymbol{j}A\sin\omega t =$$
$$= \omega A(\boldsymbol{i}\cos\omega t + \boldsymbol{j}\sin\omega t) \qquad (1)$$
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}a_x + \boldsymbol{j}a_y = \boldsymbol{i}\ddot{x} + \boldsymbol{j}\ddot{y} = \omega^2 A(-\boldsymbol{i}\cos\omega t + \boldsymbol{j}\sin\omega t). \qquad (2)$$

Перемноживши (1) на (2), дістанемо

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = va\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a}) = 0.$$
$$\angle(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a}) = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 1.4.

Рух матеріальної точки задається рівнянням

$$\boldsymbol{r}(t) = A(\boldsymbol{i}\cos\omega t + \boldsymbol{j}\sin\omega t), \qquad (1)$$

де $A = 0{,}5$ м / с, $\omega = 5$ рад / с.

а) Визначте траєкторію точки та напрям її руху.

б) Визначте модуль швидкості та модуль прискорення точки.

Розв'язання.

З (1) маємо:

$$\begin{cases} \text{x} = A\cos\omega t\,, \\ y = A\sin\omega t\,. \end{cases} \qquad (2)$$

Звідси:

$$x^2 + y^2 = A^2, \qquad (3)$$

тобто частка рухається по колу радіуса $R = A$. З (2) видно, що

$$\begin{cases} \omega t = 0, \\ x = A, \\ y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega t = \dfrac{\pi}{2}, \\ x = 0, \\ y = A. \end{cases}$$

Звідси випливає, що частинка рухається проти годинникової стрілки. Продиференціюємо (2):

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin\omega t,$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \omega A\cos\omega t.$$

Звідси

$$v_x^2 + v_y^2 = v^2 = \omega^2 A^2,$$
$$v = \omega A = 2{,}5\,\text{м/с}\,,$$
$$a_n = \omega^2 A = 12{,}5\ \text{м/с}\,.$$

Приклад 1.5.

Два тіла кинуто одночасно з однієї точки: одне – вертикально в гору, друге – під кутом $\alpha = 60^0$ до горизонту. Початкова швидкість кожного тіла $v_0 = 25\,\text{м/с}$. Нехтуючи опором повітря, знайти відстань між тіла через $t = 1{,}7\text{с}$.

Розв'язання.

В момент t координати тіла, кинутого вертикально вгору, будуть:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = v_0 t - \dfrac{\mathrm{g}t^2}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

Координати тіла, кинутого під кутом α до гори в той самий момент t будуть:

$$\begin{cases} x_2 = (v_0 \cos\alpha)t, \\ y_2 = (v_0 \sin\alpha)t - \dfrac{\mathrm{g}t^2}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

Відстань між тілами через час t:

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Підставивши сюди (1) і (2), отримаємо:

$$l = v_0 t\,\sqrt{2(1 - \cos\alpha)} = 22 \text{ м}.$$

Приклад 1.6.

Сталий за модулем вектор $\boldsymbol{a}$, рівномірно обертається проти годинникової стрілки в площині (x, y), переходить за час t з положення, в якому він збігався за напрямком з віссю x, у положення, в якому він збігається з віссю y. Знайти середня значення вектора $\boldsymbol{a}$ за час $t = T/4$, і модуль цього середнього.

Розв'язання.

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j},$$
$$\langle\boldsymbol{a}\rangle = \langle x\rangle\boldsymbol{i} + \langle y\rangle\boldsymbol{j}.$$

Оскільки вектор а обертається рівномірно, то

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t\,. \end{cases}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}.$$

Тоді середнє значення за час $t = T/4$ буде:

$$\langle x\rangle = a\langle\cos\omega t\rangle = a\frac{1}{T/4}\int_0^{T/4}\cos\omega t\,dt = \frac{4a}{T}\int_0^{T/4}\cos\frac{2\pi}{T}t dt = \frac{2a}{\pi},$$

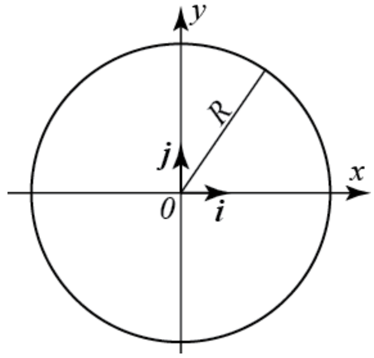
$$\langle y\rangle = a\langle\sin\omega t\rangle = a\frac{1}{T/4}\int_0^{T/4}\sin\omega t\,dt = \frac{4a}{T}\int_0^{T/4}\sin\frac{2\pi}{T}t dt = \frac{2a}{\pi}.$$

Отже,

$$\langle\boldsymbol{a}\rangle = \frac{2a}{\pi}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}),$$

$$|\langle a\rangle| = 2\sqrt{2}\frac{a}{\pi}.$$

Приклад 1.7.



Частинка рухається рівномірно за годинниковою стрілкою по колу радіусу R, роблячи за час τ один оберт. Коло лежить у координатній площині (x, y), причому центр кола збігається з початком координат. У момент $t = 0$ частинка знаходиться в точці з координатами $x = 0$, $R = y$. Знайти середнє значення швидкості точки за проміжки часу:

а) від 0 до $\tau/4$;
б) від 0 до $\tau/2$;
в) від 0 до $3\tau/4$;
г) від 0 до τ;
д) від $\tau/4$ до $3\tau/4$;

Розв'язання.

а) $0 \to {}^{\tau}/_{4}$:

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle = \frac{1}{{}^{\tau}/_{4}}(R\boldsymbol{i} - R\boldsymbol{j}) = \frac{4R}{\tau}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}).$$

б) $0 \to {}^{\tau}/_{2}$:

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle = \frac{1}{{}^{\tau}/_{2}}(-R\boldsymbol{j} - R\boldsymbol{j}) = -\frac{4R}{\tau}\boldsymbol{j}.$$

в) $0 \to {}^{3\tau}/_{4}$:

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle = \frac{1}{{}^{3\tau}/_{4}}(-R\boldsymbol{i} - R\boldsymbol{j}) = -\frac{4R}{3\tau}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}).$$

г) $0 \to \tau$:

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle = \frac{1}{\tau}(R\boldsymbol{j} - R\boldsymbol{j}) = 0.$$

д) ${}^{\tau}/_{4} \to {}^{3\tau}/_{4}$:

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle = \frac{1}{{}^{3\tau}/_{4} - {}^{\tau}/_{4}}(-R\boldsymbol{i} - R\boldsymbol{i}) = -\frac{4R}{\tau}\boldsymbol{i}.$$

Приклад 1.8.

Частинка рухається в площині (x, y) зі швидкістю $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta x\boldsymbol{j}$ де $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – орти осей x та y, а α та β – сталі. В початковий момент частинка знаходилась в точці $x = 0, y = 0$. Знайти:

а) рівняння траєкторії $y(x)$;
б) радіус кривини траєкторії в залежності від x.

Розв’язання.

а) З умови

$$\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta x\boldsymbol{j} \tag{1}$$

маємо:

$$\begin{cases} v_x = \alpha, \\ v_y = \beta x. \end{cases} \tag{2}$$

Знаходимо залежність $x(t)$:

$$x = \int v_x\,dt = \int \alpha dt = \alpha t + const.$$

З початкових умов, заданих в задачі, $const = 0$, тому

$$x = \alpha t \tag{3}$$

Відповідно,

$$y = \int v_y\,dt = \int \beta x dt = \int \beta\alpha t dt = \alpha\beta\frac{t^2}{2} + const.$$

Знову, з початкових умов маємо $const = 0$, отже

$$y = \alpha\beta\frac{t^2}{2}. \tag{4}$$

З (3) отримуємо:

$$t^2 = \frac{x^2}{\alpha^2},$$

тому

$$y = \frac{\beta}{2\alpha}x^2. \tag{5}$$

б) Радіус кривини знаходимо згідно з формулою:

$$R = \frac{v^2}{a_n}, \tag{6}$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2.$$

Або, відповідно до (2),

$$v^2 = \alpha^2 + \alpha^2\beta^2t^2. \tag{7}$$

Враховуючи (3), маємо:

$$v^2 = \alpha^2 + \beta^2x^2. \tag{8}$$

Шукаємо a_n. Для цього спочатку знайдемо a і a_t:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha\boldsymbol{i} + \alpha\beta t\boldsymbol{j}) = \alpha\beta\boldsymbol{j},$$

$$\mathrm{a} = \alpha\beta. \tag{9}$$

Диференціюємо (7):

$$2v\frac{dv}{dt} = 2\alpha^2\beta^2t.$$

Очевидно,

$$\frac{dv}{dt} = a_t.$$

Згідно з (3),

$$\alpha t = x,$$

тому

$$2va_t = 2\alpha^2\beta^2 t.$$

Отже,

$$a_t = \frac{\alpha\beta^2 x}{v}.$$

Тоді, враховуючи (3) і (8), отримуємо:

$$a_t^2 = \frac{\alpha^2\beta^4 x^2}{\alpha^2+\beta^2 x^2}. \tag{10}$$

Далі маємо:

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = (\alpha\beta)^2 - \frac{\alpha^2\beta^4 x^2}{\alpha^2 + \beta^2 x^2},$$

$$a_n^2 = \frac{\alpha^2(\alpha\beta)^2 + (\alpha\beta)^2\beta^2 x^2 - \alpha^2\beta^4 x^2}{\alpha^2 + \beta^2 x^2},$$

$$a_n = \frac{\alpha\beta}{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 x^2}. \tag{11}$$

Підставивши (10) і (11) в (6), отримуємо:

$$R(x) = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)x\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Приклад 1.9.

Катер, рухаючись униз по річці, обігнав пліт у пункті A. Через $\tau = 60$ хв. після цього він повернув назад і потім зустрів пліт на відстані $l = 6{,}0$ км. нижче пункту A. Знайти швидкість течії, якщо під час руху в обох напрямках мотор катера працював однаково.

Розв'язання.

У системі відліку, нерухомій відносно плоту, а тобто і води, катер рухався однаково в обох напрямках. Отже, загальній час:

$$\tau + \tau = 2\tau = \frac{l}{v},$$

$$v = \frac{l}{2\tau} = 6 \text{ км/год}.$$

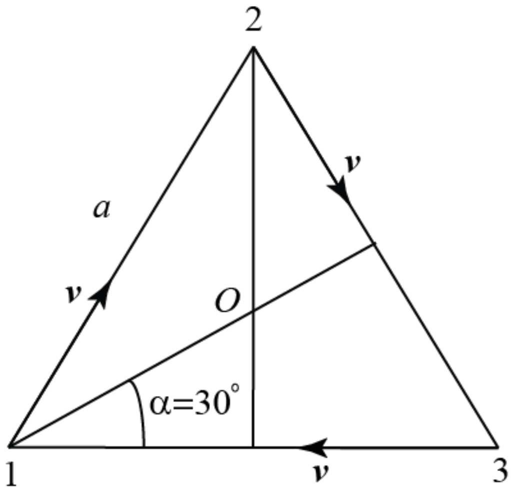
Приклад 1.10.

Три точки містяться в вершинах рівностороннього трикутника зі стороною a. Вони починають одночасно рухатися зі сталою за модулем швидкістю v, причому перша точка тримає весь час курс на другу, друга на третю, а третя на першу. Через який час точки зустрінуться?

Розв'язання.

У системі відліку – площині, у якій міститься трикутник, яка обертається разом з ними, трикутник зменшується так, що всі вершини прямують до центру трикутника. Швидкість, наприклад, точки 1, з якою вона прямує до центру трикутника, дорівнює

$$v\cos\alpha = v\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



При цьому ця точка проходить відстань

$$l = \frac{a}{2\cos\alpha}.$$

Отже,

$$t = \frac{l}{v} = \frac{2a}{3v}.$$

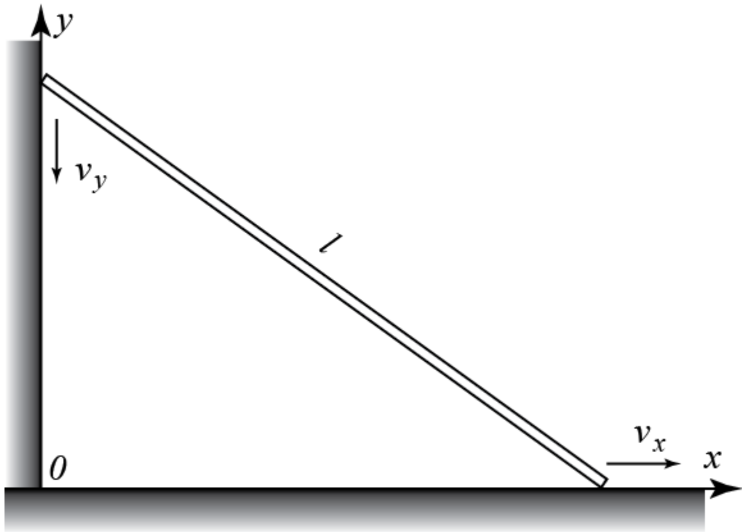
Приклад 1.11.

Стержень довжиною l упирається верхнім кінцем у стіну, а нижнім – у підлогу. Кінець, що упирається у стіну, рівномірно опускається вниз. Чи буде рух другого кінця рівномірним?

Розв'язання.

Швидкість нижнього кінця стержня:

$$v_x = \frac{dx}{dt}.$$



Це можна записати так:

$$v_x = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} = v_y\frac{dx}{dy}. \quad (1)$$

А оскільки $x = \sqrt{l^2 - y^2}$, то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{l^2 - y^2}}\frac{dy}{dt}. \quad (2)$$

Підставивши (2) в (1), дістанемо:

$$v_x = \frac{y|v_y|}{\sqrt{l^2 - y^2}}.$$

Тобто швидкість v_x зменшується безперервно.

Приклад 1.12.

Дві частинки, 1 і 2, рухаються зі сталими швидкостями v_1 і v_2 по двох взаємно перпендикулярних прямих до точки їх перетину *O*. В момент часу $t = 0$ частинки були на відстанях l_1 і l_2 від точки перетину *O*. Через який час після цього відстань між частинками стане найменшою? Чому вона буде дорівнювати?

Розв'язання.

У початковий момент часу $\mathrm{t} = 0$ відстань між частинками була

$$s(0) = \sqrt{l_1^2 + l_2^2},$$

а далі

$$s(t) = \sqrt{(l_1 - v_1 t)^2 + (l_2 - v_2 t)^2} \qquad (1)$$

Умова мінімуму $s(t)$ та сама, що і для підкореневого виразу:

$$2(l_1 - v_1 t)(-v_1) + 2(l_2 - v_2 t)(-v_2) = 0,$$

звідки

$$t = \frac{v_1 l_1 + v_2 l_2}{v_1^2 + v_2^2}. \qquad (2)$$

Підставивши (2) в (1), дістанемо:

$$s_{min} = \frac{|l_1 v_2 - l_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Приклад 1.13.

Ліфт почав підніматися зі сталим прискоренням $f = 1{,}00$ м/с^2 . Через час $t' = 1{,}00\, c$ після цього від стелі кабіни ліфта відділився і став падати шуруп. Вичислити:

а) час Δt падіння шурупа до удару об підлогу кабіни;

б) шлях S, пройдений шурупом за час Δt в системі відліку , зв'язаною із землею. Висота кабіни ліфта $h = 2{,}75$ м.

Розв'язання.

а) Відносно ліфта прискорення шурупа:

$$\mathrm{g}' = \mathrm{g} + a,$$

тому:

$$h = \mathrm{g}' \frac{(\Delta t)^2}{2} = \frac{(\mathrm{g} + a)(\Delta t)^2}{2}.$$

Звідки:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{\mathrm{g} + a}} = 0{,}71 \text{ с}. \qquad (1)$$

б) Початкова швидкість шурупа відносно землі – та сама, що і в ліфта, тобто:

$$v_0 = at.$$

Шуруп буде рухатися вгору відносно землі протягом часу

$$t' = \frac{v_0}{g} = \frac{at}{g}. \qquad (2)$$

Відповідно, відносно землі шуруп пройде шлях у гору

$$S_1 = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{a^2t^2}{2g}. \qquad (3)$$

Протягом решти часу, тобто $\Delta t - t'$, шуруп буде рухатися вниз і пройде шлях:

$$S_2 = \frac{g(\Delta t - t')^2}{2}. \qquad (4)$$

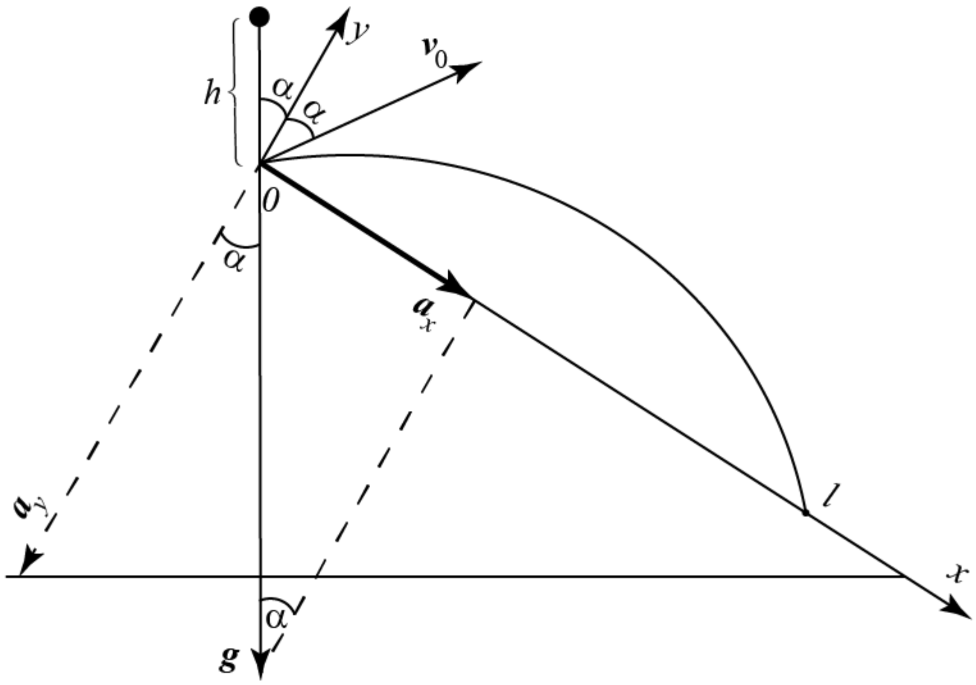
Отже, за весь час шуруп відносно землі пройде шлях $S = S_1 + S_2$, або, взявши до уваги (1), (2) і (3), дістанемо:

$$S = \frac{a^2t^2}{g} + \frac{hg}{g+a} - at\sqrt{\frac{2h}{g+a}} = 1{,}9 \text{ м}.$$

Приклад 1.14.

Кулька з нульовою початковою швидкістю падає на гладку похилу поверхню, що творить кут α з горизонтом. Пролетівши відстань h, вона пружно відбивається від поверхні. На якій відстані від місця падіння кулька відіб’ється вдруге?

Розв’язання.



Початкова швидкість кульки після пружного відбиття:

$$v_0 = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$

Кінетичне рівняння руху після відбиття:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v_0}t + \frac{\boldsymbol{a}t^2}{2} \qquad (2)$$

Для простоти виберемо осі x і y так, як показано на рисунку. Тоді

$$x = v_{0x}t + \frac{a_x^2 t^2}{2} = v_0 t\sin\alpha + \frac{g\sin\alpha \cdot t^2}{2}, \quad (3)$$

$$y = v_{0y}t + \frac{a_y^2 t^2}{2} = v_0 t\cos\alpha - \frac{g\cos\alpha \cdot t^2}{2}. \quad (4)$$

З (4) випливає, що $y = 0$ при $t = 0$. Тоді в момент падіння:

$$t = \frac{2v_0}{g}.$$

Враховуючи (3), отримуємо:

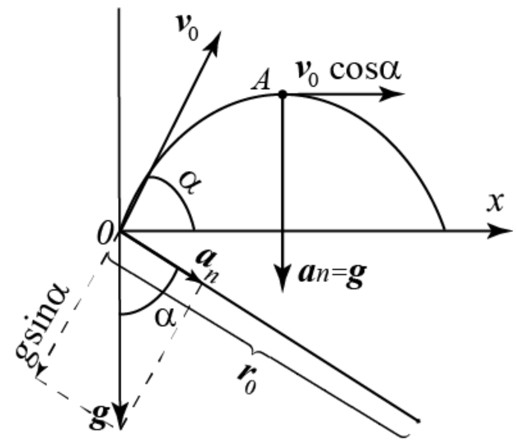
$$x = l = \frac{4v_0^2\sin\alpha}{g},$$

або, з урахуванням (1),

$$l = 8h\sin\alpha.$$

Приклад 1.15.

Під яким кутом до горизонту треба кинути кульку, щоб:
а) радіус кривини початку її траєкторії був у $\eta = 8{,}0$ разів більше, ніж у верхній точці;
б) центр кривини вершини знаходився на земній поверхні.



Розв'язання.

а) Нехай r_0– радіус кривини траєкторії в початку координат (див. рис.). Тоді

$$(a_n)_0 = g\cos\alpha = \frac{v_0^2}{r_0},$$

$$r_0 = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}. \quad (1)$$

У верхній точці:

$$(a_n)_A = g = \frac{v_A^2}{r_A} = \frac{(v_0\cos\alpha)^2}{r_A},$$

$$r_A = \frac{(v_0\cos\alpha)^2}{g}. \quad (2)$$

З умови $r_0 = \eta r_A$ маємо:

$$\frac{v_0^2}{g\cos\alpha} = \eta\frac{(v_0\cos\alpha)^2}{g},$$

звідки $\cos^3\alpha = 1/\eta$.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{\eta}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8{,}0}} = \frac{1}{2},$$

$$\alpha = 60°.$$

б) За умовою, радіус кривини вершини дорівнює максимальній висоті польоту кульки:

$$r_A = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2\mathrm{g}}. \qquad (3)$$

Комбінуючи (2) і (3), знайдемо:

$$\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{2},$$
$$\alpha = 54{,}7°.$$

Приклад 1.16.

Частка рухається в додатному напрямку по осі x так, що її швидкість змінюється за законом $v = \alpha\sqrt{x}$, де α – додатна стала. Маючи на увазі, що в момент часу $t = 0$ вона знаходиться у точці $x = 0$, знайти:
а) залежність від часу швидкості та прискорення частинки;
б) середню швидкість частинки за час, протягом якого вона пройде перші s метрів шляху.

Розв'язання.

а) За умовою,

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\sqrt{x}.$$

Розділимо змінні:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha dt.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є:

$$2\sqrt{x} = \alpha t + const.$$

Згідно умові задачі, при $t = 0$ маємо $x = 0$, тож $const = 0$.

$$2\sqrt{x} = \alpha t \Rightarrow 4x = \alpha^2 t^2 \Rightarrow x = \frac{\alpha^2 t^2}{4},$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha^2 t}{2},$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha^2}{2}.$$

б) З $2\sqrt{x} = \alpha t$ отримуємо:

$$t = \frac{2}{\alpha}\sqrt{x}.$$

Для $x = s$ маємо:

$$t = \frac{2}{\alpha}\sqrt{s},$$

$$\langle v \rangle = \frac{s}{t} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{s}.$$

Приклад 1.17.

Точка рухається, сповільнюючись, по прямій з прискоренням, модуль якого залежить від її швидкості за законом $a = \alpha\sqrt{v}$, де α – додатна стала. В початковий момент швидкість точки дорівнює v_0. Який шлях вона пройде до зупинки? За який час буде пройдено цей шлях?

Розв'язання.

Оскільки, за умовою, рух сповільнений, то:

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha\sqrt{v} \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\alpha dt \Rightarrow 2\sqrt{v} = -\alpha t + const.$$

Використаємо початкові умови:

$$2\sqrt{v} = -\alpha t + 2\sqrt{v_0}. \qquad (1)$$

З (1) знаходимо час τ до зупинки (v = 0):

$$0 = -\alpha\tau + 2\sqrt{v_0},$$

$$\tau = \frac{2}{\alpha}\sqrt{v_0}. \qquad (2)$$

З (1) маємо:

$$v = (-\frac{\alpha}{2}t + \sqrt{v_0})^2,$$

$$s = \int_0^\tau v dt = \int_0^\tau (-\frac{\alpha}{2}t + \sqrt{v_0})^2\, dt. \qquad (3)$$

Зробивши заміну змінних

$$z = -\frac{\alpha}{2}t + \sqrt{v_0},$$

прийдемо до розв'язку

$$s = \frac{2}{3\alpha}v_0^{3/2}.$$

Приклад 1.18.

Точка рухається по колу зі швидкістю $v = \alpha t$ де $\alpha = 0{,}50\,\text{м}/\text{с}^2$. Знайти її повне прискорення в момент, коли вона пройде $n = 0{,}1$ довжини кола після початку руху.

Розв'язання.

Повне прискорення:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2},$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\alpha^2 t^2}{R},$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \alpha,$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 t^2}{R}\right)^2 + \alpha^2}. \qquad (1)$$

Тепер треба з (1) виключити t^2/R:

$$s = \int v dt = \alpha \int t dt = \frac{\alpha t^2}{2}.$$

Але

$$s = n 2\pi R.$$

З цих двох рівнянь маємо:

$$\frac{t^2}{R} = \frac{4\pi n}{\alpha}.$$

Підставивши цей вираз в (1), отримуємо:

$$a = \alpha\sqrt{1 + 16\pi^2 n^2} = 0{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Приклад 1.19.

Частка рухається по дузі кола з радіусом R за законом $l = A \sin\omega t$, де l – зміщення від початкового положення, відраховане вздовж дуги, A і ω – сталі. Поклавши $l = 1{,}00$ м, $A = 0{,}80$ м і $\omega = 2{,}00 \text{ с}^{-1}$, знайти повне прискорення в точках $l = 0$, і $l = \pm A$.

Розв’язання.

Послідовність операцій не потребує пояснень:

$$v = \frac{dl}{dt} = \omega A \cos\omega t,$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin\omega t,$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 A^2 \cos^2\omega t}{R},$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\omega^4 A^2 \sin^2\omega t + \frac{\omega^4 A^4}{R^2}\cos^4\omega t},$$

При $l = 0$, тобто при $t = 0$, маємо:

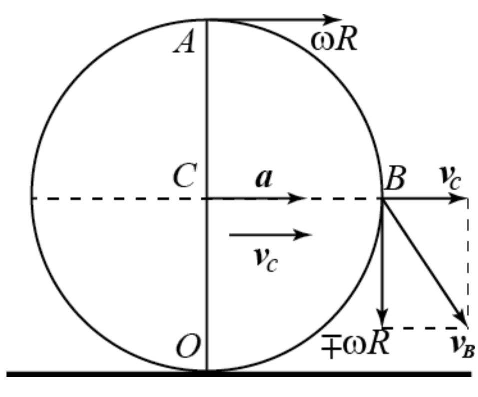
$$a(v) = \frac{\omega^2 A^2}{R} = 2{,}6 \text{ м/с}^2.$$

При $l = \pm A$ маємо $\sin\omega t = \pm 1$, отже

$$a(\pm A) = \omega^2 A = 3{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Приклад 1.20.

Куля радіуса $R = 10{,}0$ см котиться без ковзання по горизонтальній прямій так, що її центр рухається зі сталим прискоренням $a = 2{,}50 \text{ см/с}^2$. Через $t = 2{,}0\ c$ після початку руху його



положення відповідає тому, що показано на рисунку. Знайти:
а) швидкості точок A і B;
б) прискорення точок A і O.

Розв'язання.

а) Миттєва вісь обертання проходить через точку O. Кутова швидкість точки C:

$$\omega = \frac{v_c}{R} = \frac{at}{R}.$$

Отже, швидкість точки A:

$$v_A = 2R\omega = \frac{at}{R}2R = 2at = 10{,}0\ ^{\text{см}}/_{\text{с}}.$$

Далі, згідно з рисунком:

$$v_B = \sqrt{v_C^2 + \omega^2 R^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + \omega^2 R^2} = \omega R\sqrt{2} = \frac{at}{2}R\sqrt{2} = at\sqrt{2} = 7\ ^{\text{м}}/_{\text{с}}.$$

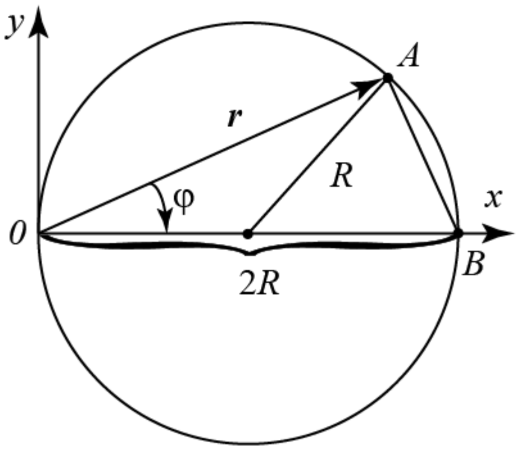
б)Знаходимо прискорення:

$$a_0 = \omega^2 R = \frac{a^2t^2}{R^2}R = \frac{a^2t^2}{R} = 2{,}5\ ^{\text{см}}/_{\text{с}^2}.$$

$$a_A = \sqrt{\left(\frac{dv_a}{dt}\right)^2 + (\omega R)^2} = \sqrt{(2a)^2 + \frac{a^4t^4}{R^2}} = 2a\sqrt{1 + \left(\frac{at}{2R}\right)^2} = 5{,}6\ ^{\text{см}}/_{\text{с}^2}.$$

Приклад 1.21

Частинка A рухається по колу радіусу R так, що її радіус-вектор відносно точки O обертається зі сталою кутовою швидкістю. Знайти модуль швидкості частинки, а також модуль і напрямок її повного прискорення.



Розв'язання.

Виберемо координатні осі x та y з початком координат у точці O. Проведемо хорду AB. Кут між AO та AB – прямий. За умовою,

$$\varphi = \omega t.$$

З рисунку бачимо:

$$r = 2R\cos\varphi = 2R\cos\omega t.$$

Для координат:

$$x = 2R\cos^2\omega t,$$
$$y = 2R\cos\omega t\sin\omega t = R\sin 2\omega t\,;$$
$$v_x = \frac{dx}{dt} = -2R\omega\sin 2\omega t,$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2R\omega\cos 2\omega t,$$

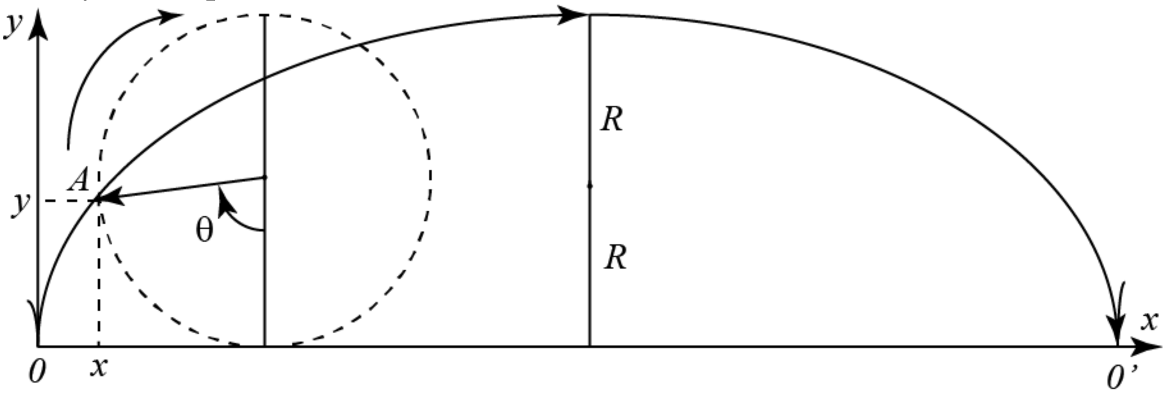
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4\omega^2 R^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = 2\omega R = 0{,}4 \text{ м/с}.$$

Оскільки $v = \cos\omega t$, то $a_t = 0$, тому

$$a = a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4\omega^2 R^2}{R} = 4\omega^2 R = 0{,}32 \text{ м/с}^2.$$

Приклад 1.22.

Точка *M* міститься на ободі колеса радіуса $R = 0{,}50$ м, яке котиться без ковзання по горизонтальній поверхні зі швидкістю $v = 1{,}0 \text{ м/с}$. Знайти:
а) модуль і напрямок прискорення точки *A*;
б) повний шлях s, який пройде точка *A* між двома послідовними моментами її дотику з поверхнею.



Розв’язання.

а) Вектор прискорення а точки А весь час направлений до центру обода, тому:

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

б) З рисунку видно, що:

$$\begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta), \\ y = R(1 - \cos\theta). \end{cases} \tag{1}$$

Шукана відстань $s = OO'$ вираховується за відомою формулою:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} d\theta. \tag{2}$$

З (1) випливає:

$$\begin{cases} x' = R(1 - \cos\theta), \\ y' = R\sin\theta, \\ 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

Тому:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(1 - \cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta}\, d\theta = 2R \int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2} d\theta = 8R.$$

Приклад 1.23.

Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі так, що його кутова швидкість залежить від кута повороту φ за законом $\omega = \omega_0 - \alpha\varphi$, де ω_0 і α – додатні сталі. В момент часу $t = 0$ кут $\varphi = 0$. Знайти залежність від часу:
а) кута повороту;
б) кутовій швидкості.

Розв'язання.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \alpha\varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{\omega_0 - \alpha\varphi} = dt.$$

Інтегруємо:

$$\int \frac{d\varphi}{\omega_0 - \alpha\varphi} = \int dt.$$

Це дає:

$$ln(\omega_0 - \alpha\varphi) = -\alpha t + const.$$

Врахування початкових умов дає:

$$ln\,\omega_0 = const.$$

Тому:

$$ln\frac{\omega_0 - \alpha\varphi}{\omega_0} = -\alpha t.$$

Отримуємо:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}). \qquad (1)$$

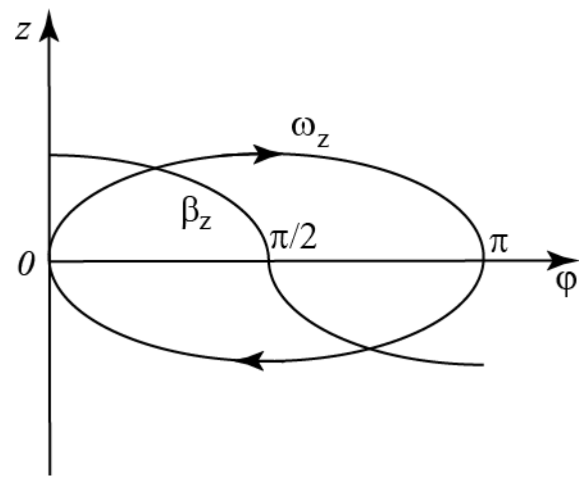
Диференціювання (1) дає

$$\omega = \omega_0 e^{-\alpha t}.$$

Приклад 1.24.

Тверде тіло починає обертатися навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta_0} cos\varphi$, де $\boldsymbol{\beta_0}$ – сталий вектор, φ – кут повороту з початкового положення. Знайти кутову швидкість тіла в залежності від φ. Зобразити графік цієї залежності.

Розв'язання



Спроектуємо заданий вираз на вісь обертання – вісь z:

$$\beta_Z = \beta_{0Z}\cos\varphi. \qquad (1)$$

Але

$$\beta_Z = \frac{d\omega_Z}{dt},$$

тому

$$\frac{d\omega_Z}{dt} = \beta_{0Z}\cos\varphi$$

або

$$d\omega_Z = \beta_{0Z}\cos\varphi dt.$$

Помножимо останній вираз на $\omega_Z = d\varphi/dt$ і зауважимо, що

$$\omega_Z d\omega_Z = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\beta_{0Z}\cos\varphi dt = \beta_{0Z}\cos\varphi d\varphi.$$

Інтегруємо:

$$\frac{\omega_Z^2}{2} = \beta_{0Z}\sin\varphi,$$

звідки отримуємо:

$$\omega_Z = \sqrt{2\beta_{0Z}\sin\varphi} \qquad (2)$$

Графіки, які відповідають (1) і (2), показані на рисунку.

Приклад 1.25

Тверде тіло обертається, сповільнюючись, навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням $\beta \sim \sqrt{\omega}$, де ω – його кутова швидкість. Знайти середню кутову швидкість тіла за час, який воно буде обертатися, якщо в початковий момент його кутова швидкість дорівнювала ω_0.

Розв'язання.

Оскільки обертання сповільнене, то:

$$\beta = -A\sqrt{\omega}, \qquad A > 0,$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = -A\sqrt{\omega},$$

$$\frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = -Adt.$$

Або, після перетворення:

$$2\sqrt{\omega} = -At + const.$$

Згідно з початковими умовами, при $t = 0$ маємо $\omega = \omega_0$, отже:

$$const = 2\sqrt{a_0},$$

що дає:

$$\sqrt{\omega} = \sqrt{\omega_0} - \frac{At}{2}.$$

Час руху τ визначається тим, що в кінці його $\omega = 0$. Тому:

$$\sqrt{\omega_0} - \frac{At}{2} = 0,$$

$$\tau = \frac{2\sqrt{\omega_0}}{A}.$$

Середнє значення кутової швидкості:

$$\langle\omega\rangle = \frac{\varphi}{\tau},$$

$$\varphi = \int_0^\tau \omega\, dt = \int_0^\tau \left(\sqrt{\omega_0} - \frac{At}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{3}\omega_0\tau.$$

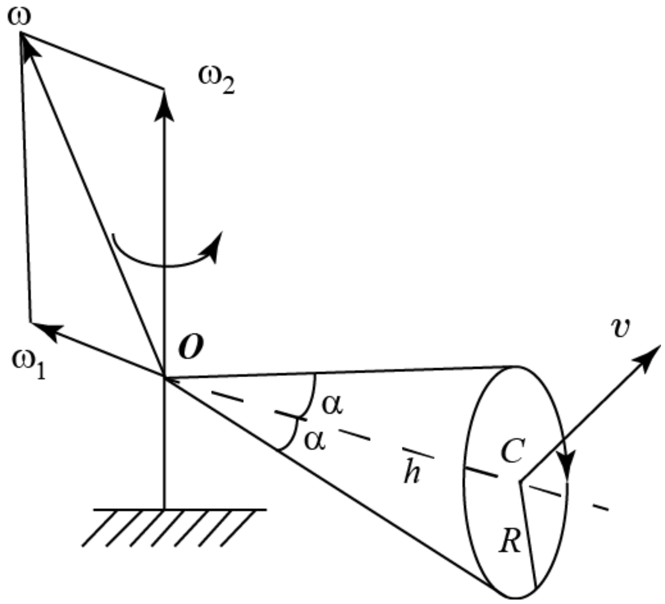
$$\langle\omega\rangle = \frac{1}{3}\omega_0.$$

Приклад 1.26.

Круглий конус з кутом піврозхилу $\alpha = 30°$ і радіусом основи $R = 5{,}0$ см котиться рівномірно без ковзання по горизонтальній площині, як показано на рисунку. Вершина конуса закріплена шарніром в точці O, яка знаходиться на одному рівні з точкою C – центром основи конуса. Швидкість точки C складає $v = 10{,}0$ см/с. Знайдіть абсолютні значення:

а) кутової швидкості конуса;

б) кутового прискорення конуса.



Розв'язання.

Рух складається з двох обертань:

1) Навколо осі конуса з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega_1}$;

2) Навколо осі, що проходить через точку відліку – з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega_2}$. Результуюча кутова швидкість конуса:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega_1} + \boldsymbol{\omega_2}.$$

а) $\boldsymbol{\omega_1}$ і $\boldsymbol{\omega_2}$- взаємно перпендикулярні, тому

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}. \tag{1}$$

Як видно з рисунку,

$$\omega_1 = \frac{v}{R},$$

$$\omega_2 = \frac{v}{h} = \frac{v\,\mathrm{tg}\alpha}{R}.$$

Тому з (1) маємо:

$$\omega = \sqrt{\frac{v^2}{R^2} + \frac{v^2}{R^2}\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{v}{R}\frac{1}{\cos\alpha} = 2{,}3\ \text{рад/с}.$$

б) Відносно землі $\boldsymbol{\omega_2} = \boldsymbol{const}$, а обертається лише вектор $\boldsymbol{\omega_1}$.

$$d\varphi = \omega_2 dt,$$

$$|d\omega_1| = \omega_1 d\varphi = \omega_1\omega_2 dt,$$

$$\beta = \frac{|d\omega_1|}{dt} = \omega_1\omega_2 = \frac{v}{R}\cdot\frac{v\,\mathrm{tg}\alpha}{R} = \frac{v^2}{R^2}\mathrm{tg}\alpha = 2{,}3\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Приклад 1.27.

Точка рухається, сповільнюючись, по колу радіуса R так, що її тангенціальне та нормальне прискорення за модулем дорівнюють один одному. В момент часу $t = 0$ швидкість точки дорівнювала v_0. Знайти залежності:
а) швидкість точки від часу та від пройденого часу;
б) повного прискорення точки від швидкості та пройденого шляху.

Розв'язання.

За умовою,

$$a_n = a_t,$$
$$\frac{v^2}{R} = -\frac{dv}{dt},$$
$$-\frac{dv}{v^2} = \frac{dt}{R}.$$

Інтегрування останнього рівняння дає:

$$\frac{1}{v} = \frac{t}{R} + const.$$

Застосування початкових умов приводить до

$$\frac{1}{v_0} = const,$$

тому

$$\frac{1}{v} = \frac{t}{R} + \frac{1}{v_0},$$

або

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 t}{R}}.$$

Для пройденого шляху маємо:

$$s = \int v\,dt = \int \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 t}{R}} dt = R \ln\left(\frac{v_0}{1 + \frac{v_0 t}{R}}\right) = R \ln \frac{v_0}{v},$$

звідки:
а) $v = v_0 e^{-s/R}$;
б) $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{2a_n^2} = a_n\sqrt{2} = \frac{v^2}{R}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{R} v_0^2 e^{-2s/R}$.

Приклад 1.28.

Частка рухається рівномірно зі швидкістю v по похилій траєкторії $y(x)$. Знайти прискорення частки в точці $x = 0$, і радіус кривизни траєкторії в цій точці, якщо траєкторія:
а) парабола $y = \alpha x^2$;

б) еліпс $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = 1$,
де α і β – сталі.

Розв'язання.

Оскільки $v = const$, то $a_t = 0$ і

$$a = a_n = \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

Для радіуса кривизни кривої справедлива формула:

$$\frac{1}{R} = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2)$$

а) Для траєкторії $y = \alpha x^2$:

$$\frac{dy}{dx} = 2\alpha x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\alpha.$$

З цих формул маємо:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = 2\alpha.$$

З (2) отримуємо:

$$\frac{1}{R} = 2\alpha.$$

Тоді з (1) маємо:

$$a = 2\alpha v^2.$$

б) Для траєкторії $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = 1$:

$$y = \pm\beta\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\beta}{\alpha^2}\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)^{-\frac{1}{2}} x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mp\frac{\beta}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha^2} x\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

З останніх двох формул видно, що:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0,$$

$$\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right| = \frac{\beta}{\alpha^2}.$$

Тоді з (1) і (2) отримуємо:

$$R = \frac{\alpha^2}{\beta},$$

$$a = \frac{\beta v^2}{\alpha^2}.$$

* * *

Задачі для самостійного розв'язання

№1.1. Два тіла кинули одночасно з одної точки: одне – вертикально вгору, інше – під кутом $\theta = 60^0$ до горизонту. Початкова швидкість кожного тіла $v_0 = 25$ м/с. Нехтуючи опором повітря, знайти відстань між тілами через t=1,70 с.

Відповідь: $l = v_0 + \sqrt{2(1 - \sin\theta)} = 22$ м.

№1.2. Дві частинки рухаються з прискоренням g в однорідному полі тяжіння. В початковий момент частинки знаходились в одній точці і мали швидкості $v_1 = 3{,}0$ м/с та $v_2 = 4{,}0$ м/с, напрямлені горизонтально і в протилежні сторони. Знайти відстань між частинками в момент, коли вектори їх швидкостей будуть взаємно перпендикулярними.

Відповідь: $l = (v_1 + v_2)\sqrt{\frac{v_1 v_2}{g}} = 2{,}5$ м.

№1.3. За проміжок часу $\tau = 10{,}0$ с точка пройшла половину кола радіусом R = 160 см. Обчисліть за цей час:

а) середнє значення модуля швидкості $< v >$;
б) модуль середнього вектора швидкості $|< \boldsymbol{v} >|$;
в) модуль середнього вектора повного прискорення $|< \boldsymbol{a} >|$, якщо точка рухалась з постійним тангенціальним прискоренням.

Відповідь: $< v >= \pi R/\tau$ =50 см/с, $|< \boldsymbol{v} >| = 2R/\tau = 32$ см/с,

$|< \boldsymbol{a} >| = 2\pi R/\tau^2$=10 см/с^2

№ 1.4. Радіус-вектор частинки змінюється з часом t по закону $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}t(1 - \alpha t)$, де $\boldsymbol{b}$ – постійний вектор, α – позитивна константа. Знайти:

а) швидкість $\boldsymbol{v}$ і прискорення $\boldsymbol{a}$ частинки в залежності від часу;
б) проміжок часу Δt, по закінченню якого частинка повернеться в початкову точку, а також шлях S, який вона пройде при цьому.

Відповідь: а) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}(1 - 2\alpha t)$, $\boldsymbol{a} = -2\alpha\boldsymbol{b} = const$;

б) $\Delta t = 1/\alpha$, S=$\boldsymbol{b}$/2 α

№ 1.5. Частинка рухається в позитивному напрямі осі *x* так, що її швидкість змінюється по закону $v = \alpha\sqrt{x}$, де α – позитивна константа. Маючи на увазі, що в момент *t=0* вона знаходилась в точці *x=0*, знайти:

а) залежність від часу швидкості та прискорення частинки;
б) середню швидкість частинки за час, протягом якого вона пройде перші *s* метрів шляху.

Відповідь: а) $v = \alpha^2 t/2$, $a = \alpha^2/2$;
б) $< v >= (\alpha/2)\sqrt{s}$.

№ 1.6. Невелике тіло кинули під кутом до горизонту з початковою швидкістю $\boldsymbol{v_0}$. Нехтуючи опором повітря, знайти:

а) переміщення тіла в функції часу $\boldsymbol{r}(t)$;
б) середній вектор швидкості $< \boldsymbol{v} >$ за перші *t* секунді за весь час руху.

Відповідь: а) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v_0}t + \mathrm{g}t^2/2$;
б) $< \boldsymbol{v} >_t = \boldsymbol{v_0} + \mathrm{g}t/2, < \boldsymbol{v} >= \boldsymbol{v_0} - \mathrm{g}(\boldsymbol{v_0}\mathrm{g})/\mathrm{g}^2$.

№ 1.7. Кулька падає з нулевою початковою швидкістю на гладку похилу поверхню, що складає кут α з горизонтом. Пролетівши деяку відстань *h*, вона пружно відбилась від площини. На якій відстані від місця падіння кулька відіб'ється другий раз?

Відповідь: $l = 8h\sin\alpha$.

№ 1.8. Повітряна кулька починає підніматись з поверхні землі. Швидкість її підйому постійна і дорівнює v_0. Завдяки вітру кулька набуває горизонтальну компоненту швидкості $v_x = \alpha y$, де α – стала, y – висота підйому. Знайти залежність від висоти підйому:

а) величини зсуву кульки *x(y)*;
б) повного, тангенціального та нормального прискорень кульки.

Відповідь: а) $x = (\alpha/2v_0)y^2$,
б) $a = \alpha v_0, a_\tau = \alpha^2 y/\sqrt{(1 + (\frac{\alpha y}{v_0})^2)}, a_n = \alpha v_0/\sqrt{(1 + (\frac{\alpha y}{v_0})^2)}$.

№ 1.9. Точка рухається по колу зі швидкістю $v = \alpha t$, де α=0,50 м/с^2. Знайти її повне прискорення в момент, коли вона пройде *n*=0,10 довжини кола після початку руху.

Відповідь: $a = \alpha\sqrt{1 + (4\pi n)^2} = 0{,}8$ м/с^2.

№ 1.10. Колесо обертається навколо нерухомої осі так, що кут φ його повороту залежить від часу як $\varphi = \beta t^2$, де β=0,20 рад/с^2. Знайти повне прискорення *a* в точці *A* на обідку колеса в момент *t*=2,5 с, якщо швидкість точки *A* в цей момент *v*=0,65 м/ с^2.

Відповідь: $a = (v/t)\sqrt{1 + 4\beta^2 t^4} = 0{,}7$ м/с^2.

№ 1.11.Знаряд вилетів зі швидкістю v = 320 *м/с*, утворивши всередині ствола *n*=2,0 обороти. Довжина стволу *l*= 2,0 *м*. Вважаючи рух снаряду в стволі рівноприскореним, знайти його кутову швидкість обертання навколо осі в момент вильоту.

Відповідь: $w = 2\pi n v / l = 2 \cdot 10^3$ рад/с.

№ 1.12. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі по закону $\varphi = at - bt^3$, де a=6,0 рад/с , b=2,0 рад/с^3. Знайти:

а) середнє значення кутової швидкості і кутового прискорення за проміжок часу від t=0 с до зупинки;
б) кутове прискорення в момент зупинки тіла.

Відповідь: а) $< w >= 2a/3 = 4$ рад/с, $< \beta >= \sqrt{3ab} = 6$ рад/с^2;
б) $\beta = 2\sqrt{3ab} = 12$ рад/с^2.

№ 1.13. Тверде тіло починає обертатись навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням $\beta = \alpha t$, де α=2,0·10^{-2} рад/с^2. Через який час після початку обертання вектор повного прискорення довільної точки тіла буде утворювати кут $\varphi = 60^0$ з її вектором швидкості?

Відповідь: $t = \sqrt[3]{(4/\alpha)\,\mathrm{tg}\,\varphi} = 7c$.

2. Динаміка поступального та обертального руху твердого тіла та матеріальної точки

- Основне рівняння динаміки (другий закон Ньютона):

$$m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

- Цей же вираз в проекціях на дотичну і нормаль до траєкторії точки:

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau, \quad \frac{mv^2}{R} = F_n.$$

- Рівняння динаміки точки в неінерціальній K'-системі відліку, яка обертається з постійною кутовою швидкістю $\boldsymbol{w}$ навколо нерухомої осі:

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + mw^2\boldsymbol{R} + 2m[\boldsymbol{v}'\boldsymbol{w}],$$

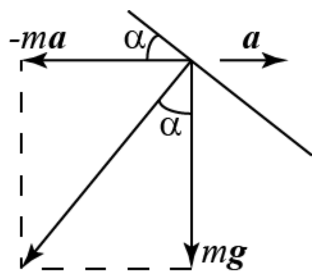
  де $\boldsymbol{R}$ − радіус-вектор точки відносно осі обертання K'-системи.

* * *

Приклад 2.1.

Посудина, заповнена водою, рухається горизонтально зі сталим прискоренням a. Яку форму при цьому має проведення рідини?

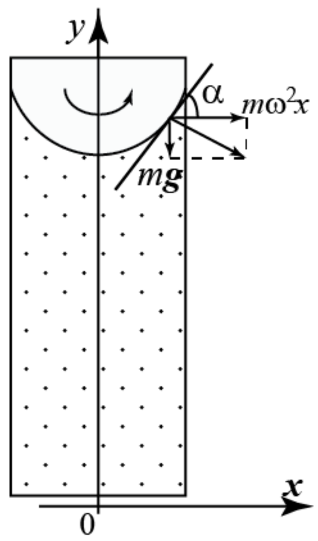
Розв'язання.



Оскільки посудина рухається з прискоренням, її можна розглядати як неінерціальну систему відліку. На кожну частинку води в посудині діє сила тяжіння mg, направлена вниз, і сила інерції −ma, направлена проти вектору прискорення (див. рис.). Поверхня води має бути площиною, перпендикулярною до рівнодійної цих двох сил. Кут нахилу α поверхні до горизонту визначається із співвідношення:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{\mathrm{g}}.$$

Приклад 2.2.



У циліндричній посудині знаходиться рідина. Яку форму прийме поверхня рідини, якщо посудина рівномірно обертається навколо осі з кутовою швидкість ω?

Розв'язання.

Оскільки посудина обертається, її можна використовувати як неінерціальну систему відліку. Відносно цієї системи на кожну частку рідини діє відцентрова сила інерції $m\omega^2 x$ та сила тяжіння mg.

Рівнодійна цих сил перпендикулярна до поверхні рідини:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{m\omega^2 x}{m\mathrm{g}},$$

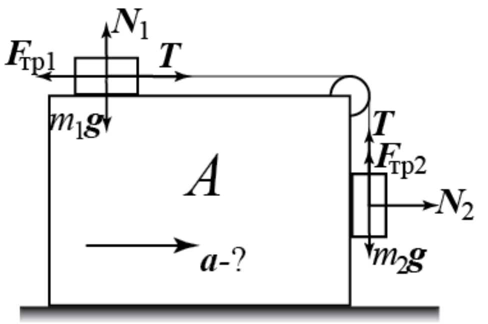
звідки дістанемо:

$$y = \frac{\omega^2}{2\mathrm{g}} x^2.$$

Поверхня рідини має форму параболоїда обертання.

Приклад 2.3.

З яким мінімальним прискоренням слід переміщати в горизонтальному напрямі брусок A (див. рис.), щоб тіла 1 і 2 не рухались відносно нього? Маси тіл однакові, коефіцієнт тертя між бруском і обома тілами дорівнює k. Маси блока й нитки нехтовно малі, тертя в блоці відсутнє.



Розв'язання.

Рівняння руху тіла m_1:

$$m_1 a = T - km\mathrm{g}. \quad (1)$$

Оскільки тіло m_2 залишається в спокої відносно бруска A, то

$$m_2\mathrm{g} = T + km_2 a. \quad (2)$$

Зазначивши, що $m_1 = m_2 = m$, віднімемо (1) від (2):

$$m\mathrm{g} - ma = kma + km\mathrm{g},$$

$$(1-k)m\mathrm{g} = (1+k)ma,$$

$$a = \frac{1-k}{1+k}\mathrm{g}.$$

Приклад 2.4.

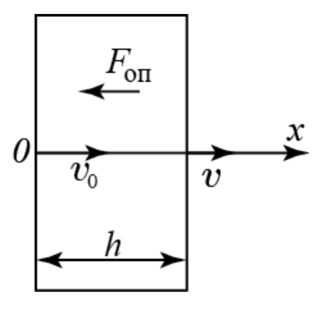
Куля, пробивши дошку товщиною h, змінила свою швидкість від v_0 до v. Знайти час руху кулі в дошці, вважаючи силу опору пропорціональною квадрату швидкості.

Розв'язання.

За умовою,

$$F_{\text{оп}} = -rv^2,$$

де r – коефіцієнт пропорціональності.



$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_{\text{оп}}}{m} = -\frac{rv^2}{m},$$

звідки

$$dt = -\frac{m}{r}\frac{dv}{v^2}, \quad (1)$$

$$t = \frac{m}{r}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right).$$

Вилучимо невідоме m/r. Швидкість кулі:

$$v = \frac{dx}{dt},$$

$$dt = \frac{dx}{v}.$$

Підставляємо в (1):

$$\frac{dx}{v} = -\frac{m}{r}\frac{dv}{v^2},$$

$$dx = -\frac{m}{r}\frac{dv}{v}.$$

Інтегруємо останній вираз від 0 до h:

$$h = \frac{m}{r}\ln\frac{v_0}{v},$$

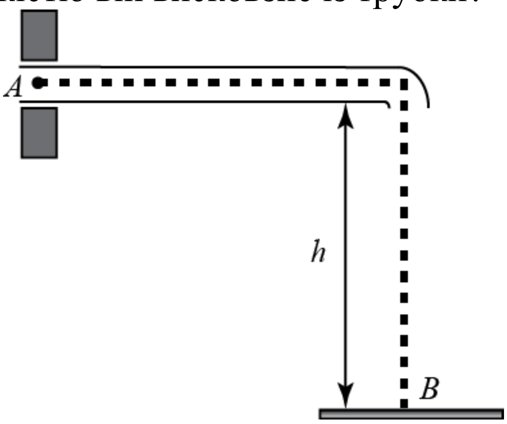
$$\frac{m}{r} = \frac{h}{\ln\frac{v_0}{v}}.$$

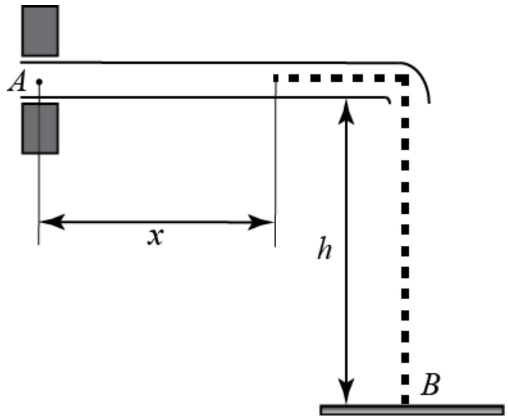
Отже,

$$t = \frac{v_0 - v}{vv_0}\cdot\frac{h}{\ln\frac{v_0}{v}}.$$

Приклад 2.5.

Ланцюжок *AB* завдовжки l знаходиться в гладенькій трубці так, що частинка її довжини h вільно звисає, дотикаючись своїм кінцем *B* до поверхні стола (див. рис.). В якийсь момент кінець *A* ланцюжка відпустили. З якою швидкістю він висковзне із трубки?





Розв'язання.

Діюча сила – сила тяжіння вертикальної частинки ланцюжка:

$$F = \frac{h}{l}mg. \tag{1}$$

Під дією цієї сили прискорюється маса

$$m_1 = \frac{l - x}{l}m, \tag{2}$$

де x – відстань верхнього кінця від точки *A*. Згідно з другим законом Ньютона,

$$\frac{h}{l}m\text{g} = \frac{l-x}{l}m\ddot{x}.$$

Звідси

$$(l-x)\ddot{x} = \text{g}h. \qquad (3)$$

Але

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}.$$

Перепишемо (3) так:

$$vdv = \frac{\text{g}l}{l-x}dx.$$

Проінтегруємо це рівняння в межах від $x = 0$ до $x = l - h$ і дістанемо:

$$v = \sqrt{2\text{g}h\ln\frac{l}{h}}.$$

Приклад 2.6.

На горизонтальній площині з коефіцієнтом тертя k лежить тіло масою m . У момент $t = 0$ до нього приклали горизонтальну силу, що залежить від часу як $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{b}t$, де $\boldsymbol{b}$ – сталий вектор. Знайти шлях, пройдений тілом за перших t секунд дії цієї сили.

Розв'язання.

Від початку дії сили на тіло до моменту t_0 тіло не рухалось, отже при $t \le t_0$ маємо $S = 0$. Момент, у який почався рух, визначається з рівняння $bt_0 = km\text{g}$:

$$t_0 = \frac{km\text{g}}{b}. \qquad (1)$$

Тоді

$$F = b(t - t_0) = m\frac{dv}{dt},$$

звідки

$$dv = \frac{b}{m}(t - t_0)dt = \frac{b}{m}d(t - t_0),$$

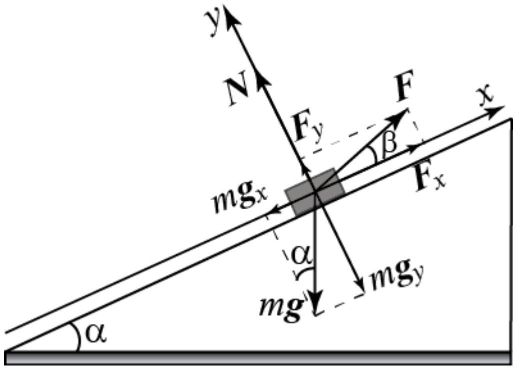
$$v = \frac{b}{2m}(t - t_0)^2\Big|_{t_0}^{t} = \frac{b}{2m}(t - t_0)^2,$$

$$v = \frac{ds}{dt}, \;\; ds = vdt,$$

$$S = \int_{t_0}^{t}(t - t_0)^2\,dt = \frac{b}{6m}(t - t_0)^3,$$

де t_0 – визначається з (1).

Приклад 2.7.



Уздовж похилої площини, що утворює з горизонтом кут α, підіймають тіло. Коефіцієнт тертя k. Під яким кутом β до похилої площини треба спрямувати силу, щоб вона була найменшою.

Розв'язання.

Умова рівноваги тіла, яка випливає з першого закону Ньютона:

$$\boldsymbol{F}_{\text{т}} + m\mathbf{g} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F} = \mathbf{0}.$$

В проекціях:

$$\begin{cases} F_x - mg_x - F_{\text{т}} = 0, \\ N + F_y - mg_y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F\cos\beta = mg\sin\alpha + kN, \\ F\sin\beta = mg\cos\alpha - N, \end{cases}$$

$$F = \frac{mg(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{k\sin\beta + \cos\beta}.$$

Сила F буде мінімальною, якщо знаменник максимальний. Умова екстремуму знаменника:

$$(k\sin\beta + \cos\beta)' = 0,$$

$$k = \operatorname{tg}\beta,$$

$$\beta = \operatorname{arctg} k.$$

Приклад 2.8.

Невеличке тіло пустили знизу вгору по похилій прощені, що утворює кут $\alpha = 15°$ з горизонтом. Знайти коефіцієнт тертя, якщо під час підйому тіла t_1 виявився в $\eta = 2{,}0$ меншим від часу спуску.

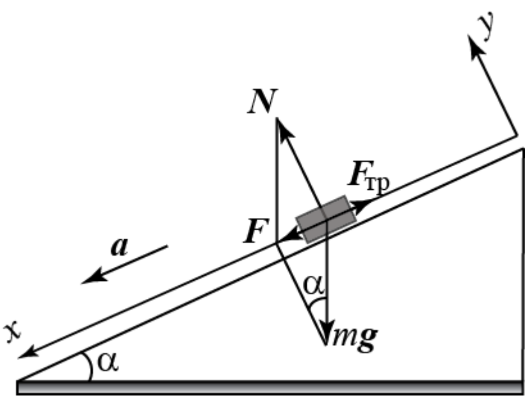
Розв'язання.

З другого закону Ньютона:

$$F = ma \qquad (1)$$

або

$$F_x = ma_x.$$



З (1) ясно, що вектор прискорення і вектор сили однакові. Сила тертя

$$F_{\text{тр}} = kN.$$

Оскільки $N = kmg\cos\alpha$, то прискорення тіла при підніманні і при спусканні будуть відповідно:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{F_1}{m} = \mathrm{g}(\sin\alpha + k\cos\alpha), \\ a_2 = \dfrac{F_2}{m} = \mathrm{g}(\sin\alpha - k\cos\alpha). \end{cases}$$

Оскільки

$$S = \frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{a_2 t_2^2}{2},$$

то

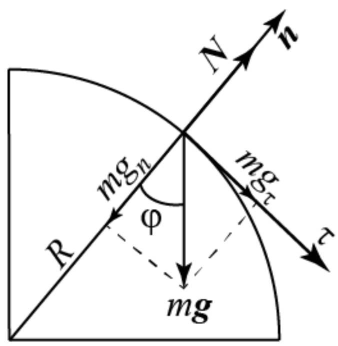
$$\frac{1}{\eta} = \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} = \sqrt{\frac{\sin\alpha - k\cos\alpha}{\sin\alpha + k\cos\alpha}},$$

$$k = \frac{h^2 - 1}{h^2 + 1}\mathrm{tg}\alpha = 0{,}16.$$

Приклад 2.9.

Невеличке тіло починає ковзати з вершини гладкої сфери радіуса R. Знайти швидкість тіла та кут φ між вертикаллю та радіус-вектором відносно центра сфери в момент відриву від неї.

Розв'язання.



Рівняння руху тіла визначає другий закон Ньютона:

$$m\mathbf{g} + \boldsymbol{N} = m\boldsymbol{a},$$
$$a = a_n + a_\tau.$$

Розв'язання цього рівняння:

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = m\mathrm{g}\sin\varphi, \\ -m\dfrac{v^2}{R} = -m\mathrm{g}\cos\varphi + N. \end{cases}$$

В момент відриву $N = 0$,

$$v^2 = \mathrm{g}\cos\varphi, \qquad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = \mathrm{g}\sin\varphi.$$

Виключимо час:

$$v = \frac{dx}{dt},$$
$$dx = Rd\varphi,$$
$$dt = \frac{Rd\varphi}{v},$$
$$\frac{vdv}{Rd\varphi} = \mathrm{g}\sin\varphi.$$

Після інтегрування:

$$v^2 = 2\mathrm{g}R(1 - \cos\varphi). \qquad (2)$$

Прирівнюючи (1) та (2), отримуємо:

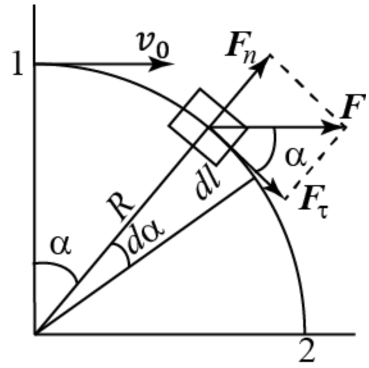
$$\cos\varphi = \frac{2}{3},$$

$$\varphi = \arccos\frac{2}{3}.$$

Тоді

$$v = \sqrt{\frac{2gR}{3}}.$$

Приклад 2.10.



Невеличка муфточка масою $m = 0{,}15$ кг рухається по гладкому дроту, вигнутому в горизонтальній площині у вигляді дуги кола радіуса $R = 50$ см (див. рис. – вид зверху). У точці 1, де швидкість муфточки $v_0 = 7{,}5$ см/с, на неї почала діяти стала горизонтальна сила F. Знайти швидкість муфточки в точці 2, якщо $F = 80$ Н.

Розв'язання.

Очевидно, що

$$dl = Rd\alpha,$$

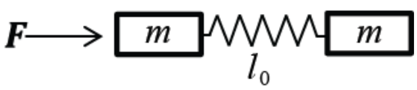
$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \int_1^2 F\cos\alpha dl = \frac{mv_0^2}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} FR\cos\alpha d\alpha = \frac{mv_0^2}{2} + FR,$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2FR}{m}} = 16\,\text{м/с}.$$

Приклад 2.11.

На гладенькому горизонтальному столі лежать два однакових бруски, з'єднані пружиною жорсткістю k і довжиною l_0. На лівий брусок раптово почала діяти постійна сила F, напрямлена вздовж пружини. Знайти мінімальну та максимальну відстань між брусками.

Розв'язання.



Робота сили F спрямована:

а) на деформацію пружини;

б) на створення кінетичної енергії обох брусків:

$$Fx = \frac{kx^2}{2} + \frac{m{v_1}^2}{2} + \frac{m{v_2}^2}{2}.$$

Коли пружина максимально деформована (стиснута), тоді обидва бруски мають однакові швидкості , тобто рухаються як одне ціле. Якщо деформація припиниться, то

$$Fx = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2. \qquad (1)$$

Крайній брусок буде рухатися під дією пружної сили, тому можемо записати:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

звідки

$$kx^2 = mv^2. \qquad (2)$$

З (1) та (2) отримуємо:

$$Fx = kx^2,$$

або

$$x(F - kx) = 0.$$

Це рівняння має два корені:

$$x = 0,$$

тобто $l - l_0 = 0$ або $l = l_0$;

$$x = \frac{F}{k},$$

тобто $l - l_0 = F/k$ або $l = l_0 + F/k$.

Бачимо, що

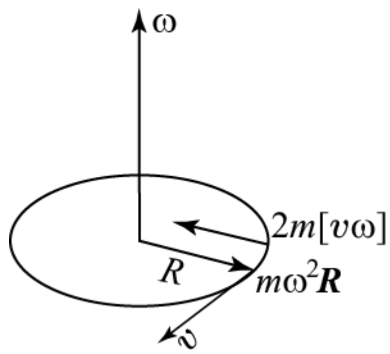
$$l_{min} = l_0, \qquad l_{max} = l_0 + \mathrm{F/k}.$$

Приклад 2.12.

Людина масою $m = 60$ кг іде рівномірно по периферії горизонтальної круглої платформи радіуса $R = 3{,}0$ м, яку обертають з кутовою швидкістю $\omega = 1{,}00$ рад/с навколо вертикальної осі, що проходить через її центр. Знайти горизонтальну складову сили, що діє на людину з боку платформи, якщо рівнодійна сил інерції, прикладених до неї в систему відліку, пов'язаній з платформою, дорівнює нулю.

Розв'язання.

Сили інерції, що діють від центра, дорівнюють $m\omega^2\boldsymbol{R}$, Коріоліса – $2m[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}]$ (див. рис.). З умови задачі випливає, що вони однакові за модулем і протилежно напрямлені, тобто



$$m\omega^2 R = 2mv\omega,$$

$$v = \frac{\omega R}{2}.$$

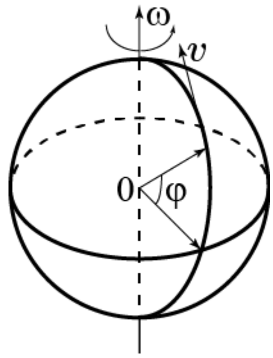
Відносно лабораторної системи відліку

$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{m\omega^2 R}{4} = 45 \text{ Н}.$$

Приклад 2.13.

Гвинтівку навели на вертикальну риску мішені, що розміщена точно в північному напрямку, і вистрілили. Нехтуючи опором повітря, знайти, на скільки сантиметрів і в який бік куля, влучивши в мішень, відхилиться від риски. Постріл зроблено в горизонтальному напрямі на широті $\varphi = 60°$, швидкість кулі $v = 900$ м/с, і відстань до мішені $S = 1$ км.

Розв'язання.



Оскільки

$$F_{k\ \text{пр}} = 2m[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}],$$

то куля відхилиться на схід від риски.

Прискорення кулі:

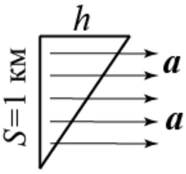
$$a = 2v\omega \sin\varphi.$$

Розрахуємо відхилення:

$$h = \frac{at^2}{2} = \frac{2v\omega \sin\varphi}{2} t^2,$$

$$t \approx \frac{S}{v},$$

$$h \approx \frac{\omega S^2}{v} \sin\varphi = 7 \text{ см}.$$



* * *

Задачі для самостійного розв'язання

№ 2.1. Тіло кинули з поверхні Землі під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Нехтуючи опором повітря знайти:

а) час руху;
б) максимальну висоту підйому та горизонтальну дальність польоту. За яким значенням кута α вони будуть рівні один одному?
в) рівняння траєкторії $y(x)$;

Відповідь:

а) $\tau = 2\frac{v_0}{g}\sin\alpha$;

б) $h = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$;

в) $y = x\text{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$.

№ 2.2. Тіло кинуто під деяким кутом α до горизонту. Знайти величину цього кута, якщо горизонтальна дальність l польоту в чотири рази більша від максимальної висоти h траєкторії.

Відповідь: $\alpha = 45°$.

№ 2.3. Під яким кутом до горизонту треба кинути кульку, щоб:

а) радіус кривизни початку його траєкторії був у $\eta = 8{,}0$ разів більший, ніж у початку?
б) центр кривини вишини траєкторії був на земній поверхні?
Відповідь:
а) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{\eta}}, \alpha = 60°$;

б) $\text{tg}\alpha = \sqrt{2}$, $\alpha = 54{,}7°$.
№ 2.4. Знайти модуль і напрям сили, що діє на частинку масою m при її русі в площині *xy* по закону $x = A\sin\omega t$, $y = B\cos\omega t$, де *A, B, ω* – сталі.

Відповідь: $F = -m\omega^2 r$, r – радіус-вектор частинки відносно початку координат; $F = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}$.

№ 2.5. Невелике тіло пустили знизу вверх по похилій площині, що утворює кут $\alpha = 15^0$ з горизонтом. Знайти коефіцієнт тертя, якщо час підйому тіла виявився в $\eta = 2{,}0$ разів менше часу спуску.

Відповідь: $k = [(\eta^2 - 1)/(\eta^2 + 1)]\,\text{tg}\,\alpha = 0{,}16$.

№ 2.6. Нитка перекинута через легкий блок, що обертається без тертя. На одному кінці нитки прикріплений тягарець масою *M*, а по іншій частині нитці, що висить, сковзає муфточка масою m з постійним прискоренням a' відносно нитки. Знайти силу тертя, з якою нитка діє на муфточку.

Відповідь: $F_T = (2\text{g} - a')mM/(m + M)$.

№ 2.7. Через блок , прикріплений до стелі кабіни ліфту, перекинута нитка,на кінцях якої закріплені вантажі з масами m_1 і m_2. Кабіна починає підніматись з прискоренням a_0. Нехтуючи масами блоків та нитки, а також тертям, знайти:

а) прискорення вантажу m_1 відносно кабіни;

б) силу, з якою блок діє на стелю кабіни.

Відповідь: а) $a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(\text{g} - a_0)$,

б) $F = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\text{g} - a_0)$.

№ 2.8. Невеликому тілу надали початковий імпульс, в результаті чого воно починає рухатись поступально без тертя вгору по похилій площині зі швидкістю $v_0 = 3{,}00$ м/с. Площина утворює з горизонтом кут $\alpha = 20{,}00^0$. Визначити:

а) на яку висоту h підніметься тіло;

б) скільки часу t_1 тіло буде рухатись вгору до зупинки;

в) скільки часу t_2 тіло затратить на ковзання вниз до початкового положення;

г) яку швидкість v має тіло в момент повернення в початковий стан.

Відповідь: а) $h = v_0^2/2\text{g} = 0{,}46$ м,

б) $t_1 = v_0/\text{g}\sin\alpha = 0{,}89\ c$,

в) $t_2 = t_1 = 0{,}89\ c$,

г) $v = v_0 = 3{,}00$ м/с.

№ 2.9. Кулька масою m=0,20 кг, що прив'язана до закріпленої з одного кінця нитки довжини l=3,00 м, описує в горизонтальній площині коло радіусом R=1,00 м. Знайти:

а) число обертів *n* кульки за хвилину;

б) натяг нитки F.

Відповідь: а) $n = (1/2\pi)\sqrt{\text{g}/\sqrt{l^2 - R^2}} = 17{,}8$ хв$^{-1}$;

б) $F = m\text{g}l/\sqrt{l^2 - R^2} = 2{,}1$ Н.

№ 2.10. Горизонтально розташований диск обертається навколо вертикальної осі, що проходить через його центр, з частотою *n*=10,0 об/хв. На якій відстані *r* від центру диска може втриматись невелике тіло, що лежить на диску, якщо коефіцієнт тертя *k*=0,200?

Відповідь: $r \leq 1{,}8$ м.

№ 2.11. Літак робить «мертву петлю» радіусом R=500 м з постійною швидкістю *v*=360 км/ год. Знайти вагу пілота масою m=70 кг в нижній, верхній і середній точках петлі.

Відповідь: 2,1; 0,7 і 1,5 кН.

№ 2.12. Невелика кулька масою m , підвішену на нитці, відвели в сторону так, що нитка утворила прямий кут з вертикаллю, і потім відпустили. Знайти:

а) модуль повного прискорення кульки і силу натягу нитки в залежності від θ– кута відхилення нитки від вертикалі;

б) силу натягу нитки в той момент, коли вертикальна складова швидкості кульки максимальна;

в) кут θ між ниткою та вертикаллю в момент, коли вектор повного прискорення кульки напрямлений горизонтально.

Відповідь:

а) $a = \mathrm{g}\sqrt{1 + 3\cos\theta^2}$, $T = 3m\mathrm{g}\cos\theta$;

б) $T = m\mathrm{g}\sqrt{3}$;

в) $\cos\theta = 1/\sqrt{3}$.

№ 2.13. Кулька, підвішена на нитці, гойдається у вертикальній площині так, що її прискорення в крайньому і нижньому положеннях рівні по модулю один одному. Знайти кут θ відхилення нитки в крайньому положенні.

Відповідь: $\mathrm{tg}\,\theta/2 = 1/2$, $\theta \approx 53^0$.

№ 2.14. Автомашина рухається з постійним тангенціальним прискоренням $a_\tau = 0{,}62$ м/с^2 по горизонтальній поверхні, описуючи коло радіусом R=40 м. Коефіцієнт тертя ковзання між колесами та поверхнею k=0,20. Який шлях пройде машина без ковзання, якщо в початковий момент її швидкість рівна нулю?

Відповідь: $s = (R/2)\sqrt{(kg/a_\tau)^2 - 1} = 60$ м.

№ 2.15. Невелике тіло помістили на вершину гладкої кулі радіусом R. Потім кулі надали в горизонтальному напрямі постійне прискорення a_0, і тіло почало ковзати вниз. Знайти швидкість тіла відносно кулі в момент відриву.

Відповідь: $v = \sqrt{2gR/3}$.

№ 2.16. Гладенький горизонтальний диск обертають з кутовою швидкістю $\omega = 5{,}0$ рад/с навколо вертикальної осі, що проходить через його центр. В центрі диску помістили невелику шайбу масою $m = 60$ г і надали їй поштовхом горизонтальну швидкість $v_0 = 2{,}6$ м/с. Знайти модуль сили Коріоліса, що діє на шайбу в системі відліку «диск», через $t = 0{,}50$ с після початку її руху.

Відповідь: $F_K = 2m\omega v_0\sqrt{1 + \omega^2 t^2}$=4,2 Н.

3. Імпульс тіла. Енергія. Закони збереження. Механічна робота. Зв'язок механічної роботи з енергією

- Рівняння руху центра мас системи:

$$m\frac{d\boldsymbol{v_c}}{dt} = \boldsymbol{F}_{\text{зовн}},$$

де $\boldsymbol{F}_{\text{зовн}}$ – результуюча всіх зовнішніх сил.

- Приріст імпульсу системи:

$$\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1} = \int_1^2 \boldsymbol{F}_{\text{зовн}}\, dt.$$

- Рівняння динаміки тіла змінної маси:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} + \frac{dm}{dt}\boldsymbol{u},$$

де $\boldsymbol{u}$ – швидкість відокремлюваної (приєднуваної) речовини відносно тіла, що розглядається.

- Робота та потужність сили:

$$A = \int \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} = \int F_s ds\,, \quad P = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}.$$

- Приріст кінетичної енергії частинки:

$$T_2 - T_1 = A,$$

де A– робота всіх сил, що діють на частинку.

- Зменшення (спад) потенціальної енергії частинки в полі:

$$U_2 - U_1 = A_{\text{поля}},$$

де $A_{поля}$ – робота поля.

- Зв'язок між силою та потенціальною енергією частинки в полі:

$$F_l = -\frac{dU}{dl}, \quad \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U.$$

- Приріст повної механічної енергії частинки в полі:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{стор}},$$

де $A_{\text{стор}}$ – робота результуючої всіх сторонніх сил, тобто сил, які не належать до даного поля.

- Приріст власної механічної енергії системи:

$$\mathrm{E}_{\text{влас 2}} - \mathrm{E}_{\text{влас 1}} = \mathrm{A}_{\text{зовн}} + \mathrm{A}_{\text{внутр}}^{\text{дис}},$$

де $\mathrm{E}_{\text{влас}} = T + U_{\text{влас}}$, $U_{\text{влас}} -$ власна потенціальна енергія системи, $\mathrm{A}_{\text{внутр}}^{\text{дис}} -$ робота всіх внутрішніх дисипативних сил (сил тертя і опору).

- Приріст повної механічної енергії в полі:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{зовн}}^{\text{стор}} + A_{\text{внут}}^{\text{дис}},$$

де $E = E_{\text{влас}} + U_{\text{зовн}}$, $U_{\text{зовн}} -$ потенціальна енергія системи в зовнішньому полі; $A_{\text{зовн}}^{\text{стор}} -$ робота зовнішніх сторонніх сил, тобто зовнішніх сил, що не належать до сил даного поля.

- Кінетична енергія системи:

$$T = \tilde{T} + \frac{mv_c^2}{2},$$

де $\tilde{T} -$ її кінетична енергія в системі центра мас.

- Приріст моменту імпульсу системи:

$$\boldsymbol{M_2} - \boldsymbol{M_1} = \int \boldsymbol{N}_{\text{зовн}} dt.$$

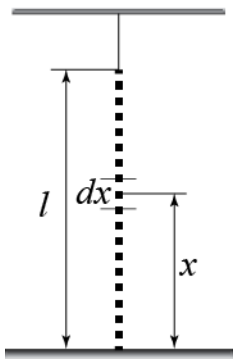
- Момент імпульсу системи:

$$\boldsymbol{M} = \widetilde{\boldsymbol{M}} + [\boldsymbol{r_c}\boldsymbol{p}],$$

де $\widetilde{\boldsymbol{M}} -$ її момент імпульсу в системі центру мас, $\boldsymbol{r_c} -$ радіус-вектор центру мас, $\boldsymbol{p} -$ імпульс системи.

* * *

Приклад 3.1.



Ланцюжок масою $m = 1{,}00$ кг і довжиною $l = 1{,}40$ м висить на нитці, дотикаючись поверхні стола своїм нижнім кінцем. Після перепалювання нитки ланцюжок упав на стіл. Знайти повний імпульс, який він передав столу.

Розв'язання.

Повний імпульс:

$$p = \Delta p = \int dp$$

$$= \int dm \cdot v = \int pdx \cdot \mathrm{g}t = \int \frac{m}{l} \mathrm{g}tdx$$

$$= \frac{m\mathrm{g}}{l} \int tdx\,;$$

$$x = \frac{\mathrm{g}t^2}{2};\ \ t = \sqrt{\frac{2x}{\mathrm{g}}};$$

$$p = \frac{m\mathrm{g}}{l} \int_0^l \sqrt{\frac{2x}{\mathrm{g}}} dx = \frac{m\mathrm{g}}{l} \sqrt{\frac{2}{\mathrm{g}}} \cdot \frac{2}{3} \left[x^{3/2}\right]_0^l = \frac{m\mathrm{g}}{l} \sqrt{\frac{2}{\mathrm{g}}} \cdot \frac{2}{3} l^{3/2} = \frac{2}{3} m\sqrt{2\mathrm{g}l} =$$

$$= 3{,}5\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Приклад 3.2.

Частинка 1 зіткнулась з частинкою 2, внаслідок чого виникла складена частинка. Знайти її швидкість $\boldsymbol{v}$ і абсолютне значення v, якщо маса частинки 2 в $\eta = 2{,}0$ рази більша, ніж частинки 1, а їх швидкості перед зіткненнями дорівнювали $\boldsymbol{v_1} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ та $\boldsymbol{v_2} = 4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{5j}$, де компоненти швидкості наведені в СІ.

Розв'язання.

Оскільки зіткнення абсолютно непружне, то

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v};$$

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + \eta m_1\boldsymbol{v}_2 = (m_1 + \eta m_1)\boldsymbol{v};$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{v}_1 + \eta\boldsymbol{v}_2}{1+\eta};$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \eta 4\boldsymbol{i} - \eta 5\boldsymbol{j}}{1+\eta} = \frac{(2+4\eta)\boldsymbol{i} + (3-5\eta)\boldsymbol{j}}{1+\eta} = \frac{10\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j}}{3};$$

$$v = \frac{\sqrt{10^2 + 7^2}}{3} = \frac{\sqrt{149}}{3} = 4{,}07 \text{ м.}$$

Приклад 3.3.

Дві невеличкі муфточки, маси яких відповідно $m_1 = 0{,}1$ кг і $m_2 = 0{,}2$ кг рухаються назустріч одна одній по гладкому горизонтальному дроту, зігнутому у вигляді кола, зі сталими нормальними прискореннями відповідно $a_1 = 3{,}0$ м/с^2 і $a_2 = 9{,}0$ м/с^2. Знайти нормальне прискорення складеної муфти, утвореної після зіткнення.

Розв'язання.

Оскільки зіткнення абсолютно непружне, то

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v;$$

$$a = \frac{v^2}{R};\ v = \sqrt{aR};$$

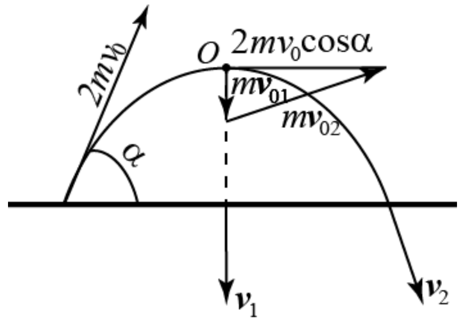
$$m_1\sqrt{a_1R} - m_2\sqrt{a_2R} = (m_1 + m_2)\sqrt{a_nR};$$

$$a_n = \frac{\left(m_1\sqrt{a_1} - m_2\sqrt{a_2R}\right)^2}{(m_1+m_2)^2} = 2\,\text{м/с}^2.$$

Приклад 3.4.

Снаряд, випущений зі швидкістю $v_0 = 100$ м/с під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту, розірвався у верхній точці O траєкторії на два однакових осколки. Один осколок упав на землю під точкою O зі швидкістю $v_1 = 97$ м/с. З якою швидкістю упав на землю другий осколок? Опір повітря відсутній.

Розв'язання.



У точці О снаряд мав імпульс $2mv_0\cos\alpha$ (тут m – маса одного осколка). За законом збереження імпульсу,

$$(mv_{02})^2 = (2mv_0\cos\alpha)^2 + (mv_0)^2;$$

$$v_{02}^2 = 4v_0^2\cos^2\alpha + v_{01}^2. \qquad (1)$$

За законом збереження енергії,

$$\frac{mv_{02}^2}{2} + mgh = \frac{mv_2^2}{2};$$

$$v_2^2 = v_{02}^2 + 2gh.$$

Враховуючи (1), отримуємо:

$$v_2^2 = 4v_0^2\cos^2\alpha + v_{01}^2 + 2gh,$$

але

$$v_{01}^2 + 2gh = v_1^2,$$

тому

$$v_2 = \sqrt{4v_0^2\cos^2\alpha + v_1^2} = 171{,}5 \text{ м/с}.$$

Приклад 3.5.

Частинки масою m потрапляють в область, де на них діє гальмівна сила. Глибина x проникнення частинок у цю область залежить від імпульсу p частинок як $x = \alpha p$, де α – задана стала. Знайти залежність модуля гальмівної сили від x.

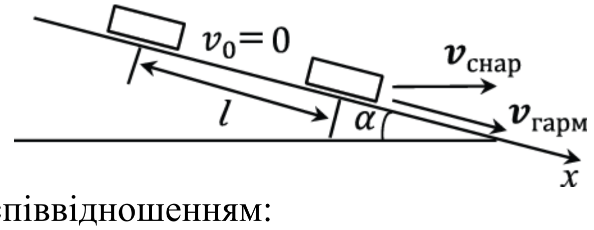
Розв'язання.

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\alpha}v = \frac{1}{\alpha}\frac{p}{m} = \frac{1}{\alpha m}\frac{x}{\alpha} = \frac{x}{\alpha^2 m}.$$

Приклад 3.6.

Гармата масою M починає вільно ковзати по гладкій похилій площині, що складає кут α з горизонтом. Коли гармата пройшла шлях l, відбувся постріл унаслідок чого снаряд вилетів з імпульсом p у горизонтальному напрямку, а гармата зупинилась. Нехтуючи масою снаряду порівняно з масою гармати, знайти тривалість пострілу.

Розв'язання.



Скористаємось співвідношенням:

$$F\tau = \Delta p, \qquad (1)$$

тут в проекції на вісь x ($a_x = g\sin\alpha$):

$$F = Ma = Mg\sin\alpha,$$
$$\Delta p = p\cos\alpha - Mv_{\text{гарм}},$$

але

$$\frac{Mv_{\text{гарм}}^2}{2} = Mgh = Mgl\sin\alpha \implies v_{\text{гарм}} = \sqrt{2gl\sin\alpha},$$

тому запишемо (1) так:

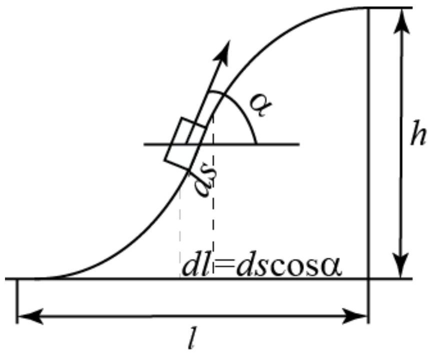
$$Mg\tau\sin\alpha = p\cos\alpha - M\sqrt{2gl\sin\alpha},$$

звідки

$$\tau = \frac{p\cos\alpha - M\sqrt{2gl\sin\alpha}}{Mg\sin\alpha}.$$

Приклад 3.7.

Невеличке тіло маси m повільно втягли на гірку, діючи силою $\boldsymbol{F}$, яка в кожній точці напрямлена по дотичній до траєкторії (див. рис.). Знайти роботу цієї сили, якщо висота гірки h, довжина її l і коефіцієнт тертя k.



Розв'язання.

$$A = mgh + A_{\text{тр}} = mgh + \int_0^l kmg\cos\alpha\, ds =$$

$$= mgh + kmg\int_0^l dl = mgh + kmgl = mg(h + kl).$$

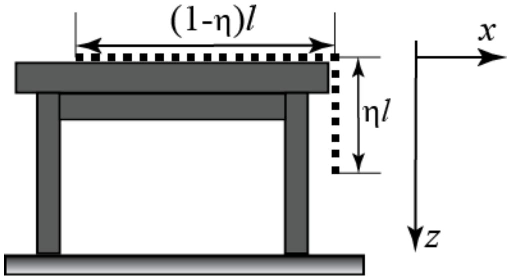
Приклад 3.8.

Тонкий стальний ланцюжок з дуже дрібними ланками, який має довжину $l = 1{,}00$ м і масу $m = 10{,}0$ г, лежить на горизонтальному столі. Ланцюжок витягнутий у пряму лінію, перпендикулярну до краю стола. Кінець ланцюжка звисає з краю стола. Коли довжина звисаючої частинки становить $\eta = 0{,}275$ довжини l, ланцюжок починає зісковзувати зі столу вниз. Вважаючи ланцюжок однорідним за довжиною, знайти:

а) коефіцієнт тертя k між ланцюжком і столом;

б) роботу A сил тертя ланцюжка об стіл за час зісковзування;

в) швидкість v ланцюжка в кінці зісковзування.



Розв'язання.

а) Зісковзування починається лише при

$$\eta m\mathrm{g} = k(1-\eta)m\mathrm{g},$$

звідки

$$k = \frac{\eta}{1-\eta}. \qquad (1)$$

б) $$dA = F_{\text{тр}}(-dx) = -k\left(\frac{x}{l}m\mathrm{g}\right)dx = -\frac{km\mathrm{g}}{l}xdx,$$

де x – довжина горизонтальної частини ланцюжка.

$$A = -\frac{km\mathrm{g}}{l}\int_0^{(1-\eta)l} xdx = -\frac{km\mathrm{g}}{l}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{(1-\eta)l} = -\frac{km\mathrm{g}}{2l}(1-\eta)^2l^2,$$

і врахувавши (1), дістанемо:

$$A = -\frac{1}{2}m\mathrm{g}l\eta(1-\eta) = -9{,}8 \text{ мДж}.$$

в) $$\frac{mv^2}{2} = A_{\text{тяж}} + A;$$

$$v = \sqrt{\frac{2(A_{\text{тяж}} + A)}{m}};$$

$$dA_{\text{тяж}} = \left(\frac{z}{l}m\mathrm{g}\right)dz;$$

$$A_{\text{тяж}} = \frac{m\mathrm{g}}{l}\int_{\eta l}^{l} zdz = \frac{m\mathrm{g}l}{2}(1-\eta^2);$$

$$A_{\text{тяж}} + A = \frac{m\mathrm{g}l}{2}(1-\eta^2) - \frac{m\mathrm{g}l\eta}{2}(1-\eta) = \frac{m\mathrm{g}l}{2}(1-\eta);$$

$$v = \sqrt{\frac{\mathrm{g}l}{1-\eta}} = 2{,}67 \text{ м/с}.$$

Приклад 3.9.

Знайти закон зміни маси ракети в часі, якщо ракета рухається за відсутності зовнішніх сил зі сталим прискоренням a, швидкість витікання газу відносно ракети становить u, а її маса в початковий момент дорівнює m_0.

Розв'язання.

Рівняння динаміки тіла змінної маси має вигляд:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} + \frac{dm}{dt}\boldsymbol{u}.$$

В нашому випадку $F = 0$, отже,

$$ma = m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt};$$

$$\frac{dm}{m} = -\frac{a}{u}dt;$$

$$m = m_0 e^{-\frac{a}{u}t}.$$

Приклад 3.10.

Ракета піднімається без початкової швидкості вгору в однорідному полі сили тяжіння. Початкова маса ракети з паливом дорівнює m_0. Нехтуючи опором повітря, знайти швидкість ракети залежно від її маси m і часу підйому t.

Розв'язання.

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\mathbf{g} + \boldsymbol{u}\frac{dm}{dt};$$

$$dv = \mathrm{g}dt + u\frac{dm}{m};$$

$$dv = \mathrm{g}dt - ud(\ln m);$$

$$v = -\mathrm{g}t - u\ln m + const.$$

При $t = 0$ маємо $v = 0$, $m = m_0$, тож $const = u\ln m_0$,

$$v = u\ln\frac{m_0}{m} - \mathrm{g}t.$$

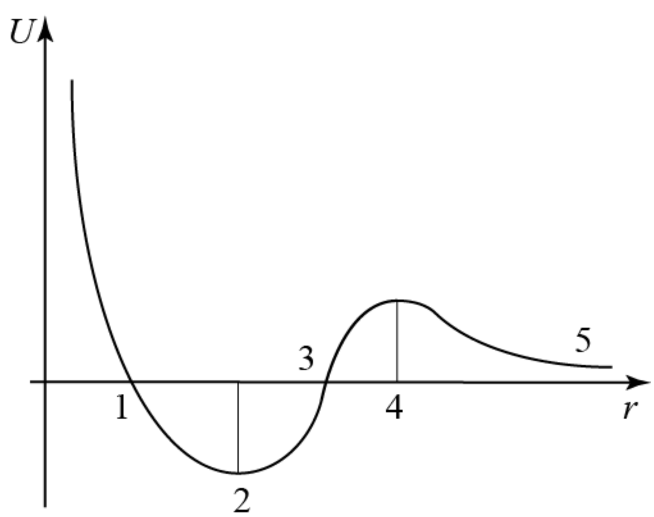
Приклад 3.11.

Залежність потенціальної енергії U взаємодії двох частинок від відстані r між ними показана на рис. Яка відстань між частинками відповідає рівновазі? При якій відстані ця рівновага стійка, а при якій нестійка? Яким ділянкам кривої відповідають сили при тяжіння та яким – сили відштовхування?

Розв'язання.

Рівновага має місце за умов рівності нулю сили взаємодії між частинками. Сила взаємодії зв'язана з потенціальною енергією взаємодії U формулою:

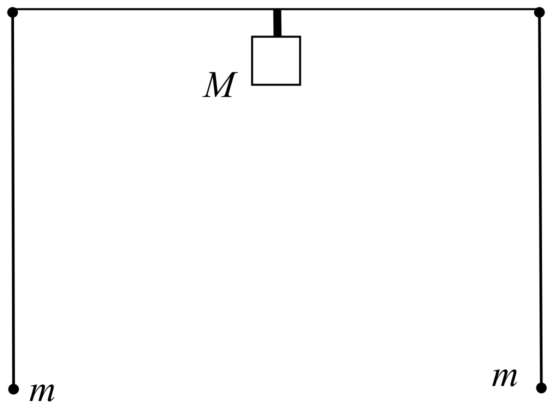
$$F = -\frac{dU}{dr}.$$



Звідси випливає, що рівновага відповідає значенню r, при яких U має екстремальні зазначення. З рисунку видно, це значення відповідають точкам 2 і 4, причому точка 2 відповідає стійкій, а точка 4 – нестійкій рівновазі.

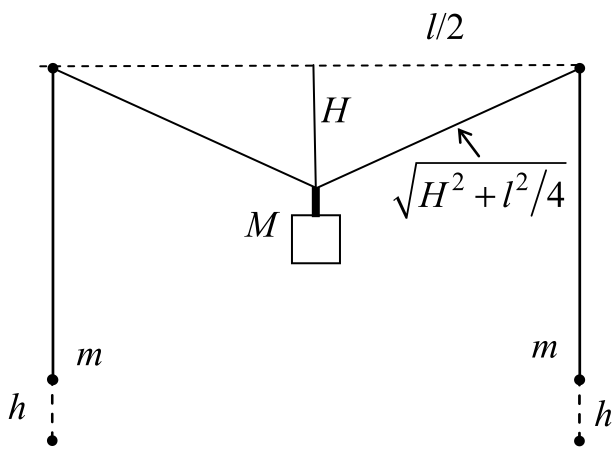
Оскільки потенціальна енергія прямує до мінімуму, то з цього випливає, що на ділянках $1 \div 2$ і $4 \div 5$ діють сили відштовхування, а на ділянці $2 \div 4$ - сили притягання.

Приклад 3.12.



Через два гладеньких горизонтальних стержня, що знаходяться на одній відстані, перекинута нитка, до кінців якої прикріплені вантажі масою m кожний. До середини нитки прив'язують вантаж масою M, і дають йому падати без початкової швидкості. Визначите найдовшу відстань, на яку опуститься вантаж M, вважаючи довжину нитки достатньо великою і $M < 2m$. Тертя нитки зі стержнями не враховувати.

Розв'язання.



На рисунку H – максимальна відстань опускання тягаря M, h – максимальний підйом тягаря m. Оскільки в кінці процесу кінетична енергія тягарів буде дорівнювати нулю, то за законом збереження енергії

$$Mgh = 2mgh,$$

звідки

$$h = \frac{M}{2m} H. \qquad (1)$$

З рисунку видно, що

$$h = \sqrt{H^2 + \frac{l^2}{4}} - \frac{l}{2}. \qquad (2)$$

З (1) і (2) дістанемо:

$$H = \frac{2mMl}{4m^2 - M^2}. \qquad (3)$$

Остання формула має фізичний зміст лише при $M < 2m$.

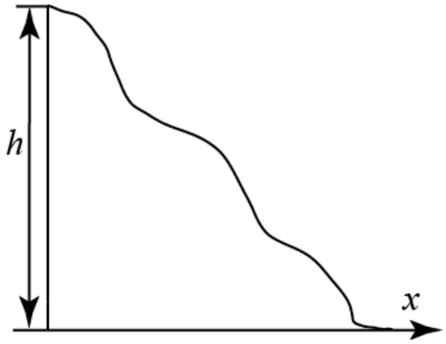
В окремому випадку $M = m$ формули (1) і (3) переходять відповідно в

$$h = \frac{1}{2} H, \qquad (1')$$

$$H = \frac{2l}{3}. \qquad (3')$$

Приклад 3.13.

Тіло масою m зісковзує з гори довільного профілю висотою h і, проїхавши далі деяку відстань по горизонталі, зупиняється в наслідок тертя. Коефіцієнт тертя на різних ділянках шляху може бути різним, але він не залежить ні від швидкості, ні від напрямку руху. Визначите роботу, яку необхідно виконати, щоб вернути тіло в початкове положення тим же шляхом.



Розв'язання.

До зупинки потенціальна енергія тіла U = mgh використовується на подолання сил тертя. Щоб вернути тіло в початкове положення, потрібно виконати роботу проти сил тертя, тобто mgh, а також на відновлення початкової потенціальної енергії тіла, тобто теж mgh. Таким чином,

$$A = mgh + mgh = 2mgh.$$

* * *

Задачі для самостійного розв'язання

№ 3.1. Тіло масою m кинули під кутом до горизонту з початковою швидкістю $\boldsymbol{v}_0$. Через деякий час τ тіло впало на Землю. Нехтуючи опором повітря, знайти:

а) приріст імпульсу тіла $\Delta\boldsymbol{p}$ за час польоту;

б) середнє значення імпульсу $<\boldsymbol{p}>$за час τ.

Відповідь: а) $\Delta\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{g}\tau,$

b)$<\boldsymbol{p}>= m\boldsymbol{v_0} + m\boldsymbol{g}\tau/2 = \boldsymbol{p_0} + \Delta\boldsymbol{p}/2.$

№ 3.2. Дві кульки рухаються назустріч вздовж прямої, що проходить через їхні центри. Маса і швидкість першої кульки рівні 4,00 кг і 8,00 м/с, іншої кульки – 6,00 кг і 2,00 м/с. Як будуть рухатись кульки після абсолютно непружного удару?

Відповідь: Обидві кульки будуть рухатись зі швидкістю 2,00 м/с в напрямі, в якому до удару рухалась перша кулька.

№ 3.3. Ствол гармати напрямлений під кутом $\vartheta = 45^0$ до горизонту. Коли колеса гармати закріплені, швидкість снаряду, маса якого $\eta = 50$ в разів менше масу гармати, $v_0 = 180$ м/с. Знайти швидкість гармати зразу після пострілу, якщо її колеса звільнити.

Відповідь: $u = v_0 \cos\vartheta\,/(1 + \eta) = 25$ м/с.

№ 3.4. Дві невелику муфточки з масами $m_1 = 0{,}10$ кг і $m_2 = 0{,}20$ кг рухаються назустріч одна одній по гладенькому дроті, зігнутому у вигляді кола, з постійним нормальним прискоренням $a_1 = 3{,}0$ м/с^2 і $a_2 = 9{,}0$ м/с^2 відповідно. Знайти нормальне прискорення складової муфти, що утворилась після зіткнення.

Відповідь: $a_n = (m_1\sqrt{a_1} - m_2\sqrt{a_2})^2/(m_1 + m_2)^2 = 2{,}0$ м/с^2.

№ 3.5. Частинка масою m_1 зазнала пружній удар з частинкою масою m_2, що покоїлась. Яку відносну частину кінетичної енергії втратила налітаюча частинка, якщо:

а) вона відскочила під прямим кутом до свого початкового напряму руху;

б) зіткнення лобове?

Відповідь: а) $\eta = 2m_1/(m_1 + m_2)$,

б) $\eta = 4m_1m_2/(m_1 + m_2)^2$.

№ 3.6. В результаті пружного лобового зіткнення частинки 1 масою m_1 з частинкою 2, що покоїлась, обидві частинки розлетілись в протилежних напрямах з однаковими швидкостями. Знайти масу частики 2.

Відповідь: $m_2 = 3m_1$.

№ 3.7. Знайти приріст кінетичної енергії системи з двох кульок з масами m_1 і m_2 при їх абсолютному непружному ударі. До удару швидкості кульок були $\boldsymbol{v}_1$і $\boldsymbol{v}_2$.

Відповідь: $\Delta T = -\mu(v_1 - v_2)^2/2$, де $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$.

№ 3.8. Локомотив масою *m* починає рухатись з станції так, що його швидкість змінюється по закону $v = \alpha\sqrt{s}$, де $\alpha -$ постійна, $s -$ пройдений шлях. Знайти сумарну роботу всіх сил, що діють на локомотив, за перші *t* секунд після початку руху.

Відповідь: $A = m\alpha^4t^2/8$.

№ 3.9. Кінетична енергія частинки, що рухається по колу радіусом *R*, залежить від пройденого шляху *s* по закону $T = \alpha s^2$, де $\alpha -$ постійна. Знайти модуль сили, що діє на частинку, в залежності від *s*.

Відповідь: $F = 2\alpha s\sqrt{1 + (s/R)^2}$.

№ 3.10. Кинутий камінь масою *m* піднімається над рівнем, на якому знаходиться точка кидання, на висоту *h*. У верхній точці траєкторії швидкість каменя рівна v. Сила опору повітря здійснює над каменем роботу $A_{\text{опору}}$. Чому рівна робота *A* кидання каменя?

Відповідь: $A = \frac{mv^2}{2} + mgh - A_{\text{опору}}$.

№ 3.11. В системі відліку, що обертається навколо нерухомої осі з постійною кутовою швидкістю $\omega = 5{,}0$ рад/с, рухається невелике тіло масою $m = 100$ г. Яку роботу здійснила центробіжна сила інерції при переміщенні цього тіла по довільному шляху з точки 1 в точку 2, які розташовані на відстанях $r_1 = 30$ см і $r_2 = 50$ см від осі обертання?

Відповідь: $A = \frac{m\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) = 0{,}20$ Дж.

№ 3.12. Потенціальна енергія частинки в деякому полі має вигляд $U = a/r^2 - b/r$, де a, b –позитивні постійні, r –відстань від центра поля. Знайти:

а) значення r_0,що відповідає рівноважному положенню частинки; з'ясувати чи стійке це положення;

б) максимальне значення сили притягання; зобразити прикладні графіки залежностей $U(r)$, $F_r(r)$ – проекції сили на радіус-вектор $\boldsymbol{r}$.

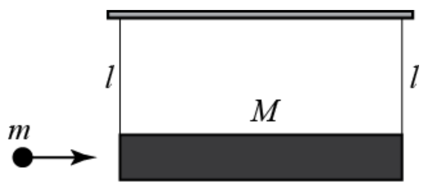
Відповідь: а) $r_0 = 2a/b$, стійке,

б) $F_{max} = b^3/27a^2$.

№ 3.13. Гладенький легкий горизонтальний стержень *AB* може обертатись без тертя навколо вертикальної осі, що проходить через його кінець *A*. На стержні знаходиться невелика муфточка масою m, поєднана невагомою пружиною довжини l_0 з кінцем *A*. Жорсткість пружини рівна $\varkappa$. Яку роботу потрібно здійснити, щоб цю систему повільно розкрутити до кутової швидкості ω?

Відповідь: $A = \varkappa^{l_0^2}\eta(1+\eta)/2(1-\eta)^2$, де $\eta = m\omega^2/\varkappa$.

№ 3.14. Куля, що летіла горизонтально масою m, попала, застрягши, в тіло масою *M,* яке підвішене на двох однакових нитках довжиною l (див. рис.). В результаті нитки відхилились на кут ϑ. Вважаючи , знайти:



а) швидкість кулі перед попаданням в тіло;

б) відносну долю початкової кінетичної енергії кулі, яка перейшла в внутрішню енергію.

Відповідь:

а) $v = \frac{2M}{m}\sqrt{gl}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$,

б) $\eta \approx 1 - m/M$.

4. Механіка обертального руху твердого тіла

- Рівняння динаміки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі z :

$$I\beta_z = N_z,$$

де N_z −алгебраїчна сума моментів зовнішніх сил відносно осі z.

- Теорема Штейнера:

$$I = I_c + ma^2.$$

- Кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

$$T = \frac{I\omega^2}{2}.$$

- Робота зовнішніх сил при повороті твердого тіла навколо нерухомої осі:

$$A = \int N_z d\varphi.$$

- Кінетична енергія твердого тіла при плоскому русі:

$$T = \frac{I_c\omega^2}{2} + \frac{mv_c^2}{2}.$$

- Зв'язок між кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}'$ процесії гіроскопа, його моментом імпульсу $\boldsymbol{M}$, рівним $\boldsymbol{I\omega}$, і моментом $\boldsymbol{N}$ зовнішніх сил:

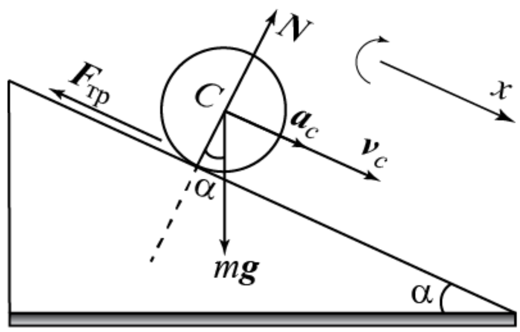
$$[\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{M}] = \boldsymbol{N}$$

* * *

Приклад 4.1.

Однорідна куля масою $m = 5{,}00$ кг скочується без ковзання по похилій площині, що утворює кут α з горизонтом. Знайти кінетичну енергію кулі через $t = 1{,}6$ с після початку руху.

Розв'язання.



Використаємо рівняння моментів відносно центра мас

$$R \cdot F_{\text{тр}} = I\beta, \qquad (1)$$

рівняння руху центра мас

$$ma_c = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} \qquad (2)$$

і умову відсутності ковзання:

$$a_c = R\beta. \qquad (3)$$

Для кулі

$$I_c = \frac{2mR^2}{5}. \qquad (4)$$

З (1), (3) та (4) маємо:

$$F_{\text{тр}} = \frac{2}{5} a_c. \qquad (5)$$

Підставивши (5) у (2), дістанемо:

$$a_c = \frac{5}{7} \mathrm{g} \sin\alpha.$$

Отже,

$$F_{\text{тр}} = \frac{2}{7} m\mathrm{g} \sin\alpha.$$

Далі,

$$v_c = a_c t = \frac{5}{7} gt\, sin\alpha,$$

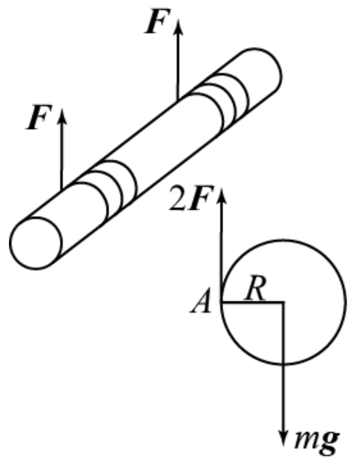
$$\omega = \frac{v_c}{R} = a_c t = \frac{5\mathrm{g}t \sin\alpha}{7R}.$$

Кінетична енергія:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{5\mathrm{g}t \sin\alpha}{7}\right)^2 + \frac{mR^2}{5}\left(\frac{5\mathrm{g}t \sin\alpha}{7R}\right)^2 = \frac{5}{14} m\mathrm{g}^2 \sin^2\alpha \cdot t^2.$$

Приклад 4.2.

Однорідний суцільний циліндр масою $m = 1{,}00$ кг висить у горизонтальному положенні на двох намотаних на нього невагомих нитках (див. рис.). Циліндр опускається без поштовху. Визначити, якого натягу F зазнає під час опускання циліндра кожна з ниток, та за який час t циліндр опуститься на відстань $h = 50{,}0$ см.



Розв'язання.

Рівняння сил:

$$m\mathrm{g} - 2F = ma,$$

звідки отримуємо:

$$F = \frac{m}{2}(\mathrm{g} - a). \qquad (1)$$

Рівняння моментів відносно осі A:

$$\left(mR^2 + \frac{mR^2}{2}\right)\frac{a}{R} = R \cdot m\mathrm{g},$$

$$a = \frac{2\mathrm{g}}{3}. \qquad (2)$$

Підставляємо (2) в (1):

$$F = \frac{m}{2}\left(\mathrm{g} - \frac{2\mathrm{g}}{3}\right) = \frac{m\mathrm{g}}{6} = 1{,}64 \text{ Н}.$$

Циліндр опускається за законом:

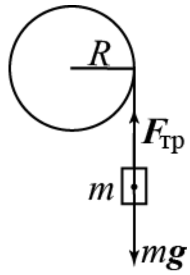
$$h = \frac{at^2}{2},$$

отже,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{3h}{g}} = 0{,}39 \text{ с}.$$

Приклад 4.3.

Блок радіусом R може обертатися навколо своєї осі з тертям, що характеризується обертальним моментом $M_{\text{тр}}$, який не залежить від швидкості обертання блока. На блок намотана прикріплена до нього одним кінцем практично нерозтяжна нитка, до другого кінця якої підвішений тягар масою m (див. рис.). Тягар відпускають без поштовху, і він починає опускатися, розкручуючи блок. Знайти момент імпульсу $L_z(t)$ цієї системи тіл відносно осі блока через час t після початку її руху.



Розв'язання.

Нехай p – імпульс, що набуло тіло за час t. Момент імпульсу, набутого за цей час:

$$L_z(t) = R \cdot p.$$

Приріст імпульсу дорівнює імпульсу сили за цей самий час:

$$dp = Fdt,$$

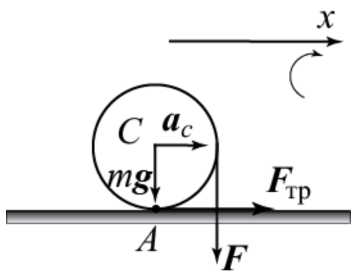
$$p - p_0 = Ft,$$

$$p = (mg - F_{\text{тр}})t = \left(mg - \frac{M_{\text{тр}}}{R}\right)t;$$

$$L_z(t) = R\left(mg - \frac{M_{\text{тр}}}{R}\right)t = (mgR - M_{\text{тр}})t.$$

Приклад 4.4.

Однорідний суцільний циліндр масою m лежить на двох горизонтальних брусках. На циліндр намотана нитка, за звислий кінець якої тягнуть зі сталою вертикально напрямленою силою F (див. рис.). Знайти значення сили F, за якої циліндр буде котитися без ковзання, якщо коефіцієнт тертя дорівнює k.



Розв'язання.

Рівняння руху для центра мас:

$$ma_c = F_{\text{тр}} = k(mg + F). \qquad (1)$$

Рівняння моментів відносно осі A:

$$I\beta = FR,$$

$$I = I_c + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Оскільки ковзання немає, то

$$\beta = \frac{a_c}{R},$$

$$I\beta = \frac{3}{2}mR^2 \cdot \frac{a_c}{R} = \frac{3}{2}mRa_c,$$
$$\frac{3}{2}mRa_c = FR,$$
$$ma_c = \frac{2F}{3}. \qquad (2)$$

З (1) і (2) маємо:

$$k(mg + F) = \frac{2F}{3}.$$

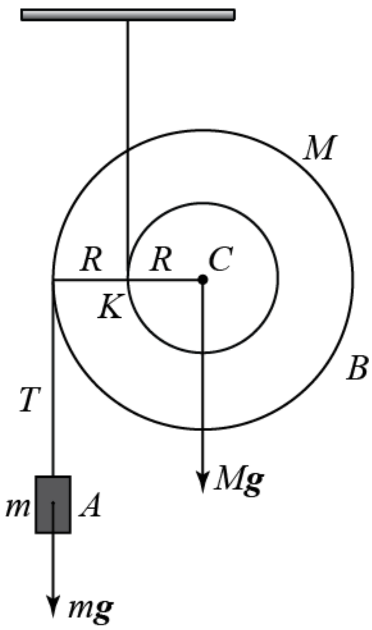
Ковзання немає при

$$k \geq \frac{2F}{3(mg + F)}.$$

Звідси

$$3mgk + 3Fk \geq 2F,$$
$$3mgk \geq F(2 - 3k),$$
$$F \leq \frac{3mgk}{2 - 3k}.$$

Приклад 4.5.



У системі, показаній на рисунку, відомі маса m тягаря A, маса M східчастого блока B, момент інерції останнього відносно його осі та радіуси східців блока R і $2R$. Маса ниток нехтовно мала. Знайти прискорення тягаря A.

Розв'язання.

Відносно напряму вектора a треба припустити, що його напрямлено вниз. Тоді для нього рівняння руху

$$ma = mg - T. \qquad (1)$$

Рівняння моментів відносно K:

$$TR - MgR = (I + MR^2)\beta = (I + MR^2)\frac{a}{R}. \qquad (2)$$

Комбінуючи (1) і (2), отримуємо:

$$a = \frac{g(m - M)}{M + m + I/R^2}.$$

Приклад 4.6.

Людина масою m_1 стоїть на краю однорідного диска масою m_2 і радіусом R, який може вільно обертатися навколо нерухомої вертикальної осі, що проходить через його центр. У певний момент людина почала рухатись до краю диска, зробила переміщення на кут φ' відносно диска і зупинилась. Нехтуючи розмірами людини, знайти кут, на який повернувся диск на момент зупинки людини.

Розв’язання.

У даній системі зберігається момент імпульсу:

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = 0, \qquad (1)$$

де ω_1 і ω_2 – кутові швидкості людини і диска відносно Землі, I_1 та I_2 – їх моменти інерції відносно осі обертання. Але

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega'_1,$$

де ω'_1 – кутова швидкість людини відносно диска. Тому (1) перепишеться так:

$$I_1\omega_2 + I_1\omega'_1 + I_2\omega_2 = 0,$$

звідки

$$\omega_2 = -\frac{I_1\omega'_1}{I_1 + I_2}.$$

Помноживши на час t до зупинки людини, отримуємо:

$$\varphi = -\frac{I_1\varphi'}{I_1 + I_2}.$$

Оскільки

$$I_1 = m_1R^2, \quad I_2 = \frac{m_2R^2}{2},$$

то отримуємо:

$$\varphi = -\varphi'\frac{2m_1}{2m_1 + m_2}.$$

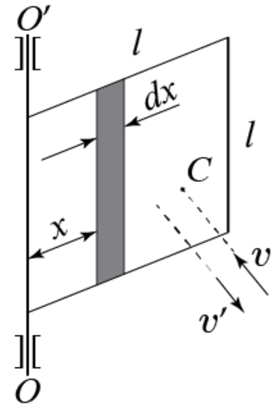
Приклад 4.7.

Однорідна тонка квадратна пластина зі стороною l і масою M може вільно обертатися навколо нерухомої вертикальної осі, що збігається з одною з її сторін. У центрі пластинки по нормалі до неї пружно вдаряється кулька масою m, що летіла зі швидкістю v. Знайти:

а) швидкість кульки v' після удару;

б) горизонтальну складову результуючої сили, з якою вісь буде діяти на пластинку після удару.

Розв’язання.



Система «кулька-пластинка» незамкнена: крім сил, що врівноважують одна одну, в процесі удару виникає горизонтальна складова сили реакції осі OO'. Під її дією пластинка отримує імпульс $\Delta p = m(v - v')$. Момент цього імпульсу відносно осі OO':

$$\Delta p \cdot \frac{l}{2} = I\omega,$$

момент інерції пластинки відносно OO':

$$I = \frac{1}{3}Ml^2,$$

звідки

$$\Delta p \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{3} M l^2 \omega,$$

а отже

$$v - v' = \frac{2}{3} \frac{M}{m} l\omega. \qquad (1)$$

За законом збереження енергії,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2},$$

$$v^2 - {v'}^2 = I\omega^2 = \frac{1}{3} M l^2 \omega^2. \qquad (2)$$

Ділимо (2) на (1) і отримуємо:

$$v + v' = \frac{l\omega}{2}. \qquad (3)$$

Комбінуючи (1) і (3), дістаємо:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{l\omega(3m + 4M)}{12m}; \\ v' &= \frac{l\omega(3m - 4M)}{12m}. \end{aligned}\right. \qquad (4)$$

З (4) маємо:

а) $$v' = v\frac{3m - 4M}{3m + 4M}; \quad v' = v\frac{3m - 4M}{3m + 4M}.$$

б) Сила F, з якою діє вісь OO' на пластинку, дорівнює

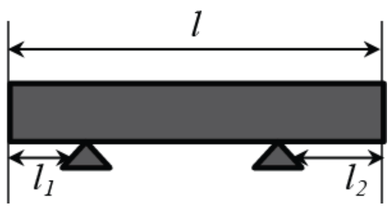
$$F = M\omega^2 \frac{l}{2}.$$

Взявши ω з (4), отримуємо:

$$F = \frac{8Mv^2}{l\left(1 + \frac{4M}{3m}\right)^2}.$$

* * *

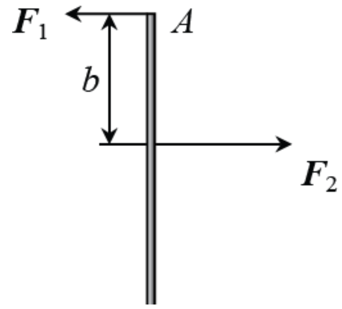
Задачі для самостійного розв’язання



№ 4.1. Балка масою $m = 300$ кг і довжиною $l = 8{,}00$ м лежить на двох опорах (див. рис.). Відстань від кінців балки до опор: $l_1 = 2{,}00$ м і $l_2 = 1{,}00$ м. Знайти сили F_1, F_2, з якими балка давить на опори.

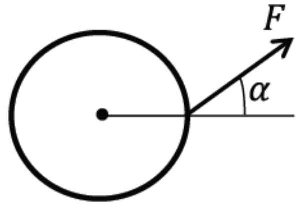
Відповідь: $F_1 = 1{,}76 \cdot 10^3\ H$, $F_2 = 1{,}18 \cdot 10^3\ H$

№ 4.2. Тонкий однорідний стержень AB масою $m = 1{,}0$ кг рухається поступально з прискоренням $a = 2{,}0$ м/с^2 під дією двох сил $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$ (див. рис.). Відстань між точками прикладання цих сил $b = 20$ см. Крім цього, відомо, що $F_2 = 5{,}0\ H$. Знайти довжину стержня.



Відповідь: $l = 2bF_2/ma = 1{,}0$ *м.*

№ 4.3. Однорідна кулька масою $m = 4{,}0$ кг рухається поступально по поверхні столу під дією постійної сили $\boldsymbol{F}$, що прикладена, як показано на малюнку, де кут $\alpha = 30^0$. Коефіцієнт тертя між кулькою та столом $k = 0{,}20$. Знайти значення F і прискорення кульки.



Відповідь: $F = \frac{kmg}{(1+k)\sin\alpha} = 13\ H$, $a = \frac{kg}{1+k}(\text{ctg}\alpha - 1) = 1{,}2$ м/с^2

№ 4.4. Знайти момент інерції:

а) тонкого однорідного стержня відносно осі, перпендикулярної до стержня, яка проходить через його кінець, якщо маса стержня *m* і його довжина *l*;

б) тонкої однорідної прямокутної пластинки відносно осі, яка проходить через одну з вершин пластини перпендикулярно до її площини, якщо сторони пластини рівні *a, b*, а її маса – *m*.

Відповідь: а) $I = ml^2/3$,

б) $I = m(a^2 + b^2)/3$.

№ 4.5. Знайти момент інерції:

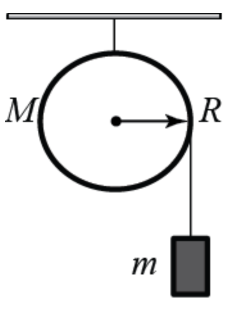
а) мідного однорідного диску відносно осі симетрії, яка перпендикулярна до площини диску, якщо його товщина $b = 2{,}0$ мм і радіус $R = 100$ мм.

б) однорідного суцільного конуса відносно його осі симетрії, якщо маса конуса *m* і радіус його основи R.

Відповідь: а) $I = \pi\rho bR^4/2 = 2{,}8$ г · м^2 ,

б) $I = (3/10)mR^2$

№ 4.6. На однорідний суцільний циліндр масою *M* і радіуса *R* щільно намотана легка нитка, до кінця якої прикріплений вантаж масою *m* (див. рис.). В момент *t=0* система почала рухатись. Нехтуючи опором в осі циліндра, знайти залежність від часу:



а) модуля кутової швидкості циліндру;

б) кінетичної енергії всієї системи.

Відповідь: а) $\omega = gt/R(1 + M/2m)$,

б)$T = mg^2t^2/2(1 + M/2m)$.

№ 4.7. Однорідному циліндру надали початковий імпульс, в результаті чого він почав котитись без ковзання вверх по похилій площині зі швидкістю $v_0 = 3{,}00$ м/с. Площина утворює кут з горизонтом $\alpha = 20{,}0^0$.

а) Скільки часу t_1 буде рухатись циліндр до зупинки?

б) На яку висоту h підніметься циліндр?

в) Скільки часу t_2 затратить циліндр на скочування вниз до початкового положення?

г) Яку швидкість v має циліндр в момент повернення в початкове положення?

Відповідь: а) $t_1 = 3v_0/2g\sin\alpha = 1{,}34$ с,

б) $h = 3v_0^2/4g = 0{,}69$ м,

в) $t_2 = t_1 = 3v_0/2g\sin\alpha = 1{,}34$ с,

г) $v = v_0 = 3{,}00$ м/с.

№ 4.8. Горизонтально розташований дерев'яний стержень масою $m = 0{,}800$ кг і довжиною $l = 1{,}80$ м може обертатись навколо вертикальної осі, яка проходить через його середину. В кінець стержня попадає і застрягає в ньому куля масою $m' = 3{,}00$ г, яка летіла перпендикулярно до осі і до стержня зі швидкістю $v = 50{,}0$ м/с. Визначити кутову швидкість ω, з якою починає обертатись стержень.

Відповідь: $\omega = 6m'v/(m + 3m')l = 0{,}62$ рад/с.

№ 4.9. Стовп висотою $h = 3{,}00$ м і масою $m = 50{,}0$ кг падає з вертикального положення на землю. Визначити модуль моменту імпульсу M стовпа відносно точки опори і швидкість v верхнього кінця стовпа в момент удару об землю.

Відповідь: $M = mh\sqrt{gh/3} = 4{,}7 \cdot 10^2$ кг·м^2/с, $v = \sqrt{3gh = 9{,}5}$ м/с.

№ 4.10. Однорідний циліндр масою m і радіусом R обертається навколо своєї осі. Кутова швидкість циліндру змінюється за час t від значення ω_1 до значення до значення ω_2. Яку середню потужність $\langle P \rangle$ розвивають сили, що діють на циліндр?

Відповідь: $\langle P \rangle = mR^2(\omega_2^2 - \omega_1^2)/4t$.

№ 4.11. Однорідна куля масою $m = 5{,}0$ кг зкочується без ковзання по похилій площині, яка утворює кут $\alpha = 30^0$ з горизонтом. Знайти кінетичну енергію кулі через $t = 1{,}6$ с після початку руху.

Відповідь: $T = \frac{5}{14} m\text{g}^2 t^2 \sin^2\alpha = 0{,}11$ кДж.

№ 4.12. Дзиґа масою $m = 0{,}50$ кг, вісь якої похилена під кутом $\vartheta = 30^0$ до вертикалі, процесіює під дією сили тяжіння. Момент інерції дзиґи відносно її осі симетрії $I = 2{,}0$ г·м^2, кутова швидкість обертання навколо цієї осі $\omega = 350$ рад/с, відстань від точки опори до центру мас дзиґи $l = 10$ см. Знайти:

а) кутову швидкість прецесії дзиґи;

б) модуль та напрям горизонтальної складової сили реакції, що діє на дзиґу в точці опори.

Відповідь: а) $\omega' = mgl/I\omega = 0{,}7$ рад/с,

б) $F = m\omega'^2 l \sin\vartheta = 10$ мН. Ця сила напрямлена в сторону, протилежну нахилу дзиґи.

5. Гармонічні коливання. Осцилятор

Рівняння гармонічних коливань і його розв'язок:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad x = A\cos\left(\omega_0 t + \alpha\right),$$

де $\omega_0 -$ власна частота коливань

Рівняння згасаючих коливань і його розв'язок:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad x = A_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega t + \alpha\right),$$

де $\beta -$ коефіцієнт згасання, $\omega -$ частота згасаючих коливань:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Логарифмічний декремент згасання λ та добротність Q:

$$\lambda = \beta T, \qquad Q = \pi/\lambda,$$

де $T = 2\pi/\omega -$ період згасаючих коливань.

Рівняння вимушених коливань і його усталений розв'язок:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t, \quad x = A\cos\left(\omega t - \varphi\right),$$

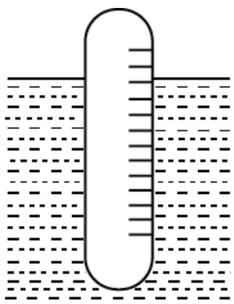
де

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad tg\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m}.$$

* * *

Приклад 5.1.

Обчислити період малих коливань ареометра (див. рис.), якому надали невеликого поштовху в вертикальному напрямі. Маса ареометра $m = 50\,\text{г}$, радіус його трубки $r = 3{,}2\,\text{мм}$, густина рідини $\rho = 1{,}00\,\text{г/см}^3$. Опір рідини нехтовно малий.



Розв'язання.

До поштовху була рівновага, тобто

$$mg = \rho g \pi r^2 h,$$

де $h -$ початкова глибина занурення ареометра.

Після занурення на невеличку глибину x на ареометр діяла сила вгору:

$$F = \rho g \pi r^2\left(h + x\right).$$

Різниця

$$F - mg = \rho g \pi r^2 x.$$

$F - mg$ дорівнює виштовхувальній (додатковій) силі $-m\ddot{x}$.

Отже,

$$m\ddot{x} + \rho g \pi r^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{\rho g \pi r^2}{m} x = 0,$$

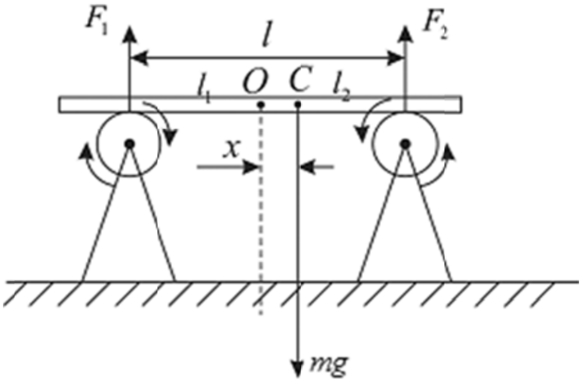
звідки

$$\frac{\rho g \pi r^2}{m} = \omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi m}{\rho g r^2}} = 2{,}5\text{c}.$$

Приклад 5.2.

Однорідний стрижень поклали на два блоки, які швидко обертаються, як показано на рисунку. Відстань між осями блока $l = 20\,\text{см}$. Коефіцієнт тертя між стрижнем і блоками $k = 0{,}18$. Показати, що стрижень буде виконувати гармонічні коливання. Знайти їх період.



Розв'язання.

$$F_1 + F_2 = mg. \qquad (1)$$

Для моментів сил відносно осі O маємо:

$$l_1 F_1 = l_2 F_2 \qquad (2)$$

З (2) отримуємо

$$F_2 = F_1 \frac{l_1}{l_2}.$$

Підставляємо це в (1):

$$mg = F_1\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) = F_1 \frac{l_1 + l_2}{l_2},$$

а оскільки $l_1 + l_2 = l$, то

$$mg = F_1 \frac{l}{l_2},$$

звідки

$$F_1 = \frac{mgl_2}{l}. \qquad (3)$$

Аналогічно,

$$F_2 = \frac{mgl_1}{l}. \tag{4}$$

Для сил тертя маємо:

$$F_{\text{ТР}1} = kF_1 = kmg\frac{l_2}{l}, \tag{5}$$

$$F_{\text{ТР}2} = kF_2 = kmg\frac{l_1}{l}. \tag{6}$$

Сили тертя напрямлені протилежно одна одній. Тому сумарна сила тертя

$$F = F_{\text{ТР}2} - F_{\text{ТР}1} = \frac{kmg}{l}(l_1 - l_2). \tag{7}$$

Але (див. рисунок)
$l_1 = l/2 + x$, $l_2 = l/2 - x$, тому $l_1 - l_2 = 2x$. Отже, (7) переходить в

$$F = \frac{kmg}{l}2x.$$

Отже,

$$m\ddot{x} = \frac{k2mg}{l}x,$$

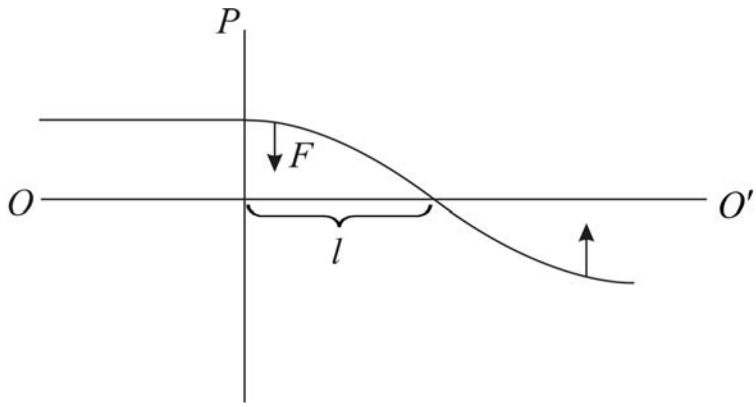
$$\ddot{x} = \frac{2kg}{l}x,$$

$$\omega_0^2 = \frac{2kg}{l}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{2l}{kg}} = 1{,}5\ c.$$

Приклад 5.3.

Є потік частинок маси m, які рухаються з однаковою швидкістю υ паралельно деякій осі OO'. За площиною P, перпендикулярною до цієї осі: $F = -xr$, $x-$ відома стала. Знайти найменшу відстань l від площини P до точки на осі OO', яку будуть перетинати всі частинки.

Розв'язання.



Сила $F = -xr$ – гармонічна сила. Період коливань проекції зміщення будь-якої частинки на площину P є

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{x}}.$$

Найменший час, потрібний для зустрічі частинки з віссю OO' дорівнює чверті періоду, тобто $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{x}}$. За цей час частинка пройде відстань уздовж осі OO':

$$l = \upsilon\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{x}}$$

Приклад 5.4.

Невеличкий брусок починає ковзати по похилій площині, що утворює кут α з горизонтом. Коефіцієнт тертя залежить від пройденого шляху s за законом $k = as$, де $a-$ стала. Знайти час руху бруска до зупинки.

Розв'язання.

На брусок діють дві сили: 1) скочуюча $mg\sin\alpha$, 2) тертя $kmg\cos\alpha$ або, за умовою задачі, $asmg\cos\alpha$.

Рівняння руху бруска в лабораторній (інерціальній) системі відліку:

$$m\omega = mg\sin\alpha - asmg\cos\alpha \qquad (1)$$

Коли б не було тертя, то брусок скачувався б з прискоренням

$$\omega_0 = g\sin\alpha .$$

Тепер перепишемо (1) так:

$$m\omega = m\omega_0 - asmg\cos\alpha ,$$

або

$$m(\omega - \omega_0) = -asmg\cos\alpha. \qquad (2)$$

Очевидно, що $\omega - \omega_0 = \omega_{відн} -$ прискорення бруска в системі відліку, яка рухалась разом з бруском у відсутності сили тертя. В цій системі єдиною силою залишається тепер сила тертя. А оскільки вона пропорціональна $-s$, то в такій системі брусок буде гармонічно коливатися з частотою

$$\omega_{відн} = \sqrt{ag\cos\alpha} ,$$

або з періодом

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{ag\cos\alpha}} .$$

Час від початку руху до зупинки дорівнюватиме найменшому проміжкові часу між двома станами спокою, тобто половині періоду:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{ag\cos\alpha}} .$$

Приклад 5.5.

Уявімо собі шахту, що пронизує Землю вздовж її осі обертання. Вважаючи Землю однорідною кулею та нехтуючи опором повітря, знайти:

а) рівняння руху тіла, що впало в шахту;

б) час, потрібний для того, щоб тіло досягло протилежного кінця шахти;

в) швидкість тіла в центрі Землі.

Розв'язання.

а) Нехай $x-$ координата тіла відносно центра Землі, $m-$ маса тіла, $R-$ радіус Землі. На тіло діє сила з боку тієї частини Землі (кулі), радіус якої дорівнює x. Маса цієї кулі $M(x)=\rho\frac{4}{3}\pi x^3$, де $\rho-$ густина Землі.

Якщо $M_з$ – маса Землі, то $\rho=\frac{M_з}{(4/3)\pi R^3}$, а тому

$$M(x)=M_з\frac{x^3}{R_з^3}. \qquad (1)$$

За другим законом Ньютона,

$$m\ddot{x}=-\frac{\gamma M(x)m}{x^2}, \qquad (2),$$

де знак мінус означає, що сила $\frac{\gamma M(x)m}{x^3}$ напрямлена до центру Землі.

Узявши до уваги (1), останнє рівняння перепишемо так:

$$\ddot{x}+\frac{\gamma M_з x}{R_з^3}=0.$$

Оскільки нормальне прискорення вільного падіння

$$g=\frac{\gamma M_з}{R_з^2},$$

то рівняння руху тіла набере вигляду

$$\ddot{x}+\frac{g}{R_з}x=0. \qquad (3)$$

б) Одержано диференційне рівняння гармонічного коливання, частота коливань якого $\omega_0=\sqrt{g/R_з}$, а період

$$T=2\pi\sqrt{R_з/g}. \qquad (4)$$

Тому час проходження між двома крайніми точками шахти буде

$$t=\frac{T}{2}=\pi\sqrt{\frac{R_з}{g}}=42\,\text{хв}.$$

в) Запишемо для тіла рівняння гармонійного коливання в звичайній формі:

$$x=R\cos\frac{2\pi}{T}t$$

(амплітуда зміщення дорівнює радіусу Землі $R_з$). Величину швидкості знайдемо, взявши похідну:

$$\upsilon = -\frac{2\pi R}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t.$$

Оскільки час руху тіла до центра дорівнює $T/4$, то з останньої рівності дістанемо

$$\upsilon = |\dot{x}| = \frac{2\pi R_з}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}\right)$$

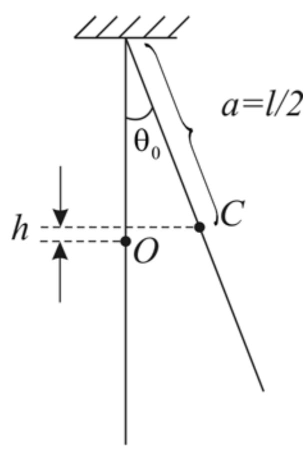
і, згідно з (4),

$$\upsilon = \sqrt{gR_з} = 7{,}9\,\text{км/год}.$$

Приклад 5.6.

Однорідний стержень маси m і завдовжки l здійснює малі коливання навколо горизонтальної осі, що проходить через його верхній кінець. Знайти середню за період коливання кінетичну енергію стержня, якщо в початковий момент його відхилили від вертикалі на кут θ_0 і надали йому кутову швидкість $\dot{\theta}_0$.

Розв'язання.



Оскільки з умовою коливання малі, то вони є гармонічними. А для гармонічних коливань середня за період кінетична (як і потенціальна) енергія дорівнює половині повній енергії коливання. Повна енергія складається з потенціальної в момент початкового відхилення та кінетичної, наданої стержневі в цей момент. Потенціальна енергія $E_n = mgh$, де $h-$ висота підйому центра мас маятника (стержня) над точкою рівноваги O (див. рис.).

З рисунка видно, що

$$h = a(1-\cos\theta_0) = 2a\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right),$$

а оскільки коливання за умовою малі, то (при малих кутах відхилення) можна синус змінити даним кутом. Так що

$$h = 2a\frac{\theta_0^2}{4} = \frac{a\theta_0^2}{2}.$$

Оскільки стержень однорідний, то $a = l/2$, тому $E_n = mgh = \dfrac{mgl\theta_0^2}{4}$.

Початкова кінетична енергія $E_k = \frac{I\dot{\theta}_0^2}{2}$. Момент інерції стержня відносно його кінця $I = \frac{1}{3}ml^2$, тому кінетична енергія $E_k = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}_0^2$, а повна – $E = \frac{mgl\theta_0^2}{4} + \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}_0^2$.

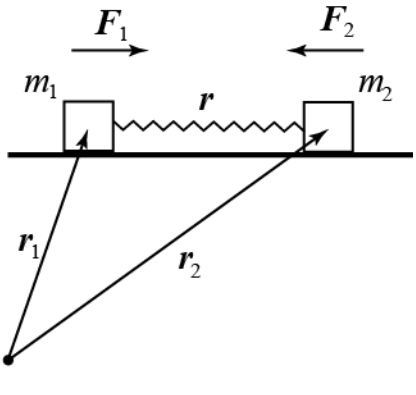
Середня ж кінетична енергія за період коливання:

$$\langle E_k \rangle = \frac{mgl\theta_0^2}{8} + \frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_0^2.$$

Приклад 5.7.

Два кубики з масами m_1 і m_2 з'єднали невагомою пружиною з жорсткістю x і покласти на гладеньку горизонтальну площину. Потім кубики трохи зблизили і одночасно відпустили. Знайти власну частоту системи.

Розв'язання.



За третім законом Ньютона:

$$\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1 \quad (1)$$

За другим законом Ньютона:

$$\boldsymbol{F}_1 = m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1, \quad \boldsymbol{F}_2 = m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_1, \quad (2)$$

Згідно з (1),

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1.$$

Далі,

$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}$ (див. рисунок)

$\ddot{\boldsymbol{r}}_2 - \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \ddot{\boldsymbol{r}}$, або (згідно з (2) і (1))

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_2 - \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \frac{\boldsymbol{F}_2}{m_2} - \frac{\boldsymbol{F}_1}{m_1} = \boldsymbol{F}_2\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right).$$

Але $\boldsymbol{F}_2 = -x\boldsymbol{r}$, тому

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -x\boldsymbol{r}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right). \quad (3)$$

Позначимо $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$.

μ називається зведеною масою двох взаємодіючих частинок. Тепер (3) запишемо у вигляді:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{x}{\mu}\boldsymbol{r} = 0. \quad (4)$$

Остання формула є рівнянням гармонічного осцилятора. З (4) видно, що

$$\frac{x}{\mu} = \omega_0^2 \text{ або } \omega_0 = \sqrt{\frac{x}{\mu}}.$$

Приклад 5.8.

Точка здійснює згасаючі гармонічні коливання з частотою $\omega = 25\,\text{c}^{-1}$. Знайти коефіцієнт згасання β, якщо в початковий момент швидкість точки дорівнює нулю, а її зміщення з положення рівноваги в $\eta = 1{,}020$ рази менше від амплітуди?

Розв'язання.

Запишемо рівняння згасаючого коливання:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \qquad (1)$$

За початковою умовою,

$$|x(0)| = A_0/\eta = A_0 |\cos\alpha|. \qquad (2)$$

Диференціюємо (1) по t. Дістаємо швидкість частинки:

$$v(t) = -\beta x(t) - \omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha). \qquad (3)$$

За умовою $v(0) = 0$, отже з (3) виходить:

$$0 = -\beta x(0) - \omega A_0 \sin\alpha,$$

звідки, оскільки $\beta > 0$,

$$\beta = \frac{\omega A_0 |\sin\alpha|}{x(0)}$$

або, враховуючи (2),

$$\beta = \omega\sqrt{\eta^2 - 1} = 5\,\text{c}^{-1}.$$

Приклад 5.9.

Математичний маятник здійснює коливання в середовищі, для якого логарифмічний декремент згасання $\lambda_0 = 1{,}50$. Яким буде значення λ, якщо опір середовища збільшити в $n = 2{,}00$ рази? У скільки разів слід збільшити опір середовища, щоб коливання стали неможливими?

Розв'язання.

Як відомо з теорії згасаючих коливань, логарифмічний декремент може бути виражений формулою:

$$\lambda = \beta T, \qquad (1)$$

де $\beta -$ коефіцієнт згасання, $T -$ період коливання, який визначається формулою $\beta = \frac{r}{2m}$, де $r -$ опір середовища. Отже можемо записати:

$$\lambda = \frac{r}{2m} T.$$

Відношення декрементів згасання того самого маятника в двох середовищах 2 і 1 таке:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{r_2}{r_1}\frac{T_2}{T_1}. \qquad (2)$$

Позначивши $r_2/r_1 = n$, запишемо:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = n\frac{T_2}{T_1}. \qquad (3)$$

З теорії згасаючого маятника відомо, що залежність його циклічної частоти ω від β виражається формулою:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2, \qquad (4)$$

де ω_0 – частота незгасаючих вільних коливань (власна частота).

Узявши до уваги (1), останню рівність перепишемо так:

$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{T^2}$, або, оскільки $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\frac{4\pi^2}{T^2} = \omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{T^2}$, нарешті,

$$\frac{1}{T^2}\left(4\pi^2 + \lambda^2\right) = \omega_0^2. \qquad (5)$$

Таким чином, ми бачимо, що вираз $\frac{1}{T^2}\left(4\pi^2 + \lambda^2\right)$ є інваріантною величиною, тобто такою, що не залежить від середовища. Тепер можемо записати:

$$\frac{1}{T_1^2}\left(4\pi^2 + \lambda_1^2\right) = \frac{1}{T_2^2}\left(4\pi^2 + \lambda_2^2\right),$$

звідки

$$\frac{T_2^1}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 + \lambda_2^2}{4\pi^2 + \lambda_1^2},$$

або, зважаючи на (2),

$$\frac{4\pi^2 + \lambda_2^2}{4\pi^2 + \lambda_1^2} = \frac{1}{n^2}\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2},$$

звідки неважко дістати:

а) $\lambda_2 = \dfrac{n\lambda_1}{\sqrt{1 - \lambda_1^2\left(n^2 - 1\right)/4\pi^2}} = 3,3$.

б) Коливання стануть неможливими при $\lambda_2 = \infty$, або коли знаменник рівний нулю:

$$1 - \lambda_1^2\left(n^2 - 1\right)/4\pi^2 = 0,$$

звідки можна знайти

$$n = \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\right)^2} = 4,3\,.$$

Приклад 5.10.

До невагомої пружинки підвісили тягарець, і вона розтягнулася на $\Delta x = 9,8\,\text{см}$. З яким періодом буде коливатися тягарець, якщо йому дати невеликий поштовх у вертикальному напрямі? Логарифмічний декремент згасання $\lambda = 3,1$.

Розв'язання.

Як і в попередній задачі, скористаємося з формули

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2,$$

або

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \omega_0^2 - \beta^2. \qquad (1)$$

З теорії знаємо, що $\beta = \dfrac{\lambda}{T}$. Крім того, знаємо, що $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, а $k\Delta x = mg$. Тому $\dfrac{k}{m} = \dfrac{g}{\Delta x}$. Отже, $\omega_0^2 = \dfrac{g}{\Delta x}$. Тому можемо переписати:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{\Delta x} - \frac{\lambda^2}{T^2}, \text{ або } \frac{1}{T^2}\left(4\pi^2 + \lambda^2\right) = \frac{g}{\Delta x},$$

звідки

$$T = \sqrt{\frac{\Delta x}{g}\left(4\pi^2 + \lambda^2\right)} = 0,70\,\text{с}.$$

Приклад 5.11.

Знайти максимальне значення амплітуди зміщення осцилятора, який здійснює усталені коливання під дією змушуючої гармонічної сили з амплітудою $F_0 = 2,50\,\text{Н}$, якщо частота згасаючих коливань даного осцилятора $\omega = 100\,\text{с}^{-1}$ і коефіцієнт опору (коефіцієнт пропорціональності між силою опору і швидкістю) $r = 0,50\,кг/с$.

Розв'язання.

Запишемо формулу для амплітуди зміщення:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 4\beta^2\omega^2}}, \qquad (1)$$

де $m -$ маса осцилюючої частинки, $\omega_0 -$ власна частота, $\beta -$ коефіцієнт згасання. Згадаємо, що

$$\beta = \frac{r}{2m}.$$

Максимальне значення амплітуда досягає, коли виконується умова $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$, або, оскільки в наших задачах ми вважаємо коефіцієнт згасання малим: $\beta \ll \omega_0$, то умовою резонансу буде $\omega = \omega_0$ і формула (1) спроститься:

$$A_{\max} = \frac{F_0}{m2\beta\omega} = \frac{F_0}{m2\frac{r}{2m}\omega} = \frac{F_0}{r\omega} = 5{,}0\,\text{см}.$$

Приклад 5.12.

Знайти добротність осцилятора, в якого:

а) амплітуда зміщення зменшується в $\eta = 2{,}0$ рази через кожних $n = 110$ періодів коливань;

б) власна частота $\omega_0 = 100\,\text{c}^{-1}$ і час релаксації $\tau = 60\,\text{c}$.

Розв'язання.

а) За визначенням декремент згасання

$$\lambda = \ln\frac{A_n}{A_{k+1}}.$$

Запишемо:

$$\ln\frac{A_0}{A_1} = \lambda,\ \ln\frac{A_1}{A_2} = \lambda,\ \ldots,\ \ln\frac{A_n}{A_{k+1}} = \lambda,$$

$$\sum_{k=0}^{n}\ln\frac{A_n}{A_{k+1}} = n\lambda,\ \text{або}\ \ln\frac{A_n}{A_0} = n\lambda,$$

звідки

$$\lambda = \frac{1}{n}\ln\frac{A_n}{A_0} = \frac{1}{n}\ln\eta,$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{n}{\ln\eta} = \frac{110}{\ln 2} = 500.$$

б) Наступна послідовність кроків, очевидно, зрозуміла без пояснень:

$$\lambda = \beta T = \beta\frac{2\pi}{\omega} = \beta\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta^2} - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2\tau^2 - 1}},$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2\tau^2 - 1} = 3{,}0\cdot 10^3.$$

* * *

Задачі для самостійного розв'язання

№ 5.1. Амплітуда гармонічних коливань точки $A = 5$ см, амплітуда швидкості $v_{max} = 7{,}85$ см$/c$. Обчислити циклічну частоту ω і максимальне прискорення a_{max} .

Відповідь: $\omega = 1{,}57\ c^{-1}$, $a_{max} = 12{,}3$ см/с^2.

№ 5.2. Точка здійснює коливання за законом $x = 10\sin 3t$ (см). У деякий момент часу прискорення становить $a_1 = 45$ см/с^2. Визначити абсолютне значення швидкості v_1 точки в цей момент часу.

Відповідь: $v = \sqrt{A^2\omega^2 - \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2} = 26$ см/с.

№ 5.3. Частинка здійснює гармонічні коливання уздовж осі x навколо положення рівноваги $x = 0$. Частота коливань $\omega = 1{,}57\ c^{-1}$. В деякий момент координата частинки $x_0 = 25{,}0$ см і її швидкість $v_{x0} = 100$ см$/c$. Знайти координату x та швидкість v_x частинки через $t = 2{,}40$ с після цього моменту.

Відповідь: $x = a\cos(\omega t + \alpha) = -29$ см, $v_x = -81$ см/с, де $a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x0}}{\omega}\right)^2}$, $\alpha = \mathrm{arctg}\left(-\frac{v_{x0}}{\omega x_0}\right)$.

№ 5.4. Точка здійснює гармонічні коливання вздовж деякої прямої з періодом $T = 0{,}60$ с та амплітудою $a = 10{,}0$ см. Знайти середню швидкість точки за час, на протязі якого вона проходить шлях $a/2$:

а) з крайнього положення;

б) з положення рівноваги.

Відповідь: а) $\langle v\rangle = 3a/T = 0{,}50$ м/с, б) $\langle v\rangle = 6a/T = 1{,}0$ м/с.

№ 5.5. Знайти графічно амплітуду *A* коливань, які виникають при додаванні наступних коливань одного напрямку: $x_1 = 3{,}0\cos(\omega t + \pi/3)$, $x_2 = 8{,}0\sin(\omega t + \pi/6)$.

Відповідь: $A = 7$.

№ 5.6. Матеріальна точка масою $m = 50$ г здійснює коливання за законом $x = 10\sin(2t + \pi/3)$ см. Визначити максимальні значення сили F_{max}, що повертає точку в положення рівноваги, і кінетичної енергії E_k.

Відповідь: $F_{max} = 0{,}02$ Н, $E_k = 1$ мДж.

№ 5.7. Частинка масою m знаходиться в одновимірному силовому полі, де її потенціальна енергія залежить від координати x як$U(x) = a/x^2 - b/x$, де a та b – додатні сталі. Знайти період малих коливань частинки навколо положення рівноваги.

Відповідь: $T = 4\pi a\sqrt{2ma}/b^2$.

№ 5.8. Нерухоме тіло, підвішене на пружині, збільшує її довжину на $\Delta l = 70$ мм. Вважаючи масу пружини нехтовно малою, знайти період малих вертикальних коливань тіла.

Відповідь: $T = 2\pi\sqrt{\Delta l/g} = 0{,}52$ с.

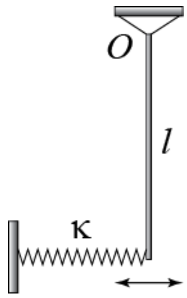
№ 5.9. Знайти період малих коливань кульки, підвішеній на нерозтяжній нитці довжиною $l = 20$ см, якщо вона знаходиться в рідині, густина якої в $\eta = 3{,}0$ рази менша за густину кульки. Опір рідини нехтовно малий.

Відповідь: $T = 2\pi\sqrt{\eta l/g(\eta - 1)} = 1{,}1$ с.

№ 5.10. На гладенький горизонтальний стержень AB наділи невеличку муфточку маси $m = 50$ г, яка з'єднана з кінцем A стержня легкою пружиною жорсткості $\kappa = 50$ Н/м. Стержень обертають зі сталою кутовою швидкістю $\omega_0 = 10{,}0$ рад/с навколо вертикальної осі, що проходить через його кінець A. Знайти частоту ω малих коливань муфточки.

Відповідь: $\omega = \sqrt{\kappa/m - \omega_0^2} = 30$ с$^{-1}$.

№ 5.11. Знайти кругову частоту ω малих коливань тонкого однорідного стержня маси m і довжини l навколо горизонтальної осі, що проходить через точку O (див. рис.). Жорсткість пружини κ, її маса нехтовно мала. В положенні рівноваги стержень вертикальний.



Відповідь: $\omega = \sqrt{3g/2l + 3\kappa/m}$.

№ 5.12. Тіло, маса якого $m = 1$ кг, здійснює коливання під дією квазипружної сили $(\kappa = 10$ Н/м$)$. Визначити коефіцієнт опору r в'язкого середовища, якщо період згасаючих коливань $T = 2{,}1$ с.

Відповідь: $r = 2{,}1$ кг/с.

№ 5.13. Амплітуда коливань маятника завдовжки $l = 1$ м за час $t = 10$ хв зменшилась у 2 рази. Визначити логарифмічний декремент згасання λ системи.

Відповідь: $\lambda = 8$.

№ 5.14. Амплітуда згасаючих коливань осцилятора за час $t = 6{,}03$ с зменшилась у $\eta = 8$ разів. Як за цей час зменшилась механічна енергія осцилятора? Чому дорівнює коефіцієнт згасання β?

Відповідь: у 64 рази; $\beta = 0{,}3$.

№ 5.15. На осцилятор маси m без згасання з власною частотою ω_0 діє змушуюча сила за законом $F_0\cos\omega t$. За яких початкових умов $(x_0, \dot{x}_0)$ з самого початку будуть здійснюватися тільки вимушені коливання? Знайти закон $x(t)$ в цьому випадку.

Відповідь: $x_0 = \frac{F_0/m}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$, $\dot{x}_0 = 0$. Тоді $x = \frac{F_0/m}{|\omega_0^2 - \omega^2|}\cos\omega t$.

№ 5.16. Оцінити, за який час встановляться коливання в системі з добротністю $Q = 1{,}0 \cdot 10^6$ і власною частотою коливань $\omega_0 = 5000\ \text{с}^{-1}$ при резонансному впливі на цю систему змушуючої гармонічної сили.

Відповідь: $\tau \approx 2Q/\omega_0 = 4 \cdot 10^2 \text{с}$.

№ 5.17. Знайти різницю фаз φ між зміщенням та змушуючою силою при резонансі зміщення, якщо власна частота коливань $\omega_0 = 50\ \text{с}^{-1}$ та коефіцієнт згасання $\beta = 5{,}2\ \text{с}^{-1}$.

Відповідь: $\text{tg}\varphi = \sqrt{(\omega_0/\beta)^2 - 2}$, $\varphi = 84°$.

№ 5.18. Осцилятор маси m рухається за законом $x = a\sin\omega t$ під дією змушуючої сили $F_x = F_0\cos\omega t$. Знайти коефіцієнт згасання β осцилятора.

Відповідь: $\beta = F_0/2ma\omega$.

6. Релятивістська механіка

- Скорочення довжини Лоренца і уповільнення ходу годинника, що рухається:

$$l = l_0\sqrt{1-(v/c)^2}, \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

де $l_0 -$ власна довжина тіла, $\Delta t_0 -$ власний час годинника, що рухається.

- Перетворення Лоренца:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}.$$

- Інтервал s_{12} −інваріантна величина:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = inv,$$

де $t_{12} -$ проміжок часу між подіями 1 і 2, $l_{12} -$ відстань між точками, де виникли ці події.

- Перетворення швидкості:

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, v_y' = \frac{v_y\sqrt{1-(V/c)^2}}{1 - v_x V/c^2}.$$

- Релятивістський імпульс:

$$\boldsymbol{p} = m_r \boldsymbol{v} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

де $m_r = \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}} -$ релятивістська маса, m −маса (спокою).

- Релятивістське рівняння динаміки частинки:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F},$$

де $\boldsymbol{p}$ −релятивістський імпульс частинки.

- Повна і кінетична енергія релятивістської частинки:

$$E = m_r c^2 = mc^2 + T, \qquad T = (m_r - m)c^2.$$

- Зв'язок між енергією та імпульсом релятивістської частинки:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4, \qquad p^2c^2 = T(T + 2mc^2)$$

- При розгляданні зіткнень частинок корисно використовувати інваріантну величину:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4,$$

де $E, p -$ повна енергія і імпульс системи до зіткнення, $m -$маса утвореної частинки (або системи).

* * *

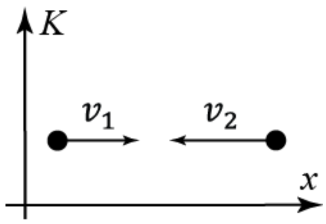
Приклад 6.1.

Дві частинки рухаються назустріч одна одній зі швидкостями $v_1 = 0{,}50\ c$ і $v_2 = 0{,}75\ c$ відносно лабораторної системи відліку. Знайти:

а) швидкість, з якою зменшується відстань між частинками в лабораторній системі відліку;

б) відносну швидкість частинок.

Розв'язання.



а) В лабораторній системі відліку (К-системі) за час t переміщення першої та другої частинок буде відповідно

$$S_1 = S_{01} + v_1 t \quad \text{і} \quad S_2 = S_{02} - v_2 t,$$

де S_{01} і $S_{02} -$ відстані між відповідними частинками та початком координат в момент часу $\mathrm{t} = 0$.

Відстань між частинками

$$S_{12} = S_2 - S_1 = S_{02} - S_{01} - (v_2 + v_1)t.$$

Швидкість зміни цієї відстані:

$$\left|\frac{dS_{12}}{dt}\right| = v_2 + v_1 = 0{,}50\ c + 0{,}75\ c = 1{,}25\ c.$$

б) З першою частинкою зв'яжемо рухому систему відліку K'. Швидкість цієї системи $V = v_1$.

Застосуємо формулу додавання швидкостей в спеціальній теорії відносності:

$$v = \frac{V + v'}{1 + \frac{v'V}{c^2}} \tag{1}$$

В даній задачі $V = v_1, v' = -v_2$.

Підставимо ці рівності в (1):

$$-v_2 = \frac{v_1 - v_2{}'}{1 - \frac{v_2{}' v_1}{c^2}}$$

Звідси дістаємо:

$$v_2{}' = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}} = \frac{0{,}50\ c + 0{,}75\ c}{1 + \frac{0{,}50 * 0{,}75\ c^2}{c^2}} = 0{,}91c.$$

Приклад 6.2.

Стержень рухається в поздовжньому напрямі зі сталою швидкістю v відносно інерціальної *K*–системі відліку. За якого значення v довжина стержня в цій системі відліку буде на $\eta = 0{,}50$ % меншою за його власну довжину?

Розв'язання.

За умовою,

$$l_0 - l = \eta l_0,$$

отже,

$$l = (1-\eta)l_0.$$

Але

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

тому

$$(1-\eta)l_0 = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2},$$
$$(1-\eta)^2 = 1 - v^2/c^2,$$
$$v^2/c^2 = 1 - (1-\eta)^2 = \eta(2-\eta),$$
$$v = c\sqrt{\eta(2-\eta)} \approx 0{,}1 \text{ с}.$$

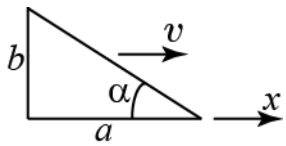
Приклад 6.3.

Є прямокутний трикутник, у якого катет $a = 5{,}00$ м і кут між цим катетом і гіпотенузою $\alpha = 30°$. Знайти в K'–системі відліку, що рухається відносно цього трикутника зі швидкістю $v = 0{,}866$ с вздовж катета a:

а) відповідне значення кута α;

б) довжину l' гіпотенузи та її відношення до власної довжини.

Розв'язання.



а) У K'–системі $b' = b$, тому

$$a'\text{tg}\alpha' = a\, tg\alpha,$$

але

$$a' = a\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

отже,

$$a\sqrt{1 - v^2/c^2}\,\text{tg}\alpha' = a\,\text{tg}\alpha,$$

тому

$$\text{tg}\alpha' = \frac{\text{tg}\alpha}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 49°.$$

б)

$$\frac{a'}{l'} = \cos\alpha',$$

$$l' = \frac{a'}{\cos\alpha'} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{\cos\alpha'},$$

але

$$\frac{1}{\cos\alpha'} = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha'} = \sqrt{1+\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1-v^2/c^2}},$$

тож

$$l' = a\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1+\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1-v^2/c^2}} = \sqrt{1-v^2/c^2+\mathrm{tg}^2\alpha} = 3{,}8\text{ м.}$$

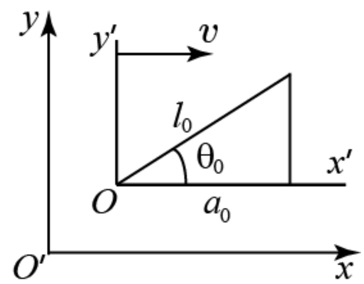
$$l = \frac{a}{\cos\alpha},$$

$$\frac{l'}{l} = \cos\alpha\cdot\sqrt{1-v^2/c^2+\mathrm{tg}^2\alpha} = 0{,}66.$$

Приклад 6.4.

Знайти власну довжину l_0 стержня, якщо в лабораторній системі відліку його швидкість $v = c/2$, довжина $l = 1{,}00$ м і кут між ним і напрямом руху $\theta = 45°$.

Розв'язання.



На рисунку l_0 – власна довжина стержня, θ_0 – кут нахилу стержня в системі, в якій він нерухомий. Очевидно, $a = a_0\sqrt{1-v^2/c^2}$ або

$$l\cos\theta = l_0\cos\theta_0\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Крім того,

$$l\sin\theta = l_0\sin\theta_0.$$

Отже,

$$\sin\theta_0 = \frac{l}{l_0}\sin\theta,$$

$$\cos\theta_0 = \sqrt{1-\frac{l^2}{l_0^2}\sin^2\theta},$$

$$l\cos\theta = l_0\cos\theta_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{l^2}{l_0^2}\sin^2\theta} = \sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(l_0^2-l^2\sin^2\theta)},$$

$$l^2\cos^2\theta = (1-v^2/c^2)l_0^2 - (1-v^2/c^2)l^2\sin^2\theta,$$

$$l_0^2 = l^2\left(\sin^2\theta+\frac{\cos^2\theta}{1-v^2/c^2}\right) = l^2\frac{\sin^2\theta-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta+\cos^2\theta}{1-v^2/c^2} =$$

$$= \frac{l^2}{1-v^2/c^2}\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right),$$

$$l_0 = l\sqrt{\frac{1-\dfrac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}{1-v^2/c^2}}.$$

Приклад 6.5.

Зі швидкістю v має летіти частинка відносно системи відліку K для того, щоб проміжок власного часу $\Delta\tau$ був у 10 разів меншим за проміжок часу Δt, що відлічений за годинником системи *K*?

Розв'язання.

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

За умовою задачі,

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{1}{10},$$

тому

$$\frac{1}{10} = \sqrt{1-v^2/c^2},$$
$$1 = 100 - 100\,v^2/c^2,$$
$$v^2/c^2 = 0{,}99,$$
$$v = c\sqrt{0{,}99} \approx 0{,}995\,c.$$

Приклад 6.6.

Імпульс тіла масою m дорівнює $p = mc$. Визначити кінетичну енергію тіла.

Розв'язання.

Скористаємось формулою

$$p^2c^2 = T(T + 2mc^2).$$

Підставимо в неї дане за умовою $p = mc$:

$$m^2c^4 = T^2 + 2mc^2T,$$
$$T^2 + 2mc^2T - m^2c^4 = 0,$$
$$T = -mc^2 \pm \sqrt{m^2c^4 + m^2c^4}.$$

Оскільки $T > 0$, то

$$T = -mc^2 + \sqrt{2m^2c^4} = \left(\sqrt{2}-1\right)mc^2.$$

Приклад 6.7.

За якої швидкості частинки v її кінетична енергія дорівнює енергії спокою?

Розв'язання.

За умовою,

$$mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)=mc^2,$$

звідки

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=2,$$

$$\sqrt{1-v^2/c^2}=\frac{1}{2},$$

$$1-v^2/c^2=\frac{1}{4},$$

$$\frac{v^2}{c^2}=\frac{3}{4},$$

$$v=c\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 0{,}866\,c.$$

Приклад 6.8.

Частинка масою m починає рухатись під дією сталої сили F. Знайти залежність від часу імпульсу $\boldsymbol{p}$ і швидкості $\boldsymbol{v}$ частинки.

Розв'язання.

Оскільки

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F},$$

то

$$\mathbf{p}=\int_0^{\mathrm{t}}\mathbf{F}\mathrm{dt}=\mathbf{F}\mathrm{t}.$$

Далі,

$$\boldsymbol{p}=\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

тому

$$\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{p}}{m}\sqrt{1-v^2/c^2}=\frac{\boldsymbol{F}t}{m}\sqrt{1-v^2/c^2},$$

$$v^2=\left(\frac{Ft}{m}\right)^2-\left(\frac{Ft}{m}\right)^2\frac{v^2}{c^2},$$

$$v^2\left(1+\frac{F^2t^2}{m^2c^2}\right)=\frac{F^2t^2}{m^2},$$

$$v^2\,\frac{m^2c^2+F^2t^2}{m^2c^2}=\frac{F^2t^2}{m^2},$$

$$v=\frac{Ftc}{\sqrt{m^2c^2+F^2t^2}},$$

$$v = \frac{Ftc}{\sqrt{m^2c^2 + F^2}}.$$

* * *

Задачі для самостійного розв'язання

№ 6.1. Яку повздовжню швидкість v потрібно надати стержню для того, щоб його довжина стала рівною половині довжини, яку він має в стані спокою?

Відповідь: $v = 0{,}866c.$

№ 6.2. В К-системі відліку мюон, який рухається зі швидкістю $v = 0{,}990c$, пролетів від місця свого народження до точки розпаду відстань $l = 3{,}0$ км. Визначити:

а) власний час життя цього мюона;

б) відстань, яку пролетів мюон в К-системі відліку з «його точки зору».

Відповідь: а) $\Delta t_0 = (l/v)\sqrt{1-(v/c)^2} = 1{,}4$ мкс,

б) $l' = l\sqrt{1-(v/c)^2} = 0{,}42$ км.

№ 6.3. Дві частики, що рухались в лабораторній системі відліку по одній прямій з однаковою швидкістю $v = \frac{3}{4}c$, попали в нерухому мішень з інтервалом часу $\Delta t = 50$ нс. Знайти власну відстань між частинками до попадання в мішень.

Відповідь: $l_0 = v\Delta t/\sqrt{1-(v/c)^2} = 17$ м.

№ 6.4. Дві частинки рухаються назустріч одна одній зі швидкостями $v_1 = 0{,}50c$ $і$ $v_2 = 0{,}75c$ по відношенню до лабораторної системи відліку. Знайти:

а) швидкість, з якою зменшується відстань між частинками в лабораторній системі відліку;

б) відносну швидкість частинок.

Відповідь: а) $v = v_1 + v_2 = 1{,}25c,$

б)$v = (v_1 + v_2)/(1 + v_1 v_2/c^2) = 0{,}91c.$

№ 6.5. Протон рухається з імпульсом $p = 10{,}0$ ГеВ/c, де c – швидкість світла. На скільки відсотків відрізняється швидкість цього протону від швидкості світла?

Відповідь: $(c - v)/c = 1 - [1 + (mc/p)^2]^{-1/2} = 0{,}44$ %.

№ 6.6. Знайти швидкість, при якій релятивістський імпульс частинки в $\eta = 2$ рази перевищує її ньютонівський імпульс.

Відповідь: $v = (c/\eta)\sqrt{\eta^2 - 1} = c\sqrt{3}/2$.

№ 6.7. Яку роботу потрібно здійснити, щоб збільшити швидкість частинки з масою m від 0,60c до 0,80c? Порівняти отриманий результат зі значенням, обрахованим по нерелятивістській формулі.

Відповідь: $A = 0{,}42mc^2$ замість 0,14 mc^2.

№ 6.8. При яких значеннях відношення кінетичної енергії частинки до її енергії спокою відносна похибка при розрахунку її швидкості по нерелятивістській формулі не перевищує $\eta = 0{,}010$?

Відповідь: при $\eta \ll 1$ відношення $T/\,mc^2 \lesssim 4\eta/3 \approx 0{,}013$.

№ 6.9. Знайти швидкість частинки, кінетична енергія якої $T = 500$ МеВ і імпульс $p = 865$ МеВ/c, де c – швидкість світла.

Відповідь: $v = 2pT/(p^2 + T^2/c^2) = 0{,}87c$.

№ 6.10. Яку роботу A потрібно здійснити, щоб надати електрону швидкість, рівну: а) 0,5с, б) 0,999с? Енергія спокою електрона $E_0 = 0{,}82 \cdot 10^{-13}$ Дж (0,51 МеВ).

Відповідь: $A = E_0(1/\sqrt{1-(v/c)^2} - 1)$;

а) $A = 0{,}155E_0 = 1{,}3 \cdot 10^{-14}$Дж (0,08 МеВ),

б) $A = 21E_0 = 1{,}8 \cdot 10^{-12}$Дж (11 МеВ).

№ 6.11. Над протоном, що спочатку покоївся,силами електричного поля була здійснена робота $A = 1{,}00 \cdot 10^{-10}$ Дж. Знайти імпульс p і швидкість v, які набув в результаті протон.

Відповідь: $p = (1/c)\sqrt{A(A + 2E_0)} = 0{,}67 \cdot 10^{-18}$ кг·м/с,

$$v = c\sqrt{(A^2 + 2AE_0)/(A + E_0)^2} = 0{,}80c.$$

№ 6.12. Над частинкою масою $m = 0{,}911 \cdot 10^{-39}$ кг, що рухається початково зі швидкістю $v_1 = 0{,}100\,c$, була здійснена робота $A = 8{,}24 \cdot 10^{-14}$ Дж. Як змінилась в результаті цього швидкість, імпульс і кінетична енергія частинки (знайти $\Delta v, \Delta p, \Delta T$)?

Відповідь: $\Delta v = c\sqrt{1 - 1/\alpha^2} - v_1 = 0{,}77c$,

$$\Delta p = mc(\sqrt{\alpha^2 - 1} - \beta_1/\sqrt{1 - \beta_1^2}) = 4{,}5 \cdot 10^{-22}\ \text{кг} \cdot \text{м/с},$$

$$\Delta T = A = 8{,}24 \cdot 10^{-14}\ \text{Дж}, (\alpha = 1/\sqrt{1 - \beta_1^2} + \text{A/m}c^2, \beta_1 = v_1/\text{c}).$$