МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА

НАУКОВО-НАВЧАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ

Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр

«Математичне моделювання різних пакувань ТВЕЛів складного перерізу в паливних касетах»

Виконал: студент 2 курсу, групи НФ-64
Дудінов Т.Б.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма:
Прикладна фізика енергетичних систем
Керівник: професор Максименко-Шейко К.В.

Рецензент:

Харків – 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра інформаційних технологій у фізико-енергетичних системах
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магістр
Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Руслан СУХОВ
підпис
"____"_____2022 року

ЗАВДАННЯ

на кваліфікаційну роботу магістра студентові

Дудінову Тимуру Батировичу

1. Тема роботи «Математичне моделювання різних пакувань ТВЕЛів складного перерізу в паливних касетах», керівник роботи проф. Максименко-Шейко Кирило Володимирович,

затверджені наказом по університету від 21 грудня 2021 № 0210 – 05/2288.

2. Строк подання студентом роботи __ травня 2022 р.

3. Перелік питань, які потрібно розглянути:

4.План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Ознайомлення з конструктивними засобами для моделювання тривимірних об'єктів. Ознайомлення з базовими поняттями теорії R-функцій.
2	Ознайомлення з конструктивними засобами теорії R-функцій стосовно побудови симетричних функцій для симетричних геометричних об’єктів.
3	Ознайомлення з різними видами упаковок ТВЕЛів. Побудова рівнянь перерізів касет з різними упаковками ТВЕЛів.
4	Побудова тривимірних рівнянь ТВЕЛів з гвинтовою симетрією. Ознайомлення з роботою та застосування програми RFPreview.
5	Визначення та формулювання висновків дипломної роботи.

5. Дата видачі завдання « » _____ 2022 р.

Студент _____ Тимур ДУДІНОВ
підпис

Керівник роботи _____ Кирило МАКСИМЕНКО-ШЕЙКО
підпис

Реферат

Тимура Дудинова «Математическое моделирование различных упаковок ТВЭЛов сложного сечения в топливных кассетах».
Квалификационная работа магистра по прикладной физике. – Х.: Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2022. – 64 с, 33 рис.

Технологии 3D-печати приобретают все большую популярность благодаря своим качествам: быстрая и точная степень изготовления, вариативность в используемых материалах, возможность моделировать объект любой формы и сложности. Однако для выполнения 3D-печати, необходимо описать проектируемый объект, используя математическую и компьютерные модели.

В работе рассматриваются способы построения трехмерных уравнений многозонных ТВЭЛов, обладающих винтовой симметрией. Для этого были изучены конструктивные методы теории R-функций, применяемые для задания симметричных функций, определяющих симметричные геометрические объекты. С помощью этих методов были исследованы возможности построения нормализованных уравнений ГО, обладающих винтовым, трансляционным и циклическим типами симметрии. Построено и реализовано уравнение, описывающее ТВЭЛ, обладающий винтовой симметрией с использованием программы RFPreview.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: R-ФУНКЦИИ, ТВЭЛ, ВИНТОВАЯ, ТРАНСЛЯЦИОННАЯ, ЦИКЛИЧЕСКАЯ СИММЕТРИИ, RFPreview,

Реферат

Тимур Дудінова «Математичне моделювання різних пакувань ТВЕЛів складного перерізу в паливних касетах».
Кваліфікаційна робота магістра з прикладної фізики. – Х.: Харківській національний університет імені В. Н.Каразіна, 2022. – 64 с, 33 рис

Технології 3D-друку набувають все більшої популярності завдяки своїм якостям: швидкий і точний ступінь виготовлення, варіативність у використовуваних матеріалах, можливість моделювати об'єкт будь-якої форми та складності. Однак для виконання 3D-друку, необхідно описати проектований об'єкт, використовуючи математичні та комп'ютерні моделі.

У роботі розглядаються способи побудови тривимірних рівнянь багатозонніх ТВЕЛів, що мають гвинтову симетрію. Для цього було вивчено конструктивні методи теорії R-функцій, які застосовуються для завдання симетричних функцій, що визначають симетричні геометричні об'єкти. З допомогою цих методів було досліджено можливості побудови нормалізованих рівнянь ГО, які мають гвинтовим, трансляційним і циклічним типами симетрії. Побудовано і реалізовано рівняння, що описує ТВЕЛ, що має гвинтову симетрію.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: R-ФУНКЦІЇ, ТВЕЛ, ВІНТОВА, ТРАНСЛЯЦІЙНА, ЦИКЛІЧНА СИМЕТРІЇ, RFPreview

Abstract

Tymur Dudinov "Mathematical modeling of various packages of fuel rods of complex cross-section in fuel cartridges".
Qualification work of the master in applied physics. - H .: Kharkiv National University named after VNKarazin, 2022. - 64 p, 33 images.

3D printing technologies are becoming increasingly popular due to their qualities: fast and accurate degree of production, variability in the materials used, the ability to model an object of any shape and complexity. However, to perform 3D printing, it is necessary to describe the projected object using mathematical and computer models. However, to perform 3D printing, it is necessary to describe the projected object using mathematical and computer models.

The paper considers methods for constructing three-dimensional equations of multiband fuel rods with helical symmetry. For this purpose, constructive methods of R-function theory used to define symmetric functions defining symmetric geometric objects were studied. With the help of these methods, the possibilities of constructing normalized GO equations with helical, translational, and cyclic types of symmetry were investigated. Also, an equation describing a fuel assembly with helical symmetry in the RFPreview program was constructed and implemented.

KEYWORDS: R-FUNCTIONS, TVEL, HELICAL, TRANSLATIONAL, CYCLIC SYMMETRY, RFPreview,

Зміст

РОЗДІЛ 1 7

Математичне моделювання геометричних об’єктів з використанням *R*-функцій.....7

1.1. Конструктивні методи математичного моделювання геометричних об'єктів. Введення у *R*-функції 7

1.2 Основні досить повні системи *R*-функцій, їх логічні та алгебраїчні властивості.....10

1.3 Предикатне завдання складних геометричних об'єктів 14

1.4 Основна теорема теорії *R*-функцій. Побудова рівнянь меж геометричних об'єктів.....18

Висновки 20

РОЗДІЛ 2 21

Побудова симетричних функцій для симетричних геометричних об'єктів.....21

2.1 Побудова симетричних функцій для симетричних геометричних об'єктів. Типи симетрії.....21

2.2 Симетрія трансляції вздовж прямої 24

2.3 Точкова симетрія циклічного типу. 31

2.4 Моделювання упаковок ТВЕЛів з різними типами симетрії. 41

Висновки 46

РОЗДІЛ 3 47

Аналітична ідентифікация геометричних об’єктів у 3D.....47

3.1. Методи побудови примітивів у 3D. Гвинтова симетрія 47

3.2. Побудова рівнянь ТВЕЛів з гвинтовою симетрією в 3D.....55

ДОДАТОК А 58

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 61

РОЗДІЛ 1

Математичне моделювання геометричних об’єктів з використанням *R*-функцій

1.1. Конструктивні методи математичного моделювання геометричних об'єктів. Введення у *R*-функції.

З аналітичної геометрії відомо, що множина раціональних функцій $M(h_0)$ описується системою $h_0 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, a = const, \forall a \in \boldsymbol{R}\}$.

Введемо тут кілька термінів:

Визначення:

1. Множина ***h-реалізованих функцій*** - це множина суперпозицій системи h.
   Позначення: $M(h)$ [54]
2. Множина алгебраїчних ГО – це множина геометричних об'єктів, які задаються рівняннями: $\omega(x) = 0, \omega(x) \in M(h_0)$

Позначення: $N(h_0)$

Зазначимо, що множина $N(h_0)$, яка відповідає множині $M(h_0)$, визначається завданням базисної системи h_0, так що всі властивості алгебраїчних ГО визначаються властивостями системи h_0.

Варто зауважити, що множина алгебраїчних ГО не відрізняється різноманітністю. Воно не містить таких ГО як прямокутник, двотавр і т.д.

Звичайно ж, існує теоретична можливість апроксимації складних ГО алгебраїчними (за теоремою Вейєрштрасса про наближення безперервних функцій поліномами [1]), але її реалізація є трудомістким та складним процесом. Аналогічно і з теоремою про можливість будь-якої завгодно хорошої апроксимації замкнутих кривих на площині лемніскатами (тобто також алгебраїчними кривими [2]).

У зв'язку з цим, вводиться поняття ***напівалгебраїчної множині*** (**напівалгебраїчного ГО**).

Визначення:

Геометричні об'єкти точки, яких задовольняють скінченним системам рівнянь алгебри та нерівностей, а також об'єднання кінцевого числа таких ГО називаються ***напівалгебраїчними ГО.***

Позначення: $N_{1/2}(h_0)$ [3]

Наприклад, до множині напівалгебраїчних ГО належать квадрат, ламана лінія, усічений конус та інші.

Однак підхід, при якому геометричний об'єкт описується не одним аналітичним рівнянням виду $f(x,y)=0$, а системами рівнянь та нерівностей - важливий недолік.

Так що В.Л.Рвачов зацікавився наступним завданням:

Як описати такі ГО, як напівалгебраїчні, за допомогою одного рівняння, так само як це можна зробити, наприклад, для прямих, кіл, еліпсоїдів та інших ліній та поверхонь?

Вирішення цього завдання почалося з розширення базисної системи

$$h_0 = \{x+y, xy, const\}$$

Ще однією важливою множиною, ширшою ніж множина $M\{h_0\}$, де h_0 - система реалізованих функцій, є множина елементарних функцій $M(h_\varepsilon)$, де

$$h_\varepsilon = \{x \pm y, xy, \frac{x}{y}, const \in (-\infty, \infty), x^n, a^z, log_a x, \sin x, \cos x,$$

$$\tan x, \cot x, arcsin\, x, arccos\, x, arctan\, x, arccotan\, x\}$$

- множина основних елементарних функцій, арифметичних операцій та констант.

Позначення: $N(h_\varepsilon)$ – множина елементарних ГО.

За аналогією з множиною напівалгебраїчних ГО вводиться множина **напівелементарних** ГО $N_{1/2}(h_\varepsilon)$, що поєднує в собі як точкові множини, що задовольняють системам елементарних рівнянь і нерівностей, так і кінцеві об'єднання таких множин [3].

Наприклад, на площині до числа напівелементарних ГО можна віднести об'єкти, які складені з шматків алгебраїчних кривих, а також об'єкти, що отримані з синусоїд, тангенсоїд, логарифмічних і будь-яких інших елементарних кривих.

Зауваження:

В. Л. Рвачов і його учні показали, що *будь-який напівелементарний ГО є елементарним*. [4], [3], [2]

Таким чином: $N_{1/2}(h_\varepsilon) = N(h_\varepsilon)$.

Насправді, множині елементарних функцій також належать функції з «логічним зарядом», тобто R-функції, які і дозволили вирішити зворотну задачу аналітичної геометрії.

Іншими словами, це означає, що символів основних елементарних функцій, арифметичних операцій і констант вистачає для того, щоб описати поверхню настільної лампи або днища корабля, якщо останні можна представити як об'єднання шматків площин, сфер, конусів, циліндрів та інших елементарних поверхонь.

Визначимо R-функцію:

Визначення:

Визначимо $S_2(t) = \begin{cases} 0, \text{при } t < 0 \\ 1, \text{при } t \geq 0 \end{cases}$

Тоді функція $f(x_1, \dots, x_m): E^m \to E$ є **R-функцией**, якщо існує така булева функція $F(X_1, \dots, X_m)$, що:

$$S_2(f(x_1, \dots, x_m)) \equiv F(S_2(x_1), \dots, S_2(x_m))$$

Якщо назвати $S_2(t)$ *бульовим знаком* величини t, то R-функцію можна визначити наступним чином: *функція $f(x_1, \dots, x_m)$ називається R-функцією*, якщо булев знак цієї функції дорівнює бульовій функції булевих знаків аргументів $x_1, \dots, x_m$.

Зауважимо, що у формулі $S_2(f(x_1, \dots, x_m)) \equiv F(S_2(x_1), \dots, S_2(x_m)$ оператор S_2, застосований до функції $f(x_1, \dots, x_m)$, як би "проникає" всередину до її

аргументів, змінюючи при цьому f на F.

Визначення:

Булеві функції, що відповідають R-функціям, називаються *супровідними булевими функціями*.

Визначення:

Багато R-функцій, що мають одну і ту ж супроводжуючу, називаються гілкою множини R-функцій.

Визначення:

Система h називається досить повною системою R-функцій, якщо множина $M(h)$ непусте перетинання з кожною гілкою множини R-функцій.

Теорема 1.1.

Нехай $h = \{\varphi_i\}$ є система R-функцій, а $H = \{\Phi_i\}$ — система відповідних функцій. Тоді, якщо H - повна система булевих функцій, то h — досить повна система R-функцій (R-операцій). [3]

Визначені вище *R*-функції є одним лише окремим випадком з незліченної множини можливих класів *R*-функцій (у загальному випадку—*R*-відображень [3]).

Щоб отримати інші класи необхідно розглядати інші множини (наприклад, функціональні) і розбивати їх на дві чи більше частин. [3]

1.2 Основні досить повні системи *R*-функцій, їх логічні та алгебраїчні властивості

Перша та найпростіша систему, що найчастіше використовується, є система R_0: [3]

$$\begin{aligned} x \wedge_0 y &= x + y - \sqrt{x^2 + y^2} \\ x \vee_0 y &= x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \\ \bar{x} &\equiv -x \end{aligned} \qquad (1.1)$$

де $\wedge_0, \vee_0, -$ — символи *R-кон'юнкції, R-диз'юнкції та R-заперечення відповідно.*

Найзагальнішим випадком є система R_α:

$$\begin{cases} x \wedge_\alpha y = \frac{1}{1+\alpha}(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}) \\ x \vee_\alpha y = \frac{1}{1+\alpha}(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}) \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases} \quad (1.2)$$

де $\alpha(x, y)$ — довільна функція, що задовольняє нерівності: $-1 < \alpha(x, y) \leq 1$.

Зауваження:

Для надання системі R_α симетрії щодо аргументів до нерівностей

$$-1 < \alpha(x, y) \leq 1$$

Також додають умови [3]:

$$\alpha(x, y) \equiv \alpha(y, x) \equiv \alpha(\bar{x}, y) \equiv \alpha(x, \bar{y}) \forall x, y \in \mathcal{R} \quad (1.3)$$

Хоча вони не є обов'язковими.

У формулах системи (1.2) позитивні множники $\frac{1}{1+\alpha}$ не впливають на знаки відповідних функцій і, отже, не мають відношення до зв'язку між R-функціями та функціями, що їх супроводжують, алгебри логіки.

Довільна функція α в системі (1.2), що задовольняє переліченим вище обмеженням, дозволяє за цими формулами визначити пучок досить повних систем, з якого, в залежності від поставленого завдання, можна вибрати ту чи іншу досить повну систему.

Якщо $\alpha = 0$ отримуємо систему R_0, а при $\alpha = 1$ — систему R_1 [3]:

$$\begin{cases} x \wedge_1 y \equiv \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) \equiv \min(x, y) \\ x \vee_1 y \equiv \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \equiv \max(x, y) \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases} \quad (1.4)$$

Вважаючи, що $\alpha = \alpha(x, y)$ задовольняє умовам (1.3). Тоді отримаємо такі тотожності:

1. $\bar{\bar{x}} \equiv x$
2. $x \wedge_\alpha y \equiv y \wedge_\alpha x$
3. $x \vee_\alpha y \equiv y \vee_\alpha x$
4. $\overline{x \wedge_\alpha y} \equiv \bar{x} \vee_\alpha \bar{y}$

5. $\overline{x \vee_\alpha y} \equiv \bar{x} \wedge_\alpha \bar{y}$

6. $x \wedge_\alpha y + x \vee_\alpha y \equiv \frac{2}{1+\alpha}(x+y)$

7. $(x \wedge_\alpha y)(x \vee_\alpha y) \equiv \frac{2}{1+\alpha} xy$

8. $x \wedge_\alpha y = 0$, за умови, що $x = 0, y \geq 0$ або $y = 0, x \geq 0$

9. $x \vee_\alpha y = 0$, за умови, що $x = 0, y \leq 0$ або $y = 0, x \leq 0$

R-кон'юкція та R – диз'юнкція системи R_1, на додаток до властивостей $1 - 9$, мають також властивості:

10. $x \wedge_1 x \equiv x$

11. $x \vee_1 x \equiv x$

12. $x \wedge_1 \bar{x} \equiv -|x|$

13. $x \vee_1 \bar{x} \equiv |x|$

14. $x \wedge_1 (y \wedge_1 z) \equiv (x \wedge_1 y) \wedge_1 z \equiv x \wedge_1 y \wedge_1 z$

15. $x \vee_1 (y \vee_1 z) \equiv (x \vee_1 y) \vee_1 z \equiv x \vee_1 y \vee_1 z$

16. $x \wedge_1 (y \vee_1 z) \equiv (x \wedge_1 y) \vee_1 (x \wedge_1 z)$

17. $x \vee_1 (y \wedge_1 z) \equiv (x \vee_1 y) \wedge_1 (x \vee_1 z)$

18. $(x \wedge_1 y) \vee_1 x \equiv x$

19. $(x \vee_1 y) \wedge_1 x \equiv x$

Доведемо властивість 17.

Для цього запишемо його за допомогою (1.4) у вигляді:

$$\max(x, min(y,z)) = \min(\max(x,y), \max(x,z))$$

Розглянемо випадок, у якому $x > y > z$:

Тоді отримаємо:

$\max(x, min(y,z)) \equiv \max(x,z) \equiv x$ і $\min(max(x,y), max(x,z)) \equiv x$

Тобто, зрештою: $x \equiv x$

Тепер розглянемо випадок, коли $x < y < z$:

Тоді отримаємо:

$\max(x, min(y,z)) \equiv \max(x,y) \equiv y$ та $\min(max(x,y), max(x,z)) \equiv y$

Тобто в результаті: $y \equiv y$

Якщо $y < z < x$ отримаємо $x \equiv x$

Аналогічно можна розглянути й інші варіанти.

Наведемо теорему, яка дозволить здійснювати оцінки значень результатів застосування R-операцій із системи R_α

***Теорема 1.2*.**

Справедливі нерівності [3]:

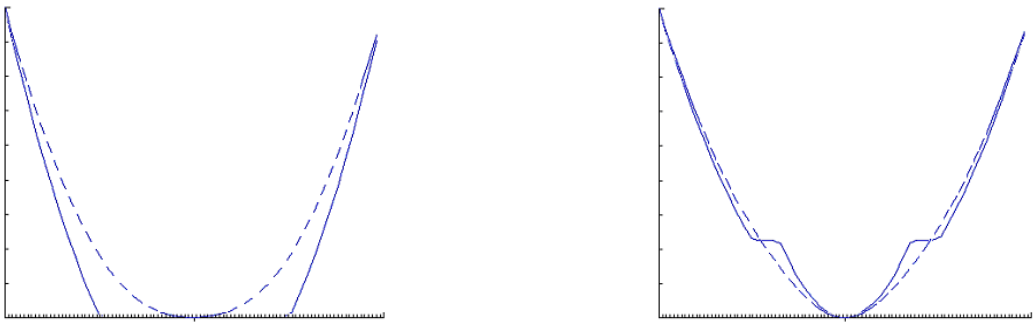
$$x \wedge_\alpha y \le \min(x,y) = x \wedge_1 y, x \vee_\alpha y \ge \max(x,y) = x \vee_1 y$$

Приклад:

Нехай $y_1 = x^2, y_2 = 1, y_3 = 2x^2$

На рис.1.1, а), б) наведено графіки функцій $y = x^2 \vee_\alpha 1$, $y = (x^2 \vee_\alpha 1) \wedge_\alpha 2x^2$ відповідно.

Вигляд цих графіків, використовуючи наведену теорему, можна передбачити до їхньої побудови [4].



а) б)

Рис.1.1. Графіки функцій: а) $= x^2 \vee_\alpha 1$; б) $y = (x^2 \vee_\alpha 1) \wedge_\alpha 2x^2$ для значень $\alpha = 0.1$ (пунктирні лінії) та $\alpha = 1$ (суцільна лінія).

1.3 Предикатне завдання складних геометричних об'єктів

Для побудови складних ГО необхідно користуватися діаграмами Ейлера-Венна.

Основна ідея побудові таких об'єктів – це задати прості ГО за допомогою характеристичних функцій, які за визначенням дорівнюватимуть 1 в точках ГО і 0 поза ним.

Визначення:

Нехай у нас є m простих геометричних об'єктів. Кожен ГО і характеристичну функцію, яка задає його, позначимо як $\Sigma_i, (i = 1, m)$.

А також існує деяка булева функція $F(X_1, \dots, X_m)$. Тоді рівняння

$$\Omega \equiv F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m) = 1 \quad (1.5)$$

що описує Ω, називається **предикатним рівнянням** [3], а Ω буде називатися *складним*.

Завдання ГО у вигляді (1.5) називається *предикатним*. Такий спосіб опису складних ГО нагадує процес будівництва. Прості об'єкти Σ_i виконують роль «цеглинок», а формула (1.5) задає правило побудови складного об'єкту Ω із простих.

Побудова складної області Ω із простих областей Σ_i є основним завданням у предикатному описі складних об'єктів. З введенням R-функцій це завдання стане постійним етапом, що передує побудови рівнянь складних ГО. Такий підхід можна використовувати не тільки для побудови рівнянь меж областей, але і для побудови ГО, що складаються з елементів різної розмірності [4].

Нехай $H = \{X \wedge Y, X \vee Y, \bar{X}\}$ – повна система булевих операцій. Наведемо кілька прикладів побудови складної області.

Приклад 1:

Нехай дані прості (опорні) області [4]:

$\Sigma_1 = (a^2 - x^2 \geq 0)$ - вертикальна смуга між прямими $x = \pm a$,

$\Sigma_2 = (b^2 - y^2 \geq 0)$ - горизонтальна смуга між прямими $y = \pm b$,

$\Sigma_3 = (c^2 - x^2 \geq 0)$ - вертикальна смуга між прямими $x = \pm c$,

$\Sigma_4 = (d^2 - y^2 \geq 0)$ - горизонтальна смуга між прямими $y = \pm d$,

а складний ГО Ω задається логічною формулою:

$$\Omega = (\Sigma_1 \wedge_1 \Sigma_2) \wedge_1 (\Sigma_3 \vee_1 \Sigma_4) = 1 \qquad (1.6)$$

Ця хрестоподібна область, зображена на рис.1.2, за умови, що $a > c,\ b > d$ [4]

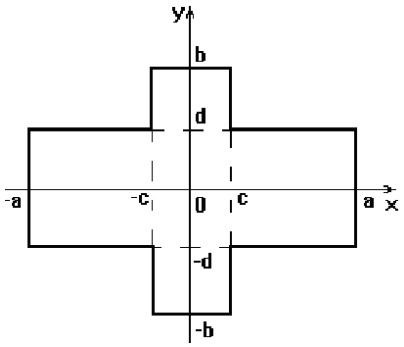


Рис.1.2. Хрестоподібна область, яка обмежена прямими

Якщо перед нами стоїть зворотне завдання, тобто вже відома форма хрестоподібної області і треба побудувати предикатне рівняння, то найпростішими опорними областями якраз і будуть смуги $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$, а логічна формула – рівняння (1.6).

Проте це не завжди так. У деяких випадках, етап вибору опорних ГО та логічної формули виявляється значно складнішим.

Приклад 2:

ГО на рис.1.3 обмежений суцільною лінією. Необхідно вибрати опорні області та побудувати логічну формулу. [4]

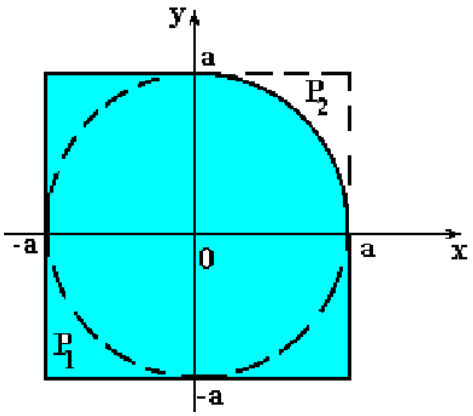


Рис.1.3. ГО, що складається з ділянок кордонів трьох ГО

Кордон ГО складається з ділянок кордонів трьох інших об'єктів:

$$\Sigma_1 = (a^2 - x^2 \geq 0), \Sigma_2 = (a^2 - y^2 \geq 0), \Sigma_3 = (a^2 - x^2 - y^2 \geq 0)$$

Але цього не достатньо. Справа в тому, що не існує такої булевої функції $\Omega = F(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$, яка визначає розглянутий ГО.

Обидві точки P_1 і P_2 належать областям Σ_1 и Σ_2, і не належать Σ_3. Значить, формула $\Omega = F(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ в обох цих точках повинна набувати однакових значень, що неможливо. Отже, нам не вистачає зазначених опорних ГО для побудови предикату і необхідно до них додати деякий ГО, який би відділяв точки типу P_1 від точок типу P_2.

В якості такого додаткового опорного ГО виберемо напівплощину, розташовану лівіше прямої, що визначається точками$(a, 0), (0, a)$:

$$\Sigma_4 = -x - y + a \geq 0 \text{ . [4]}$$

Іншим варіантом може бути ГО Σ_4, розташований поза колом радіусу a с центром у точці (a, a):

$$\Sigma_4 = \lfloor (x - a)^2 + (y - a)^2 - a^2 \rfloor \geq 0$$

В обох випадках предикатне рівняння матиме вигляд:

$$\Omega = \big((\Sigma_1 \wedge \Sigma_2) \wedge \Sigma_4\big) \vee \Sigma_3 = 1.$$

Отже, спочатку будуємо область, зображену на рис.1.4:

а — у випадку, коли Σ_4 — напівплощина;

б — у випадку, коли Σ_4 — коло;

А потім "додаємо" Σ_3. [4]

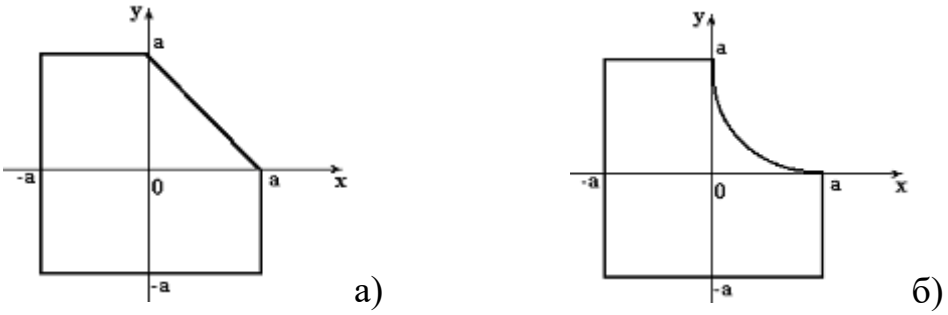


Рис.1.4. Область, у випадку: а) Σ_4 — напівплощина; б) Σ_4 — коло

Приклад 3:

Розглядається область, яка обмежена дугами трьох кіл і необхідно побудувати предикат [4]:

$$\Omega = \vee_i \Sigma_i \ (i = 1,2,3) \quad (1.7)$$

Для коректної побудови даної області нам необхідно знову ввести додатковий ГО Σ_4, оскільки точки трикутника на рис.1.5 не належать області Ω, то його точки перебувають у такому ж логічному ставленні до області Ω, визначеною формулою (1.7), як і зовнішні точки.

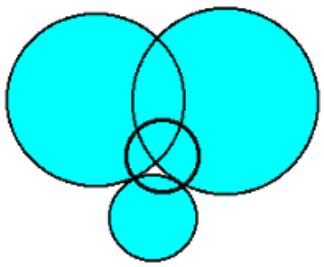


Рис.1.5. Область, обмежена дугами трьох кіл

Зазначимо додаткову область Σ_4 жирною лінією. Σ_4 відокремлює точки цього трикутника від точок, зовнішніх по відношенню до Ω. Тепер предикатне рівняння для Ω буде виглядати як:

$$\Omega = (\vee_i \Sigma_i) \vee \Sigma_4, (i = 1,2,3).$$

Якщо вхідна інформація буквена, то і Σ_4 треба ставити нерівністю у буквеному вигляді. Наприклад, можна взяти точки перетину кіл і як Σ_4 взяти трикутник з вершинами в точках перетину розглянутих кіл. [4]

1.4 Основна теорема теорії *R*-функцій. Побудова рівнянь меж геометричних об'єктів

Розглянемо систему опорних областей

$$\Sigma_i = (\sigma_i \geq 0) = S_2(\sigma_i), (i = \overline{1,m}) \quad (1.8)$$

які вважатимемо "*простими*" і використовувати для формування "*складних*" *областей*.

Теорема 1.3.

Дані опорні області $\Sigma_i = (\sigma_i \geq 0), (i = \overline{1,m})$; $\Omega = F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m) = 1$-предикатне рівняння, що визначає складну область Ω; $f(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ — R-функція, для якої $F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m) \in M(H)$ є супроводжуючою.

Тоді нерівність $f(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \geq 0$ визначає область Ω, а рівняння $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = 0$ – границю області Ω. [3]

Наслідок:

Будь-яка функція $F(X_1, \dots, X_m) \in M(H)$ може бути представлена у вигляді суперпозиції кон'юкції, диз'юнкції та заперечення $\{X \vee Y, X \wedge Y, \bar{X}\}$, так що побудова R-функції, для якої $F(X_1, \dots, X_m) \in M(H)$ є супроводжуючою, можна здійснити простою заміною символів цих операцій символами якоїсь із досить повних систем R-функцій, а символи X_i, а приймаючі дискретні значення

$0, 1$ — на символи x_i, які безперервно змінюються на інтервалі$(-\infty, \infty)$.

У результаті отримуємо простий спосіб переходу від предикатного завдання складних областей до їхнього аналітичного опису.

Залежно від специфіки завдання та додаткових вимог до рівняння ГО

(наприклад, вимога диференційності до заданого порядку, що виникає у математичній фізиці, простоти обчислень, певного характеру поведінки на нескінченності тощо) вибирається та чи інша досить повна система.

Всі ці питання будуть розглядатися в міру необхідності.

Приклад:

Прямокутник з вершинами в точках $(\pm a, \pm b)$ можна уявити у вигляді перетину смуг [3]:

$$\Omega = \Sigma_1 \wedge \Sigma_2,$$

$\Sigma_1 = (a^2 - x^2 \geq 0)$ - вертикальна смуга між прямими $x = \pm a$,

$\Sigma_2 = (b^2 - y^2 \geq 0)$ - горизонтальна смуга між прямими $y = \pm b$,

Скористаємося теоремой 1.3 та R-кон'юнкцією $x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$

Розкриваючи Σ_1 и Σ_2 у лівій частині рівняння Ω отримаємо:

$$\omega \equiv (a^2 - x^2) \wedge_0 (b^2 - y^2)$$

$$(a^2 - x^2) \wedge_0 (b^2 - y^2) = a^2 - x^2 + b^2 - y^2 - \sqrt{(a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2} = 0 \quad (1.9)$$

Тобто елементарне рівняння аналізованого прямокутника.

Сімейство ліній рівня функції $\omega(x, y)$, яке визначається рівнянням $\omega(x, y) = const$ та розраховане для значень $a = 2, b = 1$, представлено на рис.1.6 [3]

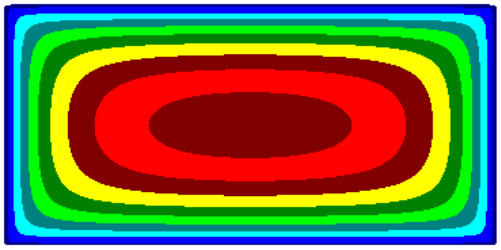


Рис.1.6. Картина ліній рівня функції $\omega(x, y) = const$

Примітка:

Спробуємо позбавитися кореня в рівнянні (1.9).

Для цього перенесемо корінь у праву частину рівняння і зведемо обидві частини рівняння квадрат.

Тоді отримаємо:

$$a^2 - x^2 + b^2 - y^2 = \sqrt{(a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2}$$
$$(a^2 - x^2 + b^2 - y^2)^2 = (a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2$$
$$2(a^2 - x^2)(b^2 - y^2) = 0$$

Останнє рівняння є рівнянням двох пар паралельних прямих $x = \pm a,\ y = \pm b$, а не квадрата, тому що при зведенні в квадрат з'явилися додаткові корені у рівняння (1.9) — координати точок, що становлять продовження сторін прямокутника, що розглядається.

Висновки

У цьому розділі наведено аналіз конструктивних методів математичного моделювання геометричних об'єктів. Були розглянуті основні досить повні системи R-функцій, їх логічні та алгебраїчні властивості, а також предикатне завдання складних геометричних об'єктів.

На прикладах показали спосіб опису складної області з декількох простих.

Введення R-функцій дозволило завдання опису складної області через кілька простих використовувати як допоміжний етап в описі складних геометричних об'єктів в аналітичній формі. Цей спосіб може бути використаний не тільки для побудови рівнянь меж областей, але і для побудови ГО, що складаються з елементів різної розмірності.

РОЗДІЛ 2

Побудова симетричних функцій для симетричних геометричних об'єктів

2.1 Побудова симетричних функцій для симетричних геометричних об'єктів. Типи симетрії.

Явище симетрії, що використовується людиною в архітектурі, будівництві, машинобудуванні, у створенні механізмів та інших виробів, було запозичене ним із природи: з молекул, із кристалів, із рослинного та тваринного світу. Всі ці спостереження були записані в геометрії, алгебрі, математичному аналізі та інших розділах математики, були відкриті закони симетрії, вказані методи їх опису та застосування, поставлені нові завдання.

Ще з найдавніших часів для багатьох народів симетрія служила еквівалентом урівноваженості та гармонії. У природничих науках ідеї, основу яких лежить симетрія, займають значної ролі.

"Наскільки я можу судити, - писав Вейль - всі апріорні твердження фізики мають своїм джерелом симетрію" [5].

Найвідомішим прикладом симетрії, що часто зустрічається в природі, є відображення. (рис.2.1, а).

Поняття дзеркальної симетрії має колосальне значення для математичної теорії симетрії, але це не обмежується. Так, наприклад, Пастер виявив зв'язок між обертанням поляризованого світла, розчинами деяких хімічних речовин та відсутністю дзеркальної симетрії у формах кристалів, що випадають із цих розчинів. Виявилося, що якщо і кристал, і розчин обертають площину поляризації світла, то окремі молекули досліджуваної речовини не можуть мати дзеркальну симетрію. [4]

Будь-який геометричний об'єкт (ГО), що скільки завгодно повторюється в просторі через певну відстань, дозволяє отримати симетрію, відому як **трансляція** або **паралельне перенесення** (рис.2.1, б). [4]

Наприклад, у калейдоскопі симетрія створюється за допомогою двох дзеркал, що перетинаються під певним кутом. При цьому можна створити конфігурацію, з поворотною та дзеркальною симетрією (мал.2.1, в). Тобто зовнішній вигляд візерунка змінюється при повороті на певний кут навколо осі, що проходить через центр.

Якщо кут повороту дорівнює, наприклад, 90°то, щоб здійснити повний оборот необхідно здійснити один за одним чотири повороти. Тоді вісь називається *віссю симетрії четвертого порядку*. Якщо кут повороту дорівнює 60° , то вісь називається *віссю симетрії шостого порядку* і т.д.

Наведемо приклад ГО з поворотною симетрією, що не має властивостей дзеркальної симетрії.

Таким прикладом є дитяча вертушка, (рис.2.1, г) що має поворотної симетрією, але має площин дзеркальної симетрії, т.к. фігура заснована на обертальних рухах лише в один бік (без відображення). [4]

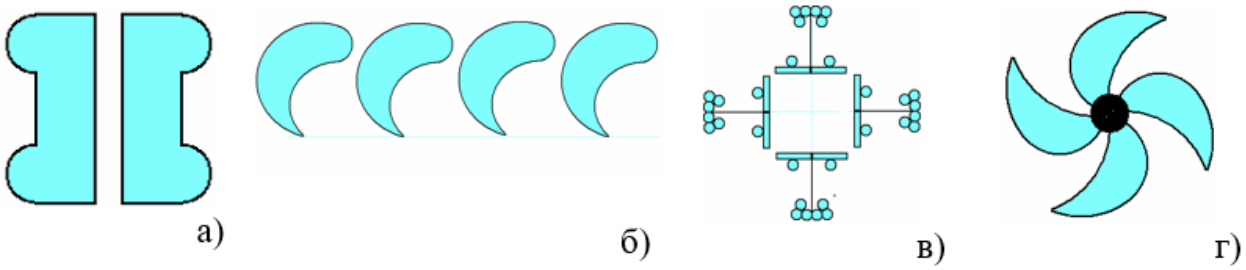


Рис.2.1 Різні типи симетрії: а) дзеркальна; б) трансляція; в) поворотна та дзеркальна; г) поворотна без площин симетрії

Щоб описати границі складних ГО, вводиться метод R-функцій, за допомогою якого отримуємо рівняння виду $\omega(x, y, z) = 0$, де $\{\omega(x, y, z)\}$— елементарні функції, записані єдиним аналітичним виразом. При цьому

важливо визначити, наскільки формули $\omega(x, y, z) = 0$ є простими для обчислення. З цього погляду має сенс розглядати геометричні об'єкти, що мають симетрію.

Так, ми приходимо до зворотного завдання аналітичної геометрії: *побудова рівнянь складних геометричних об'єктів, що складаються з елементів, які багаторазово повторюються за будь-якими законами симетрії*. [4]

Визначення:

ГО Ω називається **симетричним**, якщо існує таке, відмінне від тотожного перетворення, відображення A, що зберігає модуль будь-якого вектора, що має місце $A\Omega = \Omega$.

Визначення:

Відображення симетрії, що зберігають нерухому хоча б одну точку простору, називаються **точковими** і мають вигляд $y = Ax$.

Неточкові відображення прийнято називати відображенням **трансляційного типу**.

Наведемо кілька прикладів симетричних об'єктів у 3D:

1. **Куб** – має 9 площин симетрії, 7 осей симетрії та центр симетрії.
2. **Куля** – нескінченно багато площин та осей симетрії та центр симетрії
3. **Прямий круговий конус** – безліч площин симетрії, одна вісь симетрії.

Якщо ГО Ω є симетричним (будь-який вид симетрії) та описується рівнянням $\omega(x, y) = 0$, то це не гарантує, що функція $\omega(x, y)$ симетрична.

Наприклад, рівняння $e^{xy}(1 - x^2 - y^2) = 0$ описує коло, яке симетричне щодо будь-якої осі, що проходить через її центр.

Але функція $e^{xy}(1 - x^2 - y^2)$ не має дану властивість:

$$e^{-xy}(1 - x^2 - y^2) \neq e^{xy}(1 - x^2 - y^2)$$

Визначення:

Функція $\omega(x)$ називається **симетричною щодо відображення** A, якщо $\omega(Ax) = \omega(x)$.

Визначення:

Функція $\omega(x)$ називається **кососиметричної щодо відображення** A, если $\omega(Ax) = -\omega(x)$.

Залежно від умов конкретного фізичного завдання з симетричним ГО можуть бути пов'язані як симетричні, і кососиметричні функції.

Класична схема методу *R*-функцій показує, що формули для ω та ω_i стають тим більш громіздкими, чим більше примітивів (отже, і число *R*-операцій) бере участь у формуванні розглянутих ГО. Хоча збільшення числа *R*-операцій зі збільшенням числа примітивів у деяких випадках не є обов'язковим.

2.2 Симетрія трансляції вздовж прямої.

Визначення:

ГО Ω має симетрію трансляційного типу в напрямку вектора $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$, якщо при перетворенні

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

він переходить сам у себе.

Нескладно навести приклади, у яких ГО Ω має симетрію трансляційного типу в декількох напрямках, що визначаються векторами $\vec{h}^1, \dots, \vec{h}^m$.

Розберемо процес побудови рівнянь геометричних об'єктів, що мають симетрію трансляційного типу. Спочатку розглянемо загальний підхід, а потім розглянемо деякі окремі ситуації, де можна записати симетричні рівняння більш простим способом.

Розглянемо ГО Ω, що складається із системи ГО $\Sigma_i = (\sigma_i(x, y) \geq 0)$, де $\sigma_i(x, y) = \omega_0(x - hi, y), i \in Z$, розташованих з періодом h $(h > 2r)$ вздовж осі абсцис.

Класична схема застосування теорії R-функцій.

Задамо прямокутник перетином нескінченних вертикальної та горизонтальної смуг $\Sigma_1 = \lfloor \sigma_1 = a^2 - x^2 \geq 0 \rfloor$ и $\Sigma_2 = \lfloor \sigma_2 = b^2 - y^2 \geq 0 \rfloor$.

Отвори Σ_i визначимо як $\Sigma_1 = \{\sigma_i \equiv r^2 - (x - hi)^2 - y^2 \geq 0\}, i = 3, \dots, m.$

Тоді область Ω можна задати логічною формулою $\Omega = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap (\bigcap_{i=3}^{i=m} \bar{\Sigma}_i)$

Таким чином, область, що зображена на рис.2.2, буде описуватиметься нерівністю: $\Omega = \lfloor \omega \equiv (\sigma_1 \wedge_\alpha \sigma_2) \wedge_\alpha (\overline{\sigma_3} \wedge_\alpha \dots \wedge_\alpha \overline{\sigma_m}) \geq 0 \rfloor$ (2.1)

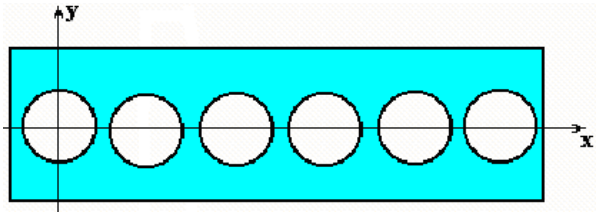


Рис.2.2. ГО з трансляційною симетрією

У результаті отримали громіздку формулу (2.1) з великою кількістю *R*-операцій, що зростає зі зростанням числа отворів. Якщо ж отвори розташувати періодично по двох або більше числу напрямків або кіл, то отримаємо ще складнішу формулу. Хоча вся інформація про всю сукупність отворів описується рівнянням одного отвору та типом симетрії (трансляції заданого типу), а також формою тієї області, в яку вони ув'язнені. Як врахувати цей фактор, щоб здобути менш громіздке рівняння?

Перетворення координат для побудови рівнянь, що відповідають ГО із симетрією трансляції вздовж прямої.

Вперше це завдання було розглянуто для пластин складної форми [6] із системами двоякоперіодичних отворів. У наступних роботах було розглянуто випадок трансляційної симетрії вздовж осі у припущенні, що області довільної форми можуть бути відокремлені одна від одної деякою періодичною системою смуг (у 3D – пластів), перпендикулярних до осі трансляції, а потім – для більш загальних випадків. [7], [8], [9], [10], [11], [12]

Теорема 2.1.

Нехай трансляційна область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x,y) \geq 0]$, де $(\sigma_0(x,y) \in C^m(R^2))$ симетрична щодо осі OY і знаходиться у границях вертикальної смуги $-a < x < a$. Області $\Sigma_i = [\sigma_0(x - hi, y) \geq 0], i \in Z$ отримані в результаті перетворення переносу області Σ_0 вздовж осі абсцис на величини, які кратні $h > 2a$.

Тоді рівняння границі $\partial\Omega$ області $\Omega = \bigcup_{i\in Z} Z_i$ має вид: [53]

$$\omega(x,y) \equiv \sigma_0(\mu(x,h), y) = 0, \qquad (2.2)$$

де $\mu(x,h) = \frac{h}{\pi}\arcsin\left\{\frac{\sin\left(\frac{x\pi}{h}\right)C_m(a,h)S_1(a,h)}{S_1(a,h)C_m(a,h)+[1-S_1(a,h)]p^{m+1}(x,a,h)}\right\}$

$$S_1(a,h) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2h}\right), C_m(a,h) = 2^{m+1}\cos^{2(m+1)}\left(\frac{a\pi}{h}\right) \qquad (2.3)$$

$$p(x,a,h) = |S_2(x,a,h)| - S_2(x,a,h), \quad S_2(x,a,h) = \sin^2\left(\frac{a\pi}{h}\right) - \sin^2\left(\frac{x\pi}{h}\right)$$

Графік функції (2.2) зображено на рис.2.3.

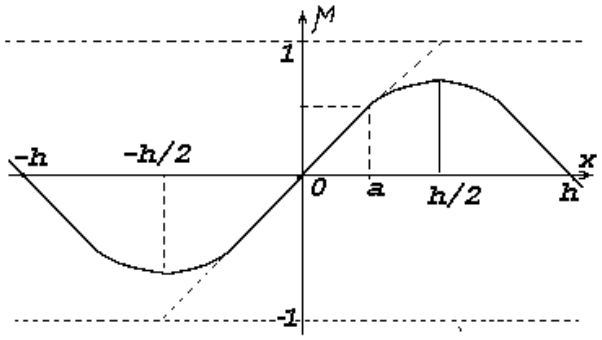


Рис.2.3. Графік функції (2.2) при $h = 2, a = 0.5$

На практиці найкраще замість функції (2.3) скористатися частковими сумами ряду Фур'є для функції:

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2} \\ h - x, & \frac{h}{2} \leq x \leq h \\ -h - x, & -h \leq x \leq -\frac{h}{2} \end{cases}$$

У результаті отримаємо:

$$\mu(x,h) = \frac{4h}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2}\sin\frac{(2i-1)x\pi}{h} \quad (2.4)$$

Не слід забувати, що використання даних часткових сум може призвести до значних похибок при малій кількості складових. [4]

Приклад 2.1:

Розглянемо область $\Sigma_0 = (\overline{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}) \cap \Sigma_3$ в якості ГО, що підлягає трансляції, де [53]

$\Sigma_1 = \lfloor \sigma_1 \equiv a_0^2 - x^2 \geq 0 \rfloor$ – вертикальна смуга між прямими $x = \pm a_0$

$\Sigma_2 = \lfloor \sigma_2 \equiv y - b_0 \geq 0 \rfloor$ – горизонтальна пряма $y = b_0$

$\Sigma_3 = \lfloor \sigma_3 \equiv r_0^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \rfloor$ – коло радіусу r_0 з центром у точці (0,0)

Запишемо рівняння границі області Σ_0 з використанням системи (1.2):

$$\sigma_0 = \left\{\left[\overline{(a_0^2 - x^2) \wedge_\alpha (y - b_0)}\right] \wedge_\alpha (r_0^2 - x^2 - y^2)\right\} = 0.$$

Тоді за формулою (2.2) рівнянням межі області Ω буде

$$\omega \equiv -\left\{\left[\overline{\left(a_0^2 - \mu^2(x,h)\right) \wedge_\alpha (y - b_0)}\right] \wedge_\alpha \left(r_0^2 - y^2 - \mu^2(x,h)\right)\right\} = 0$$

На рис.2.4.а зображено картину ліній рівня функції $\omega(x,y)$ [4] в області $\Omega \cup \overline{\Omega}$ при $a_0 = 1;\ b_0 = 0;\ r_0 = 1.5; h = 5$



а) б)

Рис.2.4. Картина ліній рівня: а) трансльований ГО симетричний щодо осі OY; б) трансльований ГО несиметричний щодо осі OY

Незважаючи на те, що формули (2.3) громіздкі та незручні у обчисленні, для побудови рівняння (2.2) вони застосовуються лише один раз, а у формулі (2.1) R-операція $\wedge_\alpha$ буде застосовуватися зі зростанням параметра m.

У теоремі 2.1 передбачалося, що трансляційна область Σ_0 має симетрію щодо осі OY. У випадку, якщо ця умова не виконуватиметься, то застосування формули (2.2) до несиметричної області щодо осі ординат стане причиною появи дзеркально відображених областей, що відповідатимуть ділянці кривої

$\mu(x,h)$ з нахилом, паралельним "$-x$", що призводить до заміни у рівнянні (2.3) x на $-x$.

Так, наприклад, на рис.2.4, б) можна побачити дзеркальну симетрію [4] для області, отриманої поворотом Σ_0 на 90°.

Теорема 2.2.

Нехай трансляційна область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x,y) \geq 0], (\sigma_0(x,y) \in C^m(R^2)))$ несиметрична щодо осі OY і може бути укладена у вертикальну смугу $-a < x < a$, а області $\Sigma_i = [\sigma_0(x - hi, y) \geq 0], i \in Z$ отримані в результаті перетворення переносу області Σ_0 вздовж осі абсцис на величини, які кратні $h > 2a$. Тоді рівняння межі $\partial\Omega$ області $\Omega = \bigcup_{i \in Z} \Sigma_i$ має вид: [4]

$$\omega(x,y) \equiv \left\{\sigma_0(\mu(x,h),y) \wedge_\alpha \cos\frac{\pi x}{h}\right\} \vee_\alpha \left\{\sigma_0(\mu(x-h,h),y) \wedge_\alpha \cos\frac{\pi(x-h)}{h}\right\} = 0 \quad (2.5)$$

Наслідок:

Для області із заздалегідь відомим числом $n < \frac{l}{a} + 1$ транслюваних геометричних об'єктів, де кожен може бути укладений у вертикальну смугу шириною a на відрізку довжиною l рівняння межі має такий вигляд: $\omega(x,y) = \sigma_0(\mu^*(x,h),y) = 0)$, де $\mu^*(x,h) = (x \wedge_1 \mu(x,h)) \wedge_1 (x - l)$ (рис.2.5). [4]

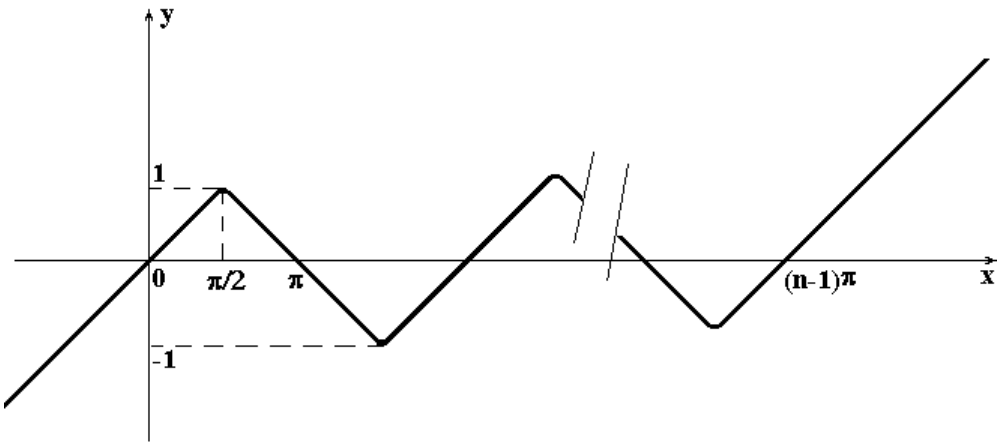


Рис.2.5. Графік функції $\mu^*(x,h)$

Приклад 2.2

Повернемося до прикладу 2.1. Для отримання рівняння області Σ_0, повернеою на 90° і яка транслюється, необхідно в (2.4) поміняти місцями x і y.

В такому випадку $\sigma_0 = -\left\{\left[\frac{1}{2a_0}(a_0^2 - y^2) \wedge_\alpha (x - b_0)\right] \wedge_\alpha \frac{1}{2r_0}(r_0^2 - x^2 - y^2)\right\} = 0$ і за формулою (2.5) отримаємо функцію $\omega(x, y)$, картина ліній рівня якої вказана на рис.2.6. [4]



Рис.2.6. ГО із симетрією трансляції, побудований за формулою (2.5)

У випадку, коли сусідні області $\Sigma_i, \Sigma_{i+1}, i \in Z$ не можуть бути відокремлені одна від одної періодичною системою смуг, які перпендикулярні до осі трансляції, необхідно скористатися наступною теоремою.

Теорема 2.3.

Нехай області $\Sigma_i = [\sigma_0(x - hi, y) \geq 0], i \in Z$ отримані внаслідок перетворення переносу трансляційної області $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0], (\sigma_0(x, y) \in C^m(R^2))$ вздовж осі абсцис на величини, що кратні h.

Якщо сусідні області Σ_i, Σ_{i+1} ($i \in Z$) не можуть бути відокремлені вертикальними прямими ($h \leq 2a$), а області Σ_i, Σ_{i+2} ($i \in Z$) можна відокремити цими прямими, тоді рівняння кордону $\partial\Omega$ області $\Omega = \bigcup_{i \in Z} \Sigma_i$ має вид: [4]

$$\omega(x, y) \equiv \left\{\left[\sigma_0(\mu(x, 2h), y) \wedge_\alpha \cos\frac{\pi x}{2h}\right] \vee_\alpha \left[\sigma_0(\mu(x - \right.\right.$$
$$-2h, 2h), y) \wedge_\alpha \cos\frac{(x-2h)\pi}{2h}\left.\right]\right\} \vee_\alpha \left\{\left[\sigma_0(\mu(x - h, 2h), y) \wedge_\alpha \cos\frac{\pi(x-h)}{2h}\right] \vee_\alpha \left[\sigma_0(\mu(x - \right.$$
$$\left.\left.-3h, 2h), y) \wedge_\alpha \cos\frac{(x-2h)\pi}{2h}\right]\right\} = 0 \quad (2.6)$$

На рис.2.7 наведено картину ліній рівня функції $\omega(x,y)$, отриманої за формулою (2.6) для $\sigma_0(x,y)$: [4]

$$\sigma_0(x,y) \equiv \left((25-x^2-y^2) \vee_\alpha \left((1-y^2) \wedge_\alpha (5+x)(1-x)\right)\right) \wedge_\alpha \left(\frac{y^2}{3} - x + 2\right) = 0$$

при $h = 16$.



Рис.2.7. ГО із симетрією трансляції, побудований за формулою (2.6)

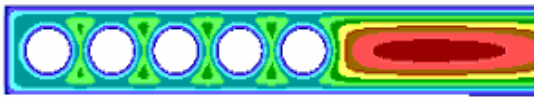
Перетворення координат, що наведене вище, дає можливість за заданим рівнянням геометричного об'єкта $\Sigma_0 = \sigma_0(x,y)$ та шагу h отримати рівняння границі області, що є нескінченною трансляцією Σ_0 вздовж осі абсцис. За допомогою методу перетворення повороту осей координат легко отримати аналогічне рівняння для довільної прямої.

На рис.2.8 наведені приклади перфорації отворів у вигляді кругів та прямокутників, де функція $\omega(x,y)$ побудована з використанням перетворення координат $\mu^*(x,h)$. [4] При цьому $\equiv \left((4-y^2) \wedge_0 (2+x)(25-x)\right) \wedge_0 \overline{\omega_1} \geq 0$.

Для кругових отворів $\omega_1 = 1 - \left(\mu^*(x,h)\right)^2 - y^2 \geq 0, h = 3, l = 12$

Для прямокутних отворів $\omega_1 = \left(0.25 - \left(\mu^*(x,h)\right)^2\right) \wedge_0 (0.25 - y^2) \geq 0$,

$h = 2, l = 12$.



а)



б)

Рис.2.8. ГО з перфорацією у вигляді: а) кругів; б) прямокутників

2.3 Точкова симетрія циклічного типу.

Розглянемо *перетворення координат для побудови рівнянь, що відповідають ГО із точковою симетрією циклічного типу.*

Нехай $\Sigma_0 = [\sigma_0(x,y) \geq 0]$ є якась область. Тоді переміщення цієї області на відстань r_0 по осі OX описується так:

$$\Sigma_1 = [\sigma_1(x,y) \equiv \sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$$

Постановка задачі:

Записати рівняння $\omega(x,y) = 0$ границі $\partial\Omega$ ГО $\Omega = \bigcup_{k=1}^{k=n} \Sigma_k$, який є з'єднанням n областей $\Sigma_i, (i = 1,..,n)$, отриманих в результаті повороту області Σ_1 навколо початку координат на кути $\frac{2\pi k}{n} (k = 0,1,\dots,n-1)$ [4].

Теорема 2.4.

Нехай трансляційна область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x,y) \geq 0]$ симетрична відносно осі абсцис $(\sigma_0(x,y) \in C^m(R^2))$, а область $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ може бути розміщена всередині сектора $-\alpha \leq \theta \leq \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{n}$.

Області $\Sigma_k = \left\lfloor \sigma_0 \left(\cos\left(\theta - {2\pi k}/{n}\right) - r_0, \mathrm{r}\sin\left(\theta - {2\pi k}/{n}\right) \right) \geq 0 \right\rfloor, k = 0,1,\dots,n-1$ отримані в результаті повороту області $\Sigma_1 = [\sigma_0(x,y) \geq 0]$ навколо початку координат на кути $\frac{2\pi k}{n}$ $(k = 0,1,\dots,n-1)$.

Тоді рівняння границі $\partial\Omega$ області $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Sigma_k$ має вид: [4]

$$\omega(x,y) \equiv \sigma_0(r\cos\mu(\theta,n) - r_0, \sin\mu(\theta,n)) = 0, \left(r = \sqrt{x^2+y^2}, \theta = \arctan\frac{y}{x}\right) \quad (2.7)$$

$$\text{де} \quad \mu_m(\theta,n) = \frac{2}{n}\arcsin\left\{\frac{\sin\frac{n\theta}{2} S_1(n,\alpha) C_m(n,\alpha)}{S_1(n,\alpha) C_m(n,\alpha) + [1 - S_1(n,\alpha)] p^{m+1}(\theta,n,\alpha)}\right\}$$

$$S_1(n,\alpha) = \sin\left(\frac{\pi + n\alpha}{4}\right), C_m(n,\alpha) = 2^{m+1}\cos^{2(m+1)}\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

$$p(\theta,n) = |S_2(\theta,n)| - S_2(\theta,n)$$

$$S_2(\theta,n) = \sin^2\left(\frac{n\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

Примітка:

На практиці замість функції $\mu(\theta, n)$ краще використовувати часткові суми ряду Фур'є, як наближення функції:

$$\mu(\theta, n) = \frac{8}{\pi n}\sum_k (-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n\theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}$$

Приклад 2.2:

Для ГО, що зображен на рис.2.9, запишемо рівняння границі:

$f_1 = y_1 + x_1/4 \geq 0, f_2 = -y_1 + x_1/4 \geq 0, f_3 = 3.24 - {x_1}^2 - {y_1}^2,$

де $x_1 = r\cos\mu(\theta, n), y_1 = r\sin\mu(\theta, n)$

$\sigma \equiv (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 f_3 = 0$ — рівняння границі n кругових секторів,

$f_4 = -1.69 + x^2 + y^2, f_5 = 9 - x^2 - y^2,$

$\omega_k \equiv f_4 \wedge_0 f_5 = 0$ — рівняння кільця,

$\omega \equiv \omega_k \wedge_0 \bar{\sigma} = 0$ — рівняння границі області.

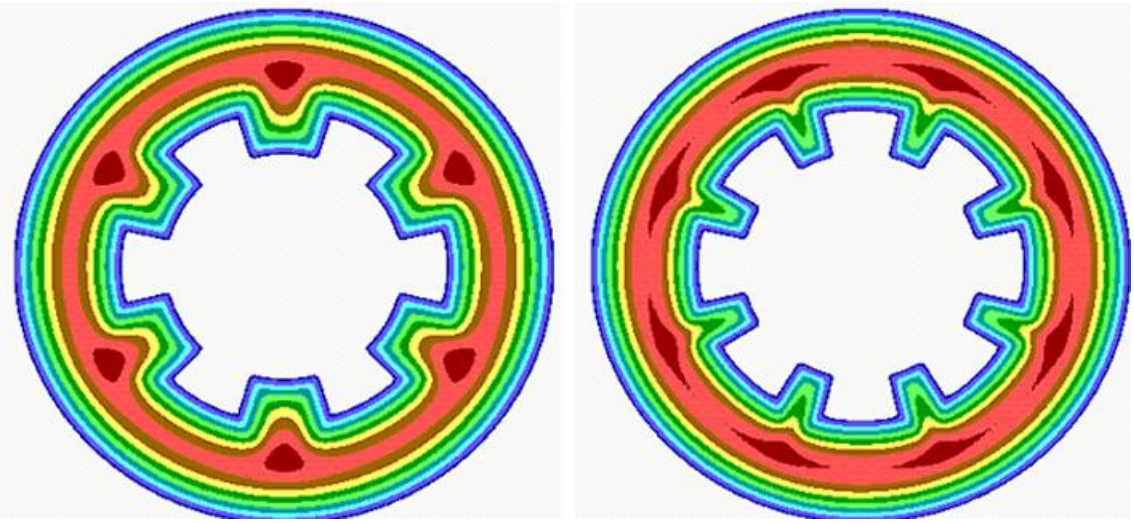


Рис. 2.9. ГО, що побудован за допомогою формули (2.7)

де: а) $n = 6$; б) $n = 8$

Припустимо, що трансляційна область Σ_0 несимметрична відносно осі OX. У такому разі застосування (2.7) до такої області призведе до появи дзеркально-відражених елементів, які відповідають ділянкам $\theta \in \left(\frac{2\pi k}{n} - \alpha, \frac{2\pi k}{n} + \alpha\right)$

функції $\mu(\theta, n)$ при непарних k (рис. 2.10, а). У таких випадках потрібно скористатися наступною теоремою [4].

Теорема 2.5.

Нехай трансляційна область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$ несиметрична щодо осі абсцис ($\sigma_0(x, y) \in C^m(R^2)$), а область $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ може бути розміщена всередині сектора $-\alpha \leq \theta \leq \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{n}$ [4].

Області $\Sigma_k = \left[\sigma_0\left(r\cos\left(\theta - \frac{2\pi k}{n}\right) - r_0, r\sin(\theta - \frac{2\pi k}{n})\right) \geq 0\right], k = 0,1, \dots, n-1$ отримані в результаті перетворення повороту області $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ навколо початку координат на кути $\frac{2\pi k}{n}$, $(k = 0,1, \dots, n-1)$.

Тоді рівняння границі $\partial\Omega$ області $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Sigma_k$ має вид:

$$\omega(x, y) \equiv \left[\sigma_0(r\cos\mu(\theta, n) - r_0, r\sin\mu(\theta, n)) \wedge_\alpha \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right] \vee_\alpha \left[\sigma_0\left(r\cos\mu\left(\left(\theta - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{2\pi}{n}\right), n\right) - r_0, r\sin\mu\left(\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right), n\right)\right) \wedge_\alpha \cos\left(\frac{n}{2}\left(\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right)\right)\right] = 0 \quad (2.8) \quad [4]$$

Приклад 2.3:

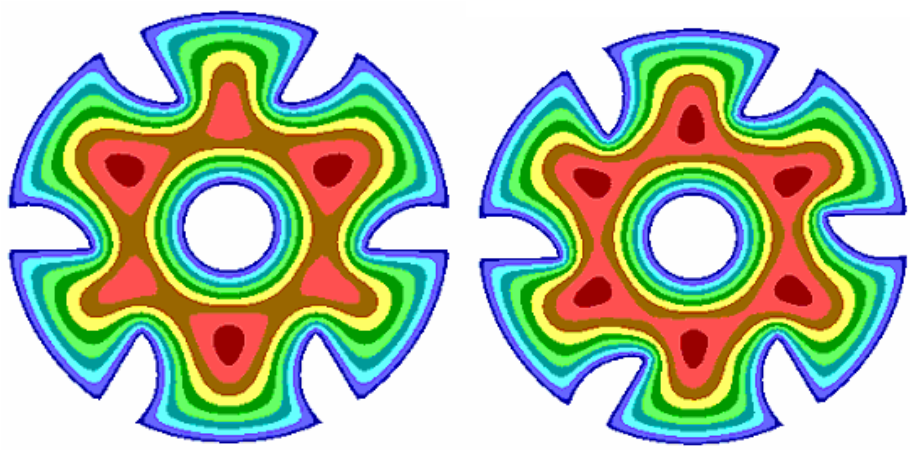
Нехай рівняння $\sigma_0 \equiv \overline{\{(2.25 - x^2 - y^2)/3 \wedge_0 (0.5 - y)\}} = 0$ описує ГО, що має вигляд сегмента кола [53]. На рис.2.10, б зображена картину ліній рівня функції:

$$\omega(x, y) = \left(\left[\sigma_0\left(r\cos\mu\left(\frac{\theta n}{2}\right) - r_0, r\sin\mu\left(\frac{\theta n}{2}\right)\right) \wedge_\alpha \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right]\right) \vee_\alpha$$

$$\vee_\alpha \left[\sigma_0\left(r\cos\mu\left(n\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right) - r_0, r\sin\mu\left(\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right)\right) \wedge_\alpha \cos\left(\frac{n}{2}\left(\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right)\right)\right] \wedge_\alpha$$

$$\wedge_\alpha \left(\frac{(x^2 + y^2 - 1)}{2} \wedge_\alpha \frac{25 - x^2 - y^2}{10}\right) = 0$$

Для $n = 6$ при $r_0 = 4.5$.



а) б)

Рис.2.10. ГО, побудований за допомогою формул: а) (2.7); б) (2.8)

Теорема 2.6.

Нехай трансляційна область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x,y) \geq 0]$ несиметрична щодо осі абсцис ($\sigma_0(x,y) \in C^m(R^2)$), а область $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ може бути розміщена всередині сектора $-\alpha \leq \theta \leq \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{n}$ [4].

Області $\Sigma_k = \left[\sigma_0\left(r\cos\left(\theta - \frac{2\pi k}{n}\right) - r_0, r\sin(\theta - \frac{2\pi k}{n})\right) \geq 0\right], k = 0,1,\dots,n-1$ отримані в результаті перетворення повороту області $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ навколо початку координат на кути $\frac{2\pi k}{n}$, $(k = 0,1,\dots,n-1)$. При цьому сусідні області Σ_k, Σ_{k+1} $(k = 0,1,\dots,n-1)$ не можуть бути відокремлені одна від одної секторами $-\alpha \leq 0 \leq \alpha, , 0 < \alpha < \frac{\pi}{n}$, але області Σ_k, Σ_{k+2} $(k = 0,1,\dots,n-1)$ можна відокремити такими секторами. Тоді рівняння границі $\partial\Omega$ області $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1}\Sigma_k$ має вид: [4]

$$\omega(x,y) = \{\left[\sigma_0(r\cos\mu(\theta,n) - r_0, r\sin\mu(\theta,n)) \wedge_\alpha \cos\left(\frac{n\theta}{4}\right)\right] \vee_\alpha$$
$$\vee_\alpha \left[\sigma_0\left(r\cos\mu\left(\left(\theta - \frac{4\pi}{n}\right),n\right) - r_0, r\sin\mu\left(\left(\theta - \frac{4\pi}{n}\right),n\right)\right) \wedge_\alpha \cos\left(\frac{n}{4}\left(\theta - \frac{4\pi}{n}\right)\right)\right] \vee_\alpha$$
$$\vee_\alpha \left[\sigma_0\left(r\,cos\,\mu\left(\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right),n\right) - r_0, r\,sin\,\mu\left(\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right),n\right)\right) \wedge_\alpha cos\left(\frac{n}{4}\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right)\right] \vee_\alpha$$
$$\vee_\alpha \left[\sigma_0\left(r\cos\mu\left(\left(\theta - \frac{6\pi}{n}\right),n\right) - r_0, r\sin\mu\left(\left(\theta - \frac{6\pi}{n}\right),n\right)\right) \wedge_\alpha \cos\left(\frac{n}{4}\left(\theta - \frac{6\pi}{n}\right)\right)\right]\} = 0$$

(2.9)

Зазначимо, що у рівнянні (2.9) функція $\mu(\theta, n)$ строилась при $h = \frac{4\pi}{n}$.

Приклад 2.4:

Рассмотрим ГО, состоящий из круговых областей [4]. Запишем рівняння:

$$\sigma_0 \equiv \left\{(r_1^2 - x^2 - y^2) \vee_0 (r_2^2 - x^2 - (y - k_1)^2) \wedge_0 \overline{(r_3^2 - x^2 - (y - k_2)^2)}\right\} = 0.$$

Користуючись теоремой 2.6, запишемо рівняння границі відтрансльованої області. На рис.2.11 зображено картину ліній рівня функції $\omega(x, y)$.

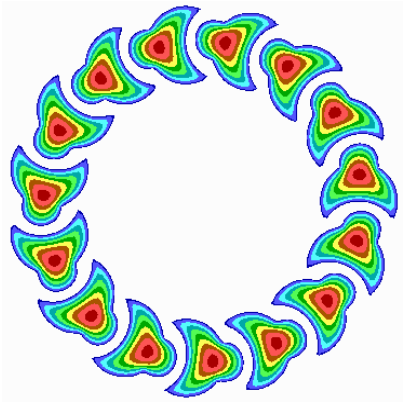


Рис. 2.11. ГО, побудований за допомогою формули (2.9)

Для випадку, коли область Σ_0 несиметрична щодо осі OX, але при циклічному тиражуванні необхідно зберегти її орієнтацію щодо декартової системи координат xOy, існує така теорема.

Теорема 2.7

Нехай трансляційна область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$ несиметрична щодо осі абсцис ($\sigma_0(x, y) \in C^m(R^2)$), а область $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ може бути розміщена всередині сектора

$$-\alpha \leq \theta \leq \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{n}$$ [4].

Області $\Sigma_k = \left[\sigma_0\left(r\cos\left(\theta - \frac{2\pi k}{n}\right) - r_0, r\sin(\theta - \frac{2\pi k}{n})\right) \geq 0\right], k = 0,1, \dots, n-1$ отримані в результаті перетворення повороту області $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$

навколо початку координат на кути $\frac{2\pi k}{n}$, $(k = 0,1, \dots, n-1)$ с збереженням орієнтації щодо декартової системи координат xOy. Тоді рівняння границі $\partial\Omega$ області $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Sigma_k$ має вид:

$$\omega(x,y) = \left[\sigma_0(\acute{x},\acute{y}) \wedge_\alpha \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right] \vee_\alpha \left[\sigma_0(x'',y'') \wedge_\alpha \cos\left(\frac{n}{2}\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right)\right] = 0, \quad (2.10)$$

$$\text{де } \begin{cases} \acute{x} = (r\cos\mu(n\theta) - r_0)\cos\alpha_k - r\sin\mu(n\theta)\sin\alpha_k \\ \acute{y} = (r\cos\mu(n\theta) - r_0)\acute{\sin}\alpha_k + r\,\mathrm{sin}\,\mu(n\theta)\cos\alpha_k \end{cases}, \alpha_k = \theta - \mu(n\theta),$$

$$\begin{cases} x'' = \left(r\cos\mu\left(n\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right) - r_0\right)\cos\alpha_k - r\sin\mu\left(n\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right)\sin\alpha_k \\ y'' = \left(r\cos\mu\left(n\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right) - r_0\right)\sin\alpha_k + r\sin\mu\left(n\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right)\cos\alpha_k \end{cases}$$

$$\beta_k = \theta - \mu\left(n\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

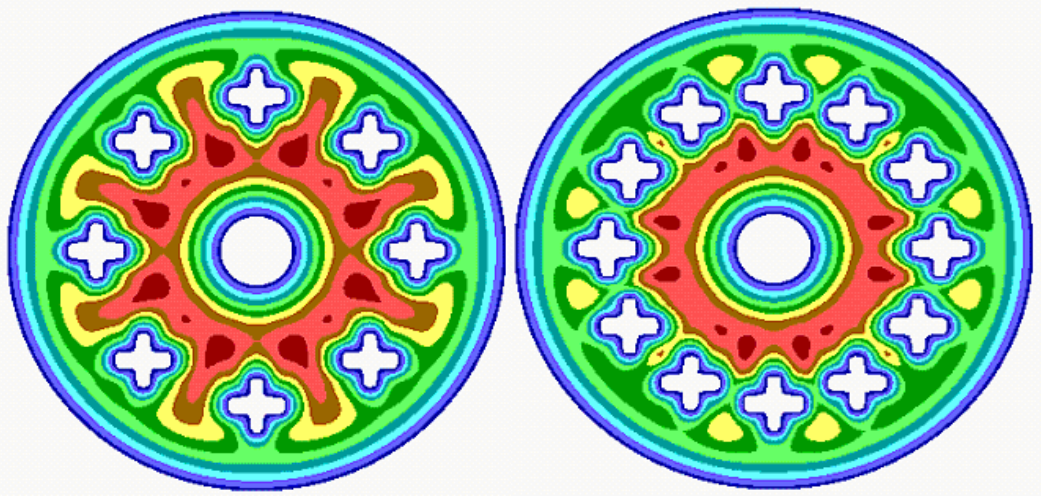
На рис. 2.12 зображені картини ліній рівня функції $\omega(x,y)$, що демонструють використання формули (2.10) [4].

Приклад 2.5:

Рівняння $\sigma_0 \equiv \overline{\{(0.64 - x^2 - y^2) \wedge_0 ((0.625 - y^2) \vee_\alpha (0.04 - x^2))\}} \geq 0$ задає ГО, схожий з хрестоподібною областю [53]. На рис.2.12 а), б) наведено картини ліній рівня функції:

$$\omega(x,y) = \left(\left[\sigma_0(\acute{x},\acute{y}) \wedge_\alpha \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right] \vee_\alpha \left[\sigma_0(x'',y'') \wedge_\alpha \cos\left(\frac{n}{2}\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right)\right]\right) \wedge_\alpha$$

$\wedge_\alpha ((x^2 + y^2 - 1) \wedge_\alpha (49 - x^2 - y^2)) = 0$ для $n = 8; n = 12$, при $r_0 = 4{,}5$.



а) б)

Рис.2.12. ГО, які побудовані за допомогою формули (2.10): а) $n = 8$; б) $n = 12$

Приклад 2.6:

Розглянемо правильні n_0-кутники, які транслюються n_d раз з поворотною симетрією у правильному n_b-кутнику (рис.2.13) [4].

При цьому для всіх побудов будемо використовувати дві функції:

$\sigma_1 \equiv x - R_1;\ \sigma_2 \equiv R_v - x$ (рис.2.13, а).

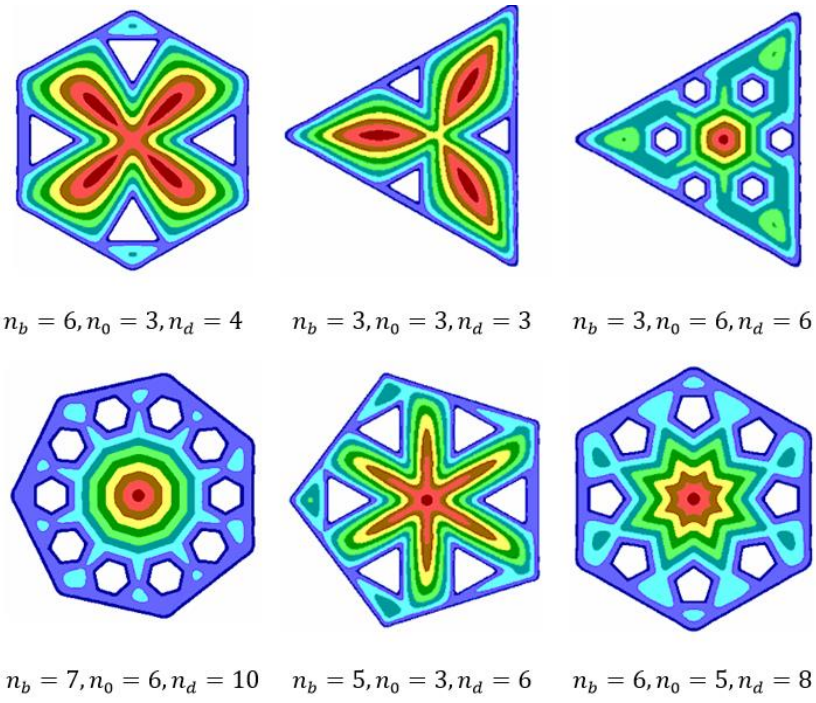


Рис.2.13. Правильні n_0- транслюються з поворотною симетрією у правильному n_b-кутнику n_d разів

Щоб отримати рівняння правильного n_0-кутника необхідно скористатися функцією $\sigma \equiv x - R_1$ та формулою (2.7), а потім, перенесемо початок координат у точку $(R_d, 0)$ і транслюємо з поворотною симетрією n_0-кутник n_d разів знову за формулою (2.7) [4].

В результаті отримаємо:

$$\omega_t \equiv r_1 \cos\mu_1 - R_1 = 0, \text{ де } r_1 = \sqrt{x_s^2 + y_s^2};$$

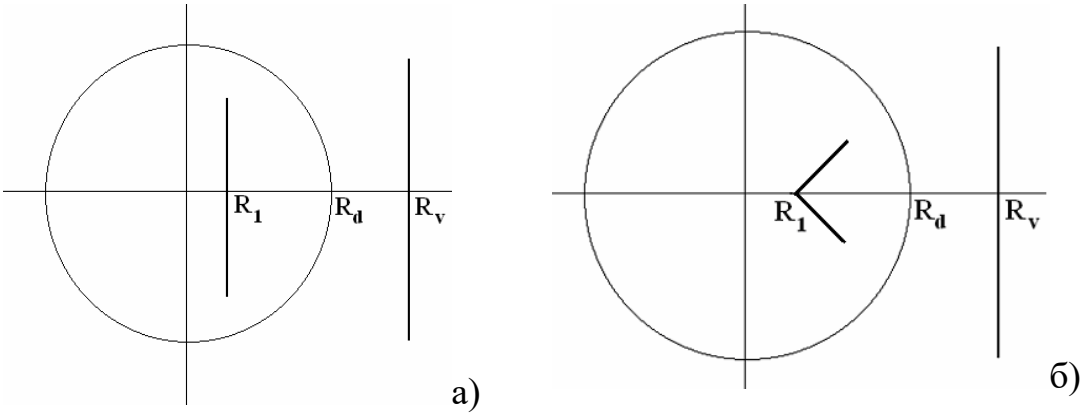
$$\begin{cases} x_s = r\cos\mu_d - R_d \\ y_s = r\sin\mu_d \end{cases};$$

$\mu_d = \frac{8}{n_d\pi}\sum_k (-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n_d\theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}$ — перетворення переносу початку координат у точку $(R_d, 0)$ та трансляції з поворотною симетрією n_d разів по колу радіусу R_d;

$\mu_1 = \frac{8}{n_0\pi}\sum_k (-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n_0\theta_1}{2}\right]}{(2k-1)^2}$;

$\theta_1 = \frac{1-sign(x_s)}{2}\pi + \arctan\frac{y_s}{x_s}$ — перетворення для правильного n_0-кутника.

Для побудови рівняння правильного n_b-кутника застосуємо функцію $\sigma \equiv R_v - x$ і знову формулу (2.7). У результаті отримаємо $\omega_v \equiv R_v - r\cos\mu_v = 0$, де $\mu_v = \frac{8}{n_b\pi}\sum_k (-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n_b\theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



а) б)

Рис.2.14. Вид опорних функцій для побудови: а) $\sigma_1 \equiv x - R_1$, $\sigma_2 \equiv R_v - x$; б) $\sigma_1 \equiv -y + k(x - R_1) \geq 0$, $\sigma_2 \equiv y - k(-x + R_1) \geq 0$, $\sigma_3 \equiv R_v - x \geq 0$

Підсумкове рівняння границі правильного n_0-кутника, трансльованого з поворотною симетрією у правильному n_b-кутнику n_d разів, має вид $\omega \equiv \omega_v \wedge_0 \omega_t = 0$ і є шестипараметричним $(n_0, n_b, n_d, R_1, R_d, R_v)$ сімейством кривих. Зауважимо, що R-операція застосовувалася лише один раз. Для порівняння розглянемо найпростіший випадок, коли $n_b = 3, n_0 = 3, n_d = 3$. Застосовуючи класичний підхід для побудови функції ω, необхідно задати шість функцій і застосувати сім R-операцій [4].

Приклад 2.7:

Нехай тепер правильні n_0-кутні зірки транслюються з поворотною симетрією у правильному n_b-кутнику n_d разів (рис.2.15). Усі побудови виконуватимуться за допомогою трьох функцій: $\sigma_1 = -y + k(x - R_1) \geq 0$, $\sigma_2 = y - k(-x + R_1) \geq 0$, де $k = \frac{10\sin(\pi/n_0)}{10\cos(\pi/n_0)-4}$, і $\sigma_3 = R_v - x \geq 0$ (рис.2.14, б) [4].



$n_b = 3, n_0 = 5, n_d = 6$ $n_b = 7, n_0 = 6, n_d = 10$ $n_b = 6, n_0 = 7, n_d = 6$

Рис. 2.15. Правильні n_0-кутні зірки транслюються з поворотною симетрією у правильному n_b-кутнику n_d разів

Запишемо рівняння n_0-кутної зірки. Для цього кон'юнктуємо функції $\omega_t = f_1 \wedge_0 f_2 = 0$ і скористаємося формулою (2.7). А потім перенесемо початок координат у точку $(R_d, 0)$ і транслюємо з поворотною симетрією зірку n_d разів за формулою (2.7). У результаті отримаємо:

$$\omega_t \equiv (-r_1 \sin\mu_1 + k(r_1 \cos\mu_1 - R_1)) \wedge_0 (r_1 \sin\mu_1 - k(-r_1 \cos\mu_1 + R_1)),$$

де $r_1 = \sqrt{x_s^2 + y_s^2}$, $\begin{cases} x_s = r\cos\mu_d - R_d \\ y_s = r\sin\mu_d \end{cases}$;

$\mu_d = \frac{8}{n_d\pi}\sum_k (-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n_d\theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}$ — перетворення переносу початку координат на точку $(R_d, 0)$ та трансляції з поворотною симетрією n_d разів по колу радіусу R_d;

$\mu_1 = \frac{8}{n_0\pi}\sum_k (-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n_0\theta_1}{2}\right]}{(2k-1)^2}$;

$\theta_1 = \frac{1-sign(x_s)}{2}\pi + \arctan\frac{y_s}{x_s}$ — перетворення для побудови n_0-кутної зірки.

Тепер запишемо рівняння правильного n_b-кутника. Для цього застосуємо функцію $\sigma = R_\nu - x \geq 0$ і формулу (2.7).

У результаті отримаємо $\omega_\nu \equiv (R_\nu - r\cos\mu_\nu = 0,$

де $\mu_\nu = \frac{8}{n_b\pi}\sum_k (-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n_b\theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}$,

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Підсумкове рівняння границі області, отриманої внаслідок трансляції з поворотною симетрією n_0-кутної зірки у правильному n_b-кутнику n_d разів, має вид $\omega \equiv \omega_\nu \wedge_0 \omega_t = 0$ і також є шестипараметричним $(n_0, n_b, n_d, R_1, R_d, R_\nu)$ сімейством кривих. У даному випадку R-операція використовувалася двічі [4].

За допомогою перетворень координат (2.7)-(2.9) можна за заданим рівнянням геометричного об'єкта $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0 \geq 0)]$ записати рівняння $\omega(x, y) = 0$ границі області $\Omega = \bigcup_{k=1}^{k=n}\Sigma_k$, отриманої внаслідок повороту ГО Σ_1 навколо початку координат на кути $\frac{2\pi k}{n}$ $(k = 0,1, \dots, n-1)$.

Тепер розглянемо випадок, коли необхідно записати рівняння, отримане внаслідок трансляції Σ_1 з поворотною симетрією на деякій дузі кінцеве число разів.

Перетворення координат, що здійснює трансляцію елемента на інтервалі φ с шагом θ_h, має вид:

$$\mu^*(\theta_1,\theta_h)=\left(\left(\theta_1-\frac{\theta_h}{2}\right)\wedge_1\mu(\theta_1,\theta_h)\right)\wedge_1\left(\varphi-\left(\theta_1+\frac{\theta_h}{2}\right)\right) \quad (2.11)$$

де $\mu(\theta_1,\theta_h)=\frac{4\theta_h}{\pi^2}\sum_k(-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\left(\theta_1-\frac{\theta_h}{2}\right)\frac{\pi}{\theta_h}\right]}{(2k-1)^2}$;

$\theta_1=\theta-\pi+\frac{\varphi}{2}$,

$n_d=\frac{\varphi}{\theta_h}$ — кількість елементів на дузі.

На рис.2.16 зображені приклади перфорації у вигляді трикутників та прямокутників з функцією $\omega(x,y)$, побудованої під час використання перетворення координат (2.11) [4].

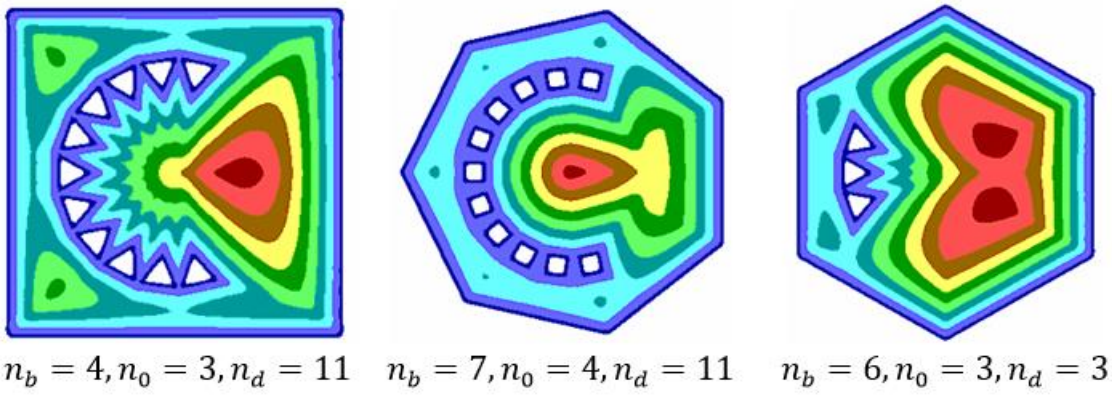


Рис.2.16. ГО, що побудовані за допомогою формули (2.11)

2.4 Моделювання упаковок ТВЕЛів з різними типами симетрії.

При побудові рівняння $\omega(x,y)=0$ границі правильного n_0-кутника, відтрансльованого у правильному n_b-кутнику n_d разів на інтервалі трансляції φ ($n_d=\frac{\varphi}{\theta_h}$ — кількість елементів на інтервалі, θ_h — крок трансляції) R-операція $\wedge_0$ використовувалася один раз, а $\wedge_1$— двічі при побудові перетворення $\mu^*(\theta_1,\theta_h)$.

Дане рівняння є семипараметричним $(n_0, n_b, \varphi, \theta_h, R_1, R_d, R_v)$ сімейством кривих.

Пример 2.8:

Розглянемо типову конструктивну схему реактора [4], активна зона якого збирається з великої кількості паливних касет [13]-[17]. Касетами є шестигранні кожухи, в яких розміщені тепловиділяючі елементи (рис.2.17).

Запишемо рівняння паливної касети з 91 ТВЕЛом та розсунутою трикутною упаковкою, відомою як шахова.

Для побудови шестигранного кожуха скористаємося прикладом 2.7 на рис.2.15. Тоді $f_b = r_k - x_1 \geq 0$, де $x_1 = r\cos\mu_1; \mu_1 = \frac{8}{n_0\pi}\sum_k(-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n_0\theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}$.

Тепер побудуємо трикутне пакування ТВЕЛів.

Для цього поставимо f_1, f_2:

$$f_1 = R^2 - \mu_x^2 - \mu_y^2 \geq 0,$$

де $\mu_x = \frac{4h_x}{\pi^2}\sum_k(-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{\pi x}{h_x}\right]}{(2k-1)^2}$, $\mu_y = \frac{4h_y}{\pi^2}\sum_k(-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{\pi x}{h_y}\right]}{(2k-1)^2}$,

$$f_2 = R^2 - \mu_{x1}^2 - \mu_{y1}^2 \geq 0,$$

де $\mu_{x1} = \frac{4h_x}{\pi^2}\sum_k(-1)^{k+1}\frac{\sin\left[\frac{(2k-1)\pi(x-h_x/2)}{h_x}\right]}{(2k-1)^2}$, $\mu_{y1} = \frac{4h_y}{\pi^2}\sum_k(-1)^{k+1}\frac{\sin\left[\frac{(2k-1)\pi(y-h_y/2)}{h_x}\right]}{(2k-1)^2}$.

Тоді рівняння паливної касети має вигляд $\omega \equiv f_b \wedge_0 \overline{(f_1 \vee_0 f_2)} = 0$.

На рис.2.17 [4] зображено картину ліній рівня функції $\omega(x, y)$ при наступних значень буквених параметрів: $R = 0.2; h_x = 2.32; h_y = 1.35; n_0 = 6; r_k = 6.7$.

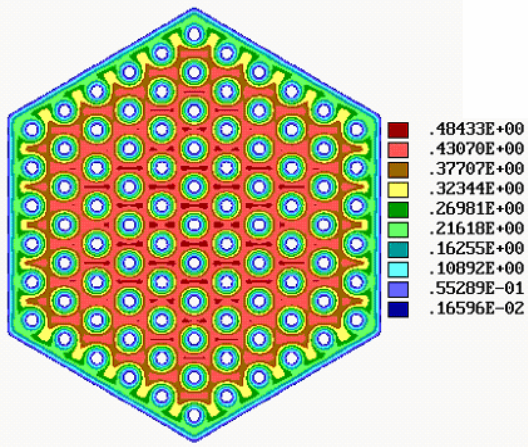
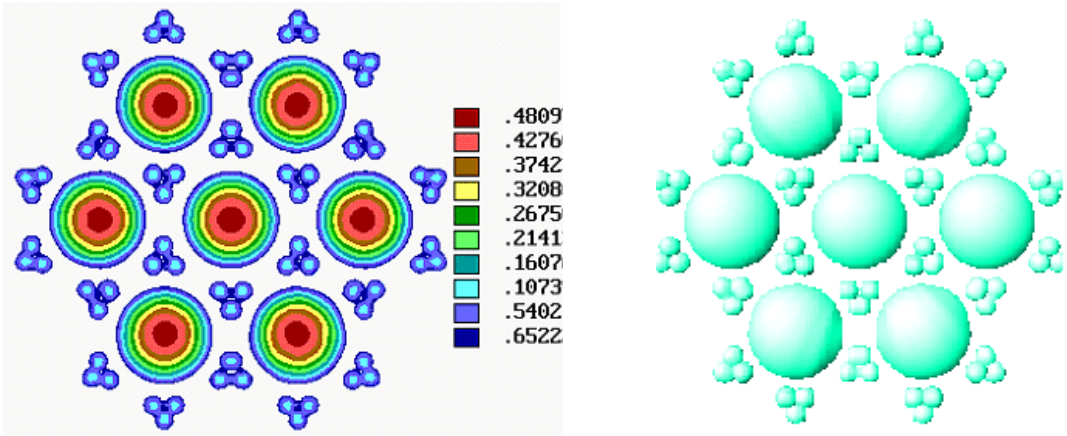


Рис.2.17. Паливна касета з 91 ТВЕЛом

У даному прикладі *R*-операція застосована лише двічі для трьох опорних функцій, а при класичному підході знадобилося б 94 опорні функції та 93 *R*-операції.

Пример 2.9:

У роботі [18] розглядається симетрія в кристалічній структурі рідкісноземельних металоорганічних сполук, використовуваних при зберіганні водню (рис.2.18). Запишемо рівняння цієї структури.



а) б)

Рис.2.18. Кристалічна структура рідкісноземельних металоорганічних сполук, що використовуються при зберіганні водню: а) картина ліній рівня; б) візуалізація в 3D

Запишемо рівняння для сфер:

$f_1 = (r_1^2 - x^2 - y^2 - z^2) \vee_0 \left(r_1^2 - x^2{}_1 - y^2{}_1 - z^2\right) \geq 0$, де $\begin{cases} x_1 = \rho \cos \mu_1 - r_{k1} \\ y_1 = \rho \sin \mu_1 \end{cases}$,

$\mu_1 = \frac{8}{n_0 \pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin\left[(2k-1)\frac{\theta n_0}{2}\right]}{(2k-1)^2}$, а трансляцію тріад маленьких сфер виконаємо за такими формулами:

$$f_2 = \left(r_2^2 - \left(x_2 - 2r_2 \cos\frac{\pi}{6}\right)^2 - y_2^2 - z^2\right) \vee_0 \left(r_2^2 - \left(x_2 - 2r_2 \cos\frac{\pi}{6}\right)^2 - y_2^2 - z^2\right) \vee_0$$
$$\vee_0 (r_2^2 - x_2^2 - (y_2 - r_2)^2 - z^2) \geq 0,$$

де $\begin{cases} x_2 = \rho_1 \cos \mu_2 - r_{k2} \\ y_2 = \rho_1 \sin \mu_2 \end{cases}$, $\begin{cases} \rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\ \theta_1 = \arctan \frac{y_1}{x_1} \end{cases}$,

$\mu_2 = \frac{8}{n_0 \pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin\left[\frac{(2k-1) n_0 (\theta_1 - \pi/2)}{2}\right]}{(2k-1)^2}$.

Підсумкове рівняння поверхні розглянутої кристалічної структури має такий вигляд: $\omega = f_1 \vee_0 f_2 = 0$. Усі обчислення проводилися за наступних значень буквених параметрів:

$r_1 = 0.8;\ r_2 = 0.16;\ r_{k1} = 2.2, r_{k2} = 1.15$ [4].

Приклад 2.10:

Розглянемо паралелепіпед $\omega_1 = \left((a^2 - x^2) \wedge_0 (b^2 - y^2)\right) \wedge_0 (c^2 - z^2) = 0$, який транслюється з кроком $h_1 = \frac{l}{n-1}$ по радіальним відрізкам правильного n-кутника і сферу $\omega_2 = a^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$, яка транслюється з кроком $h_2 = \frac{2l}{n-1} \sin\frac{\pi}{n}$ за його периметром, l — радіус описаного кола. [4].

Основний принцип побудови рівнянь меж областей з трансляційним та циклічним типами симетрії ґрунтується на перетвореннях координат із заздалегідь визначеною кількістю транслюваних примітивів на відрізку. Визначимо вид перетворень координат.

При трансляції вздовж радіального відрізка та по дузі:

$$\begin{cases} x_1 = \mu^* \\ y_1 = y_s \end{cases}$$

Где $\mu^* = (x_s \wedge_1 \mu) \wedge_1 (x_s - l)$, $\mu = \frac{4h_1}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2}\sin\frac{(2i-1)x_s\pi}{h_1}$, $\begin{cases} x_s = \rho\cos\mu_1 \\ y_s = \rho\sin\mu_1 \end{cases}$,

$\mu_1(\theta n) = \frac{8}{n\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)\right]}{(2k-1)^2}$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$.

При трансляції по периметру (вздовж відрізка на стороні n-кутника і по дузі):

$$\begin{cases} x_2 = \mu^{**} \\ y_2 = y_{s1} \end{cases}$$

де $\mu^{**} = (x_{s1} \wedge_1 \mu_2) \wedge_1 \left(2l\sin\frac{\pi}{n} - x_{s1}\right)$,

$\mu_2 = \frac{4h_2}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2}\sin\frac{(2i-1)x_{s1}\pi}{h_2}$, $\begin{cases} x_{ss1} = \rho\cos\mu_{11} \\ y_{ss1} = \rho\sin\mu_{11} \end{cases}$, $\begin{matrix} x_{s1} = y_{ss1} + l\sin\frac{\pi}{n} \\ y_{s1} = -x_{ss1} + l\cos\frac{\pi}{n} \end{matrix}$,

$\mu_{11}(\theta n) = \frac{8}{n\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n\theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}$.

Рівняння геометричного об'єкта, зображеного на рис.2.19, має вид:

$\omega = -(\omega_1 \vee_0 \omega_2) = 0$, де $\omega_1 = \left((a^2 - x_1^2) \wedge_0 (b^2 - y_1^2)\right) \wedge_0 (c^2 - z^2) = 0$.

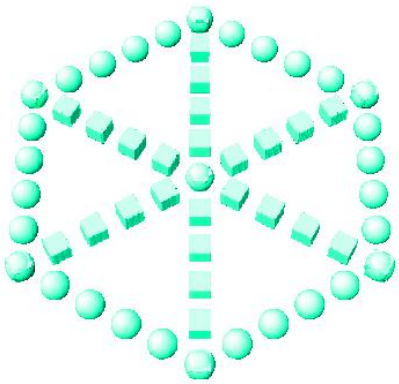


Рис.2.19. ГО з трансляційним та циклічним типом симетрії

Оскільки вся інформація записана в буквених параметрах, то задаючи значення n и l і при необхідності — a, b, c, d, h, h_1, можна автоматизувати процес трансляції для n-кутника. У прикладі 2.10 маємо восьмипараметричне сімейство і лише три R-операції. Якщо замінити сферу і паралелепіпед будь-якими ГО і використовувати наведені суперпозиції, то отримаємо аналогічні конфігурації [4].

Цей підхід відіграє істотну роль при вирішенні проблеми автоматизації в Solid Modelling, Geometrical Design, а також у крайових задачах математичної фізики [17], [19]. За допомогою цього методу можна визначити оптимальний розкрій листових та рулонних матеріалів, вирішити проблему розміщення обладнання у кораблях, літаках, заводських цехах, а також покращити розпізнавання геометричних образів. Більшість науково-технічних рішень, що спираються на дослідження полів різної фізичної природи, пов'язано зі збільшенням міцності, з підвищенням надійності, стійкості, довговічності, а ще зі зростанням якості виробів та конструкцій за наявності симетрії. Тут можна перерахувати перфоровані пластини та оболонки (фюзеляжі літаків та корпуси суден, та космічних кораблів, які ослаблені ілюмінаторами); пилки, фрези, зубчасті передачі; грати в техніці надвисоких частот та гідродинамічних конструкціях; ротори турбін та бланкети тепловиділяючих елементів ядерних реакторів.

Цей новий метод побудови рівнянь симетричних геометричних об'єктів легко адаптується до будь-якого програмного забезпечення. Його дослідна експлуатація у системі ПОЛЕ підтвердила багаторазове скорочення тимчасових витрат.

Висновки

У цьому розділі показано, що використання математичного апарату R-функцій суттєво спрощує процес аналітичного опису геометричних об'єктів майже будь-якої складності. Крім того, метод R-функцій позбавлений більшості недоліків стандартних методів геометричного моделювання. Було проведено аналіз конструктивних засобів математичного моделювання геометричних об'єктів за допомогою R-функції.

Також розглянуті методи побудови рівнянь геометричних об'єктів, що мають симетрію.

РОЗДІЛ 3

Аналітична ідентифікация геометричних об’єктів у 3D

3.1. Методи побудови примітивів у 3D. Гвинтова симетрія.

Численні приклади побудови нормалізованих рівнянь меж геометричних об'єктів розглядаються у роботах [3], [20], [10]. У роботі [3] розписані деякі підходи до побудови рівнянь поверхонь найпростіших ГО в тривимірному просторі, а в працях [21], [22] було виконано їх розвиток та систематизація. Практичний досвід побудови нормалізованих рівнянь поверхонь ГО у 3D з використанням теорії *R*-функцій невеликий і вимагає певних математичних знань та навичок. Хоча у роботах В.Л. Рвачева [3], [20] згадується, що принципових теоретичних труднощів при застосуванні R-функцій для побудови рівнянь поверхонь ГО в 3D немає. Але на практиці це завдання виявилося дуже непростим і вимагає додаткових досліджень, створення нових підходів та розробки конструктивних засобів для вирішення поставлених завдань. К.В. Максименко-Шейко, Т.І. Шейко у своїх роботах [4], [23], [7], [24], [25] розглядають методи побудови тривимірних стандартних примітивів та наводять приклади таких побудов.

Класичні методи побудови рівнянь поверхонь тіл обертання, призматичних та конічних тіл, а також скручених циліндрів та змійовиків некласичного поперечного перерізу добре поєднуються зі способами побудови рівнянь геометричних об'єктів на основі RFM.

Спочатку розпишемо методи побудови нормалізованих рівнянь поверхонь тіл обертання [4], [26].

Нехай $\omega_0(x,y)=0$ - нормалізоване рівняння границі області $\Omega=(\omega_0(x,y)\geq 0)$.

Тоді рівняння виду:

$$\omega(x,y,z)\equiv\omega_0\left(x,\sqrt{y^2+z^2}\right)=0 \quad (3.1)$$

є рівнянням ГО Ω, для якого вісь абсцис є віссю симетрії. Цей прийом з аналітичної геометрії має як позитивну так і негативну сторону.

Позитивна особливість полягає в тому, що якщо рівняння $\omega_0(x,y)=0$ нормалізовано до певного порядку, то нормалізованим до цього порядку є і рівняння $\omega(x,y,z)=0$. Нехай ν - нормаль до ГО Ω до деякої його точці, а ν_0 — відповідна нормаль до Ω_0. Відповідність між ν і ν_0 встановлюється в тому, що є такий кут, при повороті на який навколо осі Ox нормаль ν_0 збігається з нормаллю ν. Оскільки значення функції $\omega(x,y,z)$ вздовж нормалі ν такі ж, як і значення функції $\omega_0(x,y)$ вздовж нормалі ν_0, тто збігаються і всі їх похідні. Значить, згадане рівняння ГО Ω нормалізовано до того ж порядку, що й рівняння ГО Ω_0.

Негативна особливість рівняння (3.1) полягає в тому, що навіть при «хорошій» за своїми диференціальними властивостями функції $\omega_0(x,y)$, проте функція $\omega(x,y,z)$ може бути недиференційованою в точках осі обертання.

Розглянемо ГО Ω_0, що задається рівнянням $\omega_0(x,y)=0$. Тоді дзеркальне відображення Ω_0 щодо осі Ox буде виражатися як $\omega_0(x,-y)=0$. Обидва рівняння належать до одного і того ж диференціального класу (наприклад, $C^m(R^2)$), а також одночасно нормалізовані або не нормалізовані до того чи іншого порядку. Нехай $\omega_0(x,y)=0$ є границею області $\Omega_0=(\omega_0(x,y)\geq 0)$. Тоді нерівність $\omega_0(x,-y)\geq 0$ визначає область Ω_0', яка є дзеркальним відображенням області Ω_0 щодо осі Ox.

Нерівність $\omega_0^*(x,y)\equiv\omega_0(x,y)\vee_0\omega_0(x,-y)\geq 0$ визначає з'єднання областей Ω_0 та $\acute{\Omega}_0$. Нехай область Ω_0 не перетинається з віссю Ox. Тоді легко показати, що функція $\omega_0^*(x,y)$ належить тому ж диференційному класу, що і функція $\omega_0(x,y)$. А застосувавши до $\omega_0^*(x,y)=0$ формулу (3.1), отримаємо рівняння розглянутої поверхні обертання:

$$\omega(x,y,z)\equiv\omega_o\left(x,\sqrt{y^2+z^2}\right)\vee_0\omega_0\left(x,-\sqrt{y^2+z^2}\right)=0 \quad (3.2)$$

Звідки слід:

$$\frac{\partial\omega(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial\omega_0^*\left(x,\sqrt{y^2+z^2}\right)}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\Bigg|_{y=z=0} = 0.$$

Отже, і $\frac{\partial\omega(x,0,0)}{\partial z} = \mathbf{0}$. Таким чином, на відміну від рівняння (3.1), рівняння (3.2) не має на осі обертання розривів похідних. І за властивостями досить повної системи$\{\boldsymbol{R_0}\}$рівняння (3.2) нормалізовано до першого порядку, якщо нормалізовано рівняння $\boldsymbol{\omega_0(x,y) = 0}$.

Одним із найбільш практичних методів побудови ГО в 3D і 2D є введення функціональних параметрів [4], [24], [21], а саме, якщо описати границю ГО у площині $\boldsymbol{xOy}$ за допомогою рівняння:

$$\omega_0(x, y, c_1, \dots, c_m) = 0, \quad (3.3)$$

де $\boldsymbol{c_i}$ — геометричні параметри, що визначають форму та розміри ГО $\boldsymbol{\Omega_0}$ та його елементів, то, ввівши функції $\boldsymbol{c_i(z)}$ $(\boldsymbol{i = 1, \dots, m})$ і, рахуючи що $\boldsymbol{c_i(0) = c_i}$, отримаємо рівняння поверхні виду [22]

$$\omega\big(x, y, c_1(z), \dots, c_m(z)\big) = 0,$$

якому в перерізах $z = h = const$ будуть відповідати ГО, що описуються (3.3).

Пример 3.1:

Відомо, що при $z = 0$ границя ГО у площині xOy має вигляд прямокутника зі сторонами $x = \pm a, y = \pm b$ і описується рівнянням $(a^2 - x^2) \wedge_0 (b^2 - y^2) = 0$. А при $z = H$ границя ГО — також прямокутник зі сторонами $x = \pm c, y = \pm d$, і описується рівнянням $(c^2 - x^2) \wedge_0 (d^2 - y^2) = 0$. Тепер запишемо рівняння бічної поверхні з лінійною залежністю по z, що сполучає прямокутники, у вигляді [4]

$$\partial\Omega = \left(\left(\left[a\left(1 - \frac{z}{H}\right) + c\frac{z}{H}\right]^2 - x^2\right) \wedge_0 \left(\left[b\left(1 - \frac{z}{H}\right) + d\frac{z}{H}\right]^2 - y^2\right) = 0\right).$$

Крім того, потрібно звернути увагу на випадок, коли в нижньому, верхньому та всіх проміжних перерізах розташовані ГО, які володіють властивістю

геометричної подоби. Нехай відомо побудоване за допомогою R-функцій рівняння границі ГО у площині xOy — $\omega(x,y)=0$, тоді рівняння подібної фігури описуватиметься як $\frac{1}{k}\omega(kx,ky)=0$, де k — коефіцієнт подібності. Задаючи $k=k(z)$, за умови, що $k(0)=1$, отримаємо рівняння поверхні

$$\partial\Omega=\left(\frac{1}{k(z)}\omega(k(z)x,k(z)y)=0\right),$$

якому в перерізах $z=H=const$ відповідають подібні ГО.

З робіт [4], [26], [27] відомо, що нормалізоване рівняння $\omega(x,y)=0$ описує нескінченну призму (або циліндр) у 3D. Заміна змінних $\begin{cases}x-\alpha z\Rightarrow x\\ y-\beta z\Rightarrow y\end{cases}$ позволяє описати нахилу призму (або циліндр) через рівняння $\omega(x-\alpha z,y-\beta z)=0$ з утворюючими, паралельними вектору $\overline{a}=(\alpha,\beta,1)$ і направляючою, що описується рівнянням $\omega(x,y)=0$. Тепер нормалізоване рівняння похилої призми (або циліндра) можна записати як

$$\omega_H\equiv\frac{\omega(x-\alpha z,y-\beta z)}{\sqrt{1+F^2(x,y,z)}}=0,$$

де $F(x,y,z)=\alpha\frac{\partial\omega(x-\alpha z,y-\beta z)}{\partial x}+\beta\frac{\partial\omega(x-\alpha z,y-\beta z)}{\partial y}$.

Використовуючи заміну змінних $\begin{cases}x_0-z_0\frac{x-x_0}{z-z_0}\Rightarrow x\\ y_0-z_0\frac{y-y_0}{z-z_0}\Rightarrow y\end{cases}$ можна записати рівняння $\omega\left(x_0-z_0\frac{x-x_0}{z-z_0},y_0-z_0\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0$ конічної поверхні з вершиною в точці $A(x_0,y_0,z_0)$ [54], для якої напрямна описується рівнянням $\omega(x,y)=0$.

Запишемо рівняння ГО, закрученого вздовж осі z за деяким законом $\varphi(z)$. Нехай у площині xOy границя $\partial\Omega_0$ ГО Ω_0 описується рівнянням $\omega(x,y)=0$, тоді за допомогою заміни змінних $\begin{cases}x\cos\varphi(z)+y\sin\varphi(z)+c_x(z)\Rightarrow x\\ y\cos\varphi(z)-x\sin\varphi(z)+c_y(z)\Rightarrow y\end{cases}$ можемо записати рівняння:

$$\omega(x\cos\varphi(z)+y\sin\varphi(z)+c_x(z),y\cos\varphi(z)-x\sin\varphi(z)+c_y(z)),$$

яке визначає в 3D такий ГО, що його перерізу площинами $z=H=const$ виходять із ГО Ω_0 за допомогою обертання навколо осі Oz та зміщення всіх його

точок у площині $z = H$ на вектор $\bar{c}(c_x(z), c_y(z))$. У роботах [3], [22] вказано методику нормалізації отриманого рівняння поверхні скрученого циліндра 3D. Для цього можна скористатися формулою:

$$\omega_n(x,y,z) = \frac{\omega(x,y,z)}{\sqrt{(\nabla\omega(x,y,z))^2+\omega^2(x,y,z)}},$$

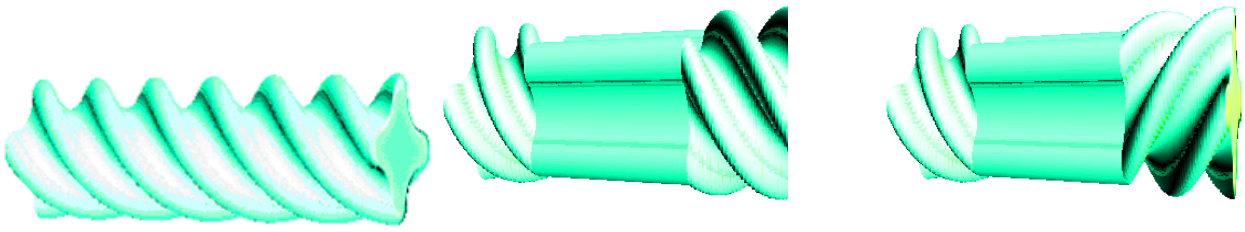
Отримати нормалізоване рівняння поверхні можна й іншим чином: якщо $\vec{c}(c_1, c_2)$, де c_1, c_2 — константи, а $\varphi(z) = \alpha z$, то за формулою:

$$\omega_n(x,y,z) = \frac{\omega(x\cos\alpha z+y\sin\alpha z, y\cos\alpha z-x\sin\alpha z)}{\sqrt{(\nabla\omega(x\cos\alpha z+y\sin\alpha z, y\cos\alpha z-x\sin\alpha z))^2}}.$$

Нехай $\varphi(z)$ лінійна функція виду $\varphi(z) = \alpha z$, а $c_x = c_y = 0$, тоді ГО Ω виходитиме з ГО Ω_0 через рух Ω_0 вздовж гвинтової лінії з віссю Oz, а саме, за допомогою обертання навколо осі Oz і рівномірного поступального руху вздовж неї (рис.3.1, а) [4], [26]. У такому разі нормалізоване в 3D рівняння має вигляд:

$$\frac{\omega(\hat{x},\hat{y})}{\sqrt{1+\alpha^2\left(\hat{y}\frac{\partial\omega}{\partial\hat{x}}-\hat{x}\frac{\partial\omega}{\partial\hat{y}}\right)^2}} = 0,$$

де $\begin{cases}\hat{x} = x\cos\alpha z + y\sin\alpha z\\ \hat{y} = -x\sin\alpha z + y\cos\alpha z\end{cases}$.



а) б) в)

Рис. 3.1. Скручений циліндр: а) з постійною закруткою; б) зі змінним кроком закрутки; в) зі змінним кроком та напрямком закрутки

Запишемо рівняння границі поперечного перерізу $\omega(x,y) = 0$ (рис.3.2) для вищезгаданого скрученого циліндра з використанням системи $\{R_\alpha\}$ у вигляді:

$$\omega(x,y) \equiv \Big(\big((f_1 \vee_\alpha f_5) \vee_\alpha f_{10}\big) \wedge_\alpha \big((f_3 \vee_\alpha f_7) \vee_\alpha f_9\big)\Big) \wedge_\alpha \Big(\big(\overline{f_4} \wedge_\alpha \overline{f_8}\big) \wedge_\alpha \big(\overline{f_2} \wedge_\alpha \overline{f_6}\big)\Big),$$

де опорні функції записуються як:

$$f_1 \equiv \frac{r_1^2-x^2-(y-a)^2}{2r_1} \geq 0; f_2 \equiv \frac{r_1^2-(x-c)^2-(y-d)^2}{2r_2} \geq 0; f_3 \equiv \frac{r_1^2-(x-a)^2-y^2}{2r_1} \geq 0$$

$$f_4 \equiv \frac{r_1^2-(x-c)^2-(y+d)^2}{2r_2} \geq 0; f_5 \equiv \frac{r_1^2-x^2-(y+a)^2}{2r_1} \geq 0; f_6 \equiv \frac{r_1^2-(x+c)^2-(y+d)^2}{2r_2} \geq 0$$

$$f_7 \equiv \frac{r_1^2-(x+a)^2-y^2}{2r_1} \geq 0; f_8 \equiv \frac{r_1^2-(x+c)^2-(y-d)^2}{2r_2} \geq 0; f_9 \equiv \frac{a^2-x^2}{2a} \geq 0; f_{10} \equiv \frac{a^2-y^2}{2a} \geq 0$$

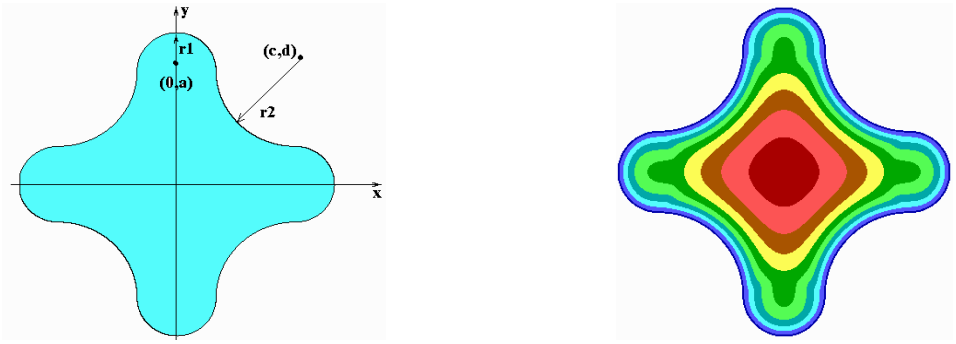
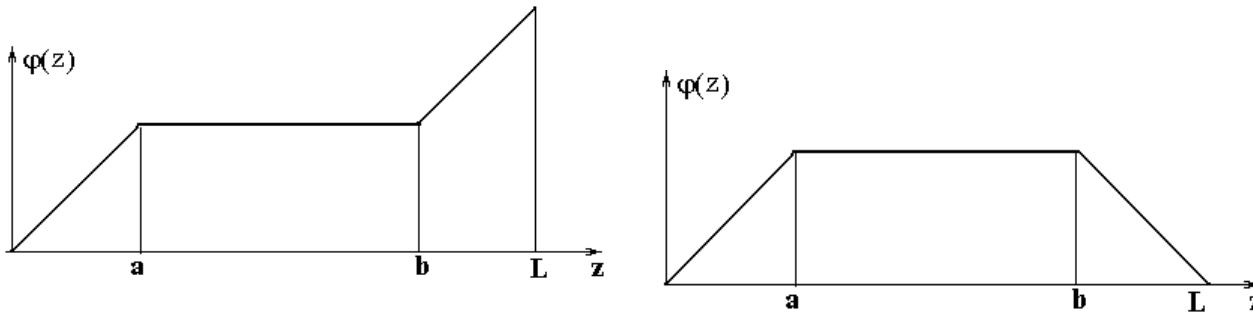


Рис. 3.2. Поперечний переріз скрученого циліндра

Нехай функція $\varphi(z)$ описується законом, зображеному на рис.3.3, а) [4].



а) б)

Рис. 3.3. Закони закрутки: а) $\varphi(z) = (\varphi_1 \wedge_1 \varphi_2) \vee_1 \varphi_3$; б) $\varphi(z) = (\varphi_1 \wedge_1 \varphi_2) \wedge_1 \varphi_3$

Тоді, за допомогою R-операцій системи $\{R_1\}$, запишемо цей закон у вигляді:

$$\varphi(z) = (\varphi_1 \wedge_1 \varphi_2) \vee_1 \varphi_3, \text{ де } \varphi_1 = \frac{2\pi}{h}z;\ \varphi_2 = \frac{2\pi}{h}a;\ \varphi_3 = \frac{2\pi}{h}(z-b+a).$$

Після підстановки отримуємо циліндр, скручений за годинниковою стрілкою лише на ділянках $(-\infty; a); (b; \infty)$ (рис.3.1, б).

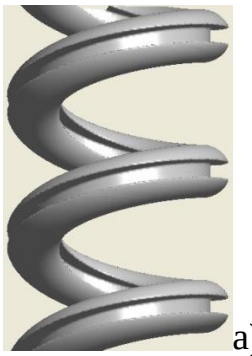
Якщо функція $\varphi(z)$ задана за законом, зображеним на рис.3.3, б, то використовуючи R-операції системи $\{R_1\}$, цей закон можна висловити як

$$\varphi(z) = (\varphi_1 \wedge_1 \varphi_2) \wedge_1 \varphi_3, \text{ де } \varphi_1 = \frac{2\pi}{h}z;\ \varphi_2 = \frac{2\pi}{h}a;\ \varphi_3 = \frac{2\pi}{h}(L-z).$$

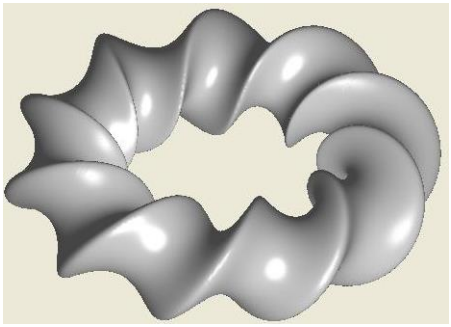
Після підстановки отримуємо циліндр, скручений за годинниковою стрілкою на ділянці $(-\infty; a)$, та проти годинникової стрілки на ділянці $(b; \infty)$(рис.3.1, в).

Для побудови рівняння нескінченного змійовика розглянемо тор із перерізом, границю якого можна описати як $\omega\left(\sqrt{x^2+y^2}-c, z\right)=0$. Вважаємо, що функція $\omega(\sqrt{x^2+y^2}-c, z)$ нормалізована [28], [11].

Виконаємо підстановку $z \Rightarrow z-\alpha \arctan\frac{y}{x}$, де $\alpha=\frac{H}{2\pi}$ у рівнянні $\omega\left(\sqrt{x^2+y^2}-c, z\right)=0$, і отримаємо рівняння $\omega_b(x,y,z) \equiv \omega\left(\sqrt{x^2+y^2}-c, z-\right.$ $\left.-\alpha \arctan\frac{y}{x}\right)=0$ нескінченної поверхні $\partial\Omega_b$ (рис.3.4, а), що обмежує область Ω_b змійовика [4], [3], із кроком H і поперечним перерізом $\partial\Omega$.



а)



б)

Рис. 3.4. ГО, побудовані на основі тора: а) змійовик; б) скручений тор

Запишемо рівняння границі поперечного перерізу даного змійовика (рис 3.5). Використовуючи R-операції системи $\{R_0\}$ у рівнянні $\omega\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0$ отримаємо $\omega(x,z) \equiv f_1 \wedge_0 (f_2 \vee_0 f_3)=0$, де опорні функції є

$$f_1 \equiv \frac{R_0^2-\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2-z^2}{2R_0} \geq 0; f_2 \equiv \frac{a^2-\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2}{2R} \geq 0; f_3 \equiv \frac{z^2-b^2}{2b} \geq 0 \ .$$

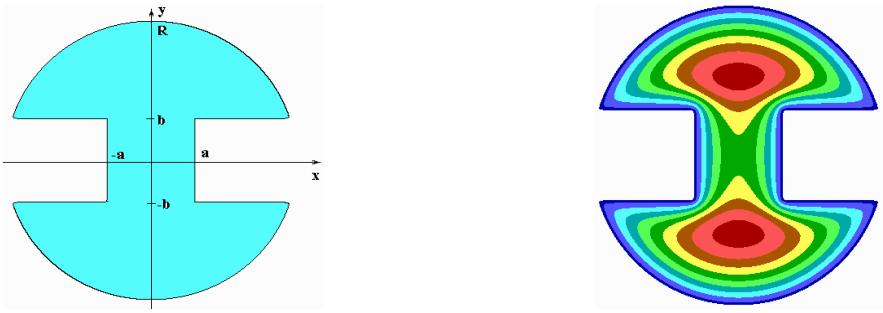


Рис. 3.5. Поперечний переріз змійовика

А нормалізованим у 3D рівнянням поверхні змійовика буде [4], [24]

$$\frac{\omega(r,z_1)}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{r^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial z_1}\right)^2}}=0,\ \text{де}\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ z_1=z-\alpha\arctan\frac{y}{x}\end{cases}$$

Варто зазначити, що для змійовиків $\boldsymbol{r\neq 0}$ при $\boldsymbol{\omega(r,z_1)\geq 0}$.

Щоб записати рівняння скрученого тора розглянемо тор із перерізом, границя якого описується рівнянням $\boldsymbol{\omega(x,z)=0}$. Після підстановки [4], [11], [24]

$$\begin{cases}(\boldsymbol{r-R})\cos\frac{\boldsymbol{R\varphi}}{\boldsymbol{h}}+\boldsymbol{z}\sin\frac{\boldsymbol{R\varphi}}{\boldsymbol{h}}\Rightarrow\boldsymbol{x}\\ -(\boldsymbol{r-R})\sin\frac{\boldsymbol{R\varphi}}{\boldsymbol{h}}+\boldsymbol{z}\cos\frac{\boldsymbol{R\varphi}}{\boldsymbol{h}}\Rightarrow\boldsymbol{z}'\end{cases}$$

де $\boldsymbol{r=\sqrt{x^2+y^2}};\ \boldsymbol{\varphi=\arctan\frac{y}{x}}$ у рівняння $\boldsymbol{\omega(x,z)=0}$, отримаємо рівняння

$$\boldsymbol{\omega\left((r-R)\cos\frac{R\varphi}{h}+z\sin\frac{R\varphi}{h},-(r-R)\sin\frac{R\varphi}{h}+z\cos\frac{R\varphi}{h}\right)=0}$$

поверхні (рис.3.4, б), що обмежує область скрученого тора еліптичного перерізу, тобто $\boldsymbol{\omega(x,z)=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}}$.

Загальна ідея побудови рівнянь наведених вище геометричних об'єктів: щоб отримати рівняння необхідного ГО у 3D спочатку виконується заміна змінних у рівняннях напрямних та границь поперечних перерізів у 2D $\omega(x,y)=0$:

$$\begin{cases}\psi_1(x,y,z)\Rightarrow x\\ \psi_2(x,y,z)\Rightarrow y\end{cases}.$$

Підсумкове рівняння $\omega\big(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z)\big)=0$ і є необхідним рівнянням. Такий підхід добре поєднується зі способами побудови рівнянь ГО з геометричними сингулярностями та поверхнями подвійного шару [4], [27].

Всі побудовані рівняння найпростіших тривимірних геометричних об'єктів можна використовувати як стандартні примітиви з буквеними геометричними параметрами для подальшої автоматизації завдання геометричної інформації про складені з них інших ГО [4], [24].

3.2. Побудова рівнянь ТВЕЛів з гвинтовою симетрією в 3D.

Розглянемо математичні моделі оболонок ТВЭЛов с полізональним та шевронним ребранням. Обрібнення теплопередаючих поверхонь часто використовують для збільшення ефективного коефіцієнта теплопередачі. Форма ребрування може бути дуже різноманітна. Застосовують як поздовжні, поперечні або спіральні ребра, так і ребра у вигляді шипів і т.д. У роботах [29], [30], [31] розписані докладні відомості про різні способи оребрення та технології виготовлення ребристих поверхонь, а також рекомендації з гідравлічного та теплового розрахунку.

Оребріння не тільки збільшує поверхню теплообміну, а ще впливає на гідродинаміку потоку і на коефіцієнт тепловіддачі. Завдяки експериментам з різними методами оребрування оболонок твелів були розроблені більш вигідні форми оребрення, як шевронне та полізональне.

При шевронному оребренні вся поверхня оболонки ділиться на чотири, шість або вісім секторів, а на сусідніх секторах спіралі розташовані симетрично щодо поздовжньої осі. Ефективність шевронного оребрення визначається характером руху газу каналі, тим самим забезпечуються високі коефіцієнти тепловіддачі від реберної поверхні до потоку теплоносія.

Розглянемо кілька прикладів ТВЕЛів із зазначеними способами оребрення:

1. Оболонка ТВЕЛа з полізональним оребренням (рис.3.6, а).

$$\omega = \left(1 - \frac{(sx-2)^2}{0.56^2} - \frac{sy^2}{0.2^2} \vee_0 4 - x^2 - y^2\right) \wedge_0 7.5^2 - z^2 \geq 0, \begin{cases} sx = rs\cos\mu s \\ sy = rs\sin\mu s \end{cases},$$

$$\mu s = \frac{8}{\pi n_{01}} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1)\frac{\theta s n_{01}}{2}}{(2k-1)^2}; rs = \sqrt{xs^2 + ys^2};\ \theta s = \arctan\frac{ys}{xs}$$

$$\begin{cases} xs = x\cos\frac{fi}{n} + y\sin\frac{fi}{n} \\ ys = y\cos\frac{fi}{n} - x\sin\frac{fi}{n} \end{cases}; fi = \frac{2\pi z}{10}; n = 3$$

2. Оболонка ТВЕЛа з горизонтальним шевронним оребренням (рис.3.6, б).

$$\omega = \left(1 - \frac{(sx-2)^2}{0.56^2} - \frac{sy^2}{0.2^2} \vee_0 4 - x^2 - y^2\right) \wedge_0 7.5^2 - z^2 \geq 0, \begin{cases} sx = rs\cos\mu s \\ sy = rs\sin\mu s \end{cases}$$

$$\mu s = \frac{8}{\pi n_{01}} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1)\frac{\theta s n_{01}}{2}}{(2k-1)^2}; rs = \sqrt{xs^2 + ys^2};\ \theta s = \arctan\frac{ys}{xs}$$

$$\begin{cases} xs = x\cos\frac{fi}{nl} + y\sin\frac{fi}{nl} \\ ys = y\cos\frac{fi}{nl} - x\sin\frac{fi}{nl} \end{cases}; fi = \frac{4h}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1)\frac{\pi z}{h}}{(2k-1)^2}; h = 3; nl = 3$$

3. Оболонка ТВЕЛу з вертикальним шевронним оребренням (рис.3.6, в).

$$\omega = \left(1 - \frac{(sx-2)^2}{0.56^2} - \frac{sy^2}{0.2^2} \vee_0 4 - x^2 - y^2\right) \wedge_0 7.5^2 - z^2 \geq 0, \begin{cases} sx = r_0 s\cos\mu_1 \\ sy = r_0 s\sin\mu_1 \end{cases},$$

$$r_0 s = \sqrt{xs^2 + ys^2};\ \theta s = \arctan\frac{ys}{xs}; \mu_1 = \frac{8}{\pi n_{01}} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1)\frac{\theta s n_{01}}{2}}{(2k-1)^2};$$

$$\begin{cases} xs = xx\cos\frac{fi}{n} + yy\sin\frac{fi}{n} \\ ys = yy\cos\frac{fi}{n} - xx\sin\frac{fi}{n} \end{cases}; \begin{cases} xx = r\cos\mu_2 \\ yy = r\sin\mu_2 \end{cases};$$

$$\mu_2 = \frac{8}{\pi n_{02}} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1)\frac{\theta n_{02}}{2}}{(2k-1)^2}; fi = \frac{2\pi z}{20}; r = \sqrt{x^2 + y^2};\ \theta = \arctan\frac{y}{x};$$

$n_{02} = 6$— кількість секторів.

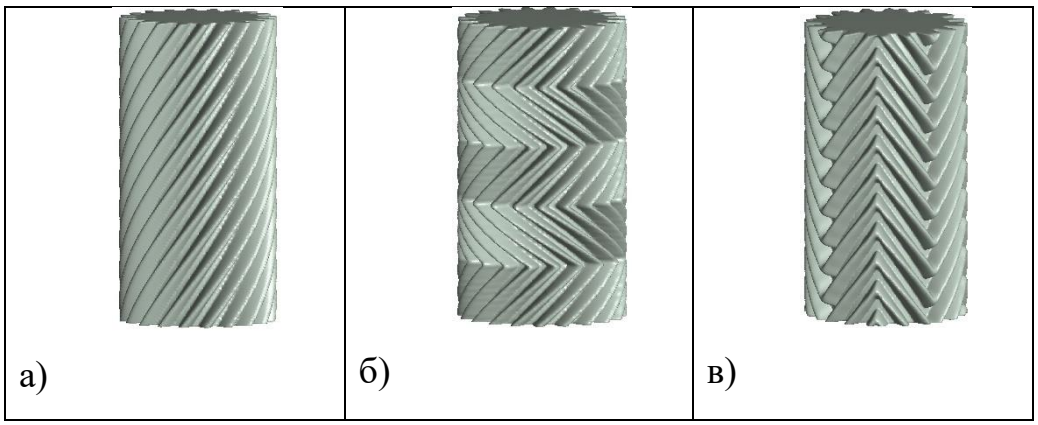


Рис.3.6. Оболонки ТВЕЛів із оребрінням: а) — полізональне, б) — горизонтальне; в) — шевронне оребрування

У додатку А наведена програма побудови математичної моделі оболонки ТВЭЛа із поздовжнім оребренням у системі RFPreview [32].

ДОДАТОК А

Розглянемо багатозонний тепловиділяючий елемент з поздовжнім оребренням і гвинтоподібними пластинами (рис 4.1). Щоб підвищити тепловіддачу на оболонці роблять гвинтоподібне ребро висотою 10,4 мм (80 оборотів по всій довжині каналу).

Кінцеві деталі, приварені до оболонки, служать для центрування ТВЕЛа по осі робочого каналу. А при викривленні ТВЕЛу різко зменшується тепловіддача, підвищується температура, що, своєю чергою, викликає посилене руйнування ребер.

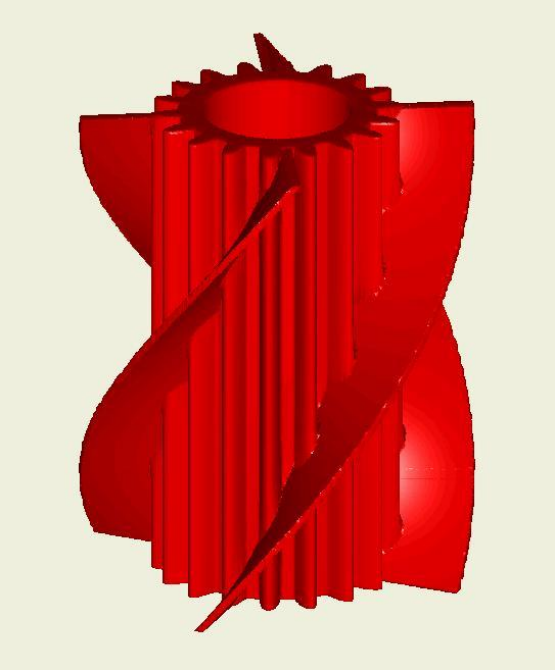


Рис.4.1. ТВЕЛ з поздовжнім оребренням і гвинтоподібними пластинами

ЦЕЛЬ

Побудувати математичну модель, алгоритм та реалізувати в рамках однієї комп'ютерної програми багатозонні ТВЕЛи (n_1) з гвинтоподібними пластинами (n_2) та (φ_1) – кутами закручування.

Программа построения математической модели оболочки ТВЭЛа с продольным оребрением в системе RFPreview:

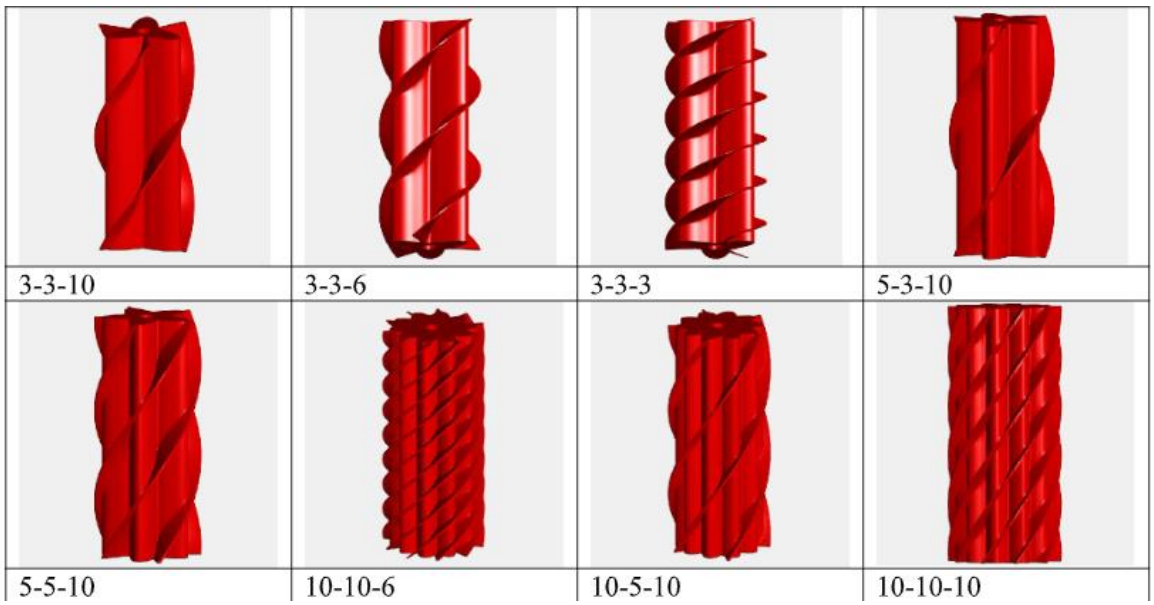
```
pi=3.1415926;
      no1=5; no2=4;
      ro=sqrt(x*x+y*y);
      teta=atan2(y,x);
      ff=(teta)*no1/2;
      mul=8/pi/no1*(sin(ff)-sin(3*ff)/9+sin(5*ff)/25-
sin(7*ff)/49+sin(9*ff)/81);
      sxl=(ro*cos(mul));
      syl=(ro*sin(mul));
      w22=rfAND(sxl,1-sxl*sxl/9-syl*syl/1);
      %**************************;
      no3=6;
      fi=2*pi*z/no3;
      xs=x*cos(fi/3)+y*sin(fi/3);
      ys=y*cos(fi/3)-x*sin(fi/3);
      ros=sqrt(xs*xs+ys*ys);
      tetas=atan2(ys,xs);
      fff=(tetas)*no2/2;
      mu=8/pi/no2*(sin(fff)-sin(3*fff)/9+sin(5*fff)/25-
sin(7*fff)/49+sin(9*fff)/81);
      sx=(ros*cos(mu));
      sy=(ros*sin(mu));
      wlop=rfAND(0.1*0.1-sy*sy,sx*(3.5-sx));
      %**********************************;
      w2=rfOR(w22,wlop);
      wc=x*x+y*y-.5*.5;
      wt=rfAND(rfAND(w2,(10+z)*(5.8-z)),wc);
      res=wt;
```

Результатом є ТВЕЛ з п'ятьма вертикальними зонами та поздовжнім оребренням, у якого з 4 гвинтовими пластинами. Кут скручування $\varphi = \frac{2\pi z}{n_{03}}$, где $n_{03} = 6$ (рис 4.2)



Рис 4.2

Змінюючи кількість вертикальних зон (n_{01}) та число гвинтоподібних пластин (n_{02}), а також параметр (n_{03}) для кута скручування, продемонструємо ще кілька варіантів:



СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1] Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. //М., Наука, 1965.408с.

[2] Рвачев В.Л., Проценко В.С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. //К., Наук.думка, 1977. 235 с.

[3] Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. //К., Наук.думка, 1982. 552 с..

[4] Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. //Монография. Харьков, ИПМаш НАН Украины, 2009. 306с

[5] Вейль Г. Симметрия. //М., Наука, 1968. 144 с.

[6] Калєкін О.Ю., Слесаренко А.П. Розрахунок температурного поля пластин складної форми з системами двоякоперіодичних отворів, включень і джерел енергії // ДАН УРСР. сер. А, 1973. С. 436-439.

[7] Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов, обладающих симметрией //Кибернетика и системн. анализ, 2008. №6. С. 75-83.

[8] Максименко-Шейко К.В., Толок А.В., Шейко Т.И. R-функции как аппарат в приложениях фрактальной геометрии // Прикладная информатика. Москва, 2010. №6 (30). С. 21-27..

[9] Рвачев В.Л., Шейко Т.И., Шапиро В. Метод R-функций (RFM) в краевых задачах с геометрической и физической симметрией // Мат. методы и физ.-мех. поля, 1998. Вып. 41, №1. С. 146-159.

[10] Рвачев В.Л., Шейко Т.И., Шапиро В. Метод R-функций (RFM) в краевых задачах с геометрической и физической симметрией // Мат. методы и физ.-мех. поля, 1998. Вып. 41, №1. С. 146-159

[11] Рвачев В.Л., Шейко Т.И., Шапиро В. Метод R-функций (RFM) в краевых задачах с геометрической и физической симметрией // Мат. методы и физ.-мех. поля, 1998. Вып. 41, №1. С. 146-159

[12] Рвачев В.Л., Шейко Т.И., Шапиро В. Метод R-функций (RFM) в краевых задачах с геометрической и физической симметрией // Мат. методы и физ.-мех. поля, 1998. Вып. 41, №1. С. 146-159

[13] Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалев С.А. Теплообмен в ядерных энергетических установках // М.: Атомиздат. 1974.367 с.

[14] Рвачев В.Л., Шейко Т.И. Введение в теорию R-функций // Пробл. машиностроения. 2001. Т.4, №1-2. С. 46-58.

[15] Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. //М., Физматлит, 2005. 320 с.

[16] Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. // Киев: Наук. думка, 1986. 266 с

[17] Rvachev V.L., Sheiko T.I., Shapiro V. The R-function method in boundary value problems with geometric and physical symmetry // Journal of MathematicalSciences. 1999. 97 (1). Pp. 3888-3899.

[18] Максименко-Шейко К.В., Мацевитый А.М., Шейко Т.И. Конструктивные средства метода R-функций для построения примитивов в 3D //Пробл. машиностроения. 2005. Т.8, №1. С. 59-65.

[19] Rvachev VL and Sheiko TI. R-functions in boundary value problems in mechanics. //Appl Mech Rev, vol 48, no 4, April 1995, p.151-188.

[20] Рвачев В.Л. Методы алгебры логики в математической физике. //К.,Наук.думка, 1974. 259 с.

[21] Максименко-Шейко К.В., Мацевитый А.М., Толок А.В., Шейко Т.И. Конструктивные средства метода R-функций для автоматизации построения уравнений сложных геометрических объектов // Вісн. Запоріз.д. ун-ту. Запоріжжя, 2004. №2. С. 66-76

[22] Максименко-Шейко К.В., Мацевитый А.М., Шейко Т.И. Автоматизация построения уравнений геометрических объектов в методе R-функций // Кибернетика и системн. анализ, 2006. №2. С. 148-157.

[23] Максименко-Шейко К.В. Нормальные и нормализованные уравнения геометрических объектов в методе R-функций // Вестник ХНУ №847. Серия «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». Харьков, 2009. Вып 11. С. 251-265.

[24] Максименко-Шейко К.В. Нормальные и нормализованные уравнения геометрических объектов в методе R-функций // Вестник ХНУ №847. Сер.

«Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления»:сб.н.ст. Харьков, 2009. Вып 11.С. 251-265.

[25] Максименко-Шейко К.В., Мацевитый А.М., Шейко Т.И. Конструктивные средства метода R-функций для построения примитивов в 3D //Пробл. машиностроения. 2005. Т.8, №1. С. 59-65.

[26] Максименко-Шейко К.В., Мацевитый А.М., Шейко Т.И. R-функции и аналитическое описание поверхностей геометрических объектов в трехмерном пространстве // Пробл. машиностроения. 2007. Т.10, №2. С. 59-67.

[27] Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов в 3D по информации в 2D // Вісник Запорізького національного університету,Фізико-математичні науки: зб. н. пр.Запоріжжя: ЗНУ, 2010. №1. С. 98-104.

[28] 3D-печать - технологии на службе вашего бизнеса. URL:https://infostock.net/threads/issledovanie-rynka-3d-pechati.104134/

[29] Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалев С.А. Теплообмен в ядерных энергетических установках // М.: Атомиздат. 1974. 367 с.

[30] Андреев П.А. Теплообменные аппараты ядерных энергетических установок./ Изд. 2-е, перераб. Под ред. Н.М. Синева. Л., //«Судостроение», 1969.

[31] Антуфьев В.М. Эффективность различных форм конвективных поверхностей нагрева. //М., «Энергия», 1966.

[32] Лісін Д.О. Комп’ютерна програма «Система візуалізації та побудови сітки на поверхні геометричних об’єктів, які описані за допомогою математичних засобів теорії R-функцій «RFPreview» // Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. 2012. № 45951.