МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ
Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем бакалавр

«Розробка системи комп'ютерного моделювання для числового вирішення рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза»

Виконав: студент 4 курсу, групи НФ-43
Житнік Д. А.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Прикладна фізика енергетичних систем
Керівник: к.т.н. Гарячевська І. В.

Рецензент:

Харків – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) бакалавр
Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Руслан СУХОВ
підпис

"____"_____2020 року

З А В Д А Н Н Я

НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ

Житнік Дмитро Андрійович

1. Тема роботи «Розробка системи комп'ютерного моделювання для числового вирішення рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза» керівник роботи: Гарячевська Ірина Василівна, кандидат технічних наук.
Затверджено наказом по університету від 29 квітня 2020 року № 0210-05/539.
2. Строк подання студентом роботи 06.06.2020
3. Перелік питань, які потрібно розробити:
   1) огляд літератури та обрання числового методу для вирішення нелінійного диференціального рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза;
   2) числове вирішення рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза;
   3) розробка інтерфейсу та алгоритму роботи системи комп'ютерного моделювання;
   4) тестування системи комп'ютерного моделювання.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми
2	Затвердження теми на кафедрі
3	Робота над літературою та іншими джерелами
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6	Написання третього розділу
7	Написання четвертого розділу
8	Завершення написання дипломної роботи (висновки та література)
9	Подача науковому керівнику
10	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
11	Попередній захист
12	Захист

5. Дата видачі завдання

Студент _____ Дмитро ЖИТНІК
підпис

Керівник роботи _____ Ірина ГАРЯЧЕВСЬКА
підпис

РЕФЕРАТ

Житнік Дмитро «Розробка системи комп’ютерного моделювання для числового вирішення рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза». Кваліфікаційна робота бакалавра з прикладної фізики. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2020. – 56 с.

Мета дипломної роботи – розробка та програмна реалізація системи комп’ютерного моделювання для числового вирішення нелінійного диференціального рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза за безсітковою схемою з використанням радіальних базисних функцій.

Об’єкт дипломної роботи – нелінійне диференціальне рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза.

Предмет дипломної роботи – числове вирішення нелінійного диференціального рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза за безсітковою схемою з використанням радіальних базисних функцій.

Розроблено систему комп’ютерного моделювання для числового вирішення нелінійного диференціального рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза за безсітковою схемою з використанням радіальних базисних функцій. Безсіткова схема реалізується на основі методу колокації та радіальних базисних функцій. В якості радіальних базисних функцій використовуються Гаусова, зворотна квадратична, мультиквадратична, зворотна мультиквадратична функції, а також функція Ву з компактним носієм. Розв’язок нестаціонарного рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза в системі комп’ютерного моделювання візуалізується у вигляді тривимірної поверхні.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: РІВНЯННЯ БЮРГЕРСА-КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА, СИСТЕМА КОМП’ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ, НЕСТАЦІОНАРНА КРАЙОВА ЗАДАЧА, БЕЗСІТКОВИЙ МЕТОД, РАДІАЛЬНІ БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ.

РЕФЕРАТ

Житник Дмитрий «Разработка системы компьютерного моделирования для численного решения уравнения Бюргерса-Кортевега-де Фриза». Квалификационная работа бакалавра с прикладной физики. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2020. – 56 с.

Цель дипломной работы – разработка и программная реализация системы компьютерного моделирования для численного решения нелинейного дифференциального уравнения Бюргерса-Кортевега-де Фриза по бессеточной схеме с использованием радиальных базисных функций.

Объект дипломной работы – нелинейное дифференциальное уравнение Бюргерса-Кортевега-де Фриза.

Предмет дипломной работы – численное решение нелинейного дифференциального уравнения Бюргерса-Кортевега-де Фриза по бессеточной схеме с использованием радиальных базисных функций.

Разработана система компьютерного моделирования (СКМ) для численного решения нелинейного дифференциального уравнения Бюргерса-Кортевега-де Фриза по бессеточной схеме с использованием радиальных базисных функций. Бессеточная схема реализуется на основе метода коллокации и радиальных базисных функций. В качестве радиальных базисных функций используются Гауссиан, обратная квадратичная, мультиквадратичная, обратная мультиквадратичная функции, а также функция Ву с компактным носителем. Решение нестационарного уравнения Бюргерса-Кортевега-де Фриза в СКМ визуализируется в виде трехмерной поверхности.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА-КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА, СИСТЕМА КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ, НЕСТАЦИОНАРНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, БЕССЕТОЧНЫЙ МЕТОД, РАДИАЛЬНЫЕ БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ.

ABSTRACT

Zhytnik Dmytro “Development of the computer simulation system for the numerical solution of the Korteweg-de Vries-Burgers’ equation”. Qualification work of the bachelor of applied physics. – Kharkiv. – V. N. Karazin KhNU, 2020. – 56 p.

The purpose of the diploma project is the development and software implementation of the computer simulation system for the numerical solution of the nonlinear Korteweg-de Vries-Burgers’ partial differential equation by meshless approach using radial basis functions.

The object of research – nonlinear Korteweg-de Vries-Burgers’ partial differential equation.

The subject of research – the numerical solution of the nonlinear Korteweg-de Vries-Burgers’ equation by meshless approach using radial basis functions.

The computer simulation system for the numerical solution of the nonlinear Korteweg-de Vries-Burgers’ equation by meshless approach using radial basis functions was developed. The meshless scheme is based on the use of the collocation method and radial basis functions. The computer simulation system uses the following radial basis functions: Gaussian, inverse quadratic, multiquadric, inverse multiquadric and Wu’s compactly supported radial basis function. The solution of the non-stationary Korteweg-de Vries-Burgers’ equation in the computer simulation system is visualized as a three-dimensional surface.

KEYWORDS: NONLINEAR KORTEWEG-DE VRIES-BURGERS’ EQUATION, COMPUTER SIMULATION SYSTEM, NON-STATIONARY BOUNDARY-VALUE PROBLEM, MESHLESS METHOD, RADIAL BASIS FUNCTIONS.

ЗМІСТ

ВСТУП 8
1. БЕЗСІТКОВІ МЕТОДИ В ЧИСЛОВОМУ МОДЕЛЮВАННІ 12
2. ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ 17
2.1. Радіальні базисні функції 17
2.2. Метод Канса 22
2.3. Числове вирішення рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза 24
3. ОПИС СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ 30
3.1. Функціональне призначення 30
3.2. Опис логічної структури 31
3.3. Опис інтерфейсу 33
3.4. Умови використання 40
4. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ 41
ВИСНОВКИ 51
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ 52

ВСТУП

Рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза являє собою нелінійне диференціальне рівняння в часткових похідних, яке спочатку було сформульовано Су та Гарднером [1]. Ця модель виникає в багатьох фізичних додатках, таких як поширення хвиль на мілководді [2], поширення хвиль в еластичній трубі, що заповнена в'язкою рідиною [3] і в слабо нелінійних хвилях в плазмі з певними дисипативними ефектами [4]. Рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза є комбінацією рівняння Бюргерса та рівняння Кортевега-де Фріза. Рівняння Бюргерса [5] вперше було отримано в 1939 році нідерландським фізиком Йоханнесом Мартинусом Бюргерсом при дослідженні турбулентності, в той час як рівняння Кортевега-де Фріза вперше було отримано в 1877 році французьким ученим Жозефом Буссінеском, і знову відкрито в 1895 році нідерландськими математиками Дідеріком Кортевегом і Густавом де Фрізом, які використовували його в якості нелінійної моделі для вивчення зміни форми довгих хвиль, що рухаються в прямокутному каналі [6].

Багато дослідників фокусуються на рівнянні Бюргерса-Кортевега-де Фріза. В даний час отримано ряд аналітичних розв'язків даного диференціального рівняння, а також ведуться розробки різних числових методів його вирішення. Демірай [7], Антар і Демірай [8] вивели рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза в якості основного еволюційного рівняння для поширення хвиль в заповнених рідиною пружних або в'язкопружних трубках, в яких були присутні ефекти дисперсії, дисипації та нелінійності. Закі [9] використовував квінтичні B-сплайни в методі кінцевих елементів, тоді як Талаат С. Алі-ель-Данафа [10] використовував септичні B-сплайни для отримання числового вирішення рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза. Для отримання аналітичного розв'язку рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза застосовувався метод розкладання Адамяна та метод варіаційних ітерацій [11, 12].

В останні десять років поширено застосовуються безсіткові методи, засновані на радіальних базисних функціях. В безсіткових схемах область розв’язку задачі являє собою набір довільно розсіяних вузлів, до яких «прив’язуються» базисні функції. Безсіткові підходи дозволяють уникнути генерації інтерполяційної сітки в межах області крайової задачі. Наукові праці, які присвячені безсітковим схемам, наведені в роботах [13-18].

Схему вирішення диференціальних рівнянь з частинними похідними розробив Едвард Канса [19, 20], яка основується на методі колокації і радіальних базисних функцій. В цій схемі розв’язок диференціального рівняння апроксимується радіальними базисними функціями, а для знаходження коефіцієнтів, що є невідомими використовується метод колокації. Мультиквадратична, Гаусова, зворотна квадратична та зворотна мультиквадратична – це глобальні РБФ, що широко застосовуються для вирішення диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Хон і Мао [21] розширили використання радіальних базисних функцій для числових вирішень різних диференціальних рівнянь в часткових похідних, включаючи нелінійне рівняння Бюргерса з ударними хвилями.

В останні роки зростає інтерес до нелінійних явищ в різних областях фізики. Сформувалися такі науки, як нелінійна акустика, нелінійна оптика. Багатий матеріал для дослідження нелінійних хвильових процесів дали фізика плазми, радіофізика, електроніка. Зі встановленням спільності між явищами, які спостерігаються в системах самої різної природи, прийшло усвідомлення того, що практично все різноманіття нелінійних хвильових процесів може бути зведене до невеликого числа типових, канонічних ситуацій, які описуються рівнянням Бюргерса-Кортевега-де Фріза. Розвиток обчислювальної техніки дозволив підступитися до безпосереднього числового вирішення рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза. В даний час існують пакети прикладних програм, які дозволяють отримувати наближені розв’язки даного рівняння. Однак процедура вирішення крайових задач в таких системах вимагає від дослідників знання числових методів та навичок програмування.

На сьогоднішній день все ще відсутні системи комп’ютерного моделювання для числового вирішення нелінійного рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза, які дозволяють отримувати високоточні результати наближених розв’язків і при цьому не вимагають знання числових методів та мов програмування. Тому створення такого виду системи комп’ютерного моделювання, призначеної для числового вирішення нелінійного рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза є актуальним та перспективним завданням.

Метою дипломної роботи є розробка та програмна реалізація системи комп’ютерного моделювання для числового вирішення нелінійного диференціального рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза за безсітковою схемою з використанням радіальних базисних функцій.

Безсіткова схема реалізується на основі методу колокації та радіальних базисних функцій (метод Канса).

Завдання, які були поставлені для досягнення мети дипломної роботи:

1. Створити технічне завдання;
2. Провести огляд літератури та обрати числовий метод для вирішення нелінійного диференціального рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза;
3. Чисельно вирішити рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза;
4. Розробити інтерфейс системи комп’ютерного моделювання;
5. Розробити алгоритм роботи системи комп’ютерного моделювання;
6. Розробити програмний продукт;
7. Провести тестування системи комп’ютерного моделювання.

Об’єктом дипломної роботи є нелінійне диференціальне рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза.

Предмет дипломної роботи – числове вирішення нелінійного диференціального рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза за безсітковою схемою з використанням радіальних базисних функцій.

Дипломна робота представлена на 56 сторінках; складається з вступу, 4 розділів та висновків; містить 24 рисунка, 8 таблиць, список використаних

джерел із 36 найменувань. В першому розділі наводиться загальна інформація про існуючі безсіткові методи. Другий розділ дипломної роботи присвячений детальному опису безсіткової схеми на основі методу колокації та радіальних базисних функцій (метод Канса), яка лягла в основу створеної системи комп'ютерного моделювання. Третій розділ містить опис розробленої системи комп'ютерного моделювання для числового вирішення нелінійного диференціального рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза. В четвертому розділі дипломної роботи демонструється ефективність числових вирішень в системі комп'ютерного моделювання на прикладі чотирьох еталонних задач для кожної з яких були отримані наближені розв'язки, та обчислені середня відносна похибка, середня абсолютна похибка та максимальна похибка.

1. БЕЗСІТКОВІ МЕТОДИ В ЧИСЛОВОМУ МОДЕЛЮВАННІ

Числове моделювання виявилося відмінним альтернативним інструментом наукових досліджень для дорогих і трудомістких експериментів в складних інженерних задачах. Числові методи, засновані на використанні інтерполяційної сітки, такі як метод скінченних елементів (МСЕ) і метод скінченних різниць (МСР), широко використовуються для числового вирішення крайових задач. В цих методах геометрична область крайової задачі, де визначені диференціальні рівняння з частковими похідними, представляється набором елементів, які утворюють інтерполяційну сітку (Рис. 1.1.).

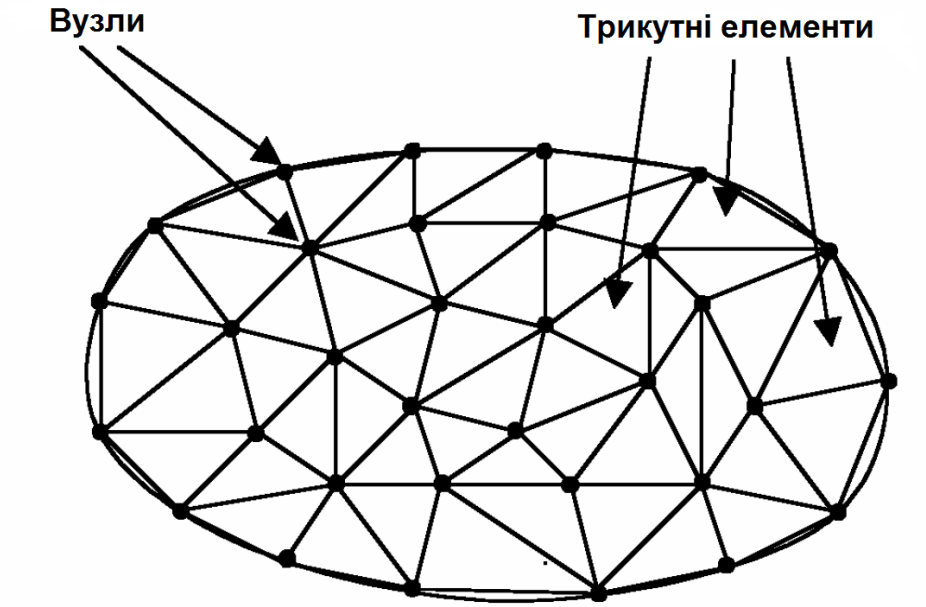


Рис. 1.1. Дискретизація області крайової задачі
в методі скінченних елементів

Використовуючи наперед задану інтерполяційну сітку, диференціальні рівняння з частковими похідними можуть бути апроксимовані набором алгебраїчних рівнянь. Однак така дискретизація геометричної області крайової задачі призводить до неминучих спотворень вигнутих границь області, що розглядається. В свою чергу, спотворення границь призводить до втрати

точності наближеного розв’язку. Точність відтворення вигнутих ділянок границь області в методах сіток регулюється лише кількістю та порядком елементів, які утворюють інтерполяційну сітку. Більш дрібна сітка призводить до більш точних результатів. Але збільшення кількості елементів, з яких складається інтерполяційна сітка, приводить до значних обчислювальних витрат.

Цього недоліку позбавлені так звані безсіткові методи. В безсіткових методах область розв’язку крайової задачі представляється набором довільно розсіяних вузлів, до яких «прив’язуються» базисні функції. Такі набори вузлів не утворюють інтерполяційну сітку, а отже, не призводять до спотворення границь геометричної області (Рис. 1.2.).

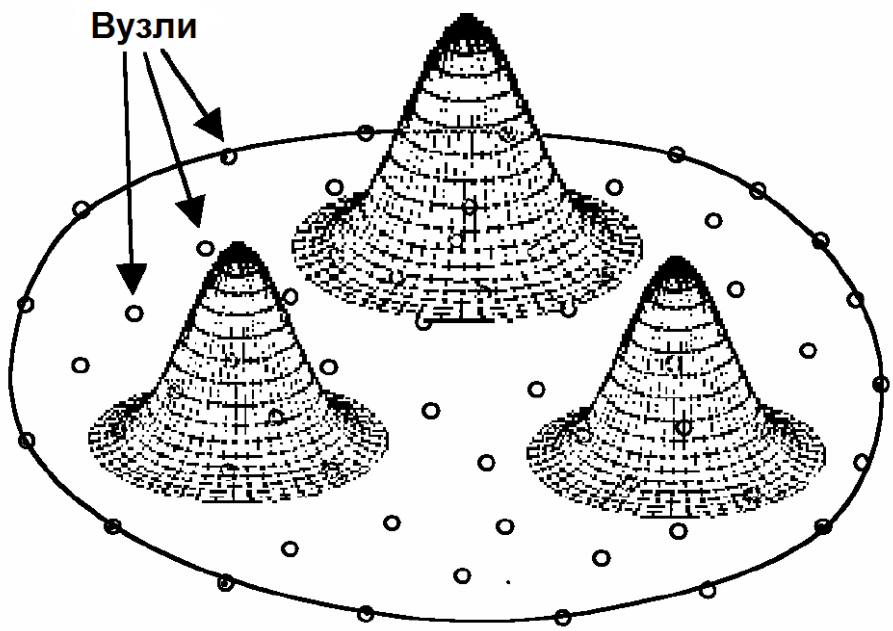


Рис. 1.2. Розташування вузлів в безсіткових методах

Поява ідеї «вільної сітки» датується 1977 роком, коли Монаган, Гінгольд [22] і Люсі [23] розробили метод Лагранжа для моделювання задач астрофізики. Цей метод, що отримав назву метод згладжених гідродинамічних часток (smoothed particle hydrodynamics method – SPH), заснований на ідеї заміни рідини набором рухомих часток і перетворенням основних

диференціальних рівнянь з частковими похідними в інтеграли з ядровою оцінкою [24]. Незважаючи на успіх метода згладжених гідродинамічних часток при моделюванні задач астрофізики, тільки після 90-х років SPH був застосований для моделювання інших класів задач.

Перший безсітковий підхід, заснований на методі Гальоркіна, був введений тільки через десять років після того, як Монаган і Гінгольд вперше опублікували метод згладжених гідродинамічних часток. Метод дифузного елемента (diffuse element method – DEM) був введений Найролесом і Тузотом [25] в 1992 році. Багато авторів стверджують, що тільки після появи методу дифузного елемента ідея безсіткових методів почала привертати все більшу увагу дослідників.

У 1994 році Беличко та його колеги розробили метод вільного елементу Гальоркіна (element-free Galerkin method – EFGM) [13], який представляє собою розширену версію методу Найролеса. Метод вільного елементу Гальоркіна виявився точнішим, ніж метод дифузного елемента, хоча «поліпшення», реалізовані в цьому методі, збільшили його обчислювальні витрати. Метод вільного елементу Гальоркіна є одним з найпопулярніших безсіткових методів, який успішно застосовується при дослідженні поширення хвиль, моделюванні течії рідини, в акустиці, в задачах руйнування та розповсюдження тріщин.

У 1995 році Лю запропонував метод репродукованих ядерних часток (reproducing kernel particle method – RKPM) [26], який базувався на методі згладжених гідродинамічних часток. Метод репродукованих ядерних часток успішно використовується при мультимасштабному моделюванні, аналізі вібрацій, гідроаеродинаміці та багатьох інших галузях.

В 1996 році Онат та колеги розробили метод скінченних точок (finite point method – FPM) [27, 28]. Спочатку він використовувався для моделювання задач течії рідини, але згодом був застосований для вирішення задач механіки, зокрема до задач деформації пружної пластини.

Локальний метод Петрова-Гальоркіна (meshless local Petrov-Galerkin method – MLPGM), запропонований Атлурі та Чжу в 1998 році [29], представляє інший підхід до побудови безсіткових методів. Перевагою цього методу є генерація локальної інтерполяційної сітки при інтегруванні, що відрізняє його від методу вільного елементу. Локальний метод Петрова-Гальоркіна використовує метод Петрова-Гальоркіна щоб спростити підінтегральну функцію слабкої форми. Спочатку метод був сформульований з використанням MLS-апроксимації, але потім Атлурі розширив формулювання локального методу Петрова-Гальоркіна на інші техніки апроксимації [30]. Локальний метод Петрова-Гальоркіна та його різні варіації були застосовані до широкого кола задач, таких як задача балки Ейлера-Бернуллі, до задач механіки твердого тіла, при аналізі вібрації твердих тіл, а також використовувались при моделюванні задач теплопровідності.

В 1991 році Канса вперше застосував радіальні базисні функції (РБФ) для вирішення диференціальних рівнянь з частковими похідними. Він запропонував безсіткову схему, засновану на комбінації методу колокації та мультиквадратичних радіальних базисних функцій [19, 20]. Процедура колокації, яку використовував Канса, є відносно простою в реалізації, однак в результаті цієї процедури утворюється асиметрична система алгебраїчних рівнянь через поєднання керуючих рівнянь і крайових умов. Більш того, використання глобальних мультиквадратичних радіальних базисних функцій призводить до системи рівнянь, яка характеризується щільною інтерполяційною матрицею. Для вирішення диференціальних рівнянь з частковими похідними використовувались як глобальні, так і компактні радіальні базисні функції. Результати показали, що глобальні радіальні базисні функції дають кращу точність отримуваного розв’язку. Використання компактних радіальних базисних функцій призводить до розрідженої інтерполяційної матриці, в той час як використання глобальних радіальних базисних функцій призводить до щільної інтерполяційної матриці, яка може

привести до значних обчислювальних витрат в разі великої кількості точок колокації.

Лі та колеги в 2003 році запропонували інший безсітковий підхід, заснований на глобальних радіальних базисних функціях [31]. Схема, яка має назву локальна мультиквадратична апроксимація (Local multiquadric approximation – LMQA) пропонує побудову апроксимації з використанням підобластей, в результаті чого глобальна мультиквадратична радіальна базисна функція усікається на «границях» підобластей, що призводить до локальної апроксимації та розрідженої інтерполяційної матриці.

Радіальні базисні функції також використовувалися в методі подвійного заміщення (dual reciprocity method – DRM), методі фундаментальних розв'язків (method of fundamental solutions – MFS) і методі граничного вузла (boundary knot method – BKM). Ці методи успішно застосовуються для вирішення нелінійних крайових задач.

Варіаційний підхід до вирішення крайових задач з використанням компактних радіальних базисних функцій був досліджений в [32], а в іншому підході пропонувалося використання радіальних базисних функцій з локальним методом Петрова-Гальоркіна [30].

В останнє десятиліття методи апроксимації, засновані на використанні радіальних базисних функцій, зазнали інтенсивного дослідження. Найбільш детальний огляд радіальних базисних функцій представлений в [33].

2. ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ

2.1. Радіальні базисні функції

Найбільш популярними базисними функціями в різних числових методах є в основному тригонометричні та поліноміальні функції, використання яких призводить до великих обчислювальних витрат при вирішенні крайових задач через їх залежність від розмірності задачі. Альтернативними по відношенню до координатних функцій, є радіальні базисні функції (РБФ), які є функціями одновимірної змінної відстані незалежно від розмірності крайової задачі, що дає їм певну перевагу по відношенню до координатних функцій.

Нехай дано множину точок $\{x_i\}_{i=1}^N \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, де Ω – обмежена область. Радіальна базисна функція – це функція дійсної змінної, чиє значення залежить тільки від відстані від точки відліку x до деякої іншої точки x_i.

Тобто функція, яка задовольняє властивості

$$\varphi(x, x_i) = \varphi_i(x) = \varphi(\|x - x_i\|) = \varphi(r_i) \tag{2.1}$$

де $r_i = \|x - x_i\|$ – евклідова відстань між вузлами, називається радіальною базисною функцією.

Нехай дано множину значень $\{y_i\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}$, яка задана на відповідному наборі точок $\{x_i\}_{i=1}^N \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Тоді функція $f(x)$ може бути апроксимована лінійною комбінацією радіальних базисних функцій:

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi(r_i), \quad x \in \Omega \tag{2.2}$$

де α_i – невідомі коефіцієнти, які підлягають визначенню.

Застосовуючи метод колокації, отримуємо систему з *N* лінійних рівнянь:

$$y_i = f(x_i) \approx \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi(r_{ij}), \quad i = 1, \ldots, N \tag{2.3}$$

Система рівнянь (2.3) може бути представлена в наступній матричній формі:

$$[y] = A[\alpha] \tag{2.4}$$

де $[y] = [y_1, y_2, ..., y_N]^T$, $[\alpha] = [\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N]^T$, $A = \left[\varphi(r_{ij})\right]$, $1 \le i, j \le N$.

Тоді, невідомі коефіцієнти можуть бути визначені з рівняння

$$[\alpha] = A^{-1}[y] \tag{2.5}$$

В Таблиці 2.1 представлені найбільш поширені радіальні базисні функції.

Таблиця 2.1

Найбільш поширені радіальні базисні функції

Назва РБФ	$\varphi(r)$
Гаусова	$\varphi(r) = e^{-(cr)^2}$
мультиквадратична	$\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$
зворотна квадратична	$\varphi(r) = \frac{1}{r^2 + c^2}$
зворотна мультиквадратична	$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{\left(r^2 + c^2\right)^3}}$

де $c \neq 0$ – параметр форми, що обирається довільно.

На Рис. 2.1. зображена візуалізація радіальних базисних функцій.

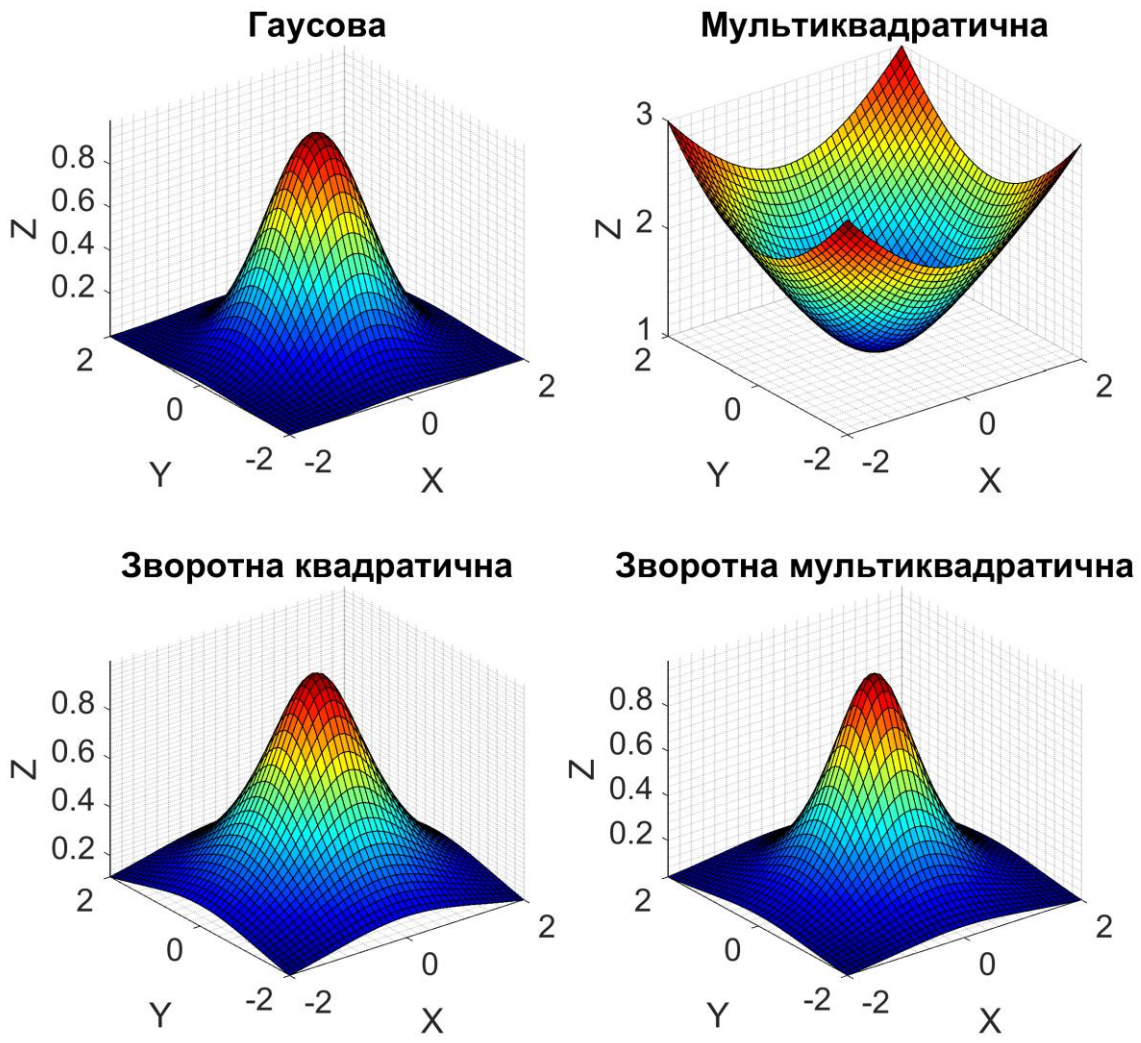


Рис. 2.1. Візуалізація радіальних базисних функцій

В 1995 році Ву [34] та Вендланд [35] запропонували новий тип позитивно визначених радіальних базисних функцій з компактним носієм, використання яких дає можливість отримати розріджену інтерполяційну матрицю.

Популярні радіальні базисні функції Вендланда з компактним носієм представлені в Таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Радіальні базисні функції Вендланда

Розмірність	$\varphi(r)$	Неперервність функції
$d=1$	$(1-cr)_+$	C^0
	$(1-cr)_+^3(3cr+1)$	C^2
	$(1-cr)_+^5(8c^2r^2+5cr+1)$	C^4
$d=2,3$	$(1-cr)_+^2$	C^0
	$(1-cr)_+^4(4cr+1)$	C^2
	$(1-cr)_+^6(35c^2r^2+18cr+3)$	C^4
	$(1-cr)_+^8(32c^3r^3+25c^2r^2+8cr+1)$	C^6

де $(1-cr)_+$ – функція відсічення, що визначається як

$$(1-cr)_+ = \begin{cases} (1-cr), \text{ якщо } 1-cr \geq 0 \\ 0, \text{ інакше} \end{cases} \tag{2.6}$$

Ще один клас радіальних базисних функцій з компактним носієм побудував Буман [36], які нагадують тонкі пластинчаті сплайни. Три приклади радіальних базисних функцій Бумана наведені в Таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Радіальні базисні функції Бумана

Розмірність	$\varphi(r)$
$d=2$	$\left(1/18-r^2+4r^3/9+r^4/2-4r^3\log(r)/3\right)_+$
	$\left(112r^{9/2}/45+16r^{7/2}/3-7r^4-14r^2/15+1/9\right)_+$
$d=3$	$\left(2r^4\log(r)-7r^4/2+16r^3/3-2r^2+1/6\right)_+$

Ву використовує згортку для створення іншого виду радіальних базисних функцій з компактним носієм. Функції Ву можна отримати за наступною формулою:

$$\varphi_{k,s} = D^k\left(\varphi_s\right),\ d \le 2k+1 \tag{2.7}$$

де D – диференціальний оператор, що визначається як

$$\left(D\varphi\right)\left(r\right) = -\varphi'\left(r\right)/r,\ r \ge 0 \tag{2.8}$$

та строго позитивно визначена функція $\varphi_s\left(r\right)$ формулюється наступним чином

$$\varphi_s\left(r\right) = \left(\varphi * \varphi\right)\left(2r\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1-t^2\right)_+^s \left(1-\left(2r-t\right)^2\right)_+^s dt \tag{2.9}$$

В Таблиці 2.4 наведені приклади радіальних базисних функцій Ву.

Таблиця 2.4

Радіальні базисні функції Ву

k	$\varphi_{k,3}\left(r\right)$	Непе-рервність функції
0	$\left(1-cr\right)_+^7\left(5c^6r^6+35c^5r^5+101c^4r^4+147c^3r^3+101c^2r^2+35cr+5\right)$	C^6
1	$\left(1-cr\right)_+^6\left(5c^5r^5+30c^4r^4+72c^3r^3+82c^2r^2+36cr+6\right)$	C^4
2	$\left(1-cr\right)_+^5\left(5c^4r^4+25c^3r^3+48c^2r^2+40cr+8\right)$	C^2
3	$\left(1-cr\right)_+^4\left(5c^3r^3+20c^2r^2+29cr+16\right)$	C^0

На Рис. 2.2. зображена візуалізація деяких радіальних базисних функцій з компактним носієм.

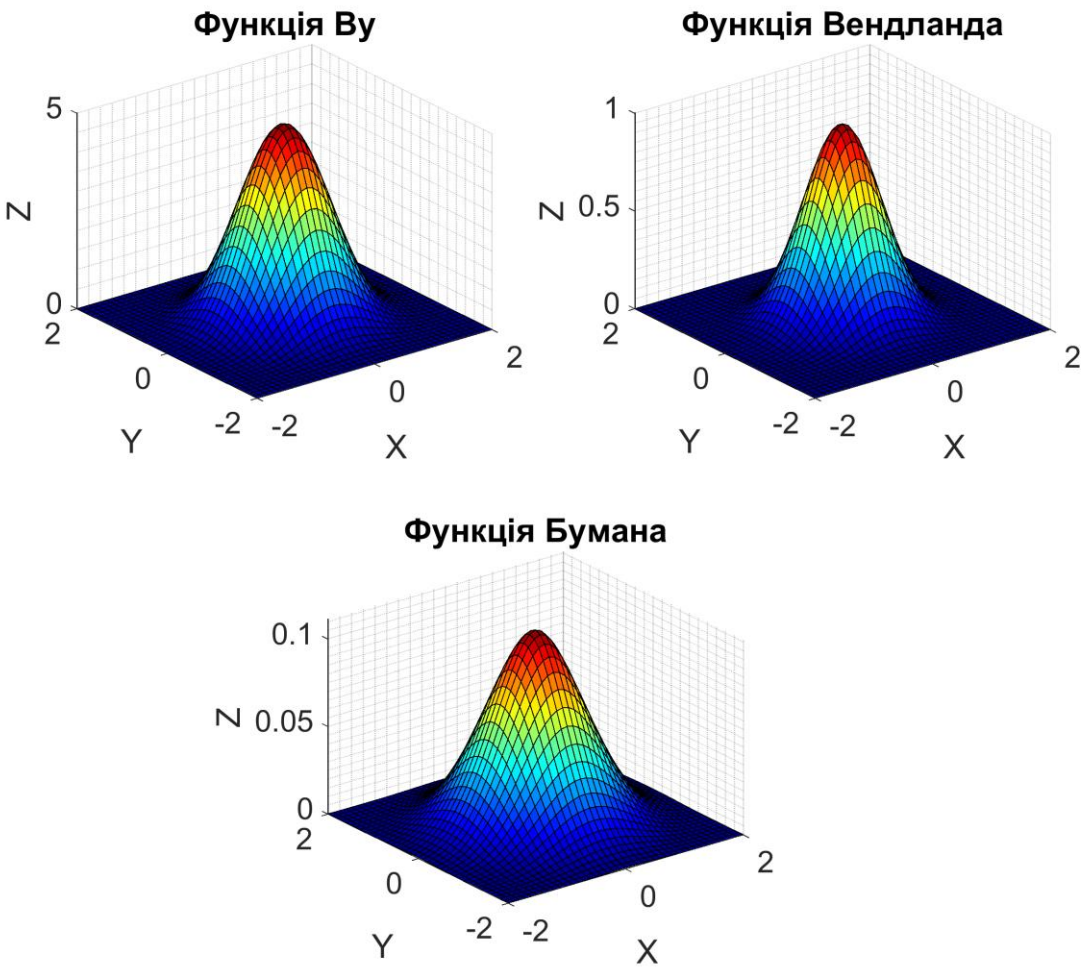


Рис. 2.2. Візуалізація радіальних базисних функцій
з компактним носієм

Використання радіальних базисних функцій з компактним носієм може приводити до розрідженої інтерполяційної матриці та дозволяє ефективно уникати поганої обумовленості та щільності інтерполяційної матриці.

2.2. Метод Канса

В методі Канса для апроксимації розв’язку диференціального рівняння з частковими похідними використовуються радіальні базисні функції.

Нехай Ω це замкнута область, яка обмежена $\partial\Omega = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2, \Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \varnothing$. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\Re\{u(x)\} = f(x),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{2.10}$$

з наступними крайовими умовами

$$u(x) = g_1(x),\ x \in \Gamma_1 \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = g_2(x),\ x \in \Gamma_2 \tag{2.12}$$

де $\Re$ – диференціальний оператор, n – зовнішній вектор нормалі, а $f(x), g_1(x), g_2(x)$ – відомі функції.

Нехай $\{x_j\}_{j=1}^{N_i}$ це точки всередині області Ω, $\{x_j\}_{j=N_i+1}^{N_i+N_1} \in \Gamma_1$, та $\{x_j\}_{j=N_i+N_1+1}^{N} \in \Gamma_2$, де $N = N_i + N_1 + N_2$. В методі Канса наближений розв'язок $u(x)$ рівнянь (2.10)-(2.12) конструюється за допомогою лінійної комбінації радіальних базисних функцій:

$$u(x) \simeq \tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi(r_{ij}) \tag{2.13}$$

де α_i – невідомі коефіцієнти, які підлягають визначенню, $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$ – евклідова відстань між вузлами, N – загальна кількість вузлів колокації.

Підставив рівняння (2.13) в рівняння (2.10)-(2.12), отримаємо систему лінійних рівнянь, яка може бути виражена в наступній матричній формі:

$$[u] = A[\alpha] \tag{2.14}$$

де $[u] = \left[f(x_1),..., f(x_{N_i}), g_1(x_{N_i+1}),..., g_1(x_{N_i+N_1}), g_2(x_{N_i+N_1+1}),..., g_2(x_N) \right]^T$ та $[\alpha] = [\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_N]^T$.

Інтерполяційна матриця має вид:

$$A=\begin{bmatrix} \Re\{\Phi\} \\ \Phi \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial n} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

де $\Phi=\left(\Phi_{ij}\right)=\left(\varphi\left(r_{ij}\right)\right)$.

Метод Канса успішно застосовується для вирішення різних фізичних і технічних задач, таких як задачі дробової дифузії, задачі переносу випромінювання, задачі горіння, електромагнітні задачі, задачі електростатики, задачі теплопровідності, задачі з рухомими межами, задачі пластин і оболонок, задачі течії рідини, задачі Стефана, задачі аналізу мікроелектромеханічних систем, задачі переносу забруднених ґрунтових вод, задачі конвекції-дифузії та інші.

2.3. Числове вирішення рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза

Розглянемо нелінійне неоднорідне рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза в обмеженій області:

$$\mu\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\varepsilon u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\eta\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}=\nu\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{2.16}$$

де $x\in[a,b]$, $t\in[0,T]$, μ, ε, η – відомі коефіцієнти, $\nu=\dfrac{1}{R}$ – кінематична в’язкість, R – число Рейнольдса, $f(x,t)$ – функція джерела.

Початкові умови задано наступним чином:

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in[a,b] \tag{2.17}$$

Крайові умови Діріхле задані у вигляді:

$$\begin{cases} u(a,t)=g_1(t) \\ u(b,t)=g_2(t) \end{cases},\ t\in[0,T] \tag{2.18}$$

Застосувавши θ-схему для дискретизації за часом, отримаємо:

$$u(x,t) \approx \theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n \tag{2.19}$$

$$f(x,t) \approx \theta f^{n+1} + (1-\theta) f^n \tag{2.20}$$

$$\Delta u(x,t) \approx \theta \Delta u^{n+1} + (1-\theta)\Delta u^n \tag{2.21}$$

$$\nabla^3 u(x,t) \approx \theta \nabla^3 u^{n+1} + (1-\theta)\nabla^3 u^n \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \tag{2.23}$$

де $u^n = u(x,t^n)$, $f^n = f(x,t^n)$, $t^n = n\tau$, n – номер ітерації, τ – крок за часом, $0 \le \theta \le 1$ – ваговий коефіцієнт, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\nabla^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3}$.

Підставимо рівняння (2.19)-(2.23) в рівняння (2.16):

$$\begin{aligned}\mu\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} + \varepsilon\left(\theta u^{n+1}\nabla u^{n+1} + (1-\theta)u^n\nabla u^n\right) + \eta\left(\theta\nabla^3 u^{n+1} + (1-\theta)\nabla^3 u^n\right) = \\ = \nu\left(\theta\Delta u^{n+1} + (1-\theta)\Delta u^n\right) + \theta f^{n+1} + (1-\theta) f^n\end{aligned} \tag{2.24}$$

Нелінійний член в рівнянні (2.24) лінеаризується наступним чином:

$$u^{n+1}\nabla u^{n+1} = u^{n+1}\nabla u^n + u^n\nabla u^{n+1} - u^n\nabla u^n \tag{2.25}$$

Підставимо рівняння (2.25) в рівняння (2.24):

$$\begin{aligned}\mu\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} + \varepsilon\left(\theta\left(u^{n+1}\nabla u^n + u^n\nabla u^{n+1}\right) + (1-2\theta)u^n\nabla u^n\right) + \\ + \eta\left(\theta\nabla^3 u^{n+1} + (1-\theta)\nabla^3 u^n\right) = \nu\left(\theta\Delta u^{n+1} + (1-\theta)\Delta u^n\right) + \theta f^{n+1} + (1-\theta) f^n\end{aligned} \tag{2.26}$$

Поклавши $\theta = 1$, перепишемо рівняння (2.26) в наступному вигляді:

$$u^{n+1}+\frac{\tau}{\mu}\Big[\eta\nabla^3u^{n+1}-\nu\Delta u^{n+1}+\varepsilon\left(u^{n+1}\nabla u^n+u^n\nabla u^{n+1}\right)\Big]= \\ =u^n+\frac{\tau}{\mu}\Big[\varepsilon u^n\nabla u^n+f^{n+1}\Big] \tag{2.27}$$

Рівномірно оберемо $N-2$ точки колокації $\{x_i\}_{i=2}^{N-1}$ всередині області (a,b) та дві точки на границі області $x_1=a$ і $x_N=b$. Наближений розв'язок рівняння (2.16) можна отримати з використанням радіальних базисних функцій $\varphi(r_{ij})$:

$$u^n(x_i)\approx\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^n\varphi(r_{ij}) \tag{2.28}$$

де $r_{ij}=\|x_i-x_j\|$ – евклідова відстань між вузлами, α_j^n – невідомі коефіцієнти, які підлягають визначенню.

Підставивши рівняння (2.28) в рівняння (2.27), отримаємо наступну СЛАР для точок всередині області $\{x_i\}_{i=2}^{N-1}$

$$\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n+1}\varphi(r_{ij})+\frac{\tau}{\mu}\Bigg[\eta\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n+1}\varphi'''(r_{ij})-\nu\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n+1}\varphi''(r_{ij})+ \\ +\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n+1}\varphi(r_{ij})\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n}\varphi'(r_{ij})+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n}\varphi(r_{ij})\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n+1}\varphi'(r_{ij})\right)\Bigg]= \\ =\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n}\varphi(r_{ij})+\frac{\tau}{\mu}\Bigg[\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n}\varphi(r_{ij})\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n}\varphi'(r_{ij})+f_i^{n+1}\Bigg] \tag{2.29}$$

та для точок на границі області $x_1=a$ і $x_N=b$:

$$\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n+1}\varphi(r_{1j})=g_1(t) \tag{2.30}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n+1}\varphi(r_{Nj})=g_2(t) \tag{2.31}$$

В дипломній роботі, в якості РБФ, використовуються наступні функції

$$\varphi\left(r_{ij}\right)=e^{-\left(cr_{ij}\right)^2} \text{ – Гаусова} \tag{2.32}$$

$$\varphi\left(r_{ij}\right)=\sqrt{r_{ij}^2+c^2} \text{ – мультиквадратична} \tag{2.33}$$

$$\varphi\left(r_{ij}\right)=\frac{1}{r_{ij}^2+c^2} \text{ – зворотна квадратична} \tag{2.34}$$

$$\varphi\left(r_{ij}\right)=\frac{1}{\sqrt{\left(r_{ij}^2+c^2\right)^3}} \text{ – зворотна мультиквадратична} \tag{2.35}$$

$$\varphi\left(r_{ij}\right)=\left(1-cr_{ij}\right)_+^7\left(5+35cr_{ij}+101c^2r_{ij}^2+147c^3r_{ij}^3+101c^4r_{ij}^4+35c^5r_{ij}^5+5c^6r_{ij}^6\right) \text{ – функція Ву з компактним носієм} \tag{2.36}$$

де $c\neq 0$ – параметр форми, який обирається довільно, $\left(1-cr_{ij}\right)_+^7$ – функція відсічення, що визначається як

$$\left(1-cr_{ij}\right)_+^7=\begin{cases}\left(1-cr_{ij}\right)^7, \text{ якщо } 1-cr_{ij}\geq 0\\ 0, \text{ інакше}\end{cases} \tag{2.37}$$

Рівняння (2.27) є рекурсивною формулою. Тобто, дане диференціальне рівняння можливо вирішувати, починаючи з початкових умов (2.17). Запишемо рівняння (2.28) разом з крайовими умовами (2.18) в матричній формі:

$$[u]^n=A[\alpha]^n \tag{2.38}$$

де $[u]^n=\left[u_1^n,u_2^n,...,u_N^n\right]^T$, $[\alpha]^n=\left[\alpha_1^n,\alpha_2^n,...,\alpha_N^n\right]^T$ та $A=\left[\varphi\left(r_{ij}\right)\right]$, $1\leq i,j\leq N$.

Матриця A може бути поділена на матриці A_d та A_b, які відповідають $N-2$ точкам всередині області та двом граничним точкам:

$$A = A_d + A_b \tag{2.39}$$

де

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{cases} \varphi\left(r_{ij}\right), \text{ якщо } 2 \le i \le N-1, \ 1 \le j \le N \\ 0, \text{ інакше} \end{cases} \\ A_b &= \begin{cases} \varphi\left(r_{ij}\right), \text{ якщо } i = 1, N, \ 1 \le j \le N \\ 0, \text{ інакше} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Об’єднав рівняння (2.29)-(2.31) з урахуванням рівняння (2.39), отримаємо наступне матричне рівняння:

$$\begin{aligned} \left\{ A_d + \frac{\tau}{\mu}\left[\eta D_d - \nu C_d + \varepsilon\left(\operatorname{diag}\left(B_d \left[\alpha\right]^n \right) A_d + \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. + \operatorname{diag}\left(A_d \left[\alpha\right]^n \right) B_d \right) \right] + A_b \right\} \left[\alpha\right]^{n+1} = \\ = A_d \left[\alpha\right]^n + \frac{\tau\varepsilon}{\mu}\left(A_d \left[\alpha\right]^n \right) .* \left(B_d \left[\alpha\right]^n \right) + \left[F\right]^{n+1} \end{aligned} \tag{2.41}$$

де

$$\begin{aligned} B_d &= \begin{cases} \varphi'\left(r_{ij}\right), \text{ якщо } 2 \le i \le N-1, \ 1 \le j \le N \\ 0, \text{ інакше} \end{cases} \\ C_d &= \begin{cases} \varphi''\left(r_{ij}\right), \text{ якщо } 2 \le i \le N-1, \ 1 \le j \le N \\ 0, \text{ інакше} \end{cases} \\ D_d &= \begin{cases} \varphi'''\left(r_{ij}\right), \text{ якщо } 2 \le i \le N-1, \ 1 \le j \le N \\ 0, \text{ інакше} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.42}$$

$\mathrm{diag}\left(A_d\left[\alpha\right]^n\right)$ – діагональна матриця з елементами $A_d\left[\alpha\right]^n$, які розташовані на головній діагоналі, $\left[F\right]^{n+1} = \left[g_1^{n+1}, \frac{\tau}{\mu} f_2^{n+1}, ..., \frac{\tau}{\mu} f_{N-1}^{n+1}, g_2^{n+1}\right]^T$, ".*" – покомпонентний добуток двох векторів.

Рівняння (2.41) може бути вирішено методом Гауса відносно невідомих коефіцієнтів $\left[\alpha\right]^n$. Підставив значення коефіцієнтів $\left[\alpha\right]^n$ в рівняння (2.28), отримаємо наближений розв'язок рівняння (2.16) на *n*-му кроці.

3. ОПИС СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

3.1. Функціональне призначення

Система комп'ютерного моделювання, яка була розроблена в ході виконання дипломного проекту, призначена для числового вирішення нелінійного диференціального рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза за безсітковою схемою з використанням радіальних базисних функцій.

Безсіткова схема реалізується на основі методу колокації та радіальних базисних функцій (метод Канса). В цій схемі розв'язок диференціального рівняння апроксимується радіальними базисними функціями, а для знаходження коефіцієнтів, що є невідомими використовується метод колокації. В системі комп'ютерного моделювання в якості радіальних базисних функцій використовуються наступні функції:

- Гаусова;
- зворотна квадратична;
- мультиквадратична;
- зворотна мультиквадратична;
- функція Ву з компактним носієм.

Для числового вирішення диференціального рівняння з частковими похідними в системі комп'ютерного моделювання передбачено задання початкових і крайових умов, а також функції джерела.

Система комп'ютерного моделювання передбачає налаштовування наступних параметрів вирішення: розмір області крайової задачі, відстань між інтерполяційними вузлами, часовий інтервал для нестаціонарної крайової задачі, параметр форми радіальної базисної функції, крок за часом та коефіцієнти в рівнянні Бюргерса-Кортевега-де Фріза.

Розв'язок нестаціонарного рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза в системі комп'ютерного моделювання візуалізується у вигляді тривимірної

поверхні. В СКМ реалізована можливість візуалізації отриманого розв’язку на окремих проміжках часу у вигляді тривимірних графіків.

Система комп’ютерного моделювання дозволяє зберігати візуалізацію наближеного розв’язку у вигляді растрових або векторних зображень. Крім цього, СКМ надає можливість експортувати отриманий розв’язок нестаціонарної крайової задачі в бінарний файл, який можна відкрити в різних пакетах прикладних програм.

3.2. Опис логічної структури

Система комп’ютерного моделювання для числового вирішення рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза написана мовою програмування MATLAB, яка входить до складу пакету прикладних програм MATLAB компанії The MathWorks. Вибір пакету прикладних програм MATLAB обумовлений наступними факторами:

- наявність необхідних інструментів для створення додатків з графічним інтерфейсом користувача;
- широкі можливості візуалізації двовимірних і тривимірних даних;
- можливість використання розріджених матриць;
- наявність вбудованих алгоритмів розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

ВХІДНІ ДАНІ.

Вхідними даними для системи комп’ютерного моделювання є інформація, що вводиться користувачем в текстові поля.

ВИХІДНІ ДАНІ.

Вихідними даними для система комп’ютерного моделювання є:

- інформація, що відображається в графічній області;
- растрові та векторні зображення;
- бінарний файл.

На Рис. 3.1. представлена загальна блок-схема алгоритму роботи системи комп’ютерного моделювання.



Рис. 3.1. Загальна блок-схема алгоритму роботи системи комп’ютерного моделювання

3.3. Опис інтерфейсу

На Рис. 3.2. зображений інтерфейс системи комп’ютерного моделювання для числового вирішення рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза.

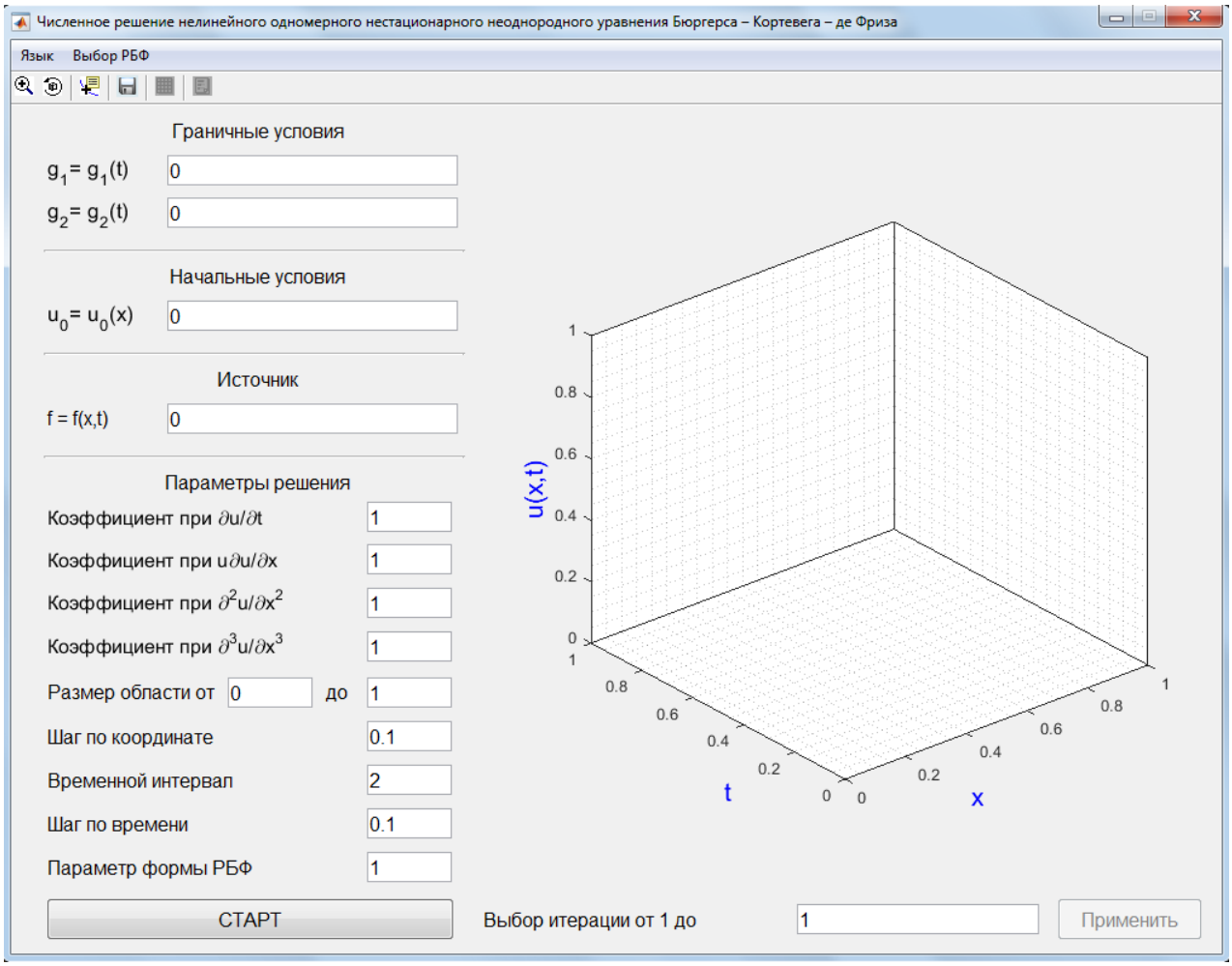


Рис. 3.2. Інтерфейс системи комп’ютерного моделювання

У верхній частині вікна програми розташовано меню (Рис. 3.3.).

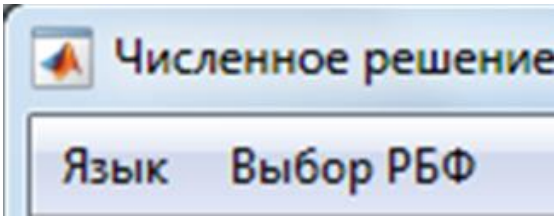


Рис. 3.3. Меню системи комп’ютерного моделювання

Меню системи комп’ютерного моделювання складається з наступних вкладок:

- *Язык* – містить пункти *Русский* та *Английский*, які відповідають за вибір відповідної мови інтерфейсу СКМ;
- *Выбор РБФ* – містить пункти *Гауссиан*, *Обратная квадратичная*, *Мультиквадратичная*, *Обратная мультиквадратичная* та *Функция Ву с компактным носителем*, які відповідають за вибір радіальних базисних функцій.

Нижче меню розміщується панель інструментів, яка зображена на Рис. 3.4.

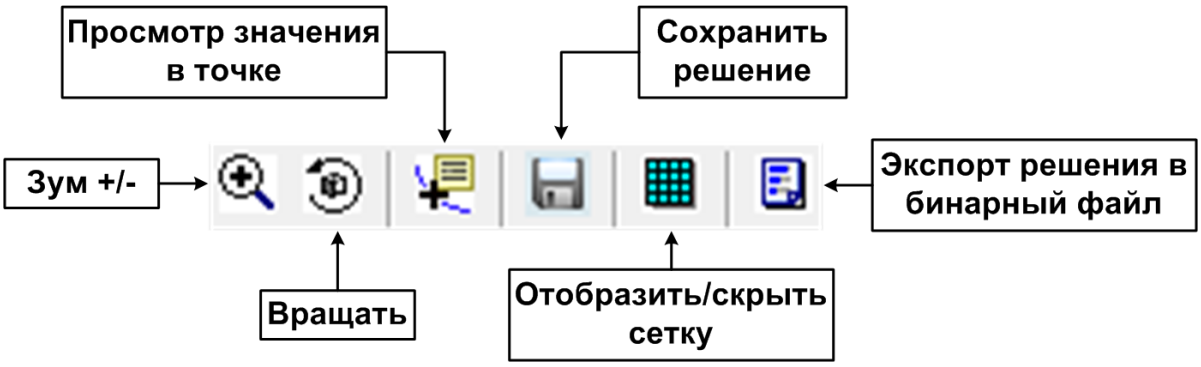


Рис. 3.4. Панель інструментів

Панель інструментів СКМ складається з наступних кнопок:

- *Зум +/–* – активує/деактивує режим масштабування координатних осей;
- *Вращать* – активує/деактивує режим обертання координатних осей в тривимірному просторі;
- *Просмотр значения в точке* – активує/деактивує режим числового відображення значень отриманого розв’язку в обраних точках (Рис. 3.5.);

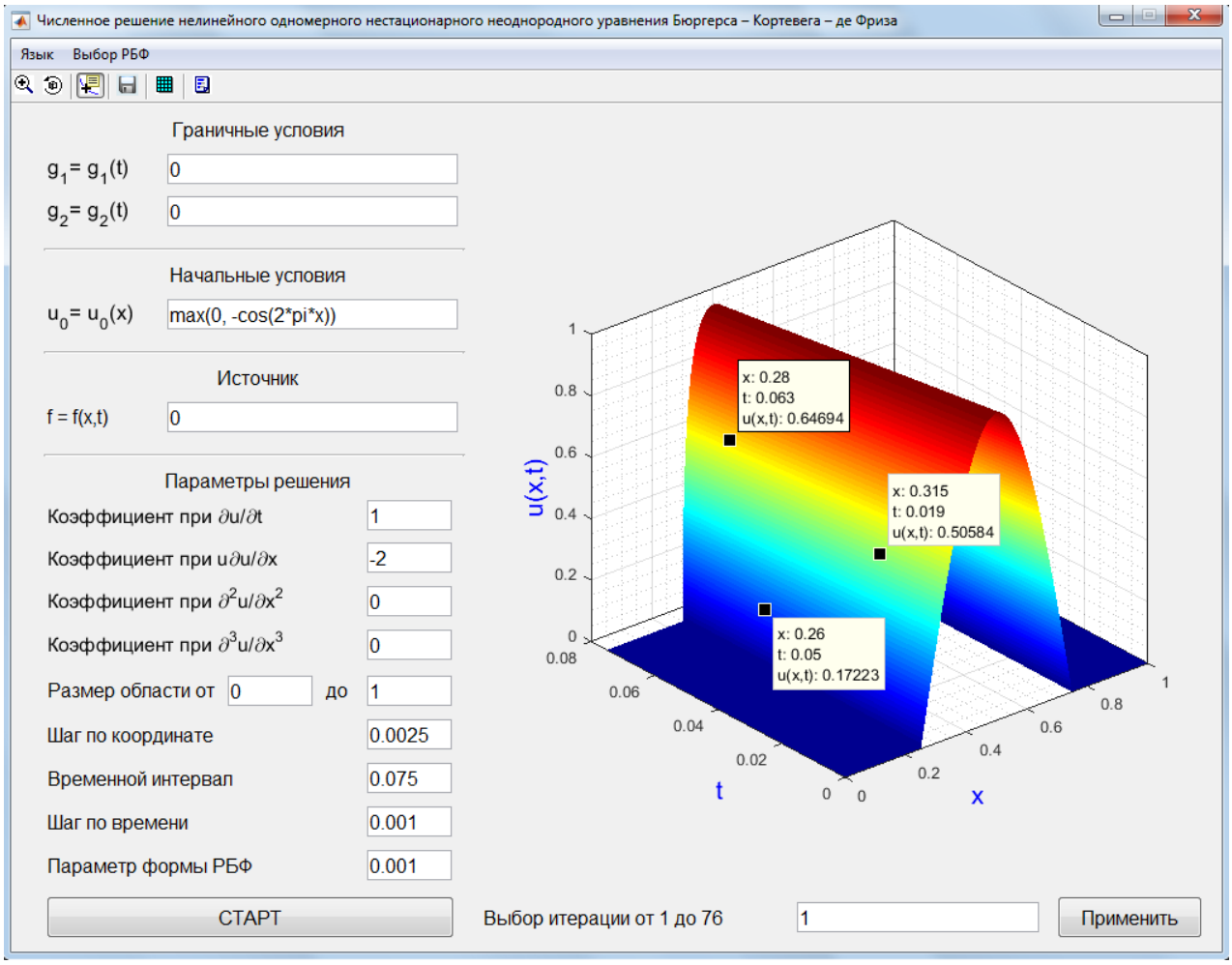


Рис. 3.5. Режим числового відображення значень отриманого розв’язку

- *Сохранить решение* – відображає діалогове вікно для збереження візуалізації наближеного розв’язку крайової задачі в один з наступних графічних форматів: .jpg, .png, .svg (Рис. 3.6.).
- *Отобразить/скрыть сетку* – активує/деактивує режим відображення сітки на тривимірній поверхні візуалізації розв’язку;
- *Экспорт решения в бинарный файл* – відображає діалогове вікно для експорту отриманого розв’язку крайової задачі в бінарний файл.

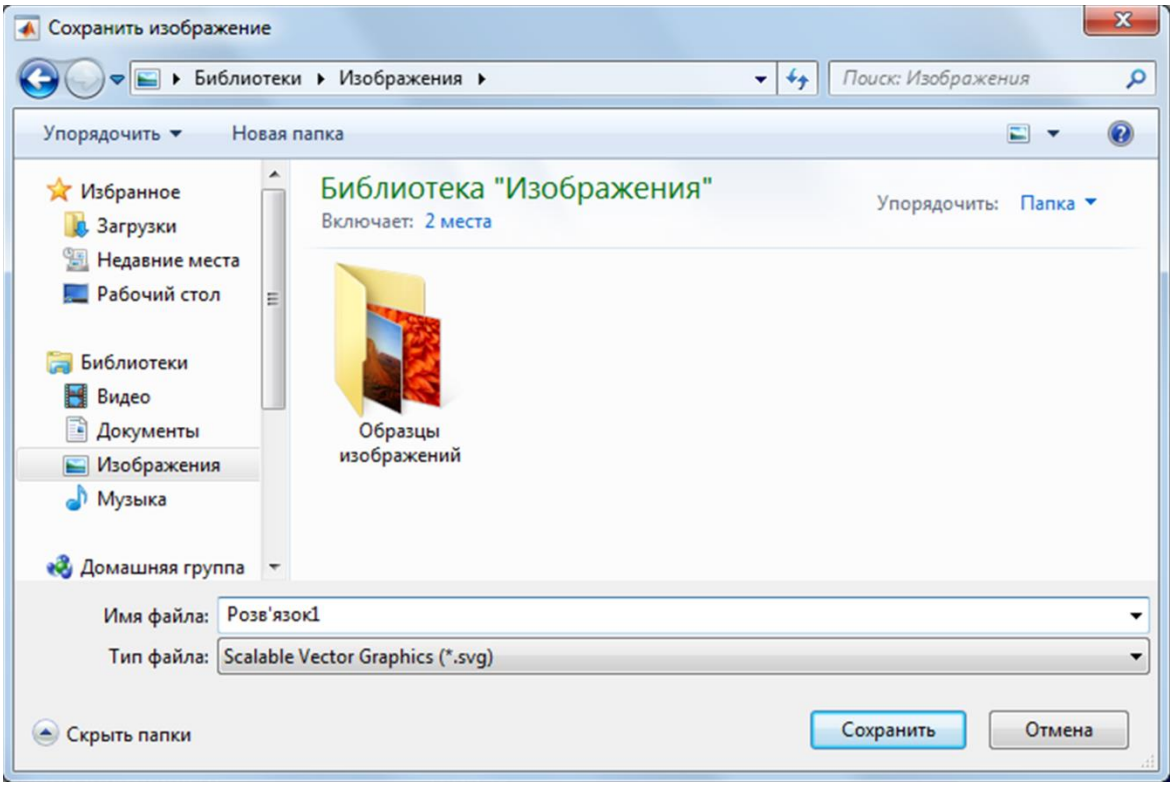


Рис. 3.6. Діалогове вікно збереження візуалізації наближеного розв’язку

Нижче панелі інструментів розташований робочий простір СКМ, який складається з двох частин. В лівій частині робочого простору розміщені основні елементи управління, а в правій частині – розташована графічна область у вигляді координатних осей (див. Рис. 3.2.).

Розглянемо детально елементи інтерфейсу системи комп’ютерного моделювання, які розташовані в межах робочого простору.

На Рис. 3.7. зображена частина робочого простору СКМ, яка відповідає за задання крайових умов.

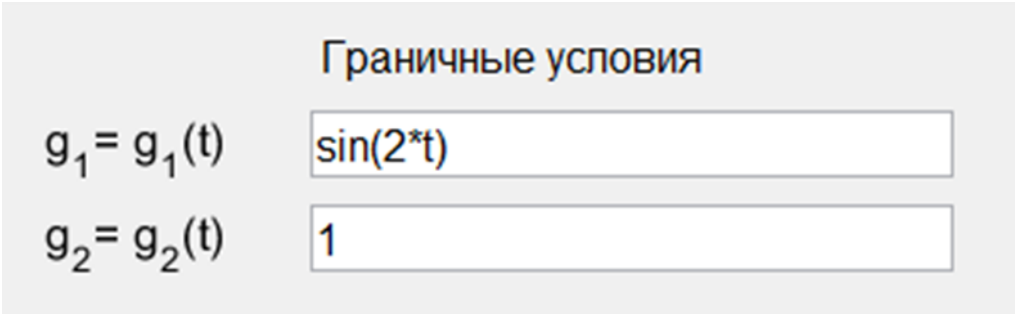


Рис. 3.7. Задання крайових умов

В даній частині робочого простору розміщені два текстових поля, які призначені для задання крайових умов Діріхле на лівій та правій границях області крайової задачі, відповідно. Система комп’ютерного моделювання дозволяє задавати крайові умови у вигляді константного значення або у вигляді функції, що залежить від часу.

На Рис. 3.8. зображена частина робочого простору СКМ, яка відповідає за задання початкових умов.

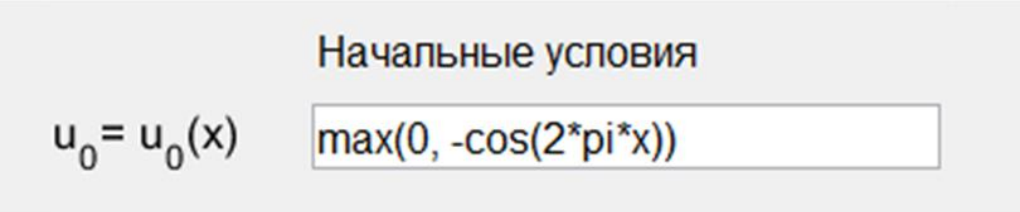


Рис. 3.8. Задання початкових умов

В даній частині робочого простору розміщено текстове поле, яке призначене для задання початкових умов крайової задачі. Система комп’ютерного моделювання дозволяє задавати початкові умови у вигляді константного значення або у вигляді функції, що залежить від координат.

На Рис. 3.9. зображена частина робочого простору СКМ, яка відповідає за задання функції джерела.

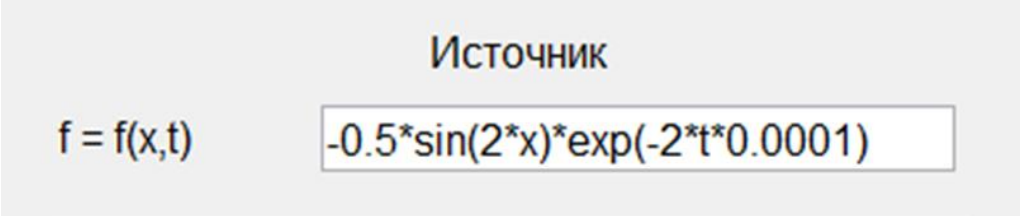


Рис. 3.9. Задання функції джерела

В даній частині робочого простору розміщено текстове поле, яке призначене для задання функції джерела. Система комп’ютерного моделювання дозволяє задавати функцію джерела у вигляді константного значення або у вигляді функції, що залежить від координат та часу.

На Рис. 3.10. зображена частина робочого простору СКМ, яка відповідає за задання параметрів вирішення крайової задачі.

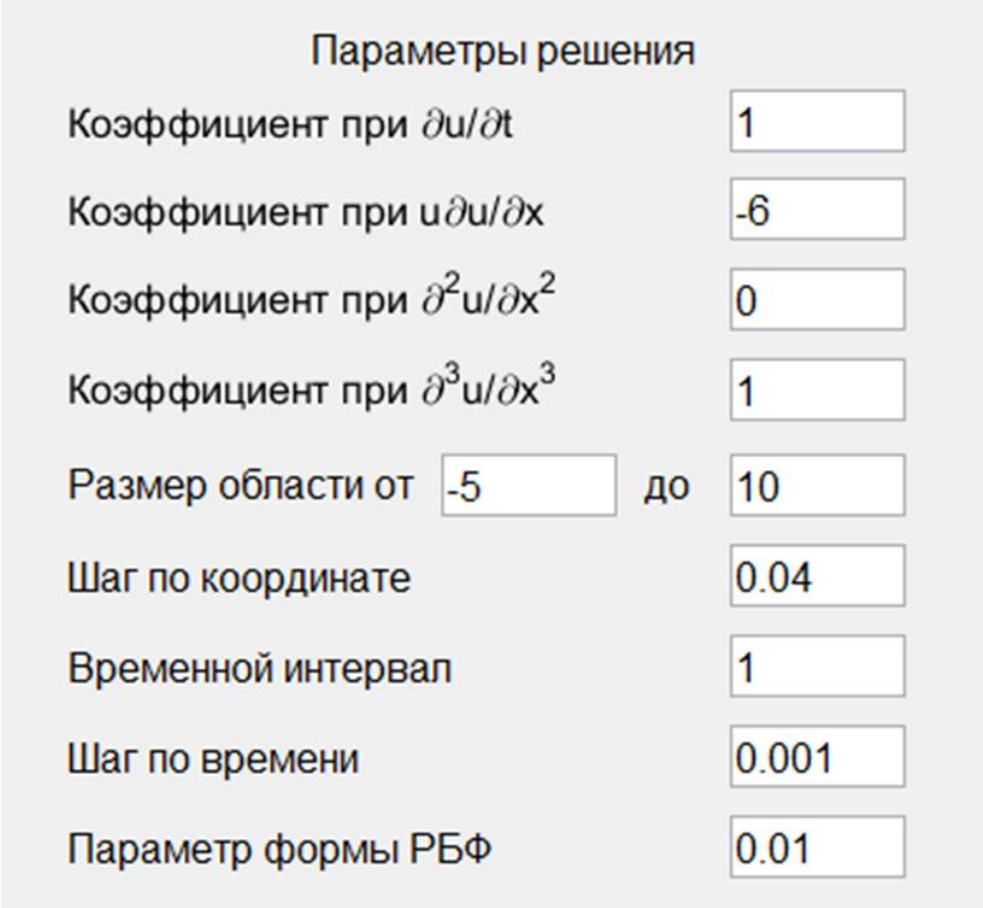


Рис. 3.10. Задання параметрів вирішення

В даній частині робочого простору розміщені текстові поля, які дозволяють налаштовувати наступні параметри вирішення: коефіцієнти в рівнянні Бюргерса-Кортевега-де Фріза, розмір області крайової задачі, відстань між інтерполяційними вузлами, часовий інтервал для нестаціонарної крайової задачі, крок за часом, а також параметр форми радіальної базисної функції.

В лівій нижній частині робочого простору СКМ розташована кнопка *СТАРТ*, при натисканні на яку розпочинається процес вирішення крайової задачі, та на екрані з’являється індикатор виконання (Рис. 3.11.).

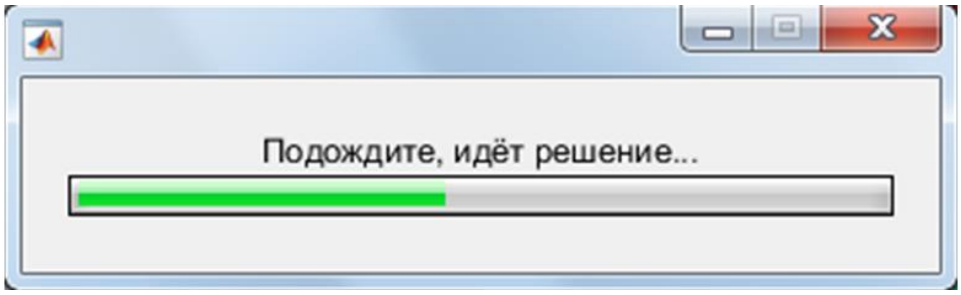


Рис. 3.11. Індикатор виконання

Після завершення процесу вирішення крайової задачі, в графічний області системи комп'ютерного моделювання відображається візуалізація наближеного розв'язку задачі у вигляді тривимірної поверхні (див. Рис. 3.5.).

В правій нижній частині робочого простору СКМ розташована область, яка відповідає за візуалізацію отриманого розв'язку на окремих проміжках часу у вигляді тривимірних графіків (Рис. 3.12.).

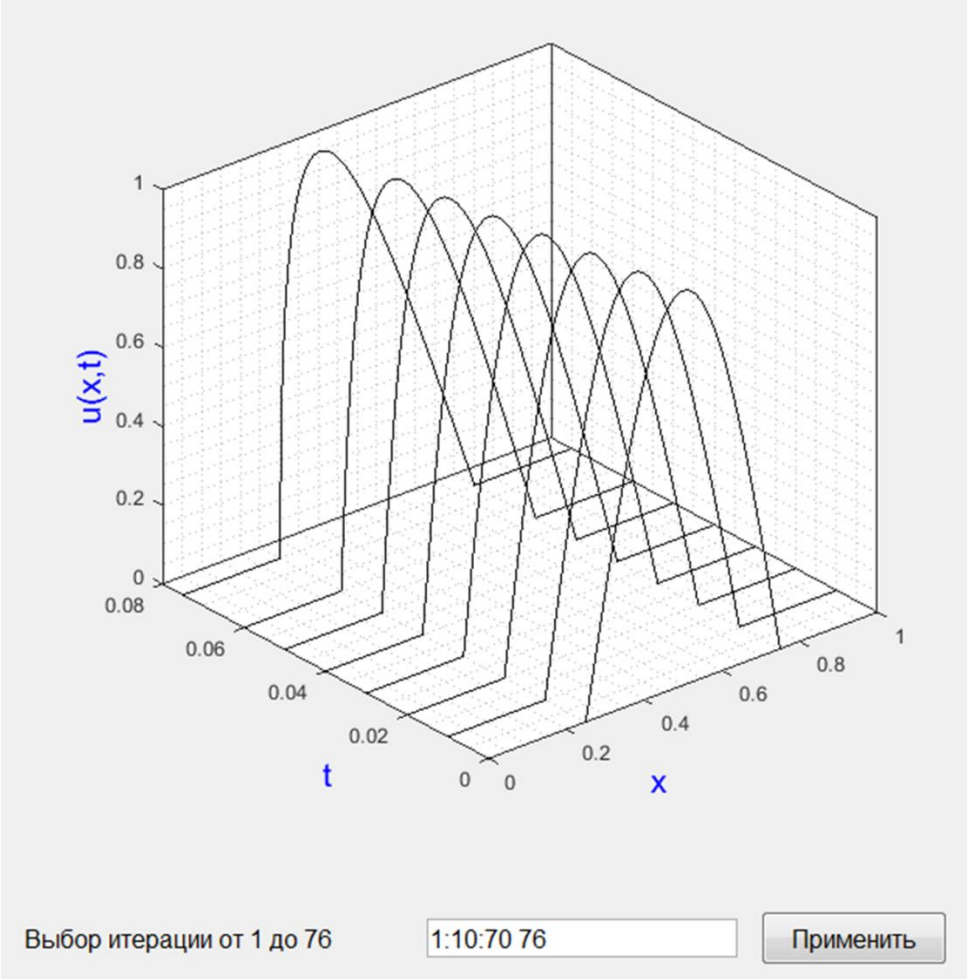


Рис. 3.12. Візуалізація розв'язку на окремих проміжках часу

В даній частині робочого простору розміщено текстове поле, в якому вказуються номери ітерацій нестаціонарної крайової задачі, які треба візуалізувати у вигляді тривимірних графіків. Процес візуалізації тривимірних графіків розпочнеться після натискання кнопки *Применить*.

3.4. Умови використання

Мінімальні системні вимоги до персонального комп’ютера, які необхідні для встановлення системи комп’ютерного моделювання:

- Процесор Intel або AMD, що підтримує набір інструкцій SSE2;
- 1 Гб вільного місця на жорсткому диску;
- 2 Гб оперативної пам’яті;
- Операційна система Microsoft Windows 7 і вище;
- Підключення до мережі Інтернет;
- Клавіатура;
- Маніпулятор типу «миша».

4. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

В даному розділі ілюструється застосування створеної системи комп'ютерного моделювання для числового вирішення рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза на прикладі чотирьох тестових задач і оцінюється точність отриманих розв'язків.

Для оцінки точності апроксимації в дипломній роботі застосовуються середня відносна похибка $\mathrm{rerr}(u)$, середня абсолютна похибка $\mathrm{aerr}(u)$ та максимальна похибка $\mathrm{merr}(u)$:

$$\mathrm{rerr}(u) = \sqrt{\frac{1}{N}\frac{\sum_{j=1}^{N}\left(u_j - \tilde{u}_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{N} u_j^2}} \tag{4.1}$$

$$\mathrm{aerr}(u) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(u_j - \tilde{u}_j\right)^2} \tag{4.2}$$

$$\mathrm{merr}(u) = \max_j \left|u_j - \tilde{u}_j\right| \tag{4.3}$$

де u_j та $\tilde{u}_j$ є відповідно аналітичними та наближеними розв'язками, N – загальна кількість інтерполяційних вузлів.

Задача № 1

Розглянемо нелінійне рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза:

$$\mu\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \varepsilon u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \eta\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = 0 \tag{4.4}$$

де $x \in [-20, 20]$, $d_x = 0.5$, $t \in [0, 0.01]$, $\tau = 0.001$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 1$, $\nu = 0.1$, $\eta = 0.1$, $c = 0.02$.

Початкові умови:

$$u(x,0) = -\frac{6\nu^2}{25\eta}\left[1+\tanh\left(\frac{\nu x}{10\eta}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\nu x}{10\eta}\right)\right] \tag{4.5}$$

Крайові умови задані у вигляді:

$$u(a,t) = -\frac{6\nu^2}{25\eta}\left[1+\tanh\left(\frac{\nu}{10\eta}\left(a+\frac{6\nu^2}{25\eta}t\right)\right)+\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\nu}{10\eta}\left(a+\frac{6\nu^2}{25\eta}t\right)\right)\right] \tag{4.6}$$

$$u(b,t) = -\frac{6\nu^2}{25\eta}\left[1+\tanh\left(\frac{\nu}{10\eta}\left(b+\frac{6\nu^2}{25\eta}t\right)\right)+\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\nu}{10\eta}\left(b+\frac{6\nu^2}{25\eta}t\right)\right)\right] \tag{4.7}$$

Аналітичний розв’язок задається рівнянням:

$$u(x,t) = -\frac{6\nu^2}{25\eta}\left[1+\tanh\left(\frac{\nu}{10\eta}\left(x+\frac{6\nu^2}{25\eta}t\right)\right)+\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\nu}{10\eta}\left(x+\frac{6\nu^2}{25\eta}t\right)\right)\right] \tag{4.8}$$

На Рис. 4.1. зображена візуалізація наближеного розв’язку Задачі № 1.

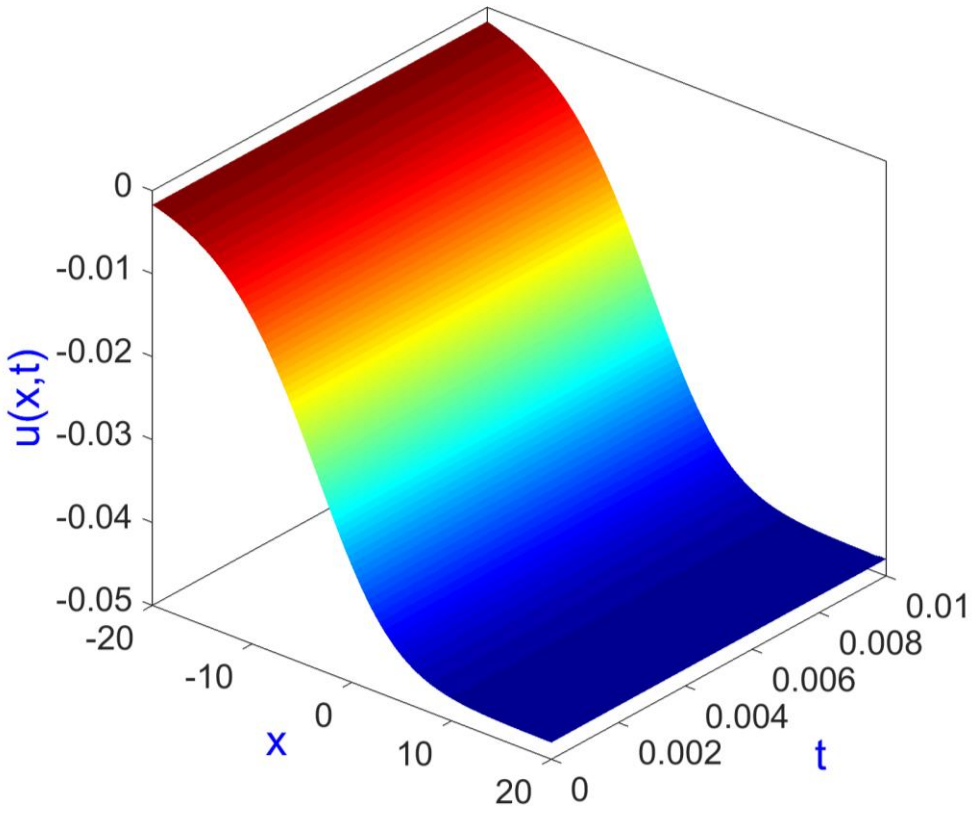


Рис. 4.1. Візуалізація наближеного розв’язку Задачі № 1

В Таблиці 4.1 наведені похибки числового розв’язку Задачі № 1 на різних проміжках часу.

Таблиця 4.1

Похибки числового розв’язку Задачі № 1

t	$\mathrm{rerr}(u)$	$\mathrm{aerr}(u)$	$\mathrm{merr}(u)$
0.001	4.9035×10^{-6}	1.5283×10^{-6}	9.5957×10^{-6}
0.002	7.8115×10^{-6}	2.4347×10^{-6}	1.4208×10^{-5}
0.003	1.1074×10^{-5}	3.4515×10^{-6}	2.1315×10^{-5}
0.004	1.4452×10^{-5}	4.5046×10^{-6}	2.8424×10^{-5}
0.005	1.7881×10^{-5}	5.5732×10^{-6}	3.5535×10^{-5}
0.006	2.1335×10^{-5}	6.6499×10^{-6}	4.2648×10^{-5}
0.007	2.4804×10^{-5}	7.7312×10^{-6}	4.9764×10^{-5}
0.008	2.8283×10^{-5}	8.8153×10^{-6}	5.6881×10^{-5}
0.009	3.1767×10^{-5}	9.9013×10^{-6}	6.4000×10^{-5}
0.01	3.5255×10^{-5}	1.0988×10^{-5}	7.1122×10^{-5}

На Рис. 4.2. представлено графік аналітичного розв’язку і наближеного розв’язку Задачі № 1 в момент часу $t = 0.01$.

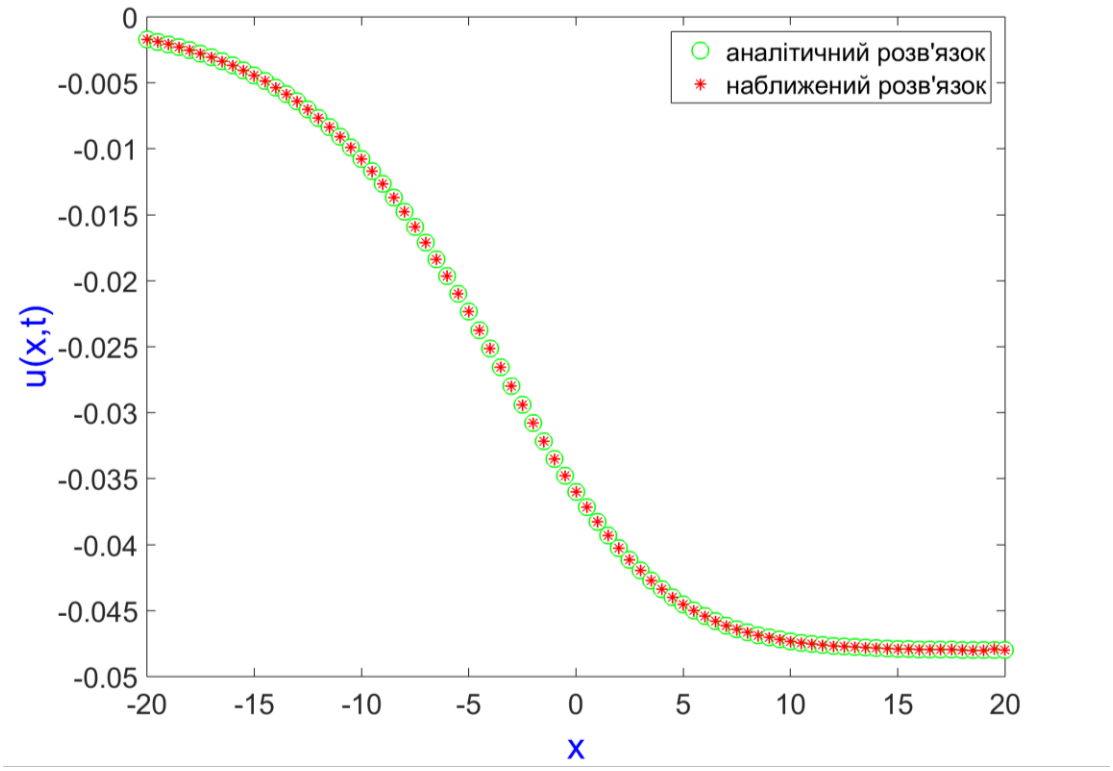


Рис. 4.2. Графік аналітичного розв’язку і наближеного розв’язку

Задача № 2

Розглянемо нелінійне рівняння Кортевега-де Фріза:

$$\mu\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\varepsilon u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\eta\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}=0 \tag{4.9}$$

де $x\in[-5,10]$, $d_x=0.04$, $t\in[0,1]$, $\tau=0.001$, $\mu=1$, $\varepsilon=-6$, $\eta=1$, $c=0.01$.

Початкові умови:

$$u(x,0)=-2\operatorname{sech}^2(x) \tag{4.10}$$

Крайові умови задані у вигляді:

$$u(a,t)=-2\operatorname{sech}^2(a-4t) \tag{4.11}$$

$$u(b,t)=-2\operatorname{sech}^2(b-4t) \tag{4.12}$$

Аналітичний розв’язок задано рівнянням:

$$u(x,t)=-2\operatorname{sech}^2(x-4t) \tag{4.13}$$

На Рис. 4.3. зображена візуалізація наближеного розв’язку Задачі № 2. В Таблиці 4.2 наведені похибки наближеного розв’язку Задачі № 2 в різні проміжки часу.

Таблиця 4.2

Похибки наближеного розв’язку Задачі № 2

t	$\mathrm{rerr}(u)$	$\mathrm{aerr}(u)$	$\mathrm{merr}(u)$
0.1	5.4171×10^{-5}	6.2551×10^{-4}	2.9791×10^{-3}
0.2	8.3066×10^{-5}	9.5916×10^{-4}	3.8728×10^{-3}
0.3	1.1107×10^{-4}	1.2825×10^{-3}	4.7045×10^{-3}
0.4	1.4281×10^{-4}	1.6490×10^{-3}	6.3452×10^{-3}
0.5	1.8105×10^{-4}	2.0906×10^{-3}	8.8987×10^{-3}
0.6	2.2767×10^{-4}	2.6289×10^{-3}	1.1940×10^{-2}
0.7	2.8402×10^{-4}	3.2796×10^{-3}	1.5463×10^{-2}
0.8	3.5088×10^{-4}	4.0516×10^{-3}	1.9462×10^{-2}
0.9	4.2837×10^{-4}	4.9464×10^{-3}	2.3973×10^{-2}

Продовження Таблиці 4.2

t	$\mathrm{rerr}(u)$	$\mathrm{aerr}(u)$	$\mathrm{merr}(u)$
1	5.1668×10^{-4}	5.9661×10^{-3}	2.8942×10^{-2}

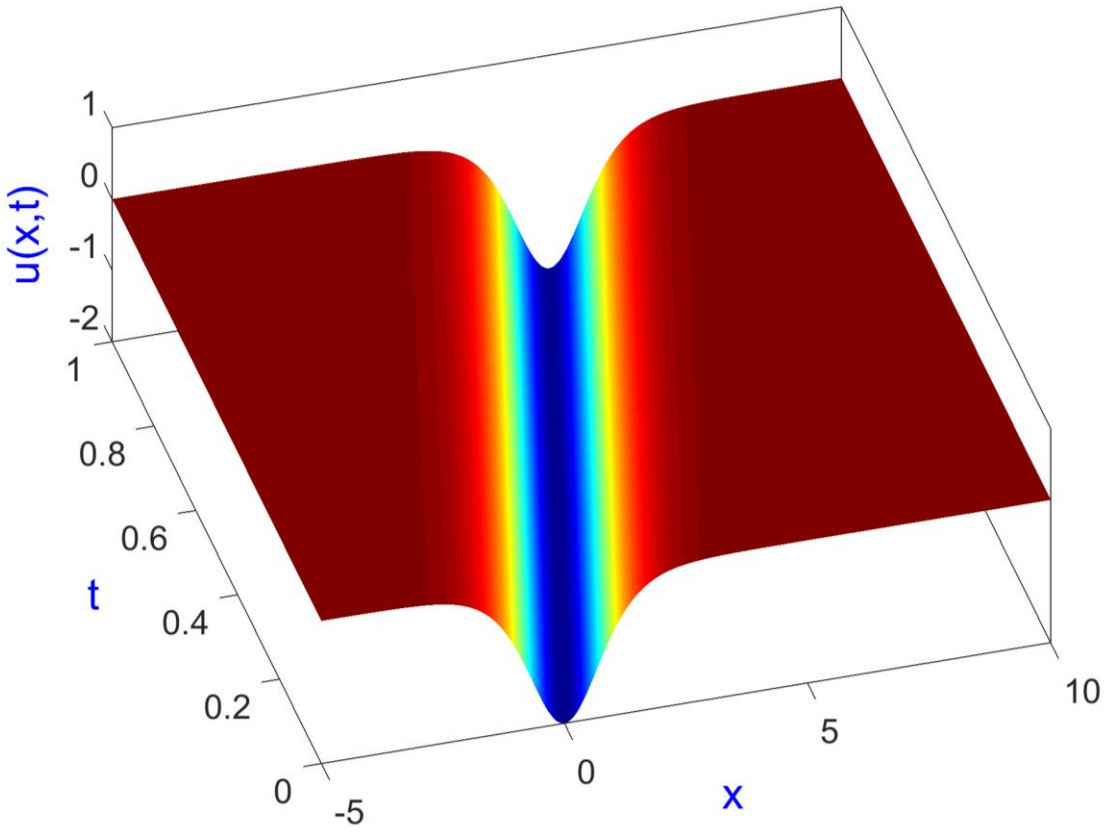


Рис. 4.3. Візуалізація наближеного розв’язку Задачі № 2

На Рис. 4.4. представлений графік аналітичного та наближеного розв’язків Задачі № 2 в момент часу $t = 1$.

Задача № 3

Розглянемо нелінійне рівняння Кортевега-де Фріза:

$$\mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \varepsilon u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \eta \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = 0 \qquad (4.14)$$

де $x \in [-5, 15]$, $d_x = 0.025$, $t \in [0, 0.1]$, $\tau = 0.0001$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 6$, $\eta = 1$, $c = 0.1$.

Початкові умови:

$$u(x,0)=12\frac{\{3+4\cosh(2x)+\cosh(4x)\}}{\{3\cosh(x)+\cosh(3x)\}^2} \tag{4.15}$$

Крайові умови задані у вигляді:

$$u(a,t)=12\frac{\{3+4\cosh(2a-8t)+\cosh(4a-64t)\}}{\{3\cosh(a-28t)+\cosh(3a-36t)\}^2} \tag{4.16}$$

$$u(b,t)=12\frac{\{3+4\cosh(2b-8t)+\cosh(4b-64t)\}}{\{3\cosh(b-28t)+\cosh(3b-36t)\}^2} \tag{4.17}$$

Аналітичний розв’язок задано рівнянням:

$$u(x,t)=12\frac{\{3+4\cosh(2x-8t)+\cosh(4x-64t)\}}{\{3\cosh(x-28t)+\cosh(3x-36t)\}^2} \tag{4.18}$$

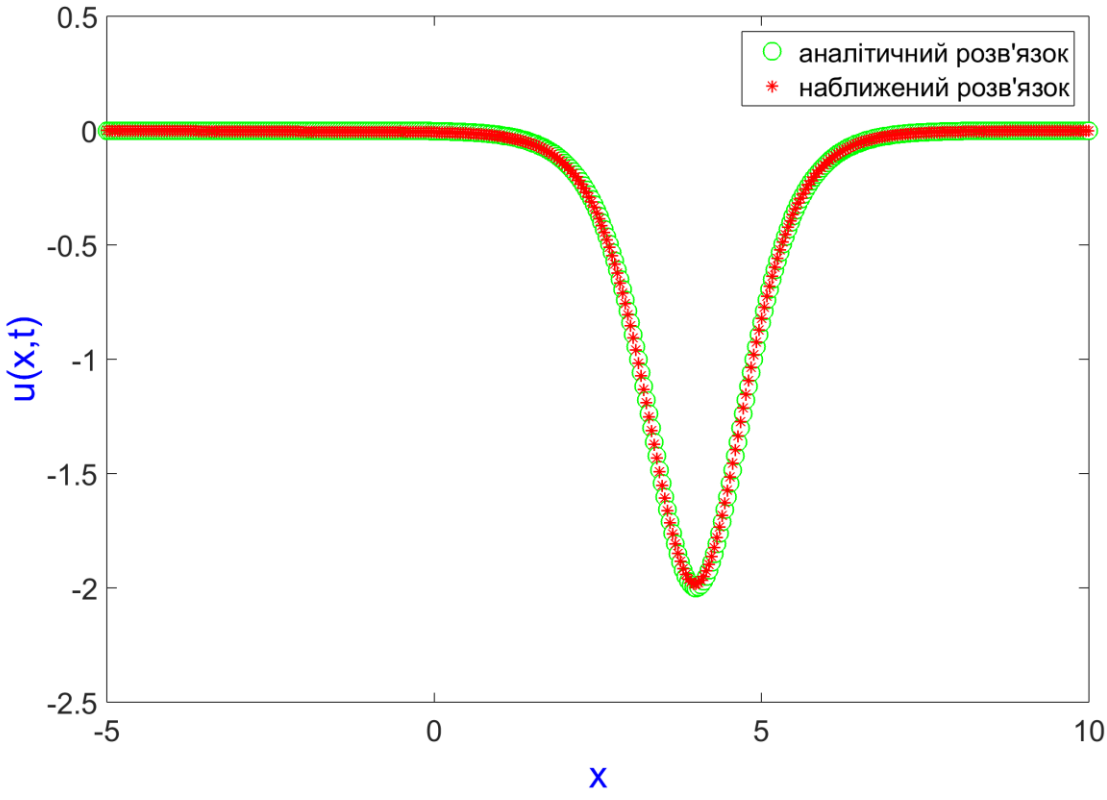


Рис. 4.4. Графік аналітичного та наближеного розв’язків Задачі № 2

На Рис. 4.5. зображена візуалізація наближеного розв’язку Задачі № 3.

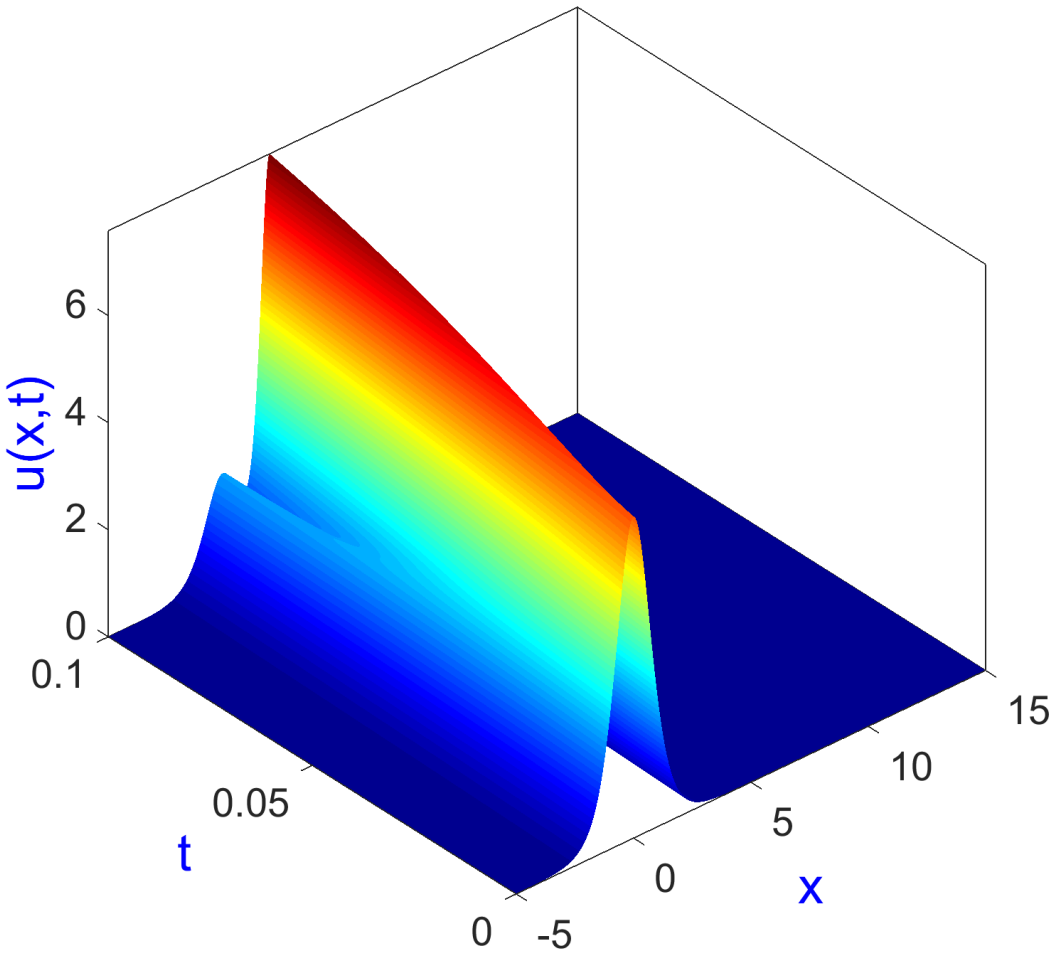


Рис. 4.5. Візуалізація наближеного розв’язку Задачі № 3

В Таблиці 4.3 наведені похибки наближеного розв’язку Задачі № 3 в різні проміжки часу.

Таблиця 4.3

Похибки наближеного розв’язку Задачі № 3

t	$\mathrm{rerr}(u)$	$\mathrm{aerr}(u)$	$\mathrm{merr}(u)$
0.01	1.5680×10^{-5}	6.8706×10^{-4}	4.1949×10^{-3}
0.02	3.1942×10^{-5}	1.3996×10^{-3}	8.3264×10^{-3}
0.03	4.7909×10^{-5}	2.0992×10^{-3}	1.1945×10^{-2}
0.04	6.3029×10^{-5}	2.7618×10^{-3}	1.4885×10^{-2}
0.05	7.7314×10^{-5}	3.3877×10^{-3}	1.7075×10^{-2}
0.06	9.1199×10^{-5}	3.9961×10^{-3}	1.8498×10^{-2}

Продовження Таблиці 4.3

t	$\mathrm{rerr}(u)$	$\mathrm{aerr}(u)$	$\mathrm{merr}(u)$
0.07	1.0543×10^{-4}	4.6199×10^{-3}	1.9188×10^{-2}
0.08	1.2098×10^{-4}	5.3013×10^{-3}	1.9504×10^{-2}
0.09	1.3888×10^{-4}	6.0855×10^{-3}	2.2901×10^{-2}
0.1	1.6007×10^{-4}	7.0141×10^{-3}	2.9685×10^{-2}

На Рис. 4.6. представлений графік аналітичного розв'язку та наближеного розв'язку Задачі № 3 в момент часу $t = 0.1$.

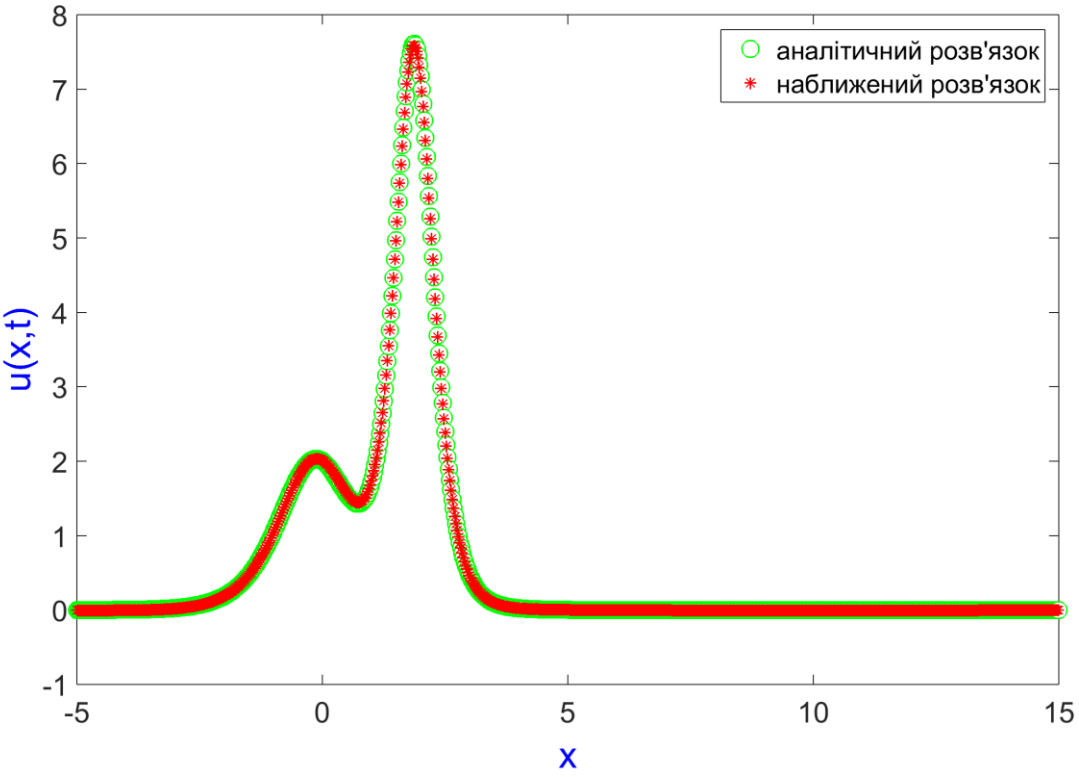


Рис. 4.6. Графік аналітичного розв'язку та наближеного розв'язку

Задача № 4

Розглянемо нелінійне неоднорідне рівняння Бюргерса:

$$\mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \varepsilon u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad (4.19)$$

де $x \in [0,1]$, $d_x = 0.005$, $t \in [0,2]$, $\tau = 0.01$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 1$, $\nu = 1000$, $c = 3$.

Функція $f(x,t)$ залежить від аналітичного розв'язку рівняння (4.19) наступним чином:

$$u(x,t)=\left(\sin(2\pi x)+\frac{1}{2}\sin(\pi x)\right)e^{t} \tag{4.20}$$

Початкові умови:

$$u(x,0)=\sin(2\pi x)+\frac{1}{2}\sin(\pi x) \tag{4.21}$$

Крайові умови задані у вигляді:

$$u(a,t)=0 \tag{4.22}$$

$$u(b,t)=0 \tag{4.23}$$

На Рис. 4.7. зображена візуалізація наближеного розв'язку Задачі № 4.

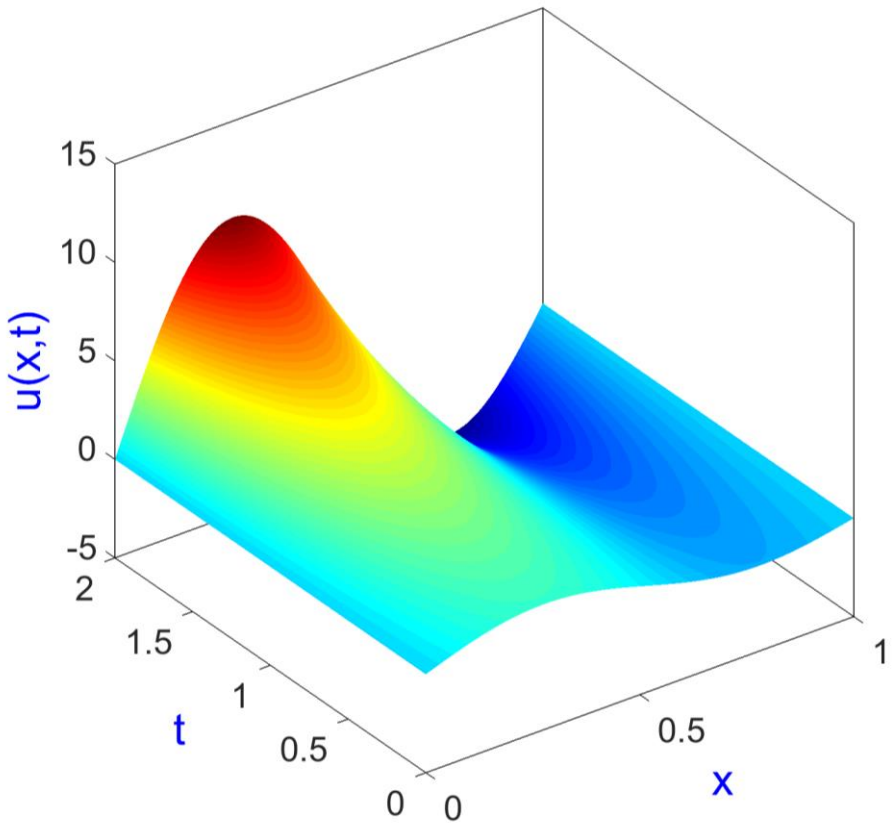


Рис. 4.7. Візуалізація наближеного розв'язку Задачі № 4

В Таблиці 4.4 наведені похибки наближеного розв’язку Задачі № 4 в різні проміжки часу.

Таблиця 4.4

Похибки наближеного розв’язку Задачі № 4

t	$\mathrm{rerr}(u)$	$\mathrm{aerr}(u)$	$\mathrm{merr}(u)$
0.3	2.1234×10^{-5}	3.2046×10^{-4}	7.1081×10^{-4}
0.6	2.2144×10^{-5}	4.5111×10^{-4}	1.0782×10^{-3}
0.9	2.1061×10^{-5}	5.7918×10^{-4}	1.1469×10^{-3}
1.2	2.1757×10^{-5}	8.0763×10^{-4}	1.5476×10^{-3}
1.5	6.8519×10^{-5}	3.4332×10^{-3}	1.1005×10^{-2}
1.8	1.5465×10^{-4}	1.0460×10^{-2}	2.5023×10^{-2}
2	2.7985×10^{-5}	2.3119×10^{-3}	4.9510×10^{-3}

На Рис. 4.8. представлений графік аналітичного розв’язку та наближеного розв’язку Задачі № 4 в момент часу $t = 2$.

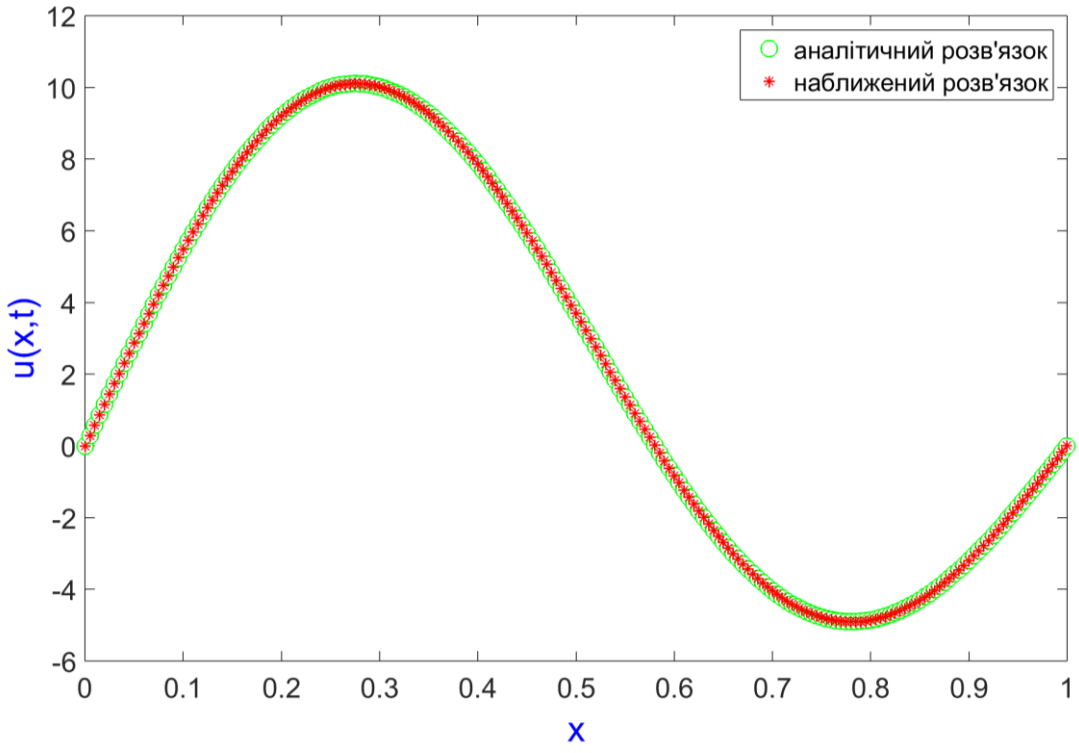


Рис. 4.8. Графік аналітичного розв’язку та наближеного розв’язку

ВИСНОВКИ

Мета та задачі, поставлені в дипломній роботі, були виконані. А саме:

1. Було створено технічне завдання;
2. Було проведено огляд літератури та обрано числовий метод для вирішення нелінійного диференціального рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза;
3. Було чисельно вирішено рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза;
4. Було розроблено інтерфейс системи комп’ютерного моделювання;
5. Було розроблено алгоритм роботи системи комп’ютерного моделювання;
6. Було розроблено програмний продукт;
7. Було проведено тестування системи комп’ютерного моделювання.

Розроблено систему комп’ютерного моделювання для числового вирішення нелінійного диференціального рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза за безсітковою схемою з використанням радіальних базисних функцій. Безсіткова схема реалізується на основі методу колокації та радіальних базисних функцій. В цій схемі розв’язок диференціального рівняння апроксимується радіальними базисними функціями, а для знаходження коефіцієнтів, що є невідомими використовується метод колокації.

Розв’язок нелінійного диференціального рівняння Бюргерса-Кортевега-де Фріза в системі комп’ютерного моделювання візуалізується у вигляді тривимірної поверхні. В СКМ реалізована можливість візуалізації отриманого розв’язку на окремих проміжках часу у вигляді тривимірних графіків.

Ефективність числових вирішень в системі комп’ютерного моделювання продемонстрована на прикладі чотирьох еталонних задач для кожної з яких були отримані наближені розв’язки, та обчислені середня відносна похибка, середня абсолютна похибка та максимальна похибка.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Su C. H., Gardner C. S. Derivation of the Kortewege-de Vries and Burgers' equation. Journal of Mathematical Physics. 1969. Vol. 10. P. 536-539. doi: https://doi.org/10.1063/1.1664873
2. Jonson R. S. Shallow water waves in a viscous fluid – the undular bore. The Physics of Fluids. 1972. Vol. 15. P. 1993-1999. doi: https://doi.org/10.1063/1.1693764
3. Jonson R. S. A nonlinear equation incorporating damping and dispersion. Journal of Fluid Mechanics. 1970. Vol. 42, Issue 1. P. 49-60. doi: https://doi.org/10.1017/S0022112070001064
4. Grad H., Hu P. N. Unified shock profile in a plasma. The Physics of Fluids. 1967. Vol. 10. P. 2596-2601. doi: https://doi.org/10.1063/1.1762081
5. Burgers J. M. Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion. Verhandelingen Der Koninklijke Nederlandsche Akademie Van Wetenschappen. Amsterdam, 1939. Vol. 17, Issue 2. P. 1-53. doi: https://doi.org/10.1007/978-94-011-0195-0_10
6. Kortewege D. J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1895. Vol. 39, Issue 240. P. 422-443. doi: https://doi.org/10.1080/14786449508620739
7. Demeiray H. Nonlinear waves in a thick-walled viscoelastic tube filled with an inviscid fluid. International Journal of Engineering Science. 1998. Vol. 36, Issue 3. P. 345-357. doi: https://doi.org/10.1016/S0020-7225(97)00056-6
8. Antar N., Demiray H. Nonlinear waves in an inviscid fluid contained in an pre-stressed thin viscoelastic tube. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP. 1997. Vol. 48. P. 325-340. doi: https://doi.org/10.1007/s000330050034

9. Zaki S. I. A quintic B-spline finite elements scheme for the KdVB equation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2000. Vol. 188. P. 121-134. doi: https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00142-5
10. Talaat S. Aly El-Danaf Septic B-spline method of the Kortewege–de Varies–Burgers' equation. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2008. Vol. 13, Issue 3. P. 554-566. doi: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2006.05.010
11. Kaya D. An application of the decomposition method for the KdVB equation. Applied Mathematics and Computation. 2004. Vol. 152, Issue 1. P. 279-288. doi: https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00566-6
12. Soliman A. A. A numerical simulation and explicit solutions of KdV–Burgers' and Lax's seventh-order KdV equations. Chaos, Solitons & Fractals. 2006. Vol. 29, Issue 2. P. 294-302. doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.08.054
13. Belytschko T., Lu Y. Y., Gu L. Element-free Galerkin methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1994. Vol. 37, Issue 2. P. 229-256. doi: https://doi.org/10.1002/nme.1620370205
14. Belytschko T., Rongauz Y., Organ D. Meshless methods: An overview and recently developments. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1996. Vol. 139. P. 3-47. doi: https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01078-X
15. Протектор Д. О., Лисин Д. А., Лисина О. Ю. Численный анализ решений двумерных задач теплопроводности по бессеточной схеме с использованием фундаментальных и общих решений. Прикладні питання математичного моделювання. 2019. Т. 2, № 1. С. 98-111. doi: https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-8
16. Гарячевська І. В., Протектор Д. О. Система комп'ютерного моделювання для числового вирішення одновимірного нестаціонарного рівняння Бюргерса. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.

Автоматизовані системи управління». 2019. Т. 43. С. 11-19. doi: https://doi.org/10.26565/2304-6201-2019-43-02

17. Ingber M.S., Chen C.S., Tanski J.A. A mesh free approach using radial basis functions and parallel domain decomposition for solving three-dimensional diffusion equations. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2004. Vol. 60, Issue 13. P. 2183-2201. doi: https://doi.org/10.1002/nme.1043
18. Xie H., Zhou J., Jiang Z. Approximations for Burgers' equations with C-N scheme and RBF collocation methods. Journal of Nonlinear Sciences and Applications. 2016. Vol. 9, Issue 6. P. 3727-3734. doi: http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.06.23
19. Kansa E. J. Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – I surface approximations and partial derivative estimates. Computers & Mathematics with Applications. 1990. Vol. 19. P. 127-145. doi: https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90270-T
20. Kansa E. J. Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. Computers & Mathematics with Applications. 1990. Vol. 19. P. 147-161. doi: https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90271-K
21. Hon Y. C., Mao X. Z. An efficient numerical scheme for burgers equation. Applied Mathematics and Computation. 1998. Vol. 95, Issue 1. P. 37-50. doi: https://doi.org/10.1016/S0096-3003(97)10060-1
22. Gingold R. A., Monaghan J. J. Smoothed Particle Hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1977. Vol. 181, Issue 3. P. 375-389. doi: https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375
23. Lucy B. L. A Numerical Approach to Testing the Fission Hypothesis. Astronomical Journal. 1977. Vol. 82, no. 12. P. 1013-1024. doi: https://doi.org/10.1086/112164

24. Liu G. R. Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method. USA: CRC Press, 2003.
25. Nayroles B., Touzot G., Villon P. Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements. Computational Mechanics. 1992. Vol. 10. P. 307-318. doi: https://doi.org/10.1007/BF00364252
26. Liu W. K., Jun S., Li S., Jonathan A., Belytschko T. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1995. Vol. 38, Issue 10. P. 1655-1679. doi: https://doi.org/10.1002/nme.1620381005
27. Onate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Sacco C. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1996. Vol. 139. P. 315-346. doi: https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01088-2
28. Onate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. A Finite point method in computational mechanics. Application to convective transport and fluid flow. International Journal for Numerical Methods in Engineering.1996. Vol. 39, Issue 22. P. 3839-3866. doi: https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19961130)39:22<3839::AID-NME27>3.0.CO;2-R
29. Atluri S. N., Zhu T. A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. Computational Mechanics. 1998. Vol. 22. P. 117-127. doi: https://doi.org/10.1007/s004660050346
30. Atluri S. N., Shengping S. The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple & Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods. Computer Modeling in Engineering & Sciences. 2002. Vol. 3, no. 1. P. 11-52. doi: https://doi.org/10.3970/cmes.2002.003.011
31. Lee C. K., Liu X., Fan S. C. Local multiquadric approximation for solving boundary value problems. Computational Mechanics. 2003. Vol. 30. P. 396-409. doi: https://doi.org/10.1007/s00466-003-0416-5

32. Wendland H. Meshless Galerkin methods using radial basis functions. Mathematics of Computation. 1999. Vol. 68, no. 228. P. 1521-1531. doi: https://doi.org/10.1090/S0025-5718-99-01102-3
33. Buhmann M. D. Radial Basis Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
34. Wu Z. Compactly supported positive definite radial functions. Advances in Computational Mathematics. 1995. Vol. 4. P. 283-292. doi: https://doi.org/10.1007/BF03177517
35. Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. Advances in Computational Mathematics. 1995. Vol. 4. 389-396. doi: https://doi.org/10.1007/BF02123482
36. Buhmann M. D. Radial functions on compact support. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 1998. Vol. 41, Issue 1. P. 33-46. doi: https://doi.org/10.1017/S0013091500019416