Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
(повне найменування вищого навчального закладу)

Фізико-енергетичний факультет
(повне найменування інституту, назва факультету (відділення))

Інформаційні технології в фізико-енергетичних системах
(повна назва кафедри (предметної, циклової комісії))

Пояснювальна записка

до дипломного проекту (роботи)
магістр
(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему Дослідження плескання рідини у циліндричних резервуарах методом інтегральних рівнянь

Виконав студент 6 курсу
групи НФ-63
напряму підготовки (спеціальності)
6.040204 прикладна фізика
(шифр і назва напряму підготовки, спеціальності)
Постний О.В.
(прізвище та ініціали)
Керівник Стрельнікова О.О.
(прізвище та ініціали)
Рецензент _____
(прізвище та ініціали)

Харків - 2017

РЕФЕРАТ

Дипломна робота виконана студентом Постним Олексієм Віталійовичем на тему: «Дослідження плескання рідини у циліндричних резервуарах методом інтегральних рівнянь».

Розв'язана задача визначення частот і форм коливань циліндричної оболонки, повністю заповненою рідиною. Розв’язки для форм коливань і тиску рідини на оболонку отримано у вигляді рядів Фур'є-Бесселя. Доведено, що власні форми коливань жорстко закріпленої з двох торців незаповненою і повністю заповненої ідеальної нестисливої рідиною оболонки однакові (відрізняються постійним множником). Розроблено програми визначення частот і форм коливань незаповненої циліндричної оболонки та коефіцієнта зниження частоти для заповненої оболонки, а також досліджений вплив швидкості потоку на частоти коливань.

Дипломний проект містить: __ сторінку, __ рисунків, __ таблиць, __ джерело.

Ключові слова:

РЕФЕРАТ

Дипломная работа выполнена студентом Постным Алексеем Витальевичем на тему: «Исследование плескания жидкости в цилиндрических резервуарах методом интегральных уравнений».

Решена задача определения частот и форм колебаний цилиндрической оболочки, полностью заполненной жидкостью. Решения для форм колебаний и давления получено в виде рядов Фурье-Бесселя. Доказано, что собственные формы колебаний жестко закрепленной с двух торцов незаполненной и полностью заполненной идеальной несжимаемой жидкостью оболочки совпадают (отличаются постоянным множителем). Разработаны программы определения частот и форм колебаний незаполненной цилиндрической оболочки и коэффициента снижения частоты для заполненной оболочки, а также изучено влияние скорости потока на частоты колебаний.

Дипломный проект содержит: __ страницу, __ рисунков, _ таблиц, __ источник.

Ключевые понятия:

SUMMARY

This degree work is made by student Postnyi Alexey Vitalyevich. The topic of the degree work is "research of flowing fluid in cylindrical reservoir by the method of integral equations "

The problem of evaluating the frequencies and modes of vibrations for fully-filled cylindrical shell was solved. The representations of solutions to modes of vibrations and pressure were obtained in the form of Fourier-Bessel series. It was proved that the own modes of empty and fully-filled clamped shell are coincided (are differed by constant multiple). The liquid was supposed to be ideal and incompressible one. The Computer Codes to evaluate the frequencies and modes of vibrations for empty cylindrical shell and coefficient of decreasing for fully-filled shell were elaborated. The influence of velocity on frequencies of vibrations was simulated.

The degree project comprises: __ pages, __ drawings, __ tables, __ Springs.

Keywords:

ЗМІСТ

ВСТУП 7
1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ 10
1.1. Методи чисельного інтегрування в розрахунках міцності оболонкових конструкцій 10
1.2. Методи скінченних різниць (сіткові методи) 11
1.3 Методи скінченних і граничних елементів в задачах статики і динаміки оболонкових конструкцій 11
1.4. Методи рішення задач гідроаеропружості 12
2. Формулювання задачі та метод розв’язання 15
2.1. Основні співвідношення теорії коливань тонких циліндричних оболонок 15
2.2. Граничні умови 17
2.3. Визначення частот і форм коливань незаповненої циліндричної оболонки 17
3. Основні співвідношення для визначення тиску рідини на оболонку 20
3.1. Визначення потенціалу швидкостей 20
3.2. Визначення тиску рідини на поверхню оболонки. 22
3.2.1. Нерухома рідина 22
3.2.2. Рухома рідина. 30
4. Чисельні результати 40
Висновки 44
Список використаних джерел 45
Додаток А 49
Додаток Б 50

ВСТУП

У різних областях інженерної практики, таких як хімічна промисловість, авіабудування, енергетичне машинобудування, широко використовуються елементи конструкцій у вигляді оболонок або тіл обертання, які функціонують в умовах підвищених технологічних навантажень і заповнені нафтою, легкозаймистими або отруйними речовинами. До їх числа відносяться паливні баки, цистерни, резервуари нафтосховищ, палива, скрапленого газу та ін. Внаслідок геополітичного положення України після розпаду СРСР на її території залишилося безліч сховищ вогненебезпечних, отруйних хімічних речовин, які зберігаються в ємностях і резервуарах, що були виготовлені ще в 60-ті роки минулого століття і фактично вичерпали свій нормативний ресурс. Як з ємностями, так і з сховищами за останні 20 років практично не проводилося регламентних і профілактичних робіт. Про це свідчать, наприклад, систематичні вибухи складів боєприпасів під Мелітополем. Виявлено також небезпечні пошкодження посудин тиску, які відпрацювали понад 20-30 років. Термін безпечної експлуатації такого обладнання вичерпаний. Це може призвести до аварій і надзвичайних ситуацій техногенного характеру (вибухів, погіршення екологічної ситуації та умов життєдіяльності людини.). Аналіз причин аварій і надзвичайних ситуацій техногенного характеру за останні роки показав, що майже в половині випадків (48 відсотків) вони носять технічний характер (незадовільний стан споруд, конструкцій, обладнання, їх значна зношеність). За підрахунками фахівців зношеність зазначених об'єктів становить 50-70% і має тенденцію до збільшення. Наприклад, на ДП «Південний машинобудівний завод» 50% посудин тиску з агресивним заповнювачем вичерпали нормативний ресурс довгострокової експлуатації.

Навіть якщо ємності, укриття та сховища знаходяться в справному стані, не виключена можливість їх руйнування внаслідок порушення умов транспортування, непередбачених катастроф, землетрусів, терактів та ін

Відзначимо, що таку кількість небезпечних об'єктів неможливо модернізувати і оновити в найкоротші терміни.

Тому актуальною проблемою є оцінка їх міцності під дією експлуатаційних і форс-мажорних навантажень, а також визначення частот і форм коливань для вирішення питань їх безпечної експлуатації. Відзначимо також, що не тільки оцінка стану існуючого обладнання, а й проектування нових високоефективних машин і споруд, що мають необхідний рівень надійності, вимагає визначення характеристик міцності їх елементів. Ці дані дозволяють оцінити границю міцності конструкції при ударному або сейсмічному навантаженні, провести відстроювання від небажаних резонансних частот, виявити ще на стадії проектування найбільш небезпечні з точки зору концентрації напружень зони. Специфікою проаналізованих конструкцій є їх робота при взаємодії з повітряним або водяним середовищем, внаслідок чого для визначення шуканих характеристик міцності необхідно розв’язувати задачі гідро – аеро - пружності, тобто визначати поля напружень, деформацій і частоти коливань, виходячи з того, що на пружне тіло діють сили тиску рідини або газу.

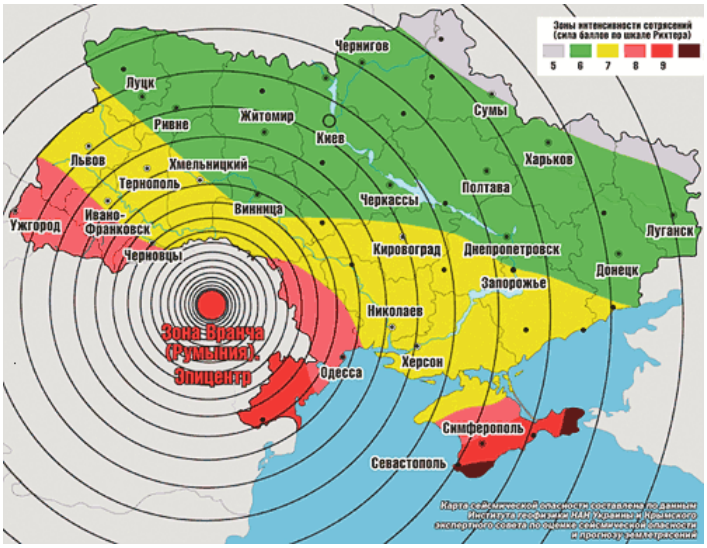


Рис. 1.1. Сейсмічна зона Вранча.

Актуальність таких досліджень підтверджується також новими картами сейсмічної активності (сейсмічна зона Вранча) України і розташуванням промислових центрів (Рис.1.1). Натепер визнають, що деякі ємності і сховища розташовані в місцях, які раніше розглядалися без урахування сейсмічної

небезпеки, і, отже, спроектовані без урахування можливої дії горизонтального імпульсного навантаження, за застарілими сейсмічними стандартами.



Рис. 1.2 Циліндричні оболонки, що взаємодіють з рідиною

1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Аналіз робіт, присвячених розрахунком оболонок, у тому числі, що моделюють посудини і резервуари з небезпечними заповнювачами, дозволяє виділити в даний час в якості основних і найбільш ефективних методів їх міцносного аналізу методи чисельного інтегрування, метод різниць і скінченних методи скінченних і граничних елементів.

1.1. Методи чисельного інтегрування в розрахунках міцності оболонкових конструкцій

Методи чисельного інтегрування застосовуються, в основному, для розрахунку оболонок обертання. Ці методи засновані на зведенні крайової задачі до ряду задач Коші, які розв’язуються добре розробленими методами чисельного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. Найбільш простим способом зведення крайової задачі до задачі Коші є метод початкових параметрів [2,3]. Чисельний алгоритм цього методу не завжди має задовільну стійкість при розв’язанні крайових задач теорії оболонок, що пов'язано з особливостями самих задач. При розрахунку можливе накопичення значних помилок чисельного інтегрування, отримання лінійно залежних розв’язків задач Коші і близькою до виродженої матриці системи для визначення постійних інтегрування. Трудомісткість застосування методу початкових параметрів до розрахунку оболонок призвела до пошуку методів, вільних від зазначених недоліків. У 1961 році С.Г.Годунов запропонував метод ортогоналізації [4], який дозволяє отримати чисельний розв’язок крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь, коли поряд з швидко зростаючими є і спадаючі розв’язки. На основі цього методу, який може бути легко реалізований на сучасній ЕОМ, розроблені ефективні алгоритми розрахунку оболонок. До задач статики несиметрично навантажених ізотропних оболонок обертання метод вперше був застосований Я.М.Грігоренко, А.Т.Василенко до задач статики ортотропних оболонок в роботах [5], а в більш пізніх роботах [6-9] до задач статики анізотропних оболонок. Ця ж методика була

використана в роботі [10] для розрахунку оболонок обертання з розгалуженим меридіаном. Універсальний алгоритм розрахунку на міцність, стійкість і коливання осесиметрично навантажених конструкцій, складених з набору ізотропних і ортотропних оболонок обертання, з'єднаних між собою безпосередньо або за допомогою пружних шпангоутів, запропонований А.В.Кармішіним, В.І.Мяченковим, В.А.Лясковцом, А.Н.Фроловим [11]. Узагальнення розглянутого методу розрахунку на задачі стійкості і коливань осесиметричних багатозв'язних ізотропних і ортотропних тонкостінних оболонкових конструкцій було зроблено В.І.Мяченковим і І.В.Грігорьевим в роботах [12,13].

1.2. Методи скінченних різниць (сіткові методи)

Одним з перших наближених методів, використаних для розв'язання крайових задач, був метод скінченних різниць [14]. Цей метод полягає в наступному. Область безперервної зміни аргументу замінюється скінченною сукупністю точок (вузлів), званих сіткою. Шукані функції, що розглядаються в цих точках, називаються сітковими функціями. Похідні, що входять до диференціальних рівнянь і крайових умов, замінюються тими чи іншими різницевими співвідношеннями. Для визначення невідомих значень функцій у вузлових точках будують систему алгебраїчних рівнянь. Методи скінченних різниць привабливі тим, що їх в принципі можна застосувати до будь-якої системи диференціальних рівнянь, проте врахування граничних умов задачі часто є громіздкою і важко програмованою операцією. Слід відзначити також деяку складність реалізації різних варіантів граничних умов і труднощі при застосуванні методу до складних за конфігурацією областей.

1.3 Методи скінченних і граничних елементів в задачах статики і динаміки оболонкових конструкцій

Останнім часом широкого поширення при розв’язанні задач механіки суцільного середовища отримав метод скінченних елементів. До достоїнств цього методу відносяться можливість виконання граничних умов з тією ж точністю, з

якою проводиться розв’язання задачі, розгляд неоднорідних тіл довільної природи, а також доступність застосування елементів з інтерполяційними функціями будь-якого порядку. Складність геометрії області, крайових умов, законів зміни властивостей середовища і зовнішніх впливів при застосуванні МСЕ не викликає особливих труднощів. Простою і зручною є механічна інтерпретація всієї його процедури. Це важлива перевага методу.

Метод граничних елементів [15,16] за універсальністю значно поступається МСЕ, але в ряді випадків більш ефективний з точки зору витрат машинного часу. Відзначимо достоїнства методу: дискретні параметри вводяться лише на межах області, що в багатьох випадках приводить до зменшення числа ступенів свободи в порівнянні з МСЕ, а також, полегшує підготовку вихідних даних і не призводить до труднощів при розгляді нескінченних областей та околів сингулярних точок, якщо існують відповідні аналітичні рішення. Останнім часом метод граничних елементів був застосований для розрахунку пластин та оболонок, однак ці дослідження зводяться в основному до розгляду порівняно простих варіантів конструкцій. Можливість ефективного застосування методу граничних елементів до розрахунку широкого класу складних тонкостінних оболонкових конструкцій в даний час поки проблематична.

1.4. Методи рішення задач гідроаеропружості

З точки зору практики, особливий теоретичний і практичний інтерес має проблема взаємодії твердих і пружних тіл з рідиною. Багато прикладних задач механіки деформівного тіла призводять до необхідності вивчення сумісного руху твердих деформівних і рідких середовищ. Деякі з цих задач були сформульовані і розв’язані ще в XIX столітті. До них, зокрема, належить задача про рух твердого тіла з порожниною, цілком заповненою ідеальною нестисливою рідиною. У найбільш повному формулюванні ця задача була вивчена Н.Є. Жуковським [17]. В даний час інженерна практика висунула ряд нових задач взаємодії тіл з рідиною. Умовно ці задачі можна розділити на дві групи. До першої групи належать задачі про рух абсолютно твердих або твердих деформівних тіл з

порожнинами, частково або повністю заповненими рідиною. У випадку ідеальної нестисливої рідини такі задачі зводяться до розв’язання внутрішньої (або зовнішньої) крайової задачі Неймана. До другої групи належать задачі взаємодії тонкостінних твердих (або деформівних) елементів конструкцій при двосторонньому контакті з рідиною. Це крайові задачі Неймана в просторі з розрізом. В обох випадках застосування методів теорії потенціалу дозволяє звести задачі, що розглядаються, до сингулярних (або гіперсингулярних) інтегральних рівнянь.

Існує загальний підхід, характерний для великого класу задач гідропружності. Цей підхід полягає в наступному. По-перше, при сумісному розв’язанні рівнянь руху оболонки та рідини використовуються власні функції задачі про вільні коливання оболонки, яка не взаємодіє з середовищем (тобто незаповнена) [18-20]. Другою загальною характерною рисою розглянутих задач є побудова оберненого оператора для гідродинамічної частини задачі. При цьому використовуються різні підходи. Так, в [21] застосований метод аналітичного продовження, в [22] обернений оператор знаходиться шляхом розв’язання спеціально введеної допоміжної задачі на власні значення з параметром в граничній умові. В [24] до розв’язання цієї задачі застосовано метод Рітца з координатними функціями, що включають нелінійний варійований параметр. Використання методів скінченних різниць і скінченних елементів проведено в [25-29]. В [29] розглянуто задачу гідропружності для напівсферичної оболонки, що містить стисливу рідину. В [30] задача визначення гідродинамічного тиску зведена до інтегрального рівняння. Побудова оберненого оператора для випадку, коли розглядається крайова задача Неймана в просторі з розрізом, являє собою досить складну проблему. Тут виникає необхідність розв’язання гіперсингулярних рівнянь з областю інтегрування складної форми. Чисельні методи розв'язання таких рівнянь недостатньо розвинені. Проте визначення частот і форм власних коливань лопатей в рідині є актуальним при проектуванні робочих коліс гідротурбін і насосів. Такі дослідження необхідно проводити для запобігання резонансу. Огляди наукових праць з проблеми взаємодії оболонок з рідиною за

останні роки дані в [31,32]. В [32] значну увагу приділено дослідженням, проведеним в Україні .

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТА МЕТОД РОЗВ’ЯЗАННЯ

Інтерес до проблеми дослідження динаміки оболонок і оболонкових конструкцій при взаємодії з рідиною виник ще в середині минулого століття і не вщухає дотепер. Це пов'язано з широким застосуванням у техніці таких конструкцій, як наприклад, баки і цистерни для перевезення і зберігання рідин. Слід зазначити, що в більшості робіт розглядаються циліндричні оболонки; для чисельного моделювання застосовується метод скінченних елементів.

Актуальними є питання коливань, які збуджуються в циліндричні й оболонці, при наявності рухомої рідини. Треба визначити швидкість, яка може призвести до втрати стійкості. Такі задачі в загальному випадку вивчають в нелінійному формулюванні, але дослідження за лінійною теорією дають змогу знайти принаймні критичну швидкість, що призводить до дивергентної втрати стійкості [37].

2.1. Основні співвідношення теорії коливань тонких циліндричних оболонок

Розглянемо зв'язану задачу для циліндричної оболонки, що містить рідину (рис.2.1). Припускаємо, що оболонка заповнена рідиною повністю. Будемо досліджувати частоти та форми коливань оболонки при наявності як нерухомої, так і рухомої рідини.

Зауважимо, що задачу буде розв’язано в три етапи:

1) Визначення частот та форм незаповненої оболонки;

2) Визначення частот та форм оболонки, заповненої нерухомою рідиною;

3) Визначення частот та форм оболонки при наявності рухомої рідини.

При розв’язанні другої та третьої задач потрібно визначити частоти і форми коливань оболонки з урахуванням сил тиску рідини на її поверхні.



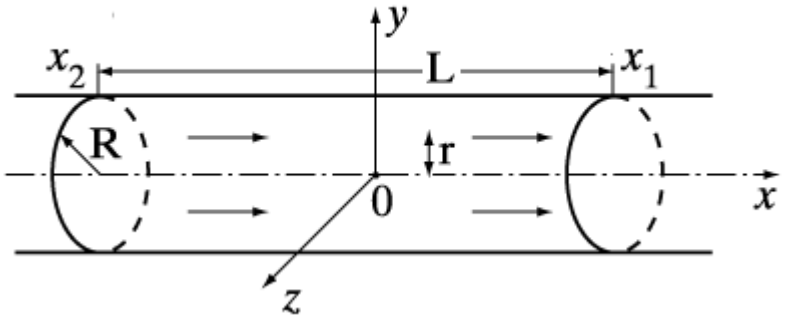


Рис. 2.1. Загальний вигляд оболонки з рідиною.

Припустимо, що рідина, яка знаходиться в оболонці, ідеальна і нестислива. Основні рівняння руху оболонки з рідиною мають вигляд [33]:

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q_1 \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + Q_2 \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P_l + Q_3 \end{cases} \quad (2.1)$$

Тут u, v, w - компоненти переміщення; L_{ij} $(i,j = 1,2,3)$ диференціальні оператори; $\boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ - вектор збурюючих сил; ρ - густина матеріалу; h - товщина оболонки, P_l - гідродинамічний тиск. Збурюючі сили можуть включати в себе вітрові навантаження, силу тяжіння, а також сейсмічні і ударні впливи. Будемо шукати власні форми коливань заповненої оболонки у вигляді

$$\boldsymbol{U}(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t)\boldsymbol{u}_k(x,y,z), \quad (2.2)$$

де функції $\boldsymbol{u}_k(x,y,z)$ - форми власних коливань незаповненої оболонки, $c_k(t)$ - невідомі множники. Отримаємо аналітичний розв'язок для вільних коливань циліндричної оболонки, повністю заповненої ідеальною нестисливою рідиною. Спочатку розглянемо форми і частоти цієї оболонки без рідини. Згідно з [34] розглянемо такі вирази для L_{ij} в рівнянні (2.1):

$$
\begin{gathered}
L_{11}=-\left(\delta^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right);\ L_{12}=L_{21}=-\frac{1+\nu}{2}\delta\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta};\\
L_{13}=-L_{31}=-\nu\delta\frac{\partial}{\partial x};\ L_{22}=-\left(\frac{1-\nu}{2}\delta^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right);\ L_{23}=L_{32}=-\frac{\partial}{\partial\theta};\\
L_{33}=1+\tilde{h}^2\tilde{\nabla}^2\tilde{\nabla}^2;\ \tilde{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\delta^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2};\ \delta=\frac{R}{L};\ \tilde{h}=\frac{hR}{\sqrt{12}L^2}.
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

Тут R - радіус оболонки, h - товщина оболонки, L - довжина, ν - коефіцієнт Пуассона, $x\ i\ \theta$ - поздовжня і окружна координати.

2.2. Граничні умови

Для визначення власних форм і частот коливань незаповненої оболонки припустимо, що $P_l = 0$. Розглянемо такі граничні умови на верхньому і нижньому торцях оболонки (жорстке защемлення):

$$
R_1+\frac{\partial M_{12}}{\partial x}=0;\ \ \theta_1=0;\ \ u=0;\ N_{12}-\frac{1}{R}M_{12}=0,
$$

де

$$
\begin{gathered}
R_1=-D\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w);\ M_{12}=D(1-\nu)\chi_{12};\ N_{12}=\frac{Eh}{1-\nu}\left(\varepsilon_{12}-\frac{h^2}{12R}\chi_{12}\right);\\
\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}\right);\ \chi_{12}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta}-\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x};\ \theta_1=\frac{\partial w}{\partial x};
\end{gathered}
$$

E - модуль пружності; D - циліндрична жорсткість.

2.3. Визначення частот і форм коливань незаповненої циліндричної оболонки

Будемо шукати аналітичне рішення задачі про вільні коливання циліндричної оболонки у вакуумі у вигляді

$$u_n(t,\theta,x)=e^{i\omega t}\cos n\theta\sum_{m=1}^{\infty}U_m(x);\ v_n(t,\theta,x)=e^{i\omega t}\sin n\theta\sum_{m=1}^{\infty}V_m(x);$$
$$w_n(t,\theta,x)=e^{i\omega t}\cos n\theta\sum_{m=1}^{\infty}W_m(x) \qquad (2.4)$$

Підставимо вираз (2.4) у формулу (2.1), враховуючи вид компонент (2.3). Вважаємо, що збурююча сила відсутня, і оболонка не містить рідини. Після скорочення на $e^{i\omega t}\cos n\theta$ або *на* $e^{i\omega t}\sin n\theta$ отримаємо

$$\delta^2\frac{d^2U_m}{dx^2}-\frac{1-\nu}{2}n^2U_m(x)+\frac{1+\nu}{2}\delta\frac{dV_m}{dx}n+\nu\delta\frac{dW_m}{dx}=\omega^2\rho hU_m$$
$$-\frac{1+\nu}{2}n\delta\frac{dU_m}{dx}+\frac{1-\nu}{2}\delta^2\frac{d^2V_m(x)}{dx^2}-n^2V_m-nW_m=\omega^2\rho hV_m$$
$$\nu\delta\frac{dU_m}{dx}+nV_m-W_m-\tilde{\nabla}^2W_m=\omega^2\rho hW_m;$$
$$\tilde{\nabla}^2=\tilde{h}^2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\delta^{-2}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial\theta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}\right) \qquad (2.5)$$

Отримано систему звичайних диференціальних рівнянь. Шукаємо її розв'язок у вигляді рядів Фур'є.

$$U_m=A\sin\frac{m\pi x}{L};\qquad V_m=B\cos\frac{m\pi x}{L};\qquad W_m=C\cos\frac{m\pi x}{L} \qquad (2.6)$$

Підставимо вираз (2.6) в (2.5). Приходимо після скорочення правих і лівих частин системи рівнянь на $\sin\frac{m\pi x}{L}$ або на $\cos\frac{m\pi x}{L}$ до проблеми власних значень виду $(M-\lambda E)X=0$, де $\lambda=\omega^2\rho h$ –власні числа, $X=(A\quad B\quad C)^T$ - власні форми (власні вектори). Матриця M має такий вигляд:

$$M=\begin{pmatrix}\delta^2\tilde{m}^2+n^2\frac{1-\nu}{2} & n\tilde{m}\delta\frac{1+\nu}{2} & \tilde{m}\nu\delta\\ n\tilde{m}\delta\frac{1+\nu}{2} & \delta^2\frac{1-\nu}{2}\tilde{m}^2+n^2 & n\\ \tilde{m}\nu\delta & n & \tilde{h}^2\left(\tilde{m}^4+2n^2\tilde{m}^2\delta^{-2}+n^4\delta^{-4}\right)+1\end{pmatrix}$$

Проблема власних значень для незаповненої оболонки описується співвідношенням

$$\left(\begin{pmatrix} \delta^2\tilde{m}^2+n^2\frac{1-\nu}{2} & n\tilde{m}\delta\frac{1+\nu}{2} & \tilde{m}\nu\delta \\ n\tilde{m}\delta\frac{1+\nu}{2} & \delta^2\frac{1-\nu}{2}\tilde{m}^2+n^2 & n \\ \tilde{m}\nu\delta & n & \tilde{h}^2\left(\tilde{m}^4+2n^2\tilde{m}^2\delta^{-2}+n^4\delta^{-4}\right)+1 \end{pmatrix} - \omega^2\rho h\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0$$

Відзначимо, що кожній парі чисел *n*,*m* відповідає три власних числа і три власні вектори. Як показує чисельний експеримент, ці три власних вектори відповідають різним модам коливань. Якщо переважає перша компонента (*A*), то маємо моду поздовжніх або осьових коливань (перше переміщення - це переміщення вздовж осі *Ox*), якщо переважає друга компонента (число *B*), то це мода окружних коливань (друге переміщення - це переміщення в окружному напрямку), якщо переважає третя компонента (число *C*), то це мода нормальних коливань (третє переміщення спрямовано вздовж радіусу оболонки).

3. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ТИСКУ РІДИНИ НА ОБОЛОНКУ

3.1. Визначення потенціалу швидкостей

На першому етапі припускаємо, що збурююча сила в (2.1) відсутня. Для визначення функції тиску $P = P(x, y, z, t)$, що фігурує в правій частині системи диференціальних рівнянь (2.1), скористаємося рівняннями руху рідкого середовища в напружених [5]

$$\begin{cases} \rho_l w_x = Z_1 + \left(\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ \rho_l w_y = Z_2 + \left(\dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ \rho_l w_z = Z_3 + \left(\dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \end{cases} \tag{3.1}$$

Тут ρ_l - густина рідини, $w_{x,y,z}$ - прискорення рідини, Z_i – компоненти об'ємної сили, σ, τ - компоненти тензора напружень рідкого середовища. Співвідношення між компонентами тензора напружень і тензорів деформацій і швидкостей деформацій визначаються гіпотезами щодо рідкого середовища. У загальному випадку ці співвідношення можуть бути представлені у вигляді

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \left(-p + \lambda \operatorname{div} \vec{V} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_x & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\varepsilon}_y & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{xz} & \dot{\gamma}_{yz} & \dot{\varepsilon}_z \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

де λ і μ - перший і другий коефіцієнти в'язкості, $\vec{V}$ - вектор швидкостей рідини. Припустимо, що рідина нестислива. Тоді виконана умова збереження об’єму [35]

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 . \tag{3.3}$$

З урахуванням цього співвідношення рівняння (3.2) для нестисливого рідкого середовища приймають вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_x & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\varepsilon}_y & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{xz} & \dot{\gamma}_{yz} & \dot{\varepsilon}_z \end{pmatrix}.$$

Якщо припустити, що рідина є також ідеальною, то відсутні дотичні компоненти тензора напружень, тобто відсутній девіатор напружень, і тензор напружень є кульовим тензором. Середнє арифметичне нормальних напружень, діючих на трьох взаємно-перпендикулярних площадках, що проходять через одну точку, взяте з протилежним знаком, вважають гідродинамічним тиском p в цій точці, і рівняння (3.1) приймають вид

$$\rho_l w_x = Z_1 - \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \rho_l w_y = Z_2 - \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \rho_l w_z = Z_3 - \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{3.4}$$

Далі будемо розглядати ідеальну нестисливу рідину. Припускаємо також, що рух рідини, що заповнює оболонку, є безвихровим (потенційним). Зазначимо, що згідно теоремі Томсона, при русі ідеальної нестисливої рідини під дією потенційних сил, циркуляція швидкості по замкненому рідкому контуру не змінюється з часом. Це означає, наприклад, що рух рідини, що почався зі стану спокою, залишається потенційним в усі наступні моменти часу. Припустимо, що об'ємні сили відсутні. Тоді справедливі умови теореми Томсона (об'ємні сили в цьому випадку мають потенціал) [35].

Тоді співвідношення (3.4) приймають вид:

$$-\rho_l \vec{W} = grad(p)$$

Таким чином, прискорення ідеального нестисливого рідкого середовища завжди мають потенціал, званий потенціалом прискорень або потенціалом Прандтля. Будемо розглядати задачу в лінійному формулюванні, тобто нехтуємо добутками швидкостей на їх похідні. Тоді співвідношення (3.4) приймають форму

$$-\rho_l \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x}; \quad -\rho_l \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial y}; \quad -\rho_l \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{3.5}$$

Оскільки розглядається потенційний рух, то існує така функція φ, звана потенціалом швидкостей, що

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{3.6}$$

Ці співвідношення дозволяють встановити, що $\operatorname{grad} p = -\rho_l \operatorname{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$.

Тому для визначення тиску з боку рідини на оболонку (з урахуванням дії об'ємних сил) служить лінеарізований інтеграл Коші-Лагранжа у формі

$$p - p_0 = -\rho_l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right). \tag{3.7}$$

Бачимо, що для знаходження тиску слід визначити потенціал швидкостей φ. З (3.3) і (3.6) отримуємо, що потенціал швидкостей задовольняє рівнянню Лапласа

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{3.8}$$

тобто є гармонічною функцією. Для визначення гармонічної функції необхідно сформулювати крайову задачу в області Ω, зайнятою рідиною, що знаходиться в оболонці.

Далі будемо розглядати циліндричну оболонку, в якій рідина рухається з постійною швидкістю $\vec{V} = \vec{i}V$, тобто паралельною твірній оболонки. Припустимо також, що оболонка здійснює малі коливання. Тоді тиск рідини на оболонку визначатиметься з такого лінеарізованого інтегралу Коші-Лагранжа

$$p - p_0 = -\rho_l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right). \tag{3.9}$$

3.2. Визначення тиску рідини на поверхню оболонки.

3.2.1. Нерухома рідина

Розглянемо задачу визначення частот і форм вільних коливань пружної оболонки, повністю заповненою рідиною, без урахування сили тяжіння. Ця задача зводиться до визначення потенціалу швидкості φ як розв’язку такої крайової задачі для рівняння Лапласа в циліндричних координатах:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0. \tag{3.10}$$

Граничні умови для нерухомої рідини мають вигляд

$$\left.\frac{\partial\phi(t,\theta,x,r)}{\partial x}\right|_{x=0,x=L}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0,x=L}=0;\quad \left.\frac{\partial\phi(t,\theta,x,r)}{\partial r}\right|_{r=R}=\frac{\partial w(t,\theta,x)}{\partial t}\,. \tag{3.11}$$

З співвідношень (3.11) встановлюємо, що для повністю заповненої рідиною оболонки потенціал швидкостей може бути представлений у вигляді

$$\phi(t,\theta,x,r)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\dot{C}_{mn}(t)\Lambda_{mn}(r)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos n\theta\,.$$

На боковій поверхні оболонки, де $r=R$, маємо

$$\phi(t,\theta,x,r)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\dot{C}_{mn}(t)\Lambda_{mn}(R)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos n\theta\,.$$

З цього співвідношення отримуємо, що власні форми коливань заповненої і незаповненою циліндричної оболонки збігаються (оскільки власні форми визначаються з точністю до постійного множника).

Рівності (3.11) є умовами непротікання, а саме рівності нормальної складової рідини $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ і нормальної складової швидкості оболонки. На днище і торці це $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0,x=L}$, а на бічній поверхні $\frac{\partial w(t,\theta,x)}{\partial t}$.

Рівняння Лапласа в циліндричних координатах має вигляд

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=0\,. \tag{3.12}$$

Шукаємо розв’язок рівняння Лапласа у вигляді $\phi=C(t)\Psi(r,\theta,x)$. Для визначення функції $\Psi(r,\theta,x)$ використовуємо метод розділення змінних Фур'є. Для цього зобразимо функцію $\Psi(r,\theta,x)$ у вигляді

$$\Psi(r,\theta,x)=\Lambda(r)\Theta(\theta)X(x). \tag{3.13}$$

Вважаємо, що $\Theta(\theta)=\cos n\theta$. Після підстановки цього співвідношення і рівності (3.13) в рівняння Лапласа (3.12) отримаємо

$$\cos n\theta\left(X(x)\frac{d^2\Lambda}{dr^2}+X(x)\frac{1}{r}\frac{d\Lambda}{dr}-\frac{n^2}{r^2}X(x)\Lambda(r)+\frac{d^2X}{dx^2}\Lambda(r)\right)=0\,.$$

Скорочуючи отриману рівність на $\cos n\theta$ і розділивши її на $X(x)\Lambda(r)$, отримаємо

$$\frac{1}{\Lambda(r)}\frac{d^2\Lambda}{dr^2}+\frac{1}{r\Lambda(r)}\frac{d\Lambda}{dr}-\frac{n^2}{r^2}+\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}=0$$

або

$$\frac{1}{\Lambda(r)}\frac{d^2\Lambda}{dr^2}+\frac{1}{r\Lambda(r)}\frac{d\Lambda}{dr}-\frac{n^2}{r^2}=-\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}.$$

Оскільки ліва частина отриманої рівності залежить тільки від r, а права лише від x, то обидві частини дорівнюють деякій константі λ, званою константою поділу. Таким чином,

$$\frac{1}{\Lambda(r)}\frac{d^2\Lambda}{dr^2}+\frac{1}{r\Lambda(r)}\frac{d\Lambda}{dr}-\frac{n^2}{r^2}=\lambda;\quad -\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}=\lambda. \tag{3.14}$$

При цьому повинні бути виконані такі граничні умови, які випливають з формул (3.11):

$$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0}=0;\quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=L}=0;\quad \left.\frac{d\Lambda}{dr}\right|_{r=R}=A_0. \tag{3.15}$$

Тут A_0 деяка скінчена постійна величина, яка буде визначена далі.

Розглянемо різні випадки для визначення константи λ.

1. Нехай $\lambda = 0$. Из другого співвідношення в (3.14) отримуємо $X(x)=ax+b$.

Тоді

$$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=L}=a;\quad \Rightarrow a=0.$$

Звідси випливає, що $X(x)=b=const$.

Визначимо тепер функцію $\Lambda(r)$, що відповідає нульовій константі розподілення. Ця функція задовольняє рівнянню

$$\frac{d^2\Lambda}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Lambda}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\Lambda(r)=0. \tag{3.16}$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на r^2, одержимо

$$r^2\frac{d^2\Lambda}{dr^2}+r\frac{d\Lambda}{dr}-n^2\Lambda(r)=0. \qquad (3.17)$$

Отримане рівняння є диференціальним рівняння Ейлера другого порядку. Зробимо в ньому класичну заміну змінної $r=e^t$ і перейдемо до нової змінної t ($t=\ln r$).тоді

$$\Lambda(r)=g(t);\;\; rg_r'(t)=r\frac{dg}{dt}\frac{dt}{dr}=\frac{dg}{dr};$$

$$r^2\frac{d^2g}{dr^2}=r^2\frac{d}{dr}\left(\frac{dg}{dr}\right)=r^2\frac{d}{dr}\left(\frac{dg}{dt}\frac{1}{r}\right)=r^2\left(\frac{d^2g}{dt^2}\frac{1}{r^2}-\frac{dg}{dt}\frac{1}{r^2}\right)=\frac{d^2g}{dt^2}-\frac{dg}{dt}$$

Підставляючи ці співвідношення в рівняння (3.17), отримаємо

$$\frac{d^2g}{dt^2}-\frac{dg}{dt}+\frac{dg}{dt}-n^2g=\frac{d^2g}{dt^2}-n^2g=0. \qquad (3.18)$$

Загальний розв’язок рівняння (3.18) має вигляд $g(t)=C_1e^{nt}+C_2e^{-nt}$. Переходимо до змінної r. Тоді $\Lambda(r)=C_1r^n+C_2r^{-n}$. Задовольняючи граничним умовам, отримаємо

$$\frac{d\Lambda}{dr}=nC_1r^{n-1}-nC_2r^{-n-1}\Big|_{r=R}=0.$$

Звідси маємо, що $\Lambda(r)=C_1r^n$. Це рішення задовольняє граничним умовам тільки при $n=0$.

Таким чином, $n=0$ відповідає постійний розв’язок. Це відноситься й до всього випадку λ = 0.

2. Нехай λ < 0. Тоді друге рівняння в (3.14) прийме вигляд

$$\frac{d^2X}{dx^2}=\beta^2X;\quad \lambda=-\beta^2$$

Розв’язок цього рівняння має вигляд

$$X(x)=B_1e^{\beta x}+B_2e^{-\beta x}.$$

З граничних умов отримуємо

$$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0}=B_1\beta-B_2\beta=0;\Rightarrow B_1=B_2;\quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=L}=B_1\beta\left(e^{\beta L}-e^{-\beta L}\right)=0\Rightarrow B_1=0.$$

Отже, негативної константи розподілу відповідає нульовий розв'язок, що не має фізичного сенсу.

3. Нехай $\lambda > 0$. Тоді друге рівняння в (3.14) прийме вигляд

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \alpha^2 X; \quad \lambda = \alpha^2.$$

Звідси маємо $X(x) = B_1 \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x$.

Задовольняючи граничним умовам, отримуємо

$$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = -B_1 \alpha \sin \alpha x + B_2 \alpha \cos \alpha x = 0; \Rightarrow B_2 = 0; \quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=L} = B_1 \alpha \sin \alpha L = 0 \Rightarrow \alpha L = \pi m.$$

Звідси знаходимо власні числа задачі Штурма-Ліувілля

$$\alpha_m = \frac{\pi m}{L}; \quad m = 1,2,...$$

Таким чином, знайдені функції

$$X_m(x) = B_m \cos \frac{\pi m x}{L}; \quad m = 1,2,... \quad X_0(x) = B_0.$$

Для визначення функцій $\Lambda(r)$ служить рівняння

$$\frac{1}{\Lambda(r)} \frac{d^2\Lambda}{dr^2} + \frac{1}{r\Lambda(r)} \frac{d\Lambda}{dr} - \frac{n^2}{r^2} - \alpha^2 = 0$$

або

$$\frac{d^2\Lambda}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Lambda}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \alpha^2 \right) \Lambda = 0.$$

Множачи на r^2, отримаємо

$$r^2 \frac{d^2\Lambda}{dr^2} + r \frac{d\Lambda}{dr} - \left(n^2 + \alpha^2 r^2\right) \Lambda = 0. \qquad (3.19)$$

Зробимо заміну змінної:

$$\alpha r = t; \quad \Lambda(r) = \Lambda\left(\frac{t}{\alpha}\right); \quad \Lambda'_r \frac{1}{\alpha} = \Lambda'_t; \quad \frac{d}{dr} = \alpha \frac{d}{dt}; \quad \frac{d^2}{dr^2} = \alpha^2 \frac{d^2}{dt^2}.$$

Тоді рівняння (3.19) приймає вигляд

$$t^2 \frac{d^2\Lambda}{dt^2} + t \frac{d\Lambda}{dt} - \left(n^2 + t^2\right) \Lambda = 0.$$

Це рівняння є модифікованим рівнянням Бесселя. Його розв'язками будуть модифіковані функції Бесселя або функції Інфельда $I_n(t),\ I_{-n}(t)$. Оскільки функції $I_{-n}(t)$ є нескінченими при $t=0$ (тобто не можуть розглядатися як розв'язки), отримуємо, повертаючись до змінної r, що для кожного m має місце послідовність рішень $I_n\left(\frac{\pi m r}{L}\right),\quad n=0,1,...;\quad m=0,1,...$

З цих співвідношень встановлюємо, що для повністю заповненої рідиною оболонки потенціал швидкостей може бути поданий у вигляді

$$\phi(t,\theta,r.x)=\dot{D}_{00}(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dot{D}_{0n}(t)r^n+\sum_{m=1}^{\infty}\dot{D}_{mn}(t)I_n\left(\frac{m\pi r}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right]\cos n\theta. \qquad (3.20)$$

Якщо розглядається задача про власні коливання, то отримуємо, що $D_{00}(t)=0$. Відповідно з формулами для компонент переміщення введемо потенціали

$$\phi_n(t,\theta,r.x)=\left[\dot{D}_{0n}(t)r^n+\sum_{m=1}^{\infty}\dot{D}_{mn}(t)I_n\left(\frac{m\pi r}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right]\cos n\theta.$$

Визначимо коефіцієнти $D_{nm}(t)$ через $C_{nm}(t)$ за допомогою граничної умови

$$\left.\frac{\partial\phi(t,\theta,x,r)}{\partial r}\right|_{r=R}=\frac{\partial w(t,\theta,x)}{\partial t}.$$

Отримаємо $\dot{C}_{0n}(t)=\dot{D}_{0n}(t)nR^{n-1};\Rightarrow\dot{D}_{0n}(t)=\frac{\dot{C}_{0n}(t)}{nR^{n-1}};$

$$\dot{C}_{mn}(t)=\dot{D}_{mn}(t)\frac{m\pi}{L}I_n'\left(\frac{m\pi R}{L}\right);\quad\Rightarrow\dot{D}_{mn}(t)=\frac{L\dot{C}_{mn}(t)}{m\pi I_n'\left(\frac{m\pi R}{L}\right)}.$$

Таким чином, отримано подання для потенціалу швидкостей у вигляді

$$\phi(t,\theta,r.x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\dot{C}_{0n}(t)}{nR^{n-1}}r^n+\frac{L}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\dot{C}_{mn}(t)}{mI_n'\left(L^{-1}m\pi R\right)}I_n\left(L^{-1}m\pi r\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right]\cos n\theta. \qquad (3.21)$$

Зі співвідношення (3.21) встановлюємо, що власні форми коливань заповненої і незаповненою циліндричної оболонки збігаються (оскільки власні форми визначаються з точністю до постійного множника).

Як випливає з рівняння (3.21) і інтеграла Коші-Лагранжа (3.7), тиск рідини на циліндричну стінку має вигляд

$$\frac{p}{\rho_l}=-\frac{\partial\phi(t,\theta,r.x)}{\partial t}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\ddot{C}_{0n}(t)}{nR^{n-1}}r^n+\frac{L}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ddot{C}_{mn}(t)}{mI_n'\left(L^{-1}m\pi R\right)}I_n\left(L^{-1}m\pi r\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right]\cos n\theta\,.$$

Розглядаючи задачу про вільні коливання оболонки з рідиною, вважаємо, що

$A_{mn}(t)=A_{mn}e^{i\Omega t};\quad B_{mn}(t)=B_{mn}e^{i\Omega t};\quad C_{mn}(t)=C_{mn}e^{i\Omega t};$

де $A_{mn},\quad B_{mn},\quad C_{mn}$ - невідомі сталі.

Для визначення власних частот коливань оболонки з рідиною служить матричне рівняння

$$\left[M-\Omega^2(E+H)\right]X=0\,, \tag{3.22}$$

в якому матриця M має той же вигляд, що в розділі 3, а саме

$$M=\begin{pmatrix}\delta^2m^2+n^2\dfrac{1-\nu}{2} & nm\delta\dfrac{1+\nu}{2} & m\nu\delta\\ nm\delta\dfrac{1+\nu}{2} & \delta^2\dfrac{1-\nu}{2}m^2+n^2 & n\\ m\nu\delta & n & \tilde{h}^2\left(m^4+2n^2m^2\delta^{-2}+n^4\right)+1\end{pmatrix},$$

матриця приєднаних мас H має вигляд

$$H=\rho_l\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\Lambda_{mn}(R)\end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

У виразі (3.23) елементи $\Lambda_{mn}(R)=-\rho_2(p_{mn},w_{mn})$. Обчислення скалярного добутку тут здійснюється за формулою

$$(p_{mn},w_{mn})=\frac{L}{\pi m}\frac{I_n\left(L^{-1}m\pi R\right)}{I_n'\left(L^{-1}m\pi R\right)}\int_0^{2\pi}\cos^2 n\theta d\theta\int_0^{L}\cos^2\frac{m\pi x}{L}dx \tag{3.24}$$

Обчислюючи інтеграли в (3.24), отримаємо

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 n\theta d\theta=\pi\,;\qquad\qquad \int_0^{L}\cos^2\frac{m\pi x}{L}dx=\frac{L}{2}\,.$$

Звідси отримуємо

$$(p_{mn},w_{mn})=\frac{L^2}{2m}\frac{I_n\left(L^{-1}m\pi R\right)}{I_n'\left(L^{-1}m\pi R\right)}$$

В силу збігу власних форм коливань заповненої і незаповненої оболонки отримуємо, що рівняння (3.22) приймають вид

$$\begin{aligned} &\rho h\omega_{mn}^2 u_{mn} = \rho h\Omega_{mn}^2 u_{mn};\\ &\rho h\omega_{mn}^2 v_{mn} = \rho h\Omega_{mn}^2 v_{mn};\\ &\rho h\omega_{mn}^2 w_{mn} = \Omega_{mn}^2\left(\rho h w_{mn} + \rho_l p_{mn}\right) \end{aligned} \qquad (3.25)$$

де ω_{mn} - частоти коливань незаповненої оболонки, Ω_{mn} - частоти коливань оболонки з рідиною. Помножимо першу рівність у (3.25) на u_{mn}, другу - на v_{mn}, третю на w_{mn} і додаємо. Отримаємо

$$\rho h\omega_{mn}^2\left(\left(u_{mn},u_{mn}\right)+\left(v_{mn},v_{mn}\right)+\left(w_{mn},w_{mn}\right)\right)=$$
$$=\Omega_{mn}^2\left[\rho h\left(\left(u_{mn},u_{mn}\right)+\left(v_{mn},v_{mn}\right)+\left(w_{mn},w_{mn}\right)\right)+\rho_l\left(p_{mn},w_{mn}\right)\right]$$

Звідси знаходимо коефіцієнти зниження частот коливань оболонки з рідиною у вигляді

$$\Omega_{mn}^2 = \frac{\rho h\omega_{mn}^2\left(\left(u_{mn},u_{mn}\right)+\left(v_{mn},v_{mn}\right)+\left(w_{mn},w_{mn}\right)\right)}{\left[\rho h\left(\left(u_{mn},u_{mn}\right)+\left(v_{mn},v_{mn}\right)+\left(w_{mn},w_{mn}\right)\right)+\rho_l\left(p_{mn},w_{mn}\right)\right]}.$$

Обчислимо

$$\left(u_{mn},u_{mn}\right)+\left(v_{mn},v_{mn}\right)+\left(w_{mn},w_{mn}\right)=\frac{3\pi L}{2}.$$

Отримаємо

$$\Omega_{mn}^2 = \frac{\omega_{mn}^2}{\left[1+\dfrac{2\rho_l\left(p_{mn},w_{mn}\right)}{3\pi L\rho h}\right]}. \qquad (3.26)$$

Підставляючи в (3.26) вираз для

$$\left(p_{mn},w_{mn}\right)=\frac{L^2}{2m}\frac{I_n\left(L^{-1}m\pi R\right)}{I_n'\left(L^{-1}m\pi R\right)},$$

знаходимо

$$\Omega_{mn}^2 = \frac{\omega_{mn}^2}{\left[1+\dfrac{2\rho_l L^2 I_n\left(L^{-1}m\pi R\right)}{2\cdot 3m\pi L\rho h I_n'\left(L^{-1}m\pi R\right)}\right]};\quad \Omega_{mn}^2 = \frac{\omega_{mn}^2}{\left[1+\dfrac{\rho_l L I_n\left(L^{-1}m\pi R\right)}{3m\pi\rho h I_n'\left(L^{-1}m\pi R\right)}\right]}$$

Коефіцієнт зниження обчислювався за формулою

$$k_{mn} = 1 + \frac{\rho_l L I_n\left(L^{-1} m\pi R\right)}{3m\pi\rho h I_n'\left(L^{-1} m\pi R\right)}.$$

3.2.2. Рухома рідина.

Розглянемо задачу вільних коливань циліндричної оболонки за наявністю потоку із швидкістю V.

Припускаємо, що коливання оболонки збуджують малий рух рідини. Вважаємо також, що рух рідини буде потенційним. Швидкість рідини буде обчислюватися за формулою

$$\vec{v} = \operatorname{grad}\Phi; \quad \Phi = Vx + \varphi,$$

де φ - потенціал збуреного руху рідини, що викликаний малими коливаннями оболонки.

При цьому тиск рідини визначатиметься за формулою

$$p - p_0 = -\rho_l\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + V\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$$

Для потенціалу швидкостей маємо вираз

$$\varphi(t,\theta,r.x) = \dot{C}_{00}(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\dot{C}_{0n}(t)}{nR^{n-1}}r^n + \frac{L}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\dot{C}_{mn}(t)}{mI_n'\left(L^{-1}m\pi R\right)}I_n\left(L^{-1}m\pi r\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right]\cos n\theta.$$

Далі знаходимо похідну

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{L}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}m\frac{\pi}{L}\frac{\dot{C}_{mn}(t)}{mI_n'\left(L^{-1}m\pi R\right)}I_n\left(L^{-1}m\pi r\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right]\cos n\theta =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\dot{C}_{mn}(t)}{I_n'\left(L^{-1}m\pi R\right)}I_n\left(L^{-1}m\pi r\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right]\cos n\theta.$$

Після цього обчислюємо тиск рідини за формулою

$$\frac{p}{\rho_l} = -\ddot{C}_{00}(t) - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\ddot{C}_{0n}(t)}{nR^{n-1}}r^n + \frac{L}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ddot{C}_{mn}(t)}{mI_n'\left(L^{-1}m\pi R\right)}I_n\left(L^{-1}m\pi r\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right]\cos n\theta +$$

$$+ V\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\dot{C}_{mn}(t)}{I_n'\left(L^{-1}m\pi R\right)}I_n\left(L^{-1}m\pi r\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right]\cos n\theta.$$

Припустимо, що розв'язано задачу про вільні коливання оболонки без рідини. При цьому маємо для кожного n такий набор власних форм:

$$\vec{U}_{kn} = \begin{pmatrix} A_{kn} u_{kn} \\ B_{kn} v_{kn} \\ C_{kn} w_{kn} \end{pmatrix}, \quad k = 1,2,...$$

Тут коефіцієнти A_{km}, B_{km}, C_{km} є розв'язками відповідних проблем власних значень. Форми коливань оболонки при взаємодії з рідиною для кожного числа вузлових гармонік n шукатимемо у вигляді

$$\vec{U}_n = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(t) \vec{U}_{kn}. \tag{3.27}$$

Розглядаючи задачу про вільні коливання оболонки з рухомою рідиною, вважаємо, що

$$\alpha_k(t) = \alpha_k e^{\omega t}$$

де α_k - невідомі сталі.

Зробимо таке зауваження. Кожній формі вільних коливань рідини відповідають коефіцієнти A_{km}, B_{km}, C_{km}. Нас не цікавлять такі форми, в яких найбільшими є коефіцієнти A_{km} або B_{km}, тому що при взаємодії з рідиною їх вплив не буде суттєвим. Тому в розкладі (3.27) будуть наявні форми, що мають найбільший коефіцієнт C_{km} для кожного числа k.

Для кожної функції $\vec{U}_{kn}$ згідно з попереднім зауваженням знаходимо відповідний розв'язок крайової задачі Неймана

$$\Delta\varphi_{kn} = 0; \quad \left.\frac{\partial \varphi_{kn}}{\partial n}\right|_{S_1} = C_{kn} w_{kn}; \quad \left.\frac{\partial \varphi_{kn}}{\partial n}\right|_{S_i, S_o} = 0.$$

Тут S_1 - циліндрична поверхня оболонки, S_i, S_o - поверхні входу та виходу рідини з оболонки; вважаємо їх плоскими кругами, що обмежують циліндричну поверхню за торців.

При цьому для функції Ф будемо мати таку задачу Неймана

$$\Delta\Phi = 0; \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{S_1} = \frac{\partial w}{\partial t} + V\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{S_i, S_o} = V; \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{S_i} = -V; \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{S_o} = V.$$

Виконання умови розв'язаності крайової задачі Неймана для φ випливе з виконання цієї умови для Ф.

Зауважимо, що розв'язуються крайові задачі, що будуть мати розв'язки, які визначаються з точністю до сталої, яка в випадку, що розглядається, є довільною функцією часу. Оскільки частинні потенціали відповідають початково крайовій задачі і є функціями, що описують збурене поле швидкостей, то можемо вважати, що в початковий момент часу збурення було відсутнє, й тому без обмеження загальності підходу, далі вважатимемо, що ця функція дорівнює нулю.

Як показано вище, залежність частинних потенціалів від кутової координати є такою

$$\varphi_{kn} = \varphi_k \cos n\theta; \quad \varphi_k = \varphi_k(r, x).$$

Зобразимо $\varphi_k(x,r) = X_k(x)\Lambda_k(r)$ для кожного n.

Маємо диференціальні рівняння (опускаючи для спрощення запису індекс k)

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0; \quad \lambda = \alpha^2.$$

$$r^2\frac{d^2\Lambda}{dr^2} + r\frac{d\Lambda}{dr} - \left(n^2 + \alpha^2 r^2\right)\Lambda = 0. \qquad (3.28)$$

Звідси маємо

$$X(x) = B_1\cos\alpha x + B_2\sin\alpha x.$$

Задовольняючи граничним умовам, отримуємо

$$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = -B_1\alpha\sin\alpha x + B_2\alpha\cos\alpha x = 0; \Rightarrow B_2 = 0; \quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=L} = B_1\alpha\sin\alpha L = 0 \Rightarrow \alpha L = \pi m.$$

Звідси знаходимо власні числа задачі Штурма-Ліувілля

$$\alpha_m = \frac{\pi m}{L}; \quad m = 1,2,...$$

Таким чином, знайдені функції

$$X_m(x) = B_m\cos\frac{\pi m x}{L}; \quad m = 1,2,... \quad X_0(x) = B_0.$$

Друге рівняння в (3.28) є модифікованим рівнянням Бесселя. Його розв'язками будуть модифіковані функції Бесселя або функції Інфельда

$$I_n(t),\quad I_{-n}(t).$$

Оскільки функції $I_{-n}(t)$ є нескінченими при $t=0$ (тобто не можуть розглядатися як розв'язки), отримуємо, повертаючись до змінної r, що для кожного m має місце послідовність рішень $I_n\left(\frac{\pi m r}{L}\right),\quad n=0,1,...;\quad m=0,1,...$

Коли $m=0$, маємо сталий розв'язок крайової задачі Неймана. Оскільки рішення крайової задачі Неймана знаходиться з точністю до сталої, як вже згадувалось вище, цю сталу вважаємо рівною нулю.

Відносно сталих B_m маємо таке співвідношення $B_m = C_{mn}$.

Таким чином, остаточно маємо вираз для частинних потенціалів рідини

$$\varphi_{kn} = \varphi_k \cos n\theta;\quad \varphi_{kn} = C_{kn} I_n\left(\frac{\pi k r}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi k r}{L}\right)\cos n\theta.$$

Кожній власній формі $\vec{U}_n$ відповідає такий потенціал рідини

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{N}\dot{\alpha}_k(t)\varphi_{kn} = \cos n\theta\sum_{k=1}^{N}\beta_k(t)C_{kn}I_n\left(\frac{\pi k r}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right). \qquad (3.29)$$

Виразимо коефіцієнти $\beta_k(t)$ через $\alpha_k(t)$ за допомогою рівності

$$\left.\frac{\partial\varphi(t,\theta,x,r)}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{\partial w(t,\theta,x)}{\partial t}.$$

Отримаємо $\dot{\alpha}_k(t) = \beta_k(t)\frac{k\pi}{L}I_n'\left(\frac{k\pi R}{L}\right);\quad \Rightarrow \beta_k(t) = \frac{L\dot{\alpha}_k(t)}{k\pi I_n'\left(\frac{k\pi R}{L}\right)}.$

З (3.29) маємо вираз для тиску рідини для кожного n

$$p = -\rho_l\cos n\theta\left[\frac{L}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\ddot{\alpha}_k(t)C_{kn}\frac{I_n\left(\frac{\pi k R}{L}\right)}{I_n'\left(\frac{\pi k R}{L}\right)}\cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\right] +$$

$$+\rho_l\cos n\theta V\left[\sum_{k=1}^{N}\dot{\alpha}_k(t)C_{kn}\frac{I_n\left(\frac{\pi k R}{L}\right)}{I_n'\left(\frac{\pi k R}{L}\right)}\sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\right].$$

Введемо позначення $H_{kn} = C_{kn} \dfrac{I_n\left(\dfrac{\pi kR}{L}\right)}{I_n'\left(\dfrac{\pi kR}{L}\right)}$.

Тоді

$$p = \rho_l \cos n\theta \left[-\frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \ddot{\alpha}_k(t) H_{kn} \cos\left(\frac{\pi kx}{L}\right) + V \sum_{k=1}^{N} \dot{\alpha}_k(t)_{kn} H_{kn} \sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right) \right].$$

Перетворимо вираз:

$$p = \rho_l L \cos n\theta \left[-\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \ddot{\alpha}_k(t) H_{kn} \cos\left(\frac{\pi kx}{L}\right) + \frac{V}{L} \sum_{k=1}^{N} \dot{\alpha}_k(t)_{kn} H_{kn} \sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right) \right]. \qquad (3.30)$$

Зауважимо, що розмірність величини V/L є 1⁄сек. Надалі застосовуємо співвідношення

$$\vec{U}_n = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(t) \vec{U}_{kn}; \;\; \alpha_k(t) = \alpha_k e^{\omega t}.$$

Рівняння руху оболонки з рідиною в операторній формі:

$$\mathbf{L}\left\{\vec{U}_n\right\} = \rho h \frac{\partial^2 \vec{U}_n}{\partial t^2} + \mathbf{P}. \qquad (3.31)$$

Тут вектор тиску визначається виразом

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{Bmatrix},$$

в якому p обчислюється за формулою (3.30). Перепишемо

$$\cos n\theta \mathbf{L} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(t) \begin{Bmatrix} A_{kn} u_k \\ B_{kn} v_k \\ C_{kn} w_k \end{Bmatrix} = \rho h \cos n\theta \sum_{k=1}^{N} \ddot{\alpha}_k(t) \begin{Bmatrix} A_{kn} u_k \\ B_{kn} v_k \\ C_{kn} w_k \end{Bmatrix} +$$
$$+ \rho_l L \cos n\theta \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{k=1}^{N} \ddot{\alpha}_k(t) p_{kn} + \dfrac{V}{L} \sum_{k=1}^{N} \dot{\alpha}_k(t) p_{kn}^1 \end{Bmatrix}. \qquad (3.32)$$

В цьому виразі маємо

$$p_{kn} = -\frac{1}{\pi k} H_{kn} w_k; \quad p^1_{kn} = H_{kn} \sin\frac{\pi k x}{L}.$$

Скорочуючи (3.32) на $\cos n\theta$, підставляючи вирази для $\alpha_k(t)$ та виконуючи диференціювання, отримаємо

$$\mathbf{L}\rho h \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \begin{Bmatrix} A_{kn} u_k \\ B_{kn} v_k \\ C_{kn} w_k \end{Bmatrix} = -\rho h \omega^2 \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \begin{Bmatrix} A_{kn} u_k \\ B_{kn} v_k \\ C_{kn} w_k \end{Bmatrix} + \rho_l L \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^2 \sum_{k=1}^{N} \alpha_k p_{kn} + \frac{V}{L} \omega \sum_{k=1}^{N} \alpha_k p^1_{kn} \end{Bmatrix}.$$

Оскільки вектор $\{A_{kn}u_k; B_{kn}v_k; C_{kn}w_k\}^T$ є формою вільних коливань незаповненої оболонки, то маємо

$$\rho h \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \omega^2_{kn} \begin{Bmatrix} A_{kn} u_k \\ B_{kn} v_k \\ C_{kn} w_k \end{Bmatrix} = -\rho h \omega^2 \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \begin{Bmatrix} A_{kn} u_k \\ B_{kn} v_k \\ C_{kn} w_k \end{Bmatrix} + \rho_l L \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^2 \sum_{k=1}^{N} \alpha_k p_{kn} + \frac{V}{L} \omega \sum_{k=1}^{N} \alpha_k p^1_{kn} \end{Bmatrix}. \quad (3.33)$$

Тут

$$u_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{L}; \quad v_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{L}; \quad w_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{L}.$$

Помножимо (3.33) скалярно на власну форму $\{A_{jn}u_j; B_{jn}v_j; C_{jn}w_j\}^T$. В лівій частині рівності матимемо

$$\delta_{kj}\alpha_j \frac{L}{2}\left(A^2_{jn} + B^2_{jn} + C^2_{jn}\right)\rho h \omega^2_{jn} = \delta_{kj}\alpha_j \frac{L}{2}\rho h \omega^2_{jn}.$$

В матричній формі

$$\rho h \frac{L}{2} \begin{pmatrix} \omega^2_{1n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \omega^2_{1n} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \omega^2_{Nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_N \end{pmatrix}.$$

Введемо позначення

$$\Omega_d = \rho h \frac{L}{2}\begin{pmatrix} \omega_{1n}^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \omega_{1n}^2 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & \omega_{Nn}^2 \end{pmatrix}; \quad \{\alpha\} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_N \end{pmatrix}.$$

Перший доданок в правій частині дає

$$\delta_{kj}\alpha_j \frac{L}{2}\left(A_{jn}^2 + B_{jn}^2 + C_{jn}^2\right)\rho h\omega^2 = \delta_{kj}\alpha_j \frac{L}{2}\rho h\omega^2,$$

або в матричній формі $\rho h \frac{L}{2}\omega^2 E\{\alpha\}$, де E – одинична матриця.

Далі розглянемо другий доданок в правій частині. Матимемо

$$\rho_l L\omega^2\left(p_{kn}, C_{jn}w_j\right).$$

Оскільки $p_{kn} = -\frac{1}{\pi k}H_{kn}w_k$, то

$$\rho_l L\omega^2\left(p_{kn}, C_{jn}w_j\right) = -\rho_l L\omega^2 \frac{L}{2\pi k}\delta_{kj}C_{jn}H_{kn} = -\rho_l L\omega^2 \frac{L}{2\pi k}\delta_{kj}C_{jn}C_{kn}I_n\left(\frac{\pi kR}{L}\right)/I_n'\left(\frac{\pi kR}{L}\right).$$

Позначимо

$$\lambda_{kn} = \frac{C_{kn}^2}{\pi k}\frac{I_n\left(\frac{\pi kR}{L}\right)}{I_n'\left(\frac{\pi kR}{L}\right)}. \qquad (3.34)$$

Маємо, що в правій частині при $\frac{L}{2}\omega^2$ стоїть матриця

$$\rho h E + \rho_l L\Lambda,$$

де Λ це діагональна матриця у вигляді

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{1n} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_{1n} & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & \lambda_{Nn} \end{pmatrix},$$

елементи якої обчислюються за формулами (3.34).

Переходимо до матриці, що стоїть в правій частині при ω. Спочатку обчислимо скалярні добутки $\left(p_{kn}^1, C_{jn} w_j\right)$. Оскільки $p_{kn}^1 = H_{kn} \sin \dfrac{\pi k x}{L}$, маємо, що цей скалярний добуток дорівнює при $j = k$

$$\frac{H_{kn} C_{kn}}{2} \int_0^L \sin \frac{2\pi k x}{L} dx = -\frac{H_{kn} C_{kn}}{2} \frac{L}{2\pi k} \cos \frac{2\pi k x}{L} \Bigg|_0^L = 0.$$

Якщо $j \neq k$, то маємо

$$\frac{H_{kn} C_{jn}}{2} \int_0^L \left[\sin \frac{\pi(k+j)x}{L} + \sin \frac{\pi(k-j)x}{L} \right] dx =$$

$$= -\frac{L H_{kn} C_{jn}}{2\pi} \left[\frac{1}{k+j} \cos \frac{\pi(k+j)x}{L} + \frac{1}{k-j} \cos \frac{\pi(k-j)x}{L} \right] \Bigg|_0^L =$$

$$= -\frac{L H_{kn} C_{jn}}{2\pi} \left[\frac{(-1)^{k+j} - 1}{k+j} + \frac{(-1)^{k-j} - 1}{k-j} \right]$$

Отриманий вираз дорівнює нулю, якщо k та j обидва парні, або обидва непарні, тобто $k \pm j$ парне.

Якщо $k \pm j$ непарне, то маємо

$$\frac{L H_{kn} C_{jn}}{\pi} \left[\frac{1}{k+j} + \frac{1}{k-j} \right] = \frac{2kL H_{kn} C_{jn}}{\pi\left(k^2 - j^2\right)} = \frac{2kL C_{kn} C_{jn}}{\pi\left(k^2 - j^2\right)} I_n\left(\frac{\pi k R}{L}\right) / I_n'\left(\frac{\pi k R}{L}\right).$$

Введемо таке позначення

$$\lambda_{kj}^1 = \begin{cases} 0, & k + j = 2l \\ \dfrac{4k C_{kn} C_{jn}}{\pi\left(k^2 - j^2\right)} I_n\left(\dfrac{\pi k R}{L}\right) / I_n'\left(\dfrac{\pi k R}{L}\right), & k + j = 2l + 1. \end{cases} \qquad (3.35)$$

Таким чином, маємо таку задачу на власні значення

$$\rho h \frac{L}{2} \Omega_d \{\alpha\} = -\omega^2 \frac{L}{2} \left(\rho h E + \rho_l L \Lambda\right)\{\alpha\} + \omega \frac{L}{2} \rho_l L \frac{V}{L} \Lambda^1 \{\alpha\}.$$

Після скорочення на $L/2$ отримаємо

$$\rho h \Omega_d \{\alpha\} = -\omega^2 \left(\rho h E + \rho_l L \Lambda\right)\{\alpha\} + \omega \rho_l L \frac{V}{L} \Lambda^1 \{\alpha\}$$

Поділимо цю рівність на ρh. Будемо мати

$$\Omega_d\{\alpha\} = -\omega^2\left(E + \frac{\rho_l L}{\rho h}\Lambda\right)\{\alpha\} + \omega\frac{\rho_l L}{\rho h}\frac{V}{L}\Lambda^1\{\alpha\}.$$

Перепишемо отримане матричне рівняння таким чином

$$\omega^2\left(E + \frac{\rho_l L}{\rho h}\Lambda\right)\{\alpha\} - \omega\frac{\rho_l L}{\rho h}\frac{V}{L}\Lambda^1\{\alpha\} + \Omega_d\{\alpha\} = 0. \qquad (3.36)$$

Зауважимо, що матриці $\left(E + \frac{\rho_l L}{\rho h}\Lambda\right)$ та Ω_d діагональні, причому на діагоналі Ω_d стоять квадрати частот незаповненої оболонки, а елементи матриці $\left(E + \frac{\rho_l L}{\rho h}\Lambda\right)$ є коефіцієнтами зниження. Оберненою матрицею до $\left(E + \frac{\rho_l L}{\rho h}\Lambda\right)$ буде діагональна матриця, елементами якої будуть величини, обернені до коефіцієнтів зниження, а саме

$$\frac{1}{1 + \frac{\rho_l L}{\rho h}\lambda_{nk}}.$$

Тобто добуток матриць $\left(E + \frac{\rho_l L}{\rho h}\Lambda\right)^{-1}\Omega_d$ буде діагональною матрицею, при чому її діагональні елементи будуть квадратами частот коливань повністю заповненої нерухомою рідиною оболонки. Добуток матриць $\left(E + \frac{\rho_l L}{\rho h}\Lambda\right)^{-1}\Lambda^1$ буде мати таку ж структуру, що й матриця Λ^1. Введемо позначення

$$\Omega_w = \left(E + \frac{\rho_l L}{\rho h}\Lambda\right)^{-1}\Omega_d; \quad \Lambda^{1w} = \frac{\rho_l L}{\rho h}\frac{V}{L}\left(E + \frac{\rho_l L}{\rho h}\Lambda\right)^{-1}\Lambda^1.$$

Тоді рівність (3.36) набуває вигляду

$$\omega^2\{\alpha\} - \omega\Lambda^{1w}\{\alpha\} + \Omega_w\{\alpha\} = 0.$$

Отримано аналог проблеми власних значень. Як наслідок, маємо

$$\omega^2\{\alpha\} = \omega\Lambda^{1w}\{\alpha\} - \Omega_w\{\alpha\} = 0.$$

Введемо новий вектор невідомих розмірності $2N$

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \omega\alpha \end{Bmatrix}$$

та матрицю розмірності $2N \times 2N$

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -\Omega_w & \Lambda^{1w} \end{pmatrix}.$$

Отримаємо

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -\Omega_w & \Lambda^{1w} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \omega\alpha \end{Bmatrix} = \omega \begin{Bmatrix} \alpha \\ \omega\alpha \end{Bmatrix}. \tag{3.37}$$

Рівняння (3.37) є проблемою власних значень. Для її розв’язання існують стандартні процедури.

4. ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розглядалася циліндрична оболонка з параметрами, наведеними нижче.

Були обрані такі вихідні дані

$$R = 1, \qquad L = 1, \qquad h = 0{,}01, \qquad \nu = 0{,}3, \qquad \rho_l = 1000\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \qquad \rho = 7800\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$E = 2 \cdot 10^5\ \text{Н/м}^2$$

Кожній парі чисел n, m відповідають три власні форми

Наприклад, для $m = n = 1$ отримані власні значення

```
 0.7148
 3.9455
11.0146
```

Їм відповідають такі власні вектори

```
    u          v          w
-0.0459    -0.2346     0.9710
-0.3308     0.9208     0.2068
-0.9426    -0.3117    -0.1198
```

Найменшому власному числу $\omega^2 \rho h = 0{,}7148$ відповідає форма

$$u_1(\theta, x) = -0{,}0459 \cos\theta \sin\frac{\pi x}{L}; \quad v_1(\theta, x) = -0{,}2346 \sin\theta \cos\frac{\pi x}{L};$$

$$w_1(\theta, x) = 0{,}9710 \cos\theta \cos\frac{\pi x}{L}$$

Для першої гармоніки $n = 1$ в таблиці 4.1. подані приведені частоти.

Приведені частоти, вакуум		
m, для гармоніки $n = 1$	h, відносна товщина	
	0.002	0.01
0	1.858591247	1.858591247
1	0.8449551818	0.8454823739
2	0.6521550559	0.6532361673
3	0.4810412304	0.4837783337
4	0.3541450114	0.3612154977
5	0.2652565608	0.2823035694
6	0.2038708291	0.2406159221

7	0.1616741445	0.2307516683
8	0.1332464202	0.2462941639
9	0.1153503818	0.2801296092

Таблиця 4.1. Частоти коливань для першої гармоніки.

Кожній парі чисел m,n відповідає три власних числа і три власні вектора. Як показує чисельний експеримент, ці три власних вектора відповідають різним модам коливань. Якщо переважає перша компонента (A), то маємо моду поздовжніх або осьових коливань (перше переміщення - це переміщення по осі Ox), якщо переважає друга компонента (число B), то це мода окружних коливань (друге переміщення - це переміщення в окружному напрямку) , якщо переважає третя компонента (число C), то це мода нормальних коливань (третє переміщення направлено по радіусу оболонки).

З результатів, отриманих за програмою, видно, що

Частота ω = 11.5023 відповідає поздовжньої моді (A = -0,94, B і C малі)

Частота ω = 4.3053 відповідає окружний моді (B = -0,92, A і C малі)

Частота ω=0.5172 відповідає нормальній моді (C= 0,97, A и B малі)

Далі в таблиці 4.2 наведено результати по обчисленню коефіцієнта зниження при h= 0.01

.Таблиця 4.2. Частоти коливань для першої гармоніки.

Приведені частоти при h=0.01			
m, для гармоніки $n=1$	Без рідини	К-т зниження	З рідиною
0	1.858591247	1.680494311	1.493128718
1	0.8454823739	1.480410945	0.5711132958
2	0.6532361673	1.232319932	0.5300865062
3	0.4837783337	1.151657914	0.4200712102
4	0.3612154977	1.112431821	0.3247079874
5	0.2823035694	1.089296534	0.2591613584
6	0.2406159221	1.074047646	0.2240272329
7	0.2307516683	1.063243155	0.2170262436
8	0.2462941639	1.055188362	0.2334125098

9	0.2801296092	1.048952582	0.2670565038

В таблиці 4.3 приведені результати обчислення коефіцієнту зниження при h =0.002.

Таблиця 4.3. Частоти коливань для першої гармоніки.

Приведені частоти при h=0.002			
m, для гармоніки $n=1$	Без рідини	К-т зниження	З рідиною
0	1.858591247	4.402471555	0.4925312726
1	0.8449551818	3.402054724	0.2483661347
2	0.6521550559	2.161599659	0.3017002030
3	0.4810412304	1.758289568	0.2735847605
4	0.3541450114	1.562159103	0.2267022679
5	0.2652565608	1.446482669	0.1833803933
6	0.2038708291	1.370238229	0.1487849520
7	0.1616741445	1.316215776	0.1228325533
8	0.1332464202	1.275941812	0.1044298564
9	0.1153503818	1.244762909	0.09266855637

На рис. 4.1 подана початкова форма циліндричної оболонки. Далі, на рис. 4.2 и 4.3 подані форми коливань, що відповідають нульовій $m=0$ та першій $m=1$ гармонікам.

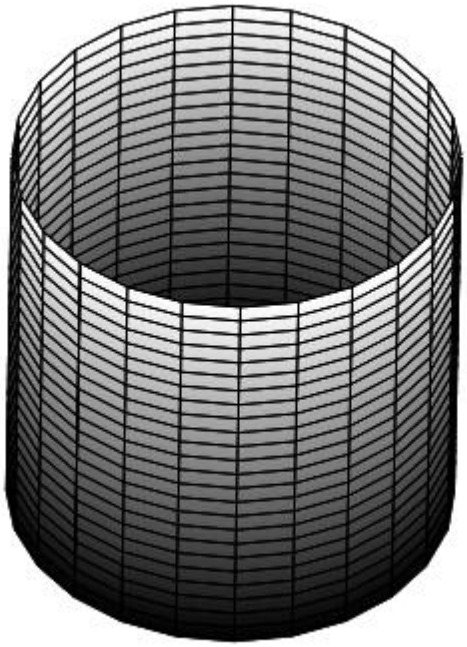


Рис. 4.1. Вихідна форма оболонки

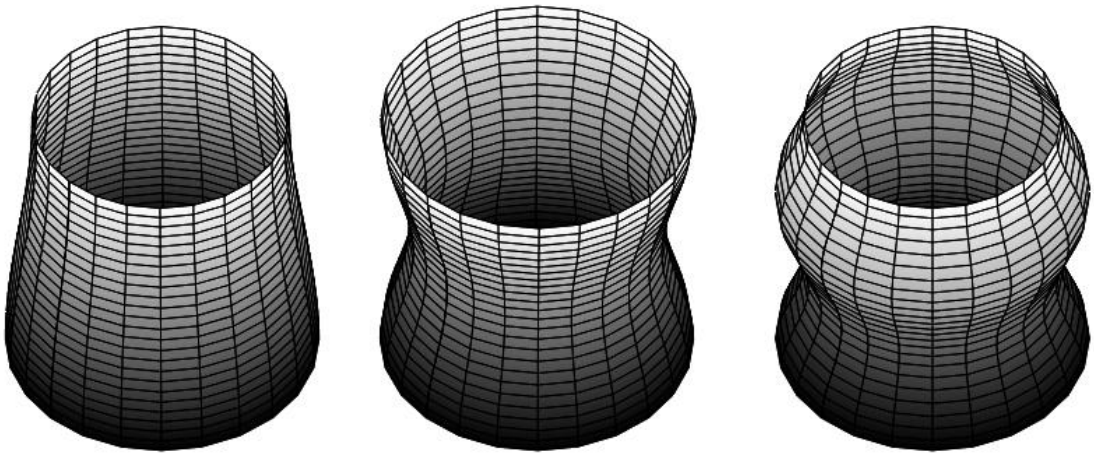


Рис. 4.2. Власні форми нульової гармоніки $m = 0; \quad n = 1, 2, 3$

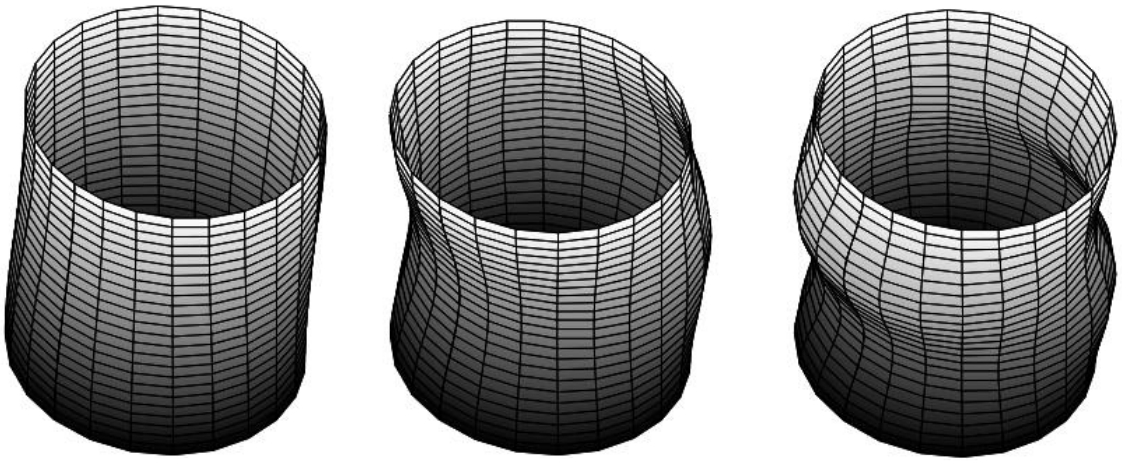


Рис. 4.3. Власні форми першої гармоніки $m = 1; \quad n = 1, 2, 3$

Аналіз чисельних результатів показав, що нижчі частоти при фіксованих відповідають саме нормальним модам. Частоти, відповідні першій гармоніці, виявилися нижче частот, що відповідають нульовій гармоніці. Для відбудови від резонансних частот потрібно вибрати такий режим роботи конструкції, що містить оболонку обертання з рідиною, щоб частота збурюючої сили була менше нижчої власної частоти.

Показано, що коефіцієнт зниження є найбільшим для першої з розглянутих частот, і зменшується із зростанням номера частоти.

ВИСНОВКИ

1) Розв'язана задача визначення частот і форм коливань циліндричної оболонки, повністю заповненою рідиною. Розв’язки для форм коливань і тиску рідини на оболонку отримано у вигляді рядів Фур'є-Бесселя.

2) Доведено, що власні форми коливань жорстко закріпленої з двох торців незаповненою і повністю заповненої ідеальної нестисливої рідиною оболонки однакові (відрізняються постійним множником).

3) Розроблено програми визначення частот і форм незаповненою циліндричної оболонки.

4) Розроблено програму для обчислення коефіцієнта зниження частоти для заповненої оболонки.

5) Встановлено, що нижчі частоти коливань незаповненої оболонки відповідають першій гармоніці.

6) Показано, що коефіцієнт зниження є найбільшим для першої з розглянутих частот, і зменшується із зростанням номера частоти.

7) Показано, що зменшення товщини оболонки веде до збільшення коефіцієнта зниження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. O.R. Joiswal, D.S. Raw. Review of Seismic Codes on Liquid-Containing Tank Earthquoke Spectra. Vol. 23, No 1, pp.239-280, 2007.
2. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций: Статика.–М.: Машиностроение, 1977.– 448 с.
3. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек на ЭЦВМ. – М.: Машиностроение, 1976. –279 с.
4. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.– 1961.– Вып.3.–С.171–174.
5. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Василенко А.Т. и др. О решении на ЭЦВМ задач статики оболочек вращения при произвольном нагружении // Применение ЭЦВМ в строительной механике. – Киев, 1968. – С.46–51.
6. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости.–Киев: Наук. думка, 1973. –228 с.
7. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. О расчете и выборе рациональных параметров оболочечных конструкций из композиционных материалов // Механика композит. материалов. –1981. –№ 1. –С.64–69.
8. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Беспалова Е.И. и др. Численное решение краевых задач статики ортотропных оболочек с переменными параметрами. –Киев: Наук. думка, 1975. –183 с.
9. Григоренко Я.М., А.Т.Василенко. Теория оболочек переменной жесткости.–Киев: Наук.. думка, 1981.–544 с.– (Методы расчета оболочек: В 5-ти т., Т. 4).
10. Гонтаровский П.П., Миткевич В.М. Расчет оболочек вращения с разветвленным меридианом на осесимметричную нагрузку // Динамика и прочность машин. –1972. –Вып. 16. –С.60-67.

11. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / А.В.Кармишин, В.А.Лясковец, В.И.Мяченков, А.И.Фролов.–М.: Машиностроение, 1975.–576 с.
12. Григорьев И.В., Мяченков В.И. Колебания многосвязных оболочечных конструкций // Прикл. пробл. прочности и пластичности. –1975. –Вып.2. –С.51–54.
13. Мяченков В.И., Григорьев И.В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник.–М.: Машиностроение, 1981.–216 с.
14. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: В 2-х т. – М.: Наука, 1966.– Т.2 . –480 с.
15. Бреббиа К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. –М.: Мир, 1983.
16. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. –М.: Мир, 1987. –328 с.
17. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, заполненные однородной капельной жидкостью: В 7-и т.– М.; Л.: Гостехиздат, 1949.–Т.2.– 762 с.
18. Микишев Г.Н., Рабинович Б.Н. Динамика твердого тела с отсеками, содержащими жидкость.– М.: Машиностроение, 1971.–563 с.
19. Рапопорт И.М. Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью.– М.: Машиностроение, 1967.–359 с.
20. Новичков Ю.Н. Исследование спектра частот собственных колебаний цилиндрических оболочек, содержащих сжимаемую жидкость//Труды VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок.–М.: Наука, 1966.–С. 600-606.
21. Галкин М.С. Определение присоединенных масс жидкости, частично заполняющей колеблющийся бак с деформированными стенками //Колебания упругих конструкций с жидкостью.–Новосибирск: Новосибир. электротехн. ин-т, 1973.–С. 28-29.

22. Шульман С.Г. Собственные колебания прямоугольной пластины в жидкости.– Л.: Энергия, 1968.–248 с.
23. Шмаков В.Н. О колебаниях непологих сферических оболочек//Изв. АН СССР. Механика твердого тела.–1969.–№ 3.–С.177-185.
24. Григорьев В.Г. Применение метода конечных элементов к расчету колебаний упругих оболочечных конструкций, содержащих жидкость// Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. –Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1977.–С.55-60.
25. Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов// Изв. РАН. Механика твердого тела.–1998.–№ 6.–С.166-174.
26. Selmane,A. Vibration analysis of anisotropic open cylindrical shells subjected to a flowing fluid / A. Selmane, A.A. Lakis // J. Fluids Struct. – 1997. – V. 11. – P. 111–134.
27. Zhang,Y.L. A finite element method for modelling the vibration of initially tensioned thin-walled orthotropic cylindrical tubes conveying fluid / Y.L. Zhang, D.G. Gorman, J.M.Reese // J. Sound Vib. – 2001. – V. 245. – №1. – P. 93–112.
28. Kochupillai, J. A semi-analytical coupled finite element formulation for shells conveying fluids / J.Kochupillai, N. Ganesan, C.Padmanabhan // Comput. Struct. – 2002. – V. 80. – P. 271–286.
29. Kochupillai, J. A semi-analytical coupled finite element formulation for composite shells conveying fluids / J.Kochupillai, N. Ganesan, C.Padmanabhan // J. Sound Vib. – 2002. – V. 258. – №2. – P. 287–307.
30. Слепян Л.И., Сорокин С.В. Метод граничных интегральных уравнений в гидроупругости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.–1989.–№4.–С.166-177.
31. Kubenko V.D. Nonlinear problems of the dynamics of elastic shells partially filled with a liquid / V.D Kubenko, P.S. Koval’chuk // Intern. Appl. Mech. – 2000. – **36,** N 4. – P. 421–448.

32. Amabili M. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction / M. Amabili, M. P. Païdoussis //Appl. Mech. Rev. – 2003. – 56, N 4. – P.349–381.
33. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций // Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. – Машиностроение, 1975 - 234 с.
34. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л. Судпромгиз, 1962, 432 с
35. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1978.–296 с.
36. Прочность, устойчивость, колебания - Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко - Москва, издательство "Машиностроение", 1968
37. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С, Подчасов М.П. Аналіз стійкості циліндричних оболонок при взаємодії з рухомою рідиною. Доповіді Національної академії наук України, 2010, №5, С.50-56.

ДОДАТОК А

Текст програми знаходження власних значень незаповненої оболонки

```
function [M, R1, D1] =eigenvectempty (m,n)
R=1; L=1; h=0.01; nu=0.3; ro=7800; E=2*10^5;
del=R/L; ht=h*R/(sqrt(12)*L*L);
m = m*pi/L;
M11 = del^2*m^2+n^2*(1-nu)/2;
M12 = n*m*del*(1+nu)/2;
M22 = del^2*(1-nu)/2*m^2+n^2;
M13 = m*nu*del;
M23 = n;
M33 = 1+ht^2*(m^2+n^2*del^(-2))^2;
M = [M11 M12 M13;
     M12 M22 M23;
     M13 M23 M33];
[R, D] = eig(M);
R1 = R';
D1 = diag(D);
```

Результат роботи програми

```
>> [M, R, D] = eigenvectempty (1,1)

M =

   10.2196    2.0420    0.9425
    2.0420    4.4544    1.0000
    0.9425    1.0000    1.0010


R =

   -0.0459   -0.2346    0.9710
   -0.3308    0.9208    0.2068
   -0.9426   -0.3117   -0.1198


D =

    0.7148
    3.9455
   11.0146
```

ДОДАТОК Б

Текст програми обчислення коефіцієнтів зниження

```
function k=kfall (m,n)
R=1; L=1; h=0.01; rol=1000; ro=7800;
z = m*pi*R/L;
k = 1+(rol*L*besseli(n,z))/(3*m*pi*ro*h*(besseli(n-
1,z)+besseli(n+1,z)/2));
```

Результат роботи програми

```
>> kfall (1:9,1)

ans =

  Columns 1 through 7

    1.9002    1.4604    1.3063    1.2292    1.1830    1.1523    1.1304

  Columns 8 through 9

    1.1140    1.1013
```