МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ
Кафедра теплофізики, молекулярної фізики та енергоефективності

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр

«Моделювання фізичних полів за допомогою атомарних радіальних базисних функцій»

Виконав: студент 2 курсу магістратури,
групи НФ-62
Васильчук Тетяна Сергіївна
Спеціальність
«105 Прикладна фізика та наноматеріали»
Освітня програма: Прикладна фізика
енергетичних систем
Керівник: к. ф-м. н. Лісіна Ольга Юліївна

Рецензент:

Харків - 2019

Додаток 18

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Факультет фізико-енергетичний
Кафедра теплофізики, молекулярної фізики та енергоефективності
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магістр
Спеціальність 105 — прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ **Ю.М. Мацевитий**
підпис ініціали, прізвище

"____" _____20___року

З А В Д А Н Н Я
НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ (ПРОЕКТ)

Васильчук Тетяна Сергіївна
(прізвище, ім'я, по батькові студента)

1. Тема роботи Моделювання фізичних полів за допомогою атомарних радіальних базисних функцій

керівник роботи Лісіна Ольга Юліївна, к.ф.м.н.
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від "___"_____20__року №___

2. Строк подання студентом роботи_____

3. Перелік питань, які потрібно розробити:

проаналізувати сучасний стан наукового напряму щодо числових методів розв'язання фізичних задач, а саме – сіткових, безсіткових тощо; надати алгоритм побудови розв'язків тривимірних задач; провести обчислювальні експерименти рішення теплових 3D задач; проаналізувати отримані результати.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1.	Вибір теми, узгодження, закріплення за кафедрою
2.	Робота над літературою та іншими джерелами
3.	Затвердження теми на кафедрі
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6.	Написання третього розділу
7.	Завершення написання дипломної роботи(висновки та література)
8.	Подача науковому керівнику, доробка з урахуванням зауважень
9.	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
10.	Попередній захист на кафедрі
11.	Захист

5. Дата видачі завдання_____

Студент _____ Васильчук Т.С.
підпис ініціали, прізвище

Керівник роботи _____ Лісіна О.Ю.
підпис ініціали, прізвище

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ ТА АБРЕВІАТУР

РБФ – радиальні базисні функції.

АРБФ – атомарні радиальні базисні функції.

СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь.

ФДУ – функціонально-диференційні рівняння.

РЕФЕРАТ

Робота виконана Васильчук Тетяною Сергіївною на тему: Моделювання фізичних полів за допомогою атомарних радіальних базисних функцій

Об’єктом дослідження дипломної роботи є нестаціонарні теплові поля.

Предметом дослідження є математична модель тривимірні нестаціонарної задачі теплопровідності та методи дослідження цієї моделі.

Мета полягає у моделюванні та аналізі теплових полів за допомогою безсіткових методів та атомарних радіальних базисних функцій.

В ході виконання дипломної роботи

Дипломний проект містить: 62 сторінок, 33 рисунків, 7 таблиць, 0 додаток, 38 джерел.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: безсіткові методи, радіально-базисні функції, атомарні радіальні базисні функції, задача теплопровідності.

РЕФЕРАТ

Работа выполнена Васильчук Татьяной Сергеевной на тему: Моделирование физических полей с помощью атомарных радиальных базисных функций.

Объектом исследования работы являются нестационарные тепловые поля.

Предметом исследования является математическая модель трехмерной нестационарной задачи теплопроводности и методы исследования этой модели.

Цель заключается в моделирование и анализ тепловых режимов систем бессеточными методами и атомарными радиальными базисными функциями.

В ходе виполнения работы

Дипломный проект включает в себя: 62 страниц, 33 рисунков, 7 таблиц, 0 дополнений, 38 источников.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: бессеточные методы, радиально-базисные функции, атомарные радиальные базисные функции, задача теплопроводности.

ABSTRACT

The work was done by Tatyana Sergeevna Vasilchuk on the topic: Modeling of physical fields using atomic radial basis functions.

The object of the study of the work are nonstationary thermal fields.

The subject of the study is a mathematical model of the three -dimensional nonstationary heat conduction problem and the methods of investigating this model.

The purpose of the work is to simulate and analyze the thermal regimes of systems using meshless methods and atomic radial basis functions.

In the course of the thesis work

The diploma project contains: 62 pages, 33 drawings, 7 tables,

0 application, 38 sources.

KEYWORDS: meshless methods, radial basis functions, atomic radial basis functions, thermal conductivity problem.

ЗМІСТ

ВСТУП. …….9

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ. …….10

РОЗДІЛ 2. ПРЕДСТАВЛЕННІ МЕТОДИ РІШЕННЯ.……17

РОЗДІЛ 3. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ……33

ВИСНОВКИ…….….57

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ……..58

ВСТУП

Дипломна робота присвячена моделюванню та аналізу теплових режимів систем безсітковими методами та атомарними радіальними базисними функціями. Дослідження ґрунтується на використанні числових методів, що дозволяють отримувати розв’язки рішень задач у сильній формі. Дослідження базується на безсітковому підході на базі атомарних радіальних базисних функцій.

Метод демонструється на системах, в яких область вирішення задач являє собою достатньо складний геометричний опис.

В результаті дослідження динаміці систем в нелінійному випадку встановлено періодичні, регулярні квазіперіодичні та нерегулярні стохастичні режими.

РОЗДІЛ 1.

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Для вирішення будь-якої реальної задачі є декілька способів її рішення. Першим способом є експеримент. Але цей спосіб має свої мінуси. Він дуже повільний та іноді дуже дорогий. Інший спосіб – математичний аналіз конструкції або явища. Але його використовують не для реальних явищ, а лише для деяких математичних моделей цих явищ. Тому першою стадією роботи завжди є формування математичної моделі (постановка задачі). Для фізичних процесів модель складається із рівнянь, що описують процес, у ці рівняння у вигляді коефіцієнтів входять характеристики тіл або речовин, що приймають участь у процесі.

В залежності від складності моделі застосовують різні математичні підходи. Для нескладних и грубих рішень вдається отримати аналітичне вирішення. А для більш складних і точних аналітичне рішення вдається отримати значно рідше. Часто використовують деякі математичні наближення.

Чисельні методи є одним із сильніших математичних засобів для вирішення задач. Існують такі задачі, які просто неможливо вирішити без складних чисельних методів. Усі ці операції просто неможливо уявити без використання потужних комп’ютерів.

Взагалі виділяють такі методи моделювання фізичних процесів:

• методи побудови моделей радіофізичних динамічних систем;

• чисельні методи вирішення крайових задач;

• методи аналізу зосереджених і розподілених систем;

• поліноміальна інтерполяція»

• численне інтегрування;

• рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь;

• стандартні чисельні методи;

• методи апроксимації та інтерполяції;

• методами побудови, оптимізації та налагодження алгоритмів і програм в середовищах програмування;

• метод скінчених різниць;

• методами комп'ютерної обробки та подання інформації;

• безсітковий метод.

В процесі експлуатації будь-який матеріал має властивість зношуватися. Особливо в процесі використання деталей, сплавів відбувається зниження їх працездатності, в умовах високотемпературних імпульсних впливів. Проблема підвищення працездатності конструкційних сталей, які широко використовуються в механізмах машин і технологічного обладнання, є дуже актуальною. Саме модифікація поверхонь конструкційних сталей є одним із способів вирішення цієї проблеми.

Вивчення нелінійних математичних моделей різних фізико-хімічних явищ і процесів є одним з актуальних напрямків. Саме використання в сучасній фізиці і техніці впливів на речовини електричних полів великої інтенсивності, пучків частинок високої енергії, ударних хвиль високої інтенсивності, потужних теплових потоків, які обумовлені появою таких моделей. Лінійні математичні моделі є лише певними наближеннями при описі різних процесів. Їх можна використовувати в тих випадках, коли досліджувані фізичні величини в даному процесі змінюються не в дуже широкому діапазоні значень.

В основі нелінійних моделей лежать нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними. Для них ще не розроблено закінченої теорії і загальних методів вирішення задачі. Хоча для ряду нелінійних задач вдається

знайти точні аналітичні рішення, аналіз властивостей яких дозволяє виявити якісно нові нелінійні ефекти в процесі, що досліджується. [1, 2, 24] При дослідженні високотемпературних теплових процесів з урахуванням дії таких механізмів переносу енергії, як електронна або променистa теплопровідності, необхідно враховувати залежність щільності ρ, питомої теплоємності c і коефіцієнта теплопровідності середовища k від температури.

Квазілінійне параболічне рівняння виду:

$$p(u)c(u)\frac{du}{dt} = div(k(u)grad\,u) + F(u,x,y,z,t) \quad (1)$$

де u (x, y, z, t) - залежність властивостей середовища від температури, F (u, x, y, z, t) - нелінійну залежність від температури потужності розподілених в об'ємі теплових джерел.

Також нелінійна задача теплопровідності може бути обумовлена нелінійністю граничної умови – це є завдання з зовнішньою нелінійністю.

У таких задачах функція нелінійним чином залежить від температури, а нелінійне гранична умова на поверхні тіла може мати вигляд:

$$\frac{du}{dn} = \theta(u,P,t), P\epsilon S \quad (2)$$

де функція нелінійно залежить від температури.

Нелінійності можуть змінювати не тільки кількісні характеристики теплових процесів, але і якісну картину їх протікання. Вони ускладнюють математичні моделі теплових процесів.

Квазілінійні параболічні рівняння другого порядку лежать в основі математичних моделей різноманітних явищ і процесів в механіці, фізиці, біології, екології, технології та інших галузей знань. А також рівняння нелінейної теплопровідності при певних умовах описує фільтрацію рідин і газів в пористих матеріалах, дифузію нейтронів, нелінійний скін-ефект при проникненні магнітного поля в провідні середовища. Рівняння (1) може бути застосовано при математичному описі процесів горіння і детонації, хімічної кінетики, процесу зростання і міграції біологічних популяцій, поширенні забруднень в навколишньому середовищі. [2]

Задача теплопровідності стає нелінійної, якщо враховувати фазові переходи в середовищі (плавлення, випаровування, конденсація, кристалізація, що відбуваються при певній температурі і супроводжуються виділенням або поглинанням теплоти). [2]

У середовищі з фазовим переходом з'являється поверхня Σ розділу фаз, яку називають фронтом фазового переходу. Ця поверхня переміщується з кінцевою швидкістю. Баланс теплової енергії на фронті фазового переходу з температурою u^* дозволяє записати на рухомій поверхні Σ фронту крім умови, $u_1(P) = u_2(P) = u^*$ іншу граничну умову:

$$\left(k_1 \frac{du_1}{dn} - k_2 \frac{du_{12}}{dn}\right)\Big|_{p \epsilon \Sigma} = q^* pv \quad , \qquad (3)$$

де k_1, k_2 і u_1, u_2 - коефіцієнти теплопровідності і температури двох дотичних фаз відповідно; q* - питома масова теплота фазового переходу; ν - миттєва швидкість переміщення фронту фазового переходу в напрямку нормалі $\vec{n}$ поверхні Σ.

Гранична умова Стефана робить задачу з фазовими переходами нелінійною, тому що швидкість переміщення фронту заздалегідь не відома.

В процесі експлуатації будь-який матеріал має властивість зношуватися. Особливо в процесі використання деталей, сплавів відбувається зниження їх працездатності, в умовах високотемпературних імпульсних впливів. Проблема підвищення працездатності конструкційних сталей, які широко використовуються в механізмах машин і технологічного обладнання, є дуже актуальною. Саме модифікація поверхонь конструкційних сталей є одним із способів вирішення цієї проблеми.

В [2] приведена методика розрахунку температури в зразках циліндричної симетрії. Щоб визначити температурне поле використовували універсальне рівняння теплопровідності. Це рівняння вирішувалося чисельними методами, так як не можна було знехтувати залежністю теплофізичних параметрів від температури. Все теплофізичні параметри матеріалів були введені кусочно-лінійними функціями.

Для находження температурного поля використовують універсальне рівняння теплопровідності в циліндричній системі координат:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^{\upsilon}} \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r^{\upsilon} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + Q(r,t), \quad (4)$$

Де T – температура, r - радіус, який грає роль координати, υ - показник симетрії, $\rho(T)$ - щільність, c (Т) - теплоємність, λ (T) - теплопровідність, $Q(r, t)$ - потужність внутрішнього джерела теплоти.

Для вирішення задачі теплопровідності необхідні початкові і граничні умови:

$$\sigma(T_1^4 - T_{газа1}^4) + \alpha(T_1 - T_{газа1}) = \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial r_{(r=r_1)}} + Q(r,t) \quad (5)$$

$$\sigma(T_N^4 - T_{газа2}^4) + \alpha(T_N - T_{газа2}) = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial r_{(r=r_2)}} \quad (6)$$

де σ – стала Стефана Больцмана, α – коефіцієнт пропорційності в рівнянні Ньютона-Ріхмана.

У цій системі рівнянь (2-4), де рівняння (3) відображає теплообмін випромінюванням і конвекцією на внутрішній поверхні циліндра з покриттям; рівняння (4) відноситься до границі між покриттям і матрицею. У цьому випадку початковими умовами є температура, яка рівномірно розподілена радіально. А граничні умови (3-4) означають безперервність розподілу температури і рівність теплових потоків на границі покриття.

Для більш точного аналізу був проведений експеримент, в роботі [2] була розглянута трубка, яка використовувалася для аналізу поведінки покриттів при імпульсному впливі концентрованих потоків енергії всередині системи з циліндричної симетрією.

Була розглянута динаміка нагріву. Для цього проводився розрахунок в сталі без покриття і стали з покриттям з молібдену, проведено розрахунок охолодження водяної пари в даній системі.

Внутрішня напруга найчастіше призводить до утворення дрібної сітки тріщин і порушень в роботі виробу, тому для захисту від руйнування поверхні сталевих виробів циліндричної симетрії в процесі експлуатації, визначальним є температурне поле і поле внутрішньої напруги.

Дослідження обернених задач, які відповідають прямим завданням для рівнянь з частинними похідними з розривними коефіцієнтами, також представляє собою великий інтерес. Вирішення цих завдань вимагає використання спеціальних методів. Важливим є саме виділення умов, які забезпечують належність шуканих функцій спеціальним множинам. Такий підхід дозволяє переходити до вирішення обернених задач, використовуючи вже готове програмне забезпечення .

У дослідження [30] проводилося в разі, коли були задані крайові умови третього роду на частини границі. Була дана функція $u\ (x,t)$ двох змінних, яка задовольняла початково-крайовій задачі. У роботі було сформульовано завдання, вирішення якого мало місце і було єдино. Воно визначається функціями $\kappa,\lambda,\chi,\omega$.

В ході вирішення поставленого завдання було доведено наступне:

1) $u_x(l,t)\geq 0, t\in[0,T]$;

2) рішення задачі з коефіцієнтами, що задовольняють умовам і зі зворотнім напрямком часу існує і єдино.

За допомогою математичних викладок були наведені докази, які показували, що досліджена постановка задачі для рівняння з розривним коефіцієнтом деталізує модель.

У постановах початково-крайових задач для одновимірного квазілінійного рівняння теплопровідності з розривним по просторової змінної коефіцієнтом при старшій похідній виділені умови, що забезпечують монотонність різних довільних рішень.

У задачі [27] нагрівання кінцевого циліндра тепловим джерелом, яке обертається з постійною кутовою швидкістю і рухомим уздовж осі циліндра

для вирішення квазілінійного рівняння теплопроводності використовувалася явна різницева схема. Функції температур приймали теплофізичні параметри матеріалу циліндра. Для цього використовувався циліндр з висотою H і радіусом R. Матеріалом був узятий такий, який мав змінні теплофізичні властивості, що залежать від температури. Сорочка циліндра розігрівається поверхневим тепловим джерелом потужністю Q, що обертається з постійною кутовою швидкістю ω і рівномірно рухається уздовж осі циліндру. Квазілінійне рівняння було записано в циліндричній системі координат. Були задані граничні умови на торцях і бічної поверхні циліндра. На торцях циліндра відбувалася тепловіддача.

Для вирішення завдання використовувалася диференційно-різницева схема, отримана редукцією квазілінійного рівняння теплопровідності, записаного в циліндричній системі координат. Були отримані розрахункові формули для вузлів сітки на осі циліндра, апроксимувати крайові умови. Для підвищення точності використовували метод ітерації.

В результаті було показано, що описаний метод забезпечує прийнятну точність. А використання неявної різницевої схеми може привести до необхідності вирішення СЛАР великої розмірності.

Було показано, що використання явної різницевої схеми має логічної простотою і може бути перенесена на багатопроцесорні обчислювальні системи.

РОЗДІЛ 2.
ПРЕДСТАВЛЕННІ МЕТОДИ

Взагалі існує дуже багато різних методів для вирішення диференціальних рівнянь. Наприклад, метод скінчених різниць (метод сіток), метод скінченних елементів, методи скінчених об’ємів та безсікові методи.

Метод скінчених елементів являє собою числову техніку знаходження розв'язків інтегральних та диференціальних рівнянь у частинних похідних. Процес розв'язання побудований або на повному усуненні диференціального рівняння для стаціонарних задач, або на розкладі їх в апроксимуючу систему звичайних диференціальних рівнянь. [4, 6, 15]

Цей метод використовують на стадіях дизайну чи розробки продуктів зазвичай у механічній інженерії.

Методи скінченних різниць – чисельні методи розв'язку інтегро-диференціальних рівнянь алгебри, диференціального, інтегрального числення, основані на заміні диференціальних операторів різницевими операторами, інтегралів — сумами, а функцій неперервного аргументу — функціями дискретного аргументу. Така заміна приводить до системи, взагалі кажучи, нелінійних алгебраїчних рівнянь, які зрештою зводяться до лінійної системи деяким ітераційним методом. Цей метод є методом сіток. [6, 25, 28]

Метод скінчених різниць використовують для вирішення еліптичних задач. Розв’язання нестаціонарних задач. Для вирішення еліптичної задачі методом кінцевих різниць на розрахунковій області будують сітка, потім обирають різницеву схему і для кожного вузла сітки записують різницеве рівняння, потім проводиться облік крайових умов. Отримують система лінійних алгебраїчних рівнянь, вирішуючи яку у відповіді отримують наближені значення рішення у вузлах. Головною проблемою методу є побудова правильної різницевої схеми, яка буде сходитися до вирішення.

Побудова схеми виконується виходячи з властивостей вихідного диференціального оператора. [4, 25]

Окрім вирішення еліптичних задач метод скінчених різниць використовується для вирішення нестаціонарних задач, коли процес змінюється за часом. У такому випадку цей метод являє собою ітераційний процес – на кожній ітерації знаходять рішення для нового часового шару. Для вирішення таких задач використовуються явні, неявні схеми і предиктор-коректор. Явні схеми і схеми предиктор-коректор просто перераховують значення, використовуючи інформацію з попередніх тимчасових шарів, використання неявної схеми призводить до вирішення рівняння або їх системи.

У моделюванні з кінцевою різницевою областю одномірного моделювання буде деяка функція $u(x,t)$ представлена як u_i^n у точці x_i, де

$i = 0, 1, 2 \ldots$

$n = 0, 1, 2 \ldots$

$x_{i+1} - x_i = h \forall i$

$t_{n+1} - t_n = k \forall n$

Ми можемо визначити похідні, які зустрічаються в моделюванні рівняння з використанням деяких звичайно-різницевих формул в цій області. Тоді ми можемо використовувати ці визначення $u(x,t)$ і його просторові і тимчасові похідні, щоб написати рівняння, що моделюється в формі з кінцевої різницею, потім змоделювати рівняння з однією з багатьох кінцевих різниць методи . [1, 6, 19, 25]

Як правило, в кінцевих різницях можна дуже просто змінити змінні кроків вздовж заважав, але все вихідні вузли повинні бути збережені, і вони можуть рухатися незалежно тільки шляхом деформування вихідних елементів.

Якщо навіть тільки два з усіх вузлів змінюють свій порядок, або навіть один вузол додається або видаляється з симуляції, що створює дефект у вихідній сітці, і просте кінцеве разностное наближення більше не може бути виконано.

Одним з головних факторів великої уваги до безсіткових методів є практична перевага у порівнянні з методами сіток при вирішенні задач в складних областях. На відміну від методу сіток, в безсітокових методах область вирішення задачі являє собою рівномірно розподілені по області вузли, до яких «прив'язуються» базисні функції, тобто центр носія базисної функції, що має форму кола в 2D або кулі в 3D областях, поєднується з відповідним вузлом. [14, 17]

Перспективність таких методів підтверджується при вирішенні завдань, які є традиційно складними в разі застосування методів сіток. Практичні дослідження показують, що методи сіток важко застосовувати у ситуаціях, коли розглядаються в задачах об'єкти представляють з себе набір дискретних фізичних об'єктів або коли вирішуються завдання зводяться до дослідження складність них процесів, моделювання течії рідини в гідродинаміці, опису рівноважних і нерівноважних систем в термодинаміці.

Безсіткові методи - це ті, які не вимагають з'єднання між вузлами області моделювання, тобто сітку, вони швидше засновані на взаємодії кожного вузла з усіма його сусідами. З цього витікає що важливі властивості, такі як маса або кінетична енергія, більше не прив'язані до елементів сітки, а до одиничних вузлів. Безсіткові методи дозволяють моделювати деякі складні типи проблем за рахунок додаткового часу обчислення.

У методах, де використовується сітка, кожна точка має фіксоване число сусідів. Саме такий зв’язок між сусідами може використовуватися для визначення математичних операторів, наприклад, похідних.

Але що робити у симуляції, де моделюється матеріал може переміщатися або де можуть виникати великі деформації матеріалу? У таких

ситуаціях з'єднання сітки може бути важко підтримувати без введення помилки в моделювання. Якщо сітка стає заплутаною або виродженою під час моделювання, оператори, визначені на ній, можуть більше не давати правильні значення. Безсіткові методи призначені для усунення цих проблем.

Ці методи також корисні для:

- моделювання, в якому створення сітки з геометрії складного тривимірного об'єкту може бути особливо складним або вимагає людської допомоги;
- моделювання, в якому вузли можуть бути створені або знищені, наприклад, при імітації злому;
- моделювання, при якому геометрія проблеми може переміщатися з положення з фіксованою сіткою, наприклад, при моделюванні згинання;
- моделювання, що включає нелінійне поведінку матеріалу, розриви або особливості.

Реалізовані на практиці безсіткові методи можна умовно розподіляються на три основні групи:

- методи, засновані на апроксимації рішення диференціального рівняння з частковими похідними у сильній формі (meshfree strong-form methods) - методи колокації;
- методи, засновані на апроксимації рішення диференціального рівняннь з частковими похідними в слабкій формі (meshfree weak-form methods), що реалізуються на основі застосування варіаційних принципів;
- методи гладких частинок (smoothed particle hydrodynamics - SPH), при реалізації яких використовуються форми інтегрального уявлення.

До відомих обчислювальних методів вирішення крайових задач відносять метод сіток (різницевих схем), різні варіаційні та проекційні методи, метод кінцевих елементів і ін. В практиці застосування чисельних методів розв'язання крайових задач широко використовуються досягнення наукових шкіл А.А. Дородніцина, Г.І. Марчука, А.А.Самарского, В.Л. Макарова, В.С. Дейнеки, І.С. Сергієнко, О.А. Ладиженський, Н.С. Бахвалова, С.Г. Михлина і ін. Різниця між методами може трактуватися досить умовно - різницеві методи та метод кінцевих елементів використовують процедури, які реалізуються або варіаційним, або проекційним шляхом, зі спеціальним вибором координатних (пробних) функцій. Рішення крайової задачі отримує такий вигляд: $u_N = \sum_{i=1}^{N} C_k \psi_k(x) + \psi_o(x)$, где $\psi_k(x)$ – деякі заздалегідь обрані функції. Таким чином, завдання зводиться до вирішення деякої системи рівнянь щодо невідомих $F_i(C_1, C_2, ..., C_N) = 0$, $i = 1, 2, ..., N$. Основні труднощі при пошуку функції u_N полягають в необхідності задоволення граничним умовам даної крайової задачі. Системи координатних функцій повинні володіти інформацією про форму границі області рішення задачі. Ця інформація необхідна, аби забезпечити те, щоб шукана функція, яка описує процес, який досліджується, задовольняла граничним умовам крайової задачі. При цьому потрібно, щоб відповідні функції були конструктивно простими з точки зору обчислень їх значень і при проведенні певних аналітичних дій - знаходженні похідних чи інших операцій. Завдання з загальних позицій успішно вирішуються конструктивними алгебро-логічними методами теорії R-функцій на основі структурного методу (RFM). [19, 23, 27]

Атомарні функції представляють собою нескінченно диференційовані фінітні розв’язки функціонально-диференціальних рівнянь. Вони є математичним апаратом конструктивної теорії функцій. За допомогою

атомарних функцій можна побудувати поліноми, які сполучають у собі переваги класичних степеневих поліномів і сплайнів.

Атомарні функції вперше були виведені у роботі В.Л. Рвачова в 1971 році. Обставини, які були товчком для того, щоб функція $up(x)$ побачила світ пов'язані з проблемою, яка була поставлена у 1967 році. Ця проблема являла собою пошук такої фінітної диференціюємої функції, щоб її графік був представлений у вигляді «горбу». Де одна ділянка би зростала, а інша зменшувалась. А графік повинен був мати теж вигляд «горбу» та «ями», та мати точність до масштабного коефіцієнту.

Зараз атомарні функції дуже широко використовують у теорії апроксимації, цифровій обробці сигналів, вейвлет-аналізі, різних фізичних застосунках та інших областях.

Застосування АРБФ в численних алгоритмах рішення диференціальних рівнянь в часткових похідних досліджувався в роботах Колодяжного В.М. і Рвачева В.А., в яких була встановлена можливість досить точно апроксимувати розподілені дані без використання процедур перерахунку сітки. Увага до АРБФ з компактними носіями багато в чому обумовлено потребами практики при побудові ефективних обчислювальних алгоритмів, які є альтернативними методу скінченних елементів. Цим обумовлений інтерес до дослідження алгоритмів розв'язання задач теплопровідності із застосуванням в якості базисних атомарних функцій багатьох змінних. [7, 9, 13]

Відкриття і дослідження класів атомарних функцій належить В.Л. Рвачева і В.А. Рвачева, яка вибудувала в 1971 році найпростішу одновимірну атомарному функцію $up(x)$ [8, 10, 11, 26]. Характерні властивості функції $up(x)$ (нескінченна дифференційність та фінітність, тобто наявність компактного носія) дозволили побудувати алгоритмічно прості обчислювальні схеми для вирішення задач інтерполяції та апроксимації функцій [10, 11, 15].

Ці функції використовувалися в якості пробних при вирішенні крайових задач на основі застосування варіаційних методів.

Атомарні функції багатьох незалежних змінних складають особливий клас радіальних базисних функцій. Такі функції є нескінченно диференційованими фінітними рішеннями функціонально-диференціальних рівнянь (ФДУ) спеціального виду [13, 16]

Безсіткові методи з використанням радіальних базисних функцій показують свою ефективність при вирішенні великого класу важливих задач, у яких використання методів сіток є малоефективним. Вони демонструють свою ефективність також у таких задачах, де традиційно реалізовано і метод сіток. Методи вирішення задач на основі атомарно радіалих базисних функцій також є досить ефективним та вдало реалізованим. Це дозволяє використовувати їх для вирішення інженерних задач у складних машинобудівних конструкціях.

Коли ми вирішуємо задачі безсітковими методами, то одним з важливих критеріїв отримання якісних розв'язків є вибір системи базисних функцій. Створення відповідних базисних систем відбувається на основі радіально базисних функцій (РБФ) та атомарних радіальних базисних функцій (АРБФ). Для використання АРБФ багатьох змінних треба вміти отримувати сімейства атомарних функцій. Це дає змогу розширити її апроксимаційні можливості при дослідженні прикладних задач.

У роботі [18] показано, що відповідні сімейства АРБФ утворюються при розв'язанні функціонально-диференціальних рівнянь виду

$$Lu(x) = \lambda \oint_{\partial\Omega} u\left[k(x-\xi)\right] d\omega + \mu u(kx) \qquad (7)$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$; k - коефіцієнт стиску, який вибирається на основі залежності щуканих функцій від величини стиску; δ - параметр оператора Гельцмгольца; μ - параметри, що уточнюються у процесі розв'язку; L - один з диференціальних операторів.

Для того, щоб побудувати сімейства АРБФ трьох незалежних змінних для визначення атомарних функцій, розглядали функціонально-диференційне рівняння виду

$$\triangle u(x_1, x_2, x_3) - \delta^2 u(x_1, x_2, x_3) = \lambda \oint_{\partial\Omega} u\left[k(x_1 - \xi_1), (x_2 - \xi_2), (x_3 - \xi_3)\right] d\omega + \mu u(kx_1, kx_2, kx_3) \qquad (8)$$

Застосовуючи тривимірне перетворення Фур'є до рівняння (8) та підставивши сферичні координати, зводять вхідний інтеграл до елементарної функції.

У роботі [18] показано, що функція $u(x_1, x_2, x_3)$ є нескінченно диференційованою функцією з компактним носієм, для якої перетворення Фур'є $U(t_1, t_2, t_3)$ зображається швидкоспадною цілою функцією експоненціального типу. Таку функцію позначають $Horp_k(x_1, x_2, x_3)$. Вона є атомарною. Ця функція парна відносно своїх змінних ті її можна зобразити у вигляді розкладеної в трикратний ряд Фур'є.

Така процедура побудови сімейства атомарних радіальних базисних функцій розширює можливості безсіткових підходів наближеного розв'язання крайових задач на основі АРБФ. Також вона дозволяє вибрати із цих сімейств такі базисні функції, які можуть покращити якість наближення.

У процедурі вирішення задачі може бути використано точний математичний опис області Ω за допомогою математичних засобів теорії R-функцій. [23, 25, 27]

Математичний апарат теорії R-функцій, який розробив В. Л. Рвачєв та разширений такими вченими, як Т. И. Шейко, А. П. Слесаренко, Ю. Г. Стояном, Г. П. Манько, И. В. Гончарюком, Ф. Ф. Коваленко та ін., дозволяє отримувати та використовувати рівняння виду:

$$\omega\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0, x \in R^n \qquad (9)$$

для скільки завгодноскладних геометричних об’єктів, тобото вирішувати обернену задачу аналітичної геометрії. У наш час апарат теорії R-функцій застосовується у таких додатках, як краєві задачі математичної фізики, розпізнанні образів та ін. [20, 25, 27]

Для отримання R-функції $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ використовуються так звані R-операції, які є геометричним аналогом логічних операцій кон’юнкції, диз’юнкції та заперечення. R-операції кон’юнкції відповідають перетину геометричних об’єктів, диз’юнкція – об’єднанню, а заперечення – інверсії. R-операції кон’юнкції, диз’юнкціїї та заперечення з індексом 0 мають вігляд:

$$\begin{aligned} f_1 \cap f_2 &= f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \\ f_1 \cup f_2 &= f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \\ \overline{f_1} &= -f_1 \end{aligned} \qquad (10)$$

Для складних геометричних об’єктів результуюча R-функції $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ буде достатньо складною, її отримання у аналітичному вигляді – задача, яка вимагає значної кількості ресурсів для обрахування та великої кількості часу. Але навіть після отримання ω в аналітичному вигляді, вирішення задачі візуалізації такої складної функції потребує виконання великої кількості розрахунків. [23, 25, 27, 28]

У роботі [21] були показані переваги безсіткового методу розв’язання граничних задач математичної фізики з використанням базисних функцій спеціального виду у вирішенні двомірних нестаціонарних теплових полів. У роботі було розглянуто нелінійні математичні моделі. В основі цих моделей лежать нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними. Для них ще не розробленно закінченної теорії і загальних методів розв’язання задачі.

Хоча для деяких нелінійних задач вдається знайти точні аналітичні розв’язки, аналізуючи властивості яких, можно виявити якісно нові нелінійні ефекти в процесі, що досліджується [2, 5, 30]

Для реалізації безсіткового алгоритму рішення крайової задачі розрахункова область покривається сіткою вузлів []. Для складних областей (наприклад, канонічних, тобто складених не з паралелепіпедів) перевага віддається нерегулярним сіткам. Серед нерегулярних сіток виділяють структуровані сітки (наприклад, нерегулярні чотирикутні сітки, які успадковують властивості стандартних прямокутних сіток), і неструктуровані сітки, коли шаблон різницевої схеми не зберігає структуру (тобто коли не можна типологічно зв'язати розрахункову сітку з регулярною прямокутної сіткою). В останньому випадку розрахункова схема реалізується в кожній точці. Така сітка зручна при розгляді безсіткових підходів.

Алгоритми безсіточної схеми вирішення крайової змішаної задачі теплопровідності:



Задача теплопровідності стає нелінійною, якщо будь-який елемент математичної моделі стає нелінійним. Таким чином, квазілінійні параболічні рівняння другого порядку лежать в основі математичних моделей

різноманітних явищ і процесів в механіці, біології, технології та інших галузях.

Нелінійності можуть змінювати не тільки кількісний характер теплових процесій, а й якісну картину їх перебігу. Вони ускладнюють математичні моделі теплових процесів, тому потрібні складніші підходи до пошуку рішень задач.

У цій роботі було показано перспективність таких методів, що підтверджується при розв'язанні завдань, які є традиційно складними в разі застосування методів сіток. Практичні дослідження показують, що методи сіток важко застосовувати у ситуаціях, коли об'єкти, що розглядаються в задачах, представляють з себе набір дискретних фізичних об'єктів.

Математична постановка задачі про розповсюдження тепла у перерізі сталевої заготовки при нагріванні включає диференціальне рівняння теплопровідності виглядала таким чином:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (11)$$

де ρ – залежність питомої теплоємності від температури, c – залежність щільності від температури, k – коефіцієнт зміни теплопровідності.

З початковими умовами $u(0,x,y) = \varphi(x,y),\ (x,y) \in (\Omega + \partial\Omega) = \overline{\Omega}$, граничні умови представленні в загальному вигляді: $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g(x,y,t)|_{\partial\Omega}$.

У роботі [21] розглядалась задача, математична модель якої включає нелінійність у початковій умові:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = 10 \\ u(0,x) = sin(x) \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \qquad (12)$$

де фізичні параметри дорівнюють одиниці; розрахункове значення щільності розподілення координатних точок області $h = 0.01$, а значення

інтервалу часового шагу $\tau = 0.01c$.

Робоча область представлена на Рис. 1.

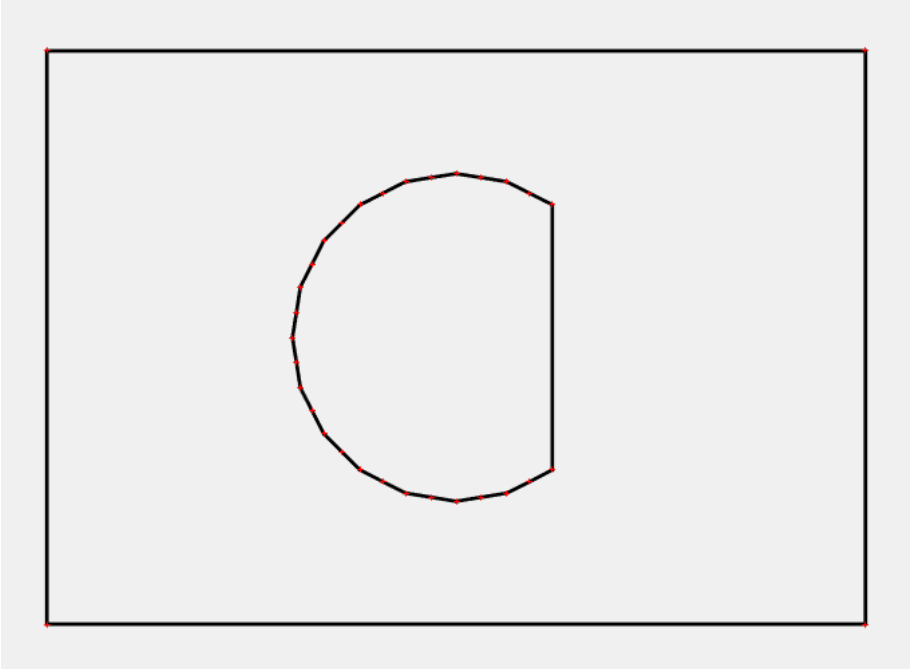


Рис. 1

На Рис. 2 представлено візуалізаційне рішення задачі на початку часу.

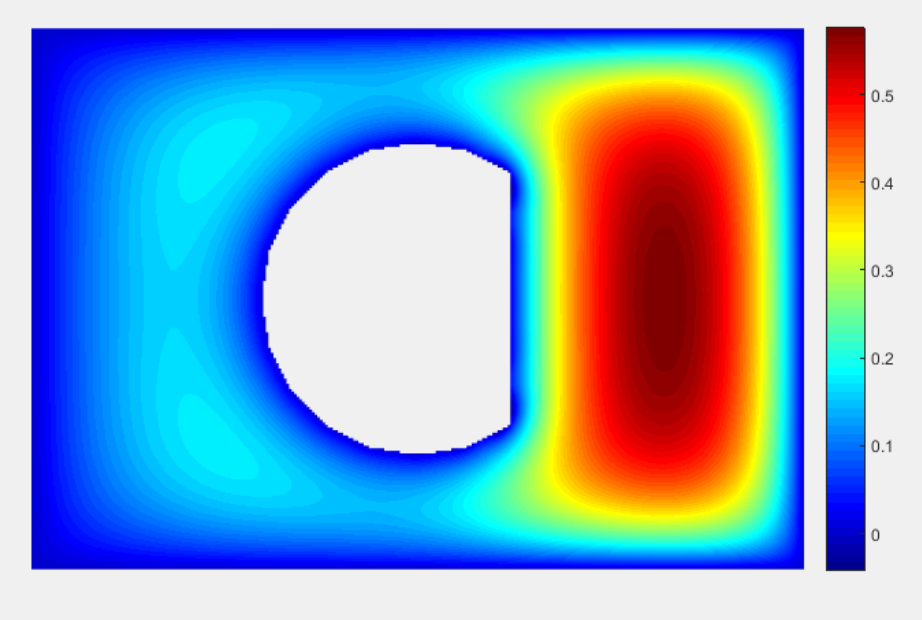


Рис. 2.

У ході проведення обчислювального експерименту було виявлено, що

збільшення щільності розподілення координатних точок області приводить до зменьшення обчислювальної похибки. Використання різних функцій у якості базисних демонструє значно кращій результат за умов використання атомарних радіальних базисних функцій.

Також у цій роботі розглядалися й інші приклади подібних задач, але з іншими робочими областями та іншими початковими та граничними умовами. Наприклад, для задачі з граничними умовами вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = 5 \\ u(0,x) = exp(x) \\ u\big|_{\partial\Omega} = exp(-x) \end{cases} \qquad (13)$$

З використанням тих самих розрахункових значень щільності розподілення координатних точок області , значення інтервалу часового шагу та тієї ж самої області з Рис.1 давало аналогічну картину розподілення обчислювальних похибок за умов використання різних базисів.

Відмітимо, що значення похибок за умов використання атомарних радільних базисних функцій дає стабільніший результат.

Далі математичну модель дещо ускладнили і отримали інші результати.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = 5 \\ u(0,x) = exp(x) \\ u\big|_{\partial\Omega} = exp(-x) \end{cases} \qquad (14)$$

Робоча область представлена на Рис. 1.3.

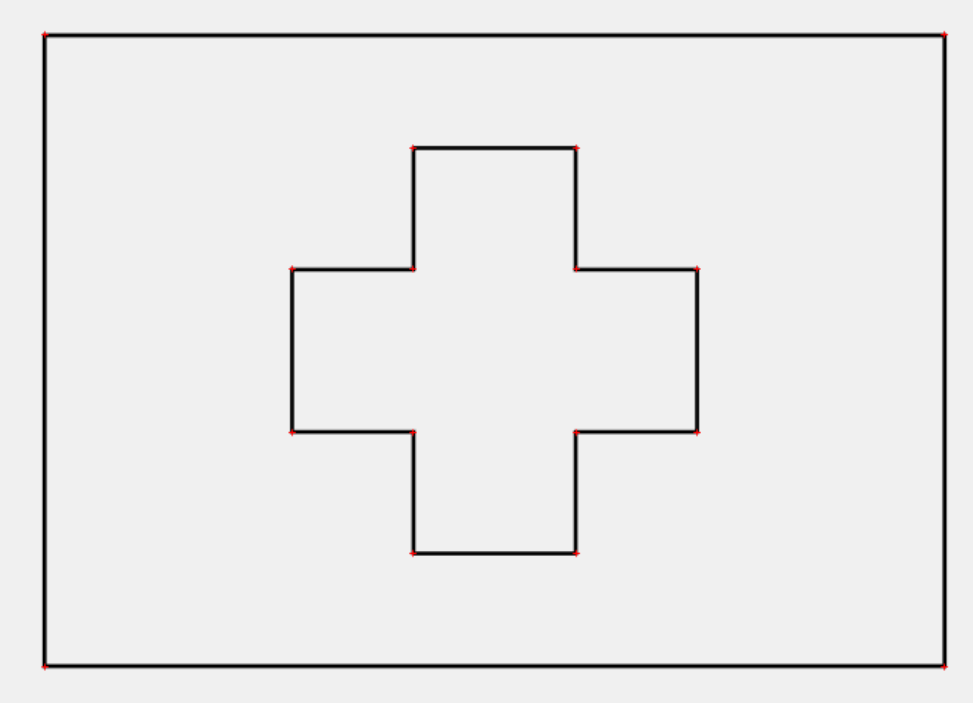


Рис. 3.

На Рис. 4 представлено візуалізаційне рішення задачі на початку часу.

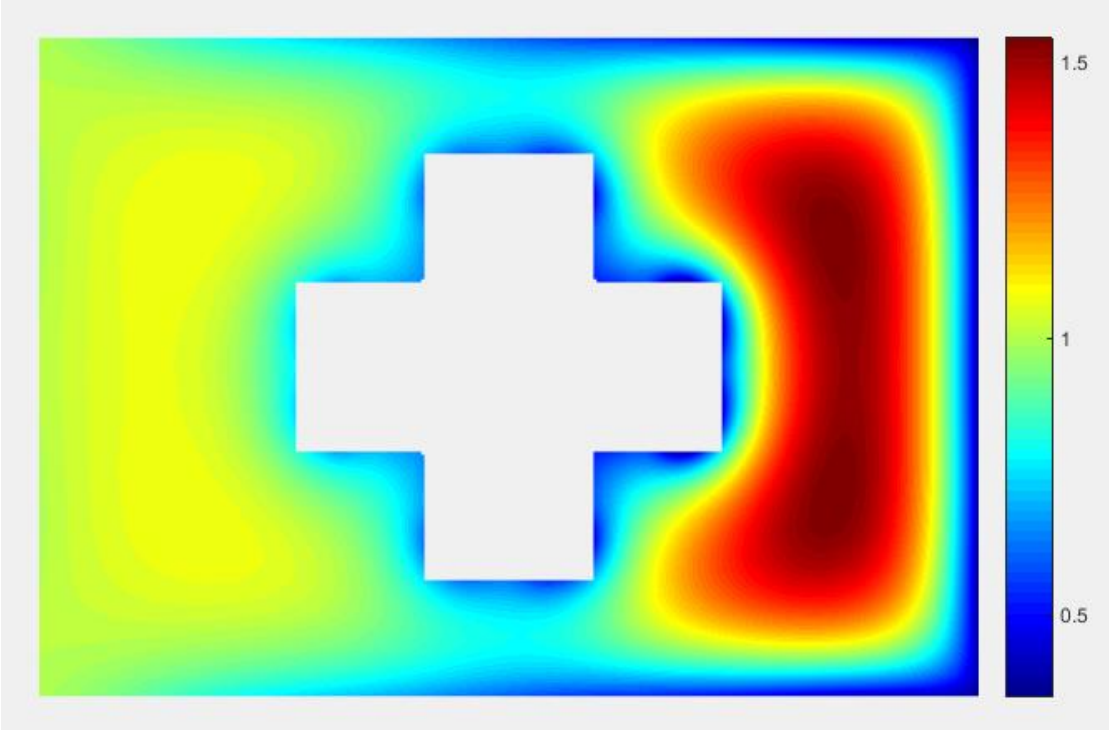


Рис. 4

Були зроблені висновки, що вказані фактори не змінюють кардинально результат розрахунків.

Нев’язки, які були отримані у ході розв’язання першої та другої задач, представленні у табл. 1 та табл. 2.

Таблиця 1

Щільність розподілення координатних точок області	Гауса	Мульти-квадратична	Обернена квадратична	Обернена мульти-квадратична	АРБФ
0,05	0.072407	0.064585	0.042332	0.050702	8.4384e-7
0,045	0.10089	0.12795	0.10305	0.11145	9.9091e-7
0,04	0.071373	0.05351	0.037319	0.041451	9.7188e-7
0,035	0.083787	0.077494	0.060373	0.065207	9.3244e-7
0,03	0.06483	0.057662	0.04085	0.047911	9.896e-7
0,025	0.1308	0.096469	0.086753	0.088321	9.6091e-7
0,02	0.073289	0.064678	0.047721	0.050832	9.9988e-7

Таблиця 2

Щільність розподілення координатних точок області	Гауса	Мульти-квадратична	Обернена квадратична	Обернена мульти-квадратична	АРБФ
0,05	0.016698	0.01665	0.0134158	0.015535	9.4674e-7
0,045	0.019543	0.019414	0.017197	0.018055	9.4803e-7
0,04	0.023552	0.023543	0.021549	0.02209	9.9559e-7

0,035	0.019961	0.01992	0.018307	0.019039	9.3273e-7
0,03	0.014902	0.014749	0.013634	0.013956	9.9686e-7
0,025	0.021811	0.021849	0.020858	0.021105	9.9673e-7
0,02	0.020926	0.02093	0.019998	0.020142	9.8244e-7

У статті [21] досліджені особливості реалізації безсіткового методу розв’язання двовимірних крайових змішаних задач теплопровідності з зовнішньою нелінійністю, розв’язано двовимірні крайові змішані задачі теплопровідності в багатозв'язних областях з використанням безсіткового методу та АРБФ. Також було виконано порівняльний аналіз використання РБФ і АРБФ при реалізації процедури пошуку розв’язку двовимірної мішаної задачі теплопровідності. Встановлено джерела формування похибки при реалізації безсіткового методу на основі використання АРБФ при розв’язанні крайових задач теплопровідності.

Представлені в роботі [21] безсіткові схеми розв’язання крайових задач теплопровідності: дозволяють розширювати можливості обчислювальних методів при дослідженні теплових процесів у складних машинобудівних конструкціях; спрощують процедуру розв’язання просторових задач теплопровідності для багатозв’язних областей; формують основу для дослідження теплових процесів у нелінійному середовищі.

РОЗДІЛ 3.

РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Атомарні радіальні базисні функції є розв'язками функціонально-диференціальних рівнянь, які формуються за допомогою диференціальних операторів Гельмгольця та Клейна-Гордона.

Взагалі, рівняння Гельмгольця відіграє велику роль у математичній фізиці, завдяки проблемах теплопровідності, дифузії, хвильового процесу та інше.

Саме це й було штовхчком для того, щоб визначити необхідним дослідження побудови такої атомарної функції, яка породжується диференціальним оператором $\triangle + c^2$ рівняння Гельмгольця.

Для побудови шуканої фінітної функції, яка формує спеціальний клас атомарних функцій, що породжувалися за допомогою оператора Лапласа, є спеціальна схема.

У загальному випадку досліджується функціональне рівняння

$$Lu(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{N} \oint_{\partial\Omega_k} H_k(x_1, x_2) u\left[(ax_1 - \xi_1), (ax_2 - \xi_2)\right] ds + \sum_{l=1}^{M} u(ax_1 - \alpha_1, ax_2 - \beta_2) \quad (15)$$

Де $L = \triangle + c^2$ – оператор рівняння Гельмгольця, $L = \triangle - c^2$ - оператор рівняння Клейна-Гордона, $\triangle = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial / \partial x_2^2$ - оператор Лапласа, $\partial\Omega_k$ - Замкнутий контур/

Взагалі вирішення вписаного функціонального рівняння представленні теоремами у роботі [18].

Замкнутий контур представлений колом одиничного радіусу . Він має єдиний з компактним носієм нескінченно диференційований розв'язок, який нормовано умовою

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2)dx_1dx_2 = 1 \qquad (16)$$

Носій розв'язку рівняння має форму кола, який вписується у квадрат. Розв'язок рівняння зображується в квадраті рядом Фур'є.

Коефіцієнти Фур'є мають наступний вид:

$$\begin{aligned} a_{00} &= \frac{4}{9} \\ a_{q0} &= \frac{2}{3}U\left(\frac{2q\pi}{3}, 0\right) \\ a_{0r} &= \frac{2}{3}U\left(0, \frac{2r\pi}{3}\right) \\ a_{qr} &= U\left(\frac{2q\pi}{3}, \frac{2r\pi}{3}\right) \\ q, r &= 1, 2, \ldots \end{aligned} \qquad (17)$$

Із теорем, що представлено у роботі [18], видно, що атомарні функції, в яких реалізовані спеціальні оптимальні схеми обчислення, можуть легко обчислюватися, хоча існують й інші оптимальні алгоритми обчислення.

Ці функції з локальними носіями, що породжуються диференціальними операторами, дозволяють розробити нові ефективні розв'язування крайових задач за допомогою атомарних функцій.

Якщо теплофізичні властивості середовища залишаються сталими (область дослідження ізотропна), а коефіцієнти диференційного рівняння не залежать від температури.

Нестаціонарна теплопровідність має вигляд:

$$L\left[u(t,x)\right] = \rho c\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - k\triangle u(t,x) = f(t,x), 0 < t \le T < \infty, x \in \Omega$$

$$u(0,x) = g(x), x \in (\Omega + \partial\Omega) = \overline{\Omega} \qquad (18)$$

$$B\left[u(t,x)\right]|_{\partial\Omega} = \alpha\varphi(t,x) + \beta\upsilon(t,x) = g(t,x), x \in \partial\Omega, t > 0$$

Розв'язок задачі виконується за допомогою безсіткової схеми. Вихідне диференціальне рівняння треба звести до диференціально-різницевого. Це можна зробити за допомогою дискретизації задачі, що виконується методом прямих. Стандартне рівняння перетворюється в систему неоднорідних модифікованих рівнянь Гельмнольця.

Спочатку у розрахунковій області треба ввести сітк $\Omega_{h\tau} = \overline{\omega}_{x_m} \times \overline{\omega}_t, m = 1,2,3$, яка складається з наступних компонент:

$\overline{\omega}_{x_m} = \left\{ x_m : x_{m,i_m} = i_m h_m, i_m = 0,1,...,N_m, h_m = 1/N_m \right\}$;

$\overline{\omega}_t = \left\{ t : t_j = j\tau, j = 0,1,...,N_t, \tau = T/N_t \right\}$.

Для переходу до диференціально-різницевого рівняння використовують метод прямих [19]. Його суть полягає у тому, що дискретизація вихідного рівняння проводиться тільки для фіксованої кількості змінних. У результати розв'язок даного рівняння в частинних похідних зводиться до розв'язку систем більш простіших диференціальних рівнянь. Вперше ця методика була застосована для розв'язку задачі теплопровідності в роботі Ронкина Л. І. 1977 року.

$$\frac{1}{\alpha}\frac{u^k - u^{k-1}}{\triangle t} = \theta\left(\triangle u^k + \frac{1}{k} f^k\right) + (1-\theta)\left(\triangle u^{k-1} + \frac{1}{k} f^{k-1}\right) \qquad (19)$$

де $\alpha = k/\rho c$.

Після деяких перетворень отримують послідовність диференціально-різницевих рівнянь Гельмгольця:

$$\triangle u^k - \frac{1}{\theta\alpha\triangle t} u^k = \triangle u^{k-1} - \frac{1}{\theta\alpha\triangle t} u^{k-1} - \frac{\triangle u^{k-1}}{\theta} - \frac{1-\theta}{\theta k} f^{k-1}. \qquad (20)$$

В процесі реалізації здійснюється пошук проекції точного розв'язку з нескінченновимірного простору точних розв'язків на скінченне апроксимуючий простір наближених розв'язків. Розв'язок, який шукається, повинен будуватися у вигляді лінійних комбінацій базисних функцій.

Далі треба вирішувати операторне рівняння. Далі задається послідовність підпросторів (U_n) і (F_n) , а також лінійні проекційні оператори P_n, які проектують F_n на F .

$$\begin{aligned} P_n Lu &\equiv P_n(\triangle u - \lambda^2 u) - P_n f \\ Lu_n &\equiv \triangle u_n - \lambda^2 u_n = f_n \end{aligned} \tag{21}$$

Ідея методу колокації було описано у роботах Л. В. Канторовича [19], R. A. Frazer, W. P. Jones, S. W. Scan [36]. Потім цей метод почали використовувати до широкого класу крайових задач [34, 35].

Потім знаходимо вихідні коефіцієнти, з умови, коли відхил обертається в нуль:

$$\triangle u(x_m) - \lambda^2 u(x_m) - f(x_m) = 0, i = 1,2,...,n \tag{22}$$

де x_m - координата вузлів сітки, які накладені на область.

Метод колокацій дуже нескладний своїй числовій реалізації. Сама цим він і привертає увагу до себе.

Розв'язок задачі теплопровідності, представляється у вигляді лінійної комбінації базисних функцій $Horp(x_1, x_2, x_3)$:

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j Horp_j(x) \tag{23}$$

Функція u_n, задовольняє вихідному диференціальному рівнянню.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j (\triangle Horp(r_j) - \lambda^2 Horp(r_j)) = s_n^k(x), \qquad (24)$$

Тепер лише залишається забезпечити виконання крайових умов. Граничні умови представляють у загальному вигляді:

$$B\left[\sum_{z=n+1}^{m} \left\langle a_z Horp(r_z) + b_z \frac{\partial Horp(r_z)}{\partial n} \right\rangle \right] = g_n(x). \qquad (25)$$

Щоб знайти невідомі коефіцієнти, треба, щоб задовольнялись деякі умови:

- Задоволення крайовим умовам;
- Задоволення диференціальному рівнянню крайової задачі.

Використання функцій з компактним носієм призводить до розрідження структури матриці A [18]. Це дозволяє використовувати спеціальні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Вони можуть полегшити процес пошуку невідомих коефіцієнтів з мінімальною витратою комп'ютерних ресурсів.

Метод подвійного взаємообміну в поєднанні з методом фундаментальних розв'язків та методом частинних розв'язків є одним із можливих варіантів розв'язування тривимірної крайової нестаціонарної задачі.

Крайова задача має вигляд:

$$L\left[u(t,x)\right] = \rho c \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - k \triangle u(t,x) = f(t,x), 0 < t \le T < \infty, x \in \Omega$$

$$u(0,x) = g(x), x \in (\Omega + \partial\Omega) = \overline{\Omega}$$

$$B\left[u(t,x)\right]|_{\partial\Omega} = \alpha\varphi(t,x) + \beta\upsilon(t,x) = g(t,x), x \in \partial\Omega, t > 0$$

B – оператор граничних умов.

Розв'язок цієї задачі за допомогою методу прямих зводиться до розв'язку неоднорідних диференціально-різницевих рівнянь Гельмнольця. Пошук розв'язку рівняння здійснюється за допомогою методу частинних розв'язків. При цьому використовується метод фундаментальних розв'язків для того, щоб розв'язати однорідне рівняння та метод подвійного взаємообміну з використанням атомарних радіальних базисних функцій для отримання частинного розв'язку.

Керуюче рівняння для частинного розв'язку представляють у вигляді:

$$\triangle u_p^k - \frac{1}{\theta\alpha\triangle t} u_p^k = \triangle u_p^{k-1} - \frac{1}{\theta\alpha\triangle t} u_p^{k-1} - \frac{\triangle u_p^{k-1}}{\theta} - \frac{1}{k} f^k - \frac{1-\theta}{\theta k} f^{k-1}. \qquad (26)$$

Пошук частинного розв'язку u_p^k проводиться не залежачи від граничних умов поставленої задачі.

Позначимо $s^k = \triangle u_p^k - \frac{1}{\theta\alpha\triangle t} u_p^k = \triangle u_p^{k-1} - \frac{1}{\theta\alpha\triangle t} u_p^{k-1} - \frac{\triangle u_p^{k-1}}{\theta} - \frac{1}{k} f^k - \frac{1-\theta}{\theta k} f^{k-1}.$

Функція s^k представлена у вигляді лінійної комбінації

$$s^k(\vec{x}) \simeq \hat{s}^k(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i^k \Psi_i(\vec{x}) \qquad (27)$$

$$\Psi_j(x) = \Delta Horp_j(x) - \lambda^2 Horp_j(x). \qquad (28)$$

Після знаходження коефіцієнтів α_i^k, частинний розв'язок, який шукається, представляємо у вигляді лінійної комбінації.

Керуюча система має вигляд:

$$\begin{aligned} &\Delta u_h^k(x) - \frac{1}{\theta\alpha\Delta t} u_p^k(x) = 0; \\ &B\left[u_h^k(x)\right] = B\left[u(x)\right] - B\left[u_p^k(x)\right], x \in \partial\Omega \end{aligned} \qquad (29)$$

Розв’язок задачі можна знаходити різними методами. Наприклад, методом граничних елементів, методом Треффтца, методом фундаментальних рішень тощо [37, 38].

Методу фундаментальних рішень притаманна спектральна збіжність, а у поєднанні з методом подвійного заміщення отримується повністю безсітковий метод.

Ще однією важливою річчю є розміщення фіктивної границі. Є два підходи: статичний та динамічний. У статичному множина точок обирається попередньо за відповідною схемою. У двомірних задачах фіктивна границя представляє собою коло. У тривимірному випадку фіктивна границя – це сфера з центром, що збігається з геометричним центром області.

Основною перевагою методу фундаментальних рішень та методу частинних розв’язків є відсутність необхідності в дискретизації області розв’язування задачі та її границі. Також ці методи мають переваги в характеристиках спектральної збіжності.

Недоліки методу фундаментальних рішень та методу частинних розв’язків є щільно заповнена матриця лінійних рівнянь в МФР, а також погана обумовленість матриці.

Існує можливість вирішити задачу або з малою похибкою, але з малою стійкістю, або стійким алгоритмом, але з великою похибкою. Цей принцип невизначенності було встановлено в роботі.

У ході виконання роботи було вирішено задачі за допомогою безсіткового методу та з використанням атомарних радіальних базисних функцій. Фіктивна область представлена у виді сфери з радіусом R. Дані задачі приведено далі.

Постановка задачі 1

$$r \bullet grad(u) + q \bullet u = g; g = f(x, y, z, t)$$

$$r = 0$$

$$q = 1$$

$$g = 0$$

Початкові умови:

$$f(x, y, z) = 0$$

Внутрішнє джерело тепла:

$$f(x, y, z, t) = 2$$

Робоча область мала вигляд Рис. 5.

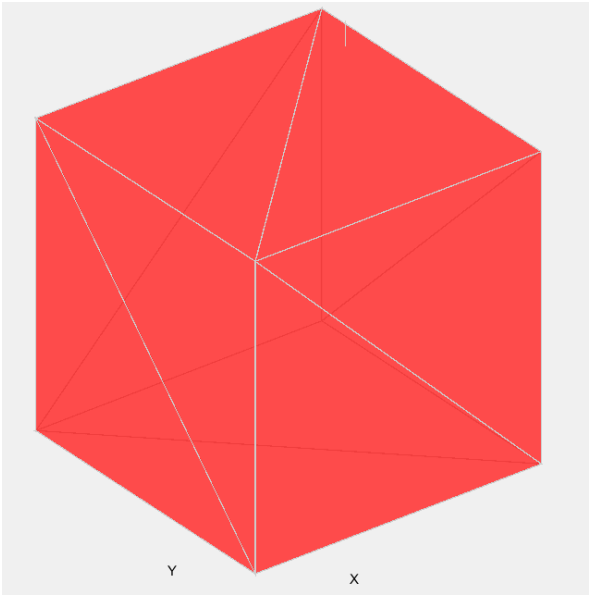


Рис. 5

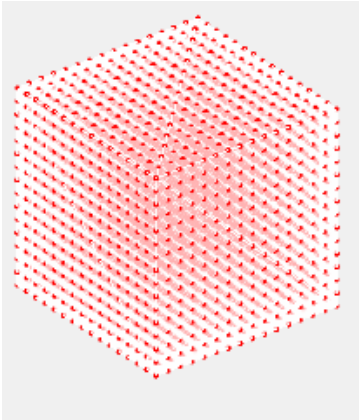


Рис. 6. Геометрія внутрішнього джерела

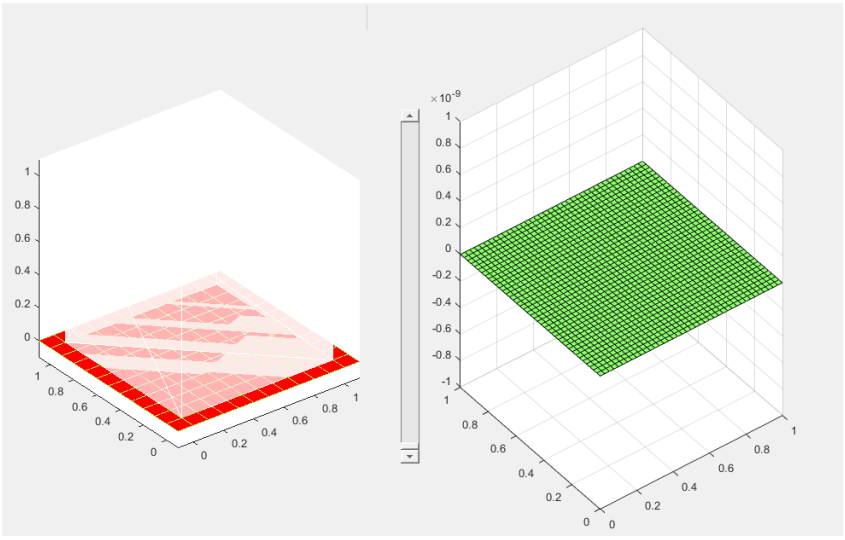


Рис. 6. Стан тіла на першому кроці

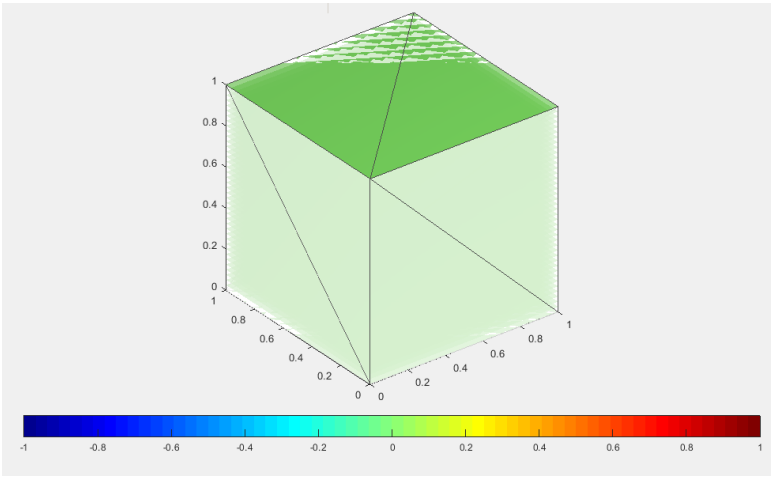


Рис. 7. Стан тіла на першому кроці.

На Рис. 8, Рис. 9 та Рис. 10 представлен розв’язок задачі.

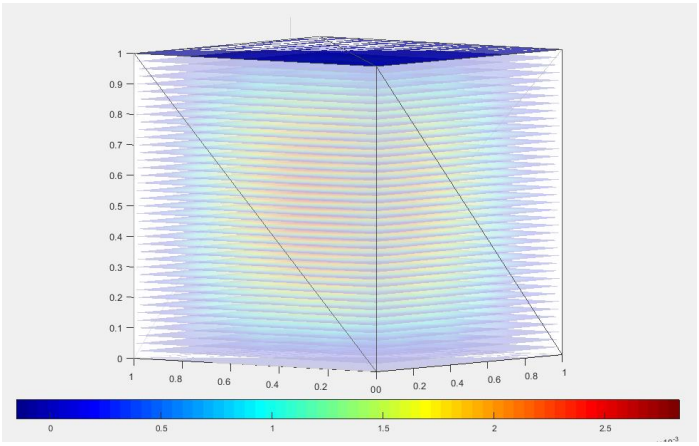


Рис. 8.

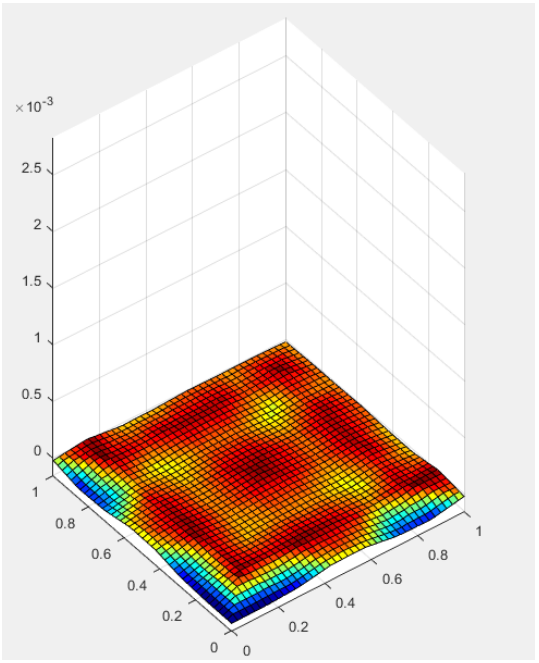


Рис. 9.

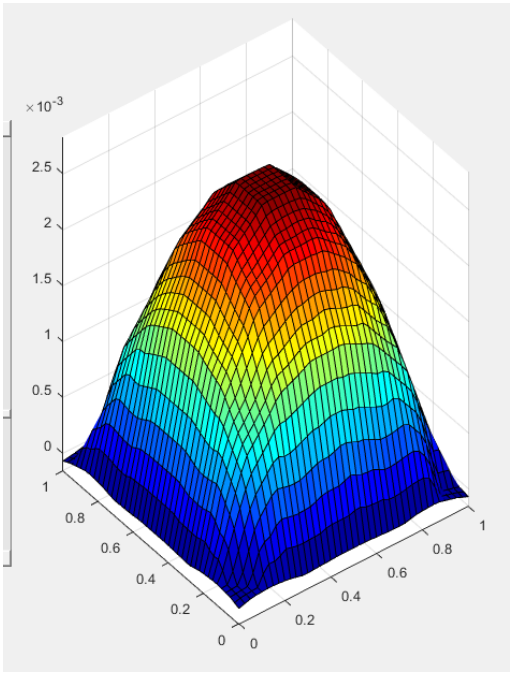


Рис.10.

За основу базисних функцій було обрано Гаусіан. У ході експерименту було отримано нев’язки, які представлені у Таблиці 1.

Таблиця 1

Щільність розподілення координатних точок області	Гауса
0,03	1.7188e-7
0,035	1.3244e-7
0,04	1.896e-7

Постановка задачі 2

$$r \bullet grad(u) + q \bullet u = g; g = f(x, y, z, t)$$

$$r = 1$$

$$q = 0$$

$$g = 0$$

Початкові умови

$$f(x, y, z) = 0$$

Внутрішнє джерело тепла

$$f(x, y, z, t) = 1$$

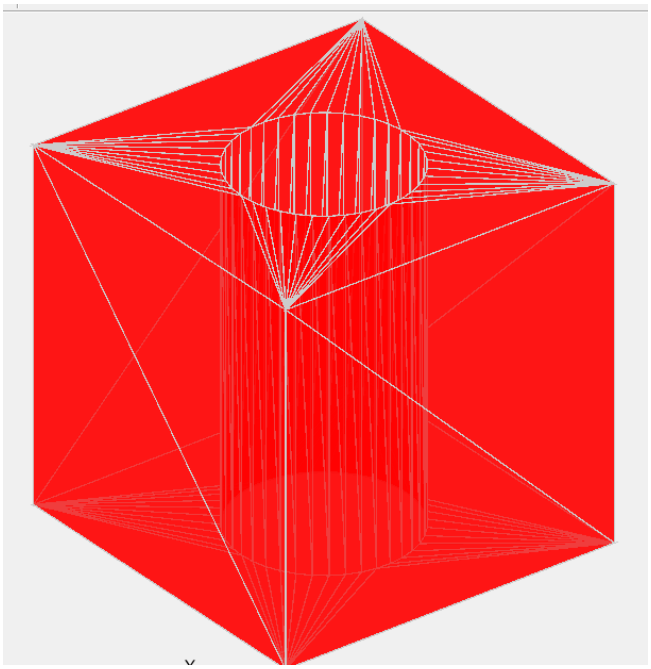


Рис. 11. Робоча область.

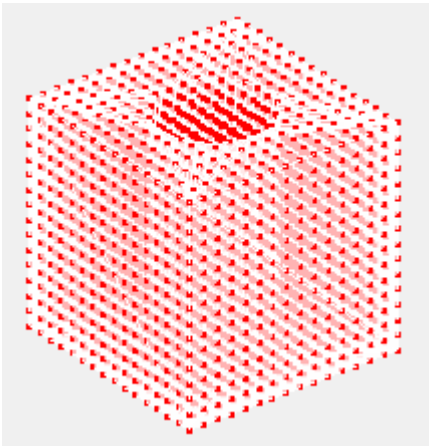


Рис. 12. Геометрія внутрішнього джерела

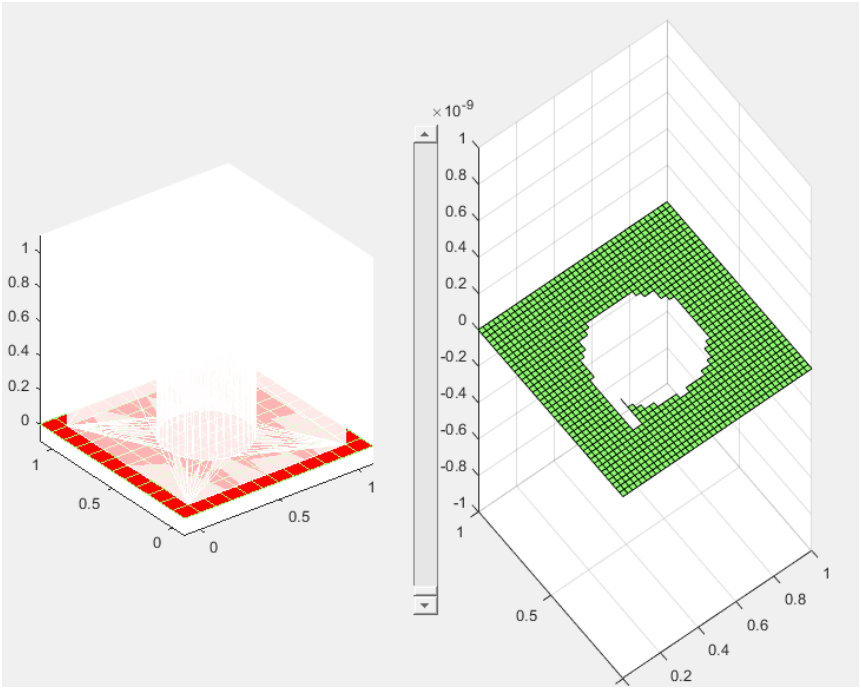


Рис. 13. На початку експерименту.

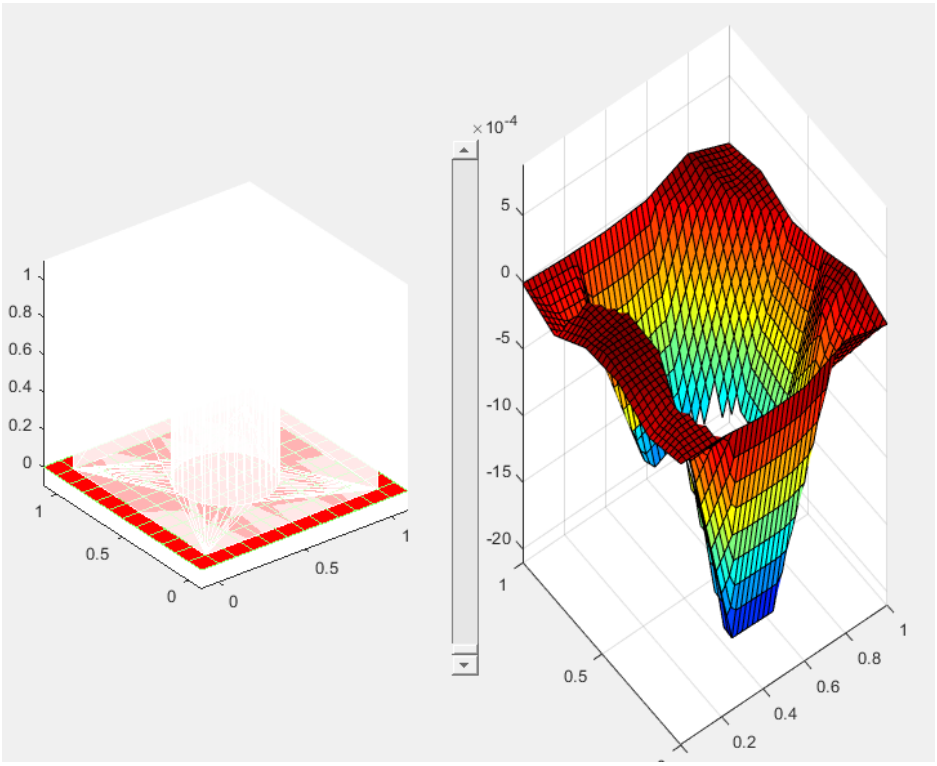


Рис. 14. Рішення задачі.

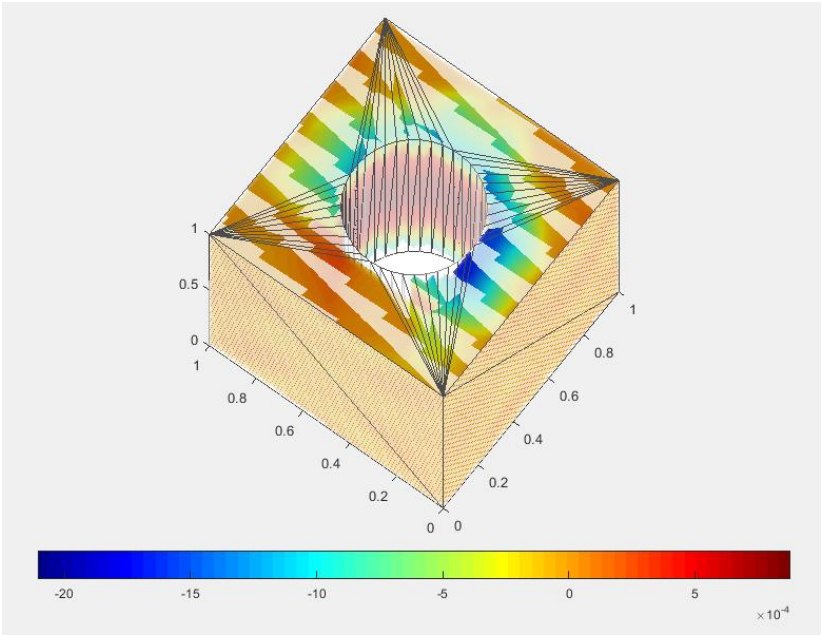


Рис. 15. Рішення задачі (ізоплоскість).

За основу базисних функцій було обрано Гаусіан. У ході експерименту було отримано нев’язки, які представлені у Таблиці 2.

Таблиця 2

Щільність розподілення координатних точок області	Гауса
0,03	2.5965e-7
0,035	2.7325e-7
0,04	2.9325e-7

Постановка задачі 3

$$r \bullet grad(u) + q \bullet u = g; g = f(x, y, z, t)$$

$$r = 0$$

$$q = 1$$

$$g = 0$$

Початкові умови

$$f(x, y, z) = 0$$

Внутрішнє джерело тепла

$$f(x, y, z, t) = 1$$

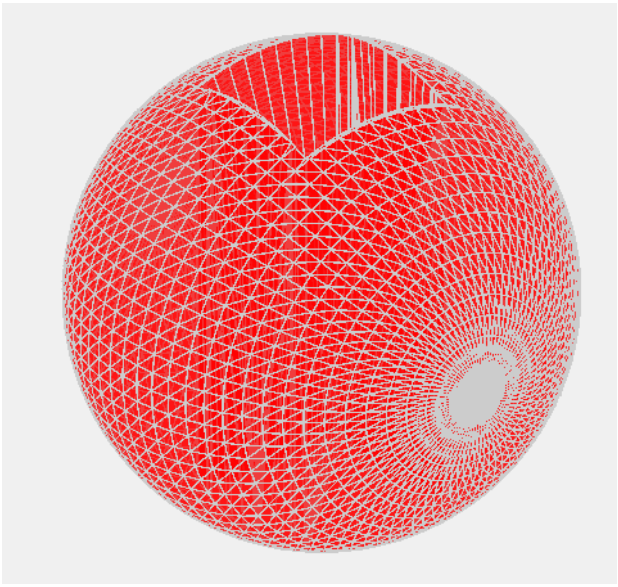


Рис. 16. Робоча область.

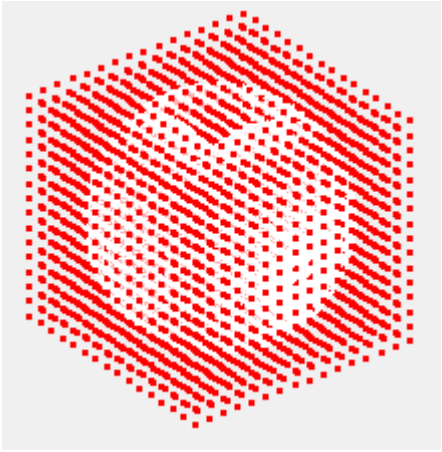


Рис. 17. Внутрішнє джерело.

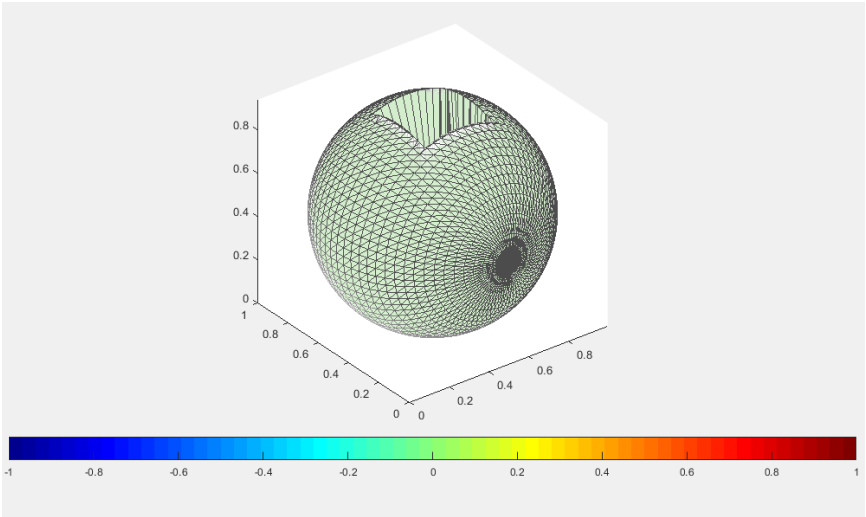


Рис. 18. Тіло на початку у ізоплоскості.

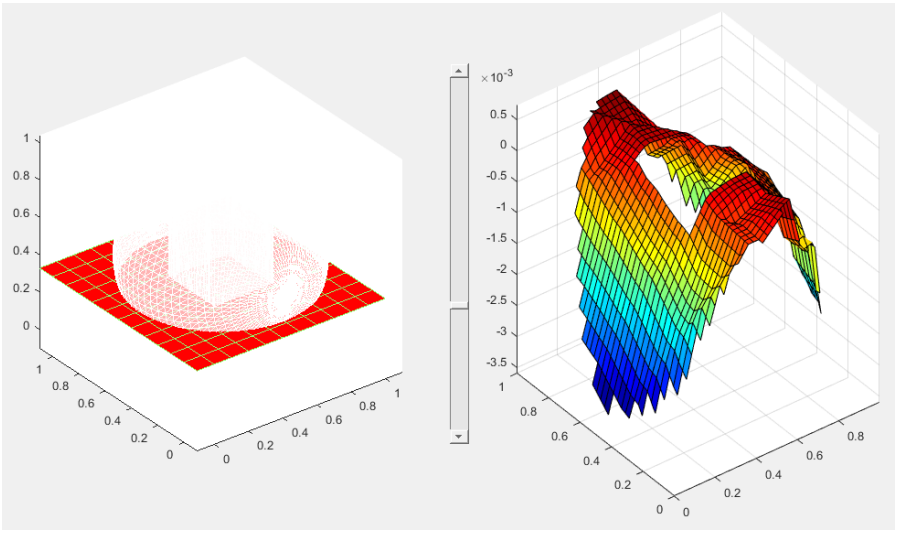


Рис. 19. Рішення задачі.

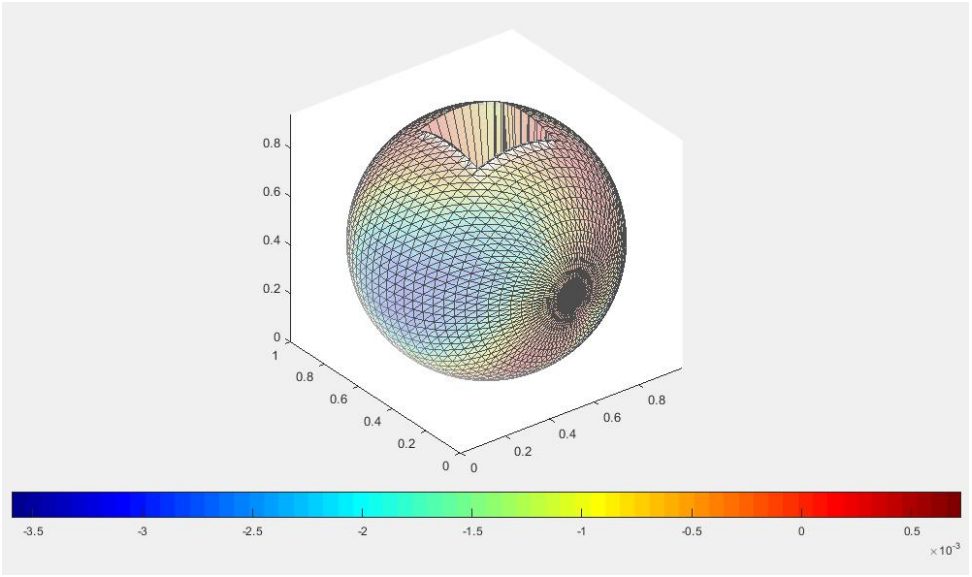


Рис. 20. Рішення представлене в ізоплоскість.

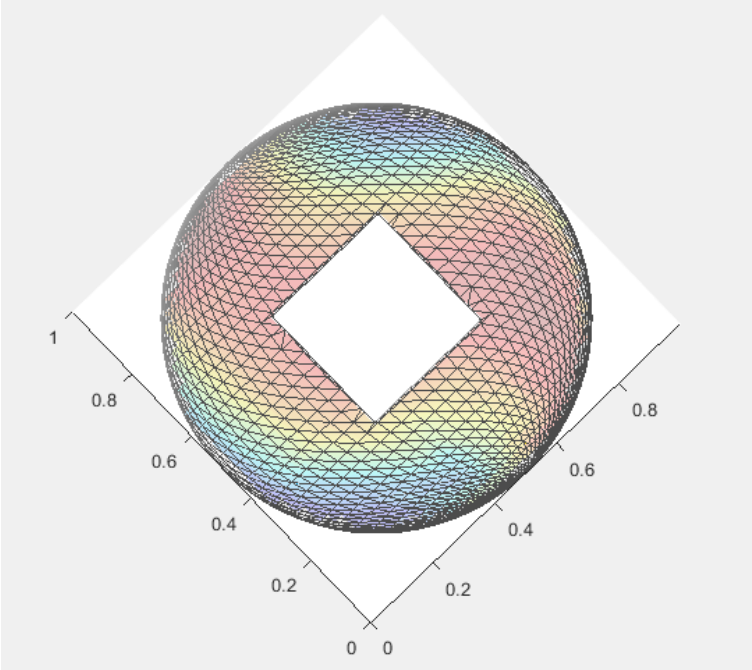


Рис. 21. Рішення представлене в ізоплоскість.

За основу базисних функцій було обрано Метод найменших квадратів (МНК). У ході експерименту було отримано нев’язки, які представлені у Таблиці 3.

Таблиця 3

Щільність розподілення координатних точок області	МНК
0,03	2.7188e-10
0,035	2.3244e-10
0,04	2.896e-10

Постановка задачі 4

$$r \bullet grad(u) + q \bullet u = g; g = f(x, y, z, t)$$

$$r = 1$$

$$q = 0$$

$$g = 0$$

Початкові умови

$$f(x, y, z) = 0$$

Внутрішнє джерело тепла

$$f(x, y, z, t) = 2$$

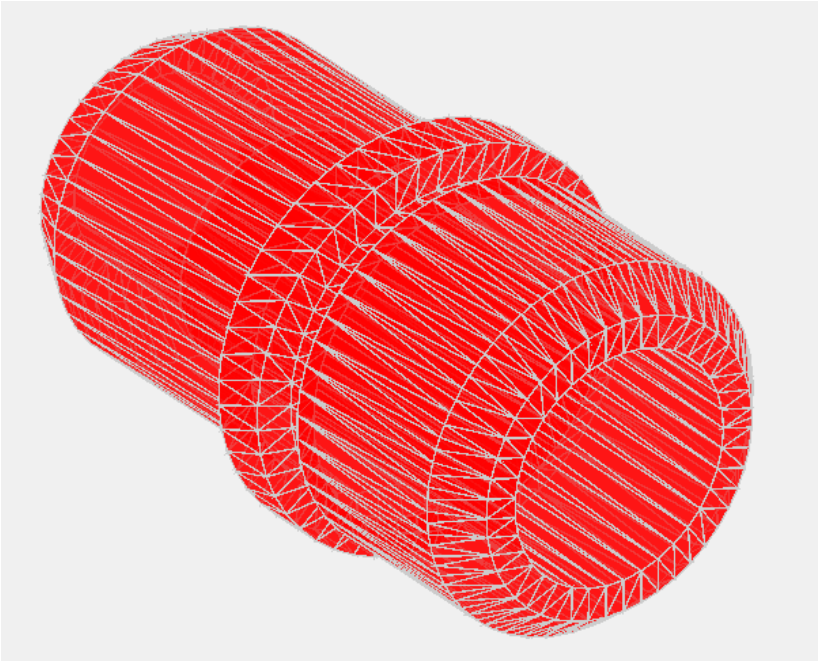


Рис. 22. Робоча область.

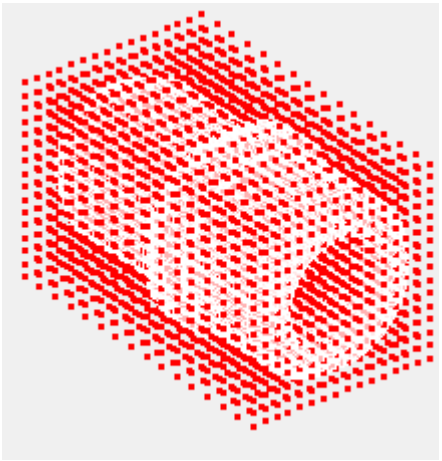


Рис. 23. Внутрішнє джерело.

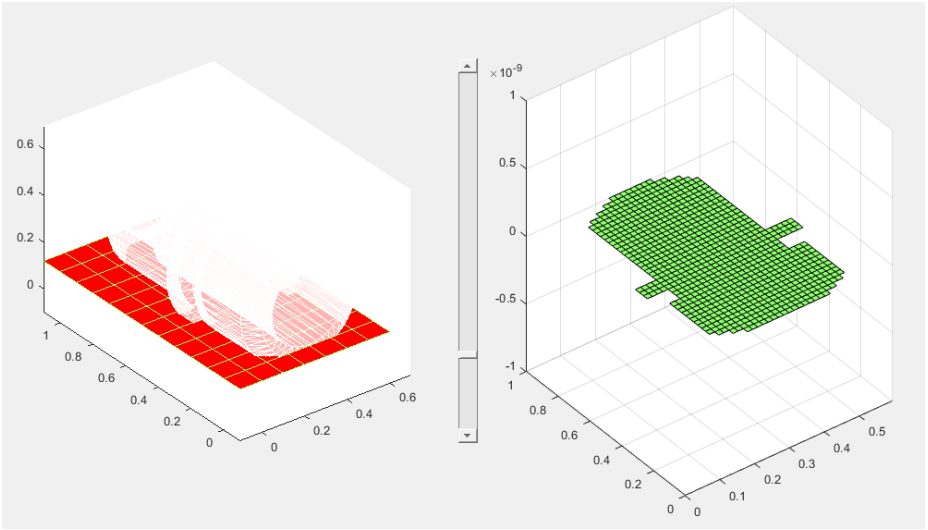


Рис. 24. Рішення на нульовому кроці.

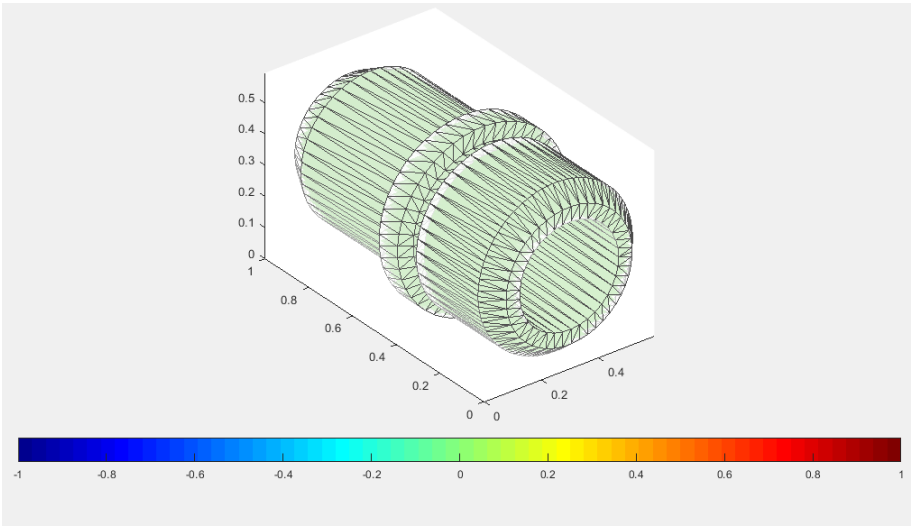


Рис. 25. Рішення на нульовому кроці в ізоплоскостях.

На Рис. 26, Рис. 27 та Рис. 28 можно побачити візуалізацію вирішення задачі.

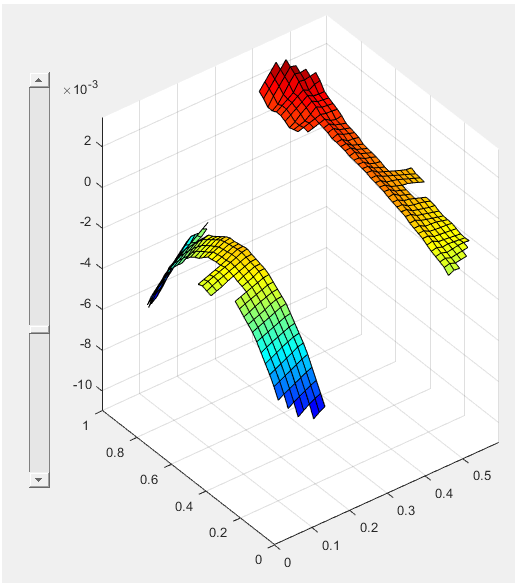


Рис. 26.

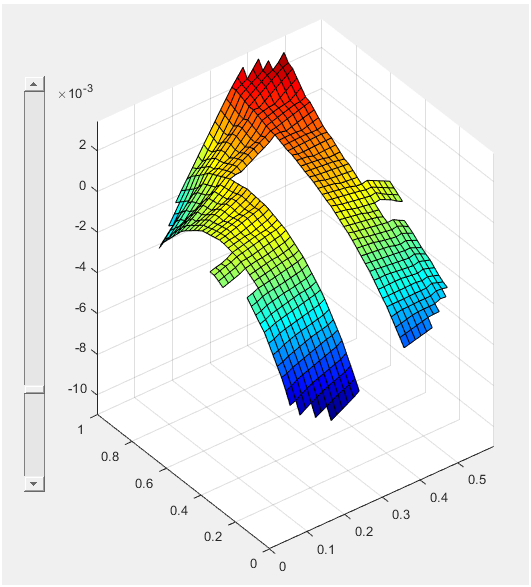


Рис. 27.

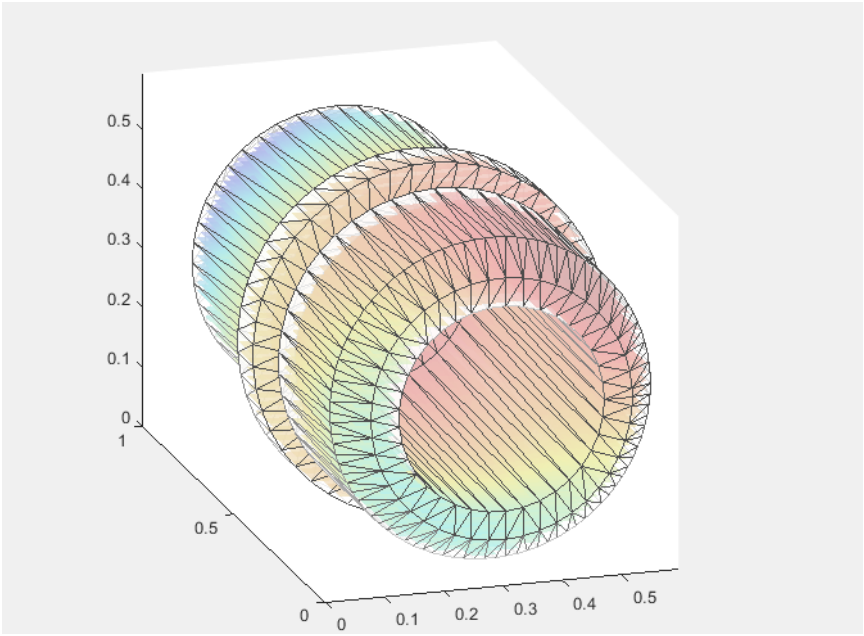


Рис. 28.

За основу базисних функцій було обрано метод Гауса та Метод найменших квадратів (МНК). У ході експерименту було отримано нев’язки, які представлені у Таблиці 4.

Таблиця 4

Щільність розподілення координатних точок області	Гауса	МНК
0,03	2.7188e-7	4.2646e-16
0,035	2.6244e-7	4.6349e-16
0,04	2.692e-7	4.8321e-16

Постановка задачі 5

$$r \bullet grad(u) + q \bullet u = g; g = f(x, y, z, t)$$

$$r = 0$$

$$q = 1$$

$$g = 0$$

Початкові умови

$$f(x, y, z) = 0$$

Внутрішнє джерело тепла

$$f(x, y, z, t) = 1$$

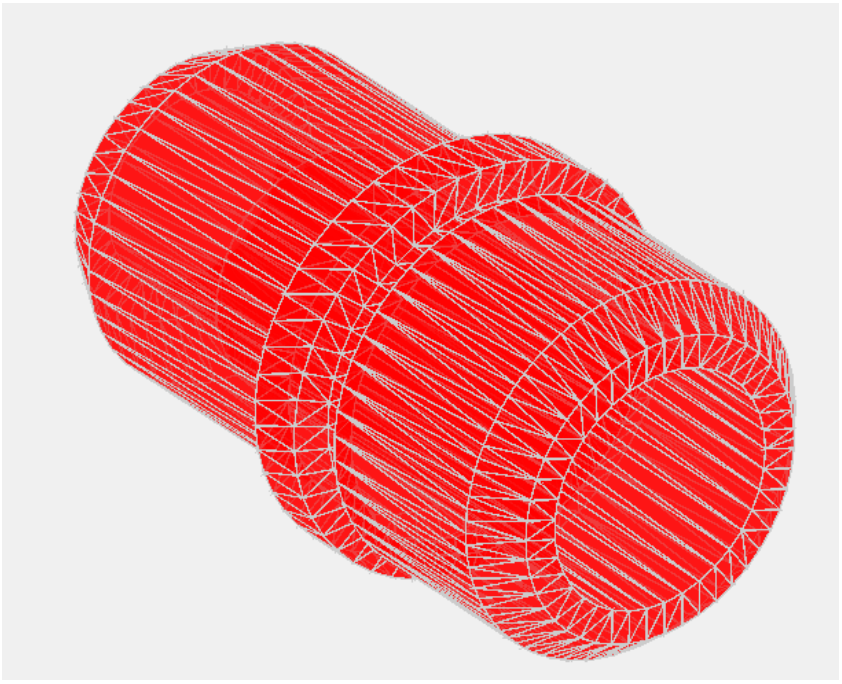


Рис. 29. Робоча область.

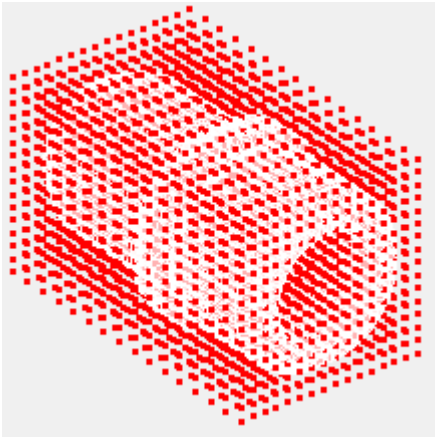


Рис. 30. Внутрішенє джерело.

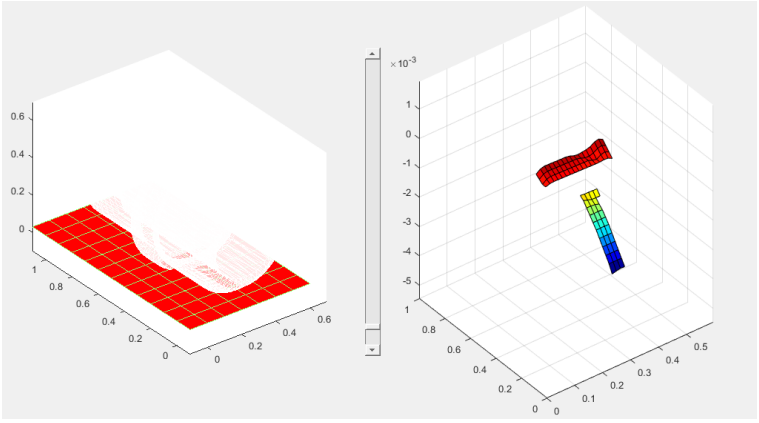


Рис. 31. Візуалізація вирішення задачі.

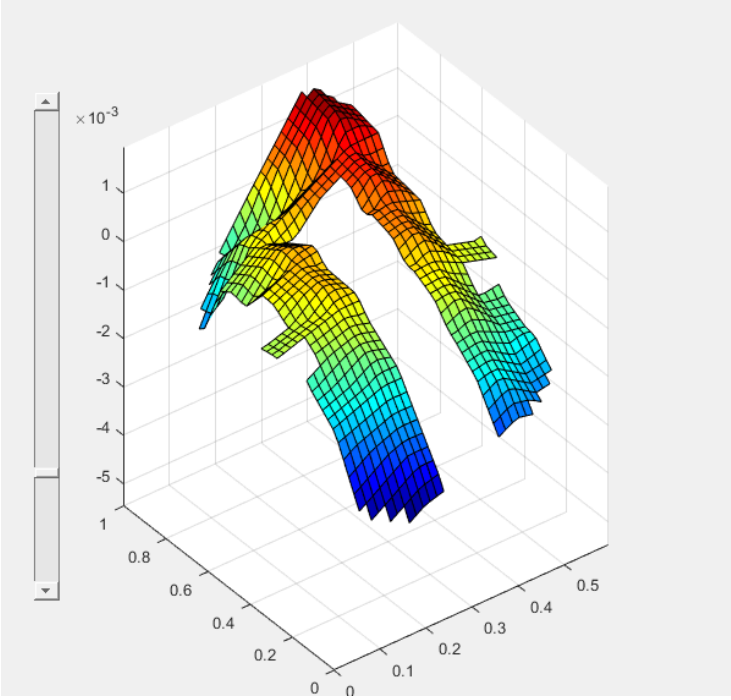


Рис. 32. Візуалізація вирішення задачі.

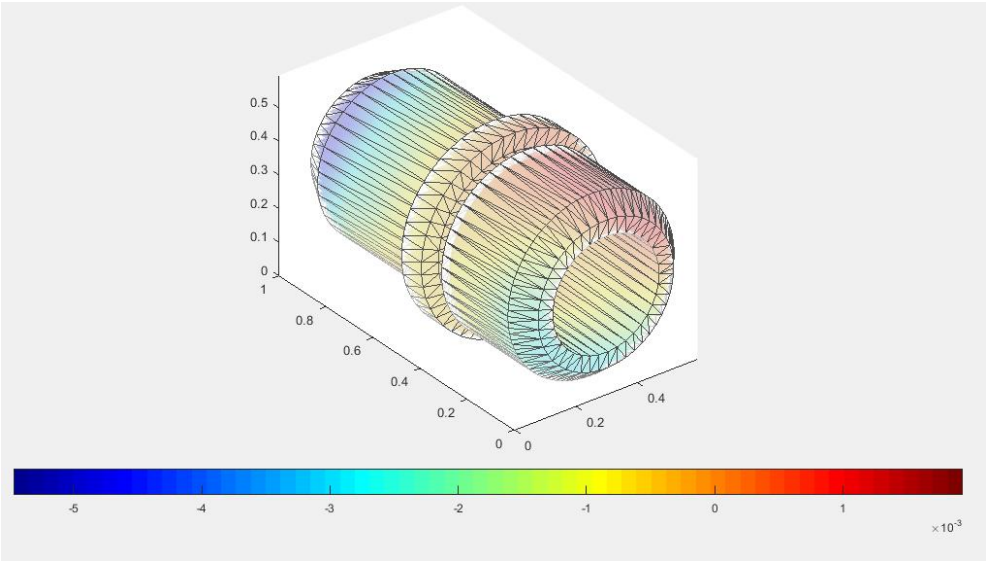


Рис. 33. Вирішення задачі, представлене у ізоплоскостях.

За основу базисних функцій було обрано метод Гауса та Метод найменших квадратів (МНК). У ході експерименту було отримано нев’язки, які представлені у Таблиці 5.

Таблиця 5

Щільність розподілення координатних точок області	Гауса	МНК
0,03	3.9242e-7	7.2747e-10
0,035	3.3544e-7	6.6199e-10
0,04	3.8965e-7	5.9685e-10

ВИСНОВОК

Було досліджено особливості реалізації безсіткового методу вирішення тривимірних крайових змішаних задач теплопровідності, вирішено тривимірні крайові змішані задачі теплопровідності в багатозв'язних областях з використанням безсіткового методу і АРБФ. Також було виконано порівняльний аналіз використання різних методів при реалізації процедури пошуку рішення тривимірної мішаної задачі теплопровідності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Агошков И.Н. Методы решения задач математической физики. Учебное пособие для студентов, Специализирующихся в области вычислительной математики. 2002 г. 320 с.

2. Блесман А. И., Постников Д. В., Полонянкин Д. А., Рогачев Е. А., Ткаченко Э. А. Влияние температурного поля на срок службы изделий цилиндрической симметрии с защитными покрытиями.

3. Гавриленко С. Л., Шилько С. В., Решение квазилинейного уравнения теплопроводности с учетом температурных зависимостей плотности, теплоемкости и теплопроводности, 2007, 164 с.

4. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984

5. Геренштейн А. В., Хайрисламов М. З. Явная схема *решения* третьей смешанной *задачи* для *квазилинейного уравнения теплопроводности* 2013.

6. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. — М.: Мир, 1986

7. Колодяжний В.М. Атомарні функції, що гармонічні в кільцевій області / В.М. Колодяжний, В.О. Рвачов// Вісник Київського університету. Серія «Математика, механіка». – 2004. – № 11-12. – С. 110-114.

8. Колодяжний В.М. Деякі властивості атомарних функцій багатьох змінних / В.М. Колодяжний, В.О. Рвачов // Доповіді НАН України. – 2005. – № 1 – С. 12–20.

9. Колодяжний В.М. Застосування систем комп′ютерної математики при викладанні практичних та теоретичних основ курсів прикладної математики /В.М. Колодяжний, О.Ю.Лісіна //Матеріали Науково-методичної конференції «Принципи інтеграції кредитно-модульної та

мультимедійних технологій навчання в умовах входження вищої школи України в європейський освітній простір», Харьков: ХНАДУ. – 2008. – С. 123-124.

10. Колодяжний В.М. Фінітні розв′язки функціонально–диференціальних рівнянь з частинними похідними / В.М. Колодяжний, В.О. Рвачов // Доповіді НАН України. – 2004. – № 5 – С. 17–22.
11. Колодяжний В.М. Фінітні функції, що породжені оператором Лапласа / В.М. Колодяжний, В.О. Рвачов // Доповіді НАН України. – 2004. – № 4 – С. 17–22.
12. Колодяжний В.М. Щодо утворення сімейств атомарних радіальних базисних функцій / В.М.Колодяжний, О.Ю.Лісіна // Доповіді НАН України. № 8. – 2011. – С. 16-22.
13. Колодяжный В.М. Атомарные функции. Обобщения на случай многих переменных и перспективные направления практических приложений / В. М. Колодяжный, В. А. Рвачев // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – 43, N 6. – С. 155–177.
14. Колодяжный В.М. Бессеточные методы в задачах моделирования физических процессов /В. М. Колодяжный, О. Ю. Лисина //Проблемы машиностроения. – 2010, Т. 13, № 3.– С.67-74.
15. Колодяжный В.М. К построении структур решений краевых задач / Колодяжный В.М., Рвачев В.А. // Дифференциальные уравнения, т. 13, № 4, 1977. – С. 646-653.
16. Колодяжный В.М. Математическое моделирование физических процессов в сложных областях с помощью атомарных функций: дис. … д-ра физ.-мат. Наук: 01.05.02 / Колодяжный Владимир Максимович. – Харьков, 2008. – 362 с.
17. Колодяжный В.М. Численные схемы решения краевых задач на основе бессеточных методов с использованием РБФ и АРБФ /В.М.Колодяжный, О.Ю.Лисина // Проблемы машиностроения.– Т. 13, № 4.– 2010. – С.49-56.

18. Колодяжний В. М., Лісіна О. Ю., Селищев В. С. Атомарні функції в задачах математичного моделювання. Харків ХНАДУ, 2017. – с. 80-88, 307-315.
19. Кантарович Л. В. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных / Л. В. Кантарович // Докл. АН СССР, № 8-9, 1934. – С.532-536.
20. Кондратьева Л. Е. Основы метода конечных элементов – Владимир, 2007.
21. Лісіна О. Ю., Васильчук Т. С. Моделювання режимів з нелінійностями при дослідженні теплових полів безсітковими методами. /О. Ю. Лісіна, Т. С. Васильчук// Вісник Херсонського національного технічного університету . - 2018. - № 3(2). - С. 254-259.
22. Лісіна О. Ю., Васильчук Т. С. Моделювання режимів із загостренням при дослідженні теплового поля безсітковими методами // Синергетика, мехатроніка, телематика дорожніх машин і систем у навчальному процесі та науці. Збірник наукових праць за матеріалами II Міжнародної науково-практичної конференції. Харків. – 2018, с. 50-52.
23. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов, обладающих симметрией / К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко // Кибернетика и системный анализ. – 2008.
24. Максименко-Шейко К. В. R-функции в аналитическом проектировании с применением системы «РАНОК» / К. В. Максименко-Шейко, А. В. Толок, Т. И. Шейко - Вестник МГТУ Станкин, 2010
25. Максименко-Шейко К. В. R-функции и обратная задача аналитической геометрии в трехмерном пространстве / К. В.

Максименко-Шейко, А. М. Мацевитый, А. В. Таток… - Информационные технологии, 2007

26. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей / К. В. Максименко-Шейко ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.

27. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. Издательство: МГТУ им. Н.Э. Баумана. Москва 2002 г. 368с.

28. Рвачев В. Л. Теория R-функции и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.

29. С. Де Лилло, Д. Лупо, М. Соммакал, Решения нелинейной задачи теплопроводности на полупрямой, ТМФ,2007г.

30. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — Москва: Наука, 1978. — 592 с.

31. Тимошпольский В.И. Математическое моделирование нелинейных процессов нагрева (противоточный теплообмен) в металлургии и машиностроении / В.И. Тимошпольский, Ю.С. Постольник, П.Э. Ратников, О.А. Кондрашова // ИФЖ. – 2008. – Т. 81. – № 1. – С. 108-116.

32. Хайрисламов М. З. Численные решения квазилинейного уравнения теплопроводности в задаче нагревания цилиндра двужущимся теплоисточником, 2015.

33. Щеглов А. Ю. О монотонности решения смешанной задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом, Ж. вычисл. матем. и матем. Физ., 1996, том 36, номер 6, 86–94.

34. Breitkopf P. Double grid diffuse collocation method /P. Br kopf, G. Touzot, P Villon //Comp. Mech., Ne 25, 2/3, 2000- P. 199-206

35. Fasshauer G.E. Solving Partial Differential Equations by Collocation with Radial Basis Functions appearcd in Surface Fitting and Multiresolution Methods. A. Le Mehaufe, C. Rabut, and L. L. Schumaker (edh) Vanderbilt University Press. -1997, P. 131-138

36. Frazer R.A. Approximations to functions and to the solutions of differential equations/W.P. Jones, S.W. Scan/ London: Philosophical Mag., 7-25, 1937.- P. 740-746.

37. Hon Y.C. On unsymmetric collocation by radial basis functions/ Y.C.Hon, R.Schaback // Appl. Math. and Comp. N 119. 2001. - P. 177-186.

38. Ingher M.S. A mesh free approach using radial basis functions and parallel domain decomposition for solving free-dimensional diffusion equations/M.S. Ingher, C.S. Chen, J.A. Tanski // Intern. J. Numer. Math. IN Eng, e 60, 2004. - P. 2183-2201.