МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАУКОВО-НАВЧАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ

Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем бакалавр

«Перетворення Радона без сингулярності для пучка з точковим фокусом»

Виконав: студент 4 курсу, групи НФ-43
Лапітан К.Є.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Прикладна фізика енергетичних систем
Керівник :
д. ф.-м. н., професор Нємченко К.Е.

Рецензент:

Харків – 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра інформаційних технологій у фізико-енергетичних системах
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) бакалавр
Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Руслан СУХОВ
підпис
"____"_____2021 року

ЗАВДАННЯ

НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ

Лапітан Костянтин Євгенович

1.Тема роботи « Перетворення Радона без сингулярності для пучка з точковим фокусом», керівник роботи: Нємченко К.Е. доктор фізико-математичних наук, професор, затверджені наказом по університету від 29 грудня 2020 року № 0210–05/2127.

2. Строк подання студентом роботи 21.05.2021

3. Перелік питань, які потрібно розробити:

Дослідити існуюче використання комп'ютерної томографії та томосинтезу у медицині та техніці. Виявити сучасні методи відновлення зображень і пов'язані з ними проблеми. Розглянути можливі засоби покращення якості зображень та розробити алгоритм для томографа з точковим фокусом. Написати програмне забезпечення на підставі розробленого алгоритму,

дослідити отримані результати та оцінити можливість практичного використання.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми.
2	Затвердження теми на кафедрі
3	Робота над літературою та іншими джерелами
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6	Написання третього розділу
7	Завершення написання дипломної роботи (висновки та література)
8	Подача науковому керівнику
9	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
10	Попередній захист
11	Захист

5.Дата видачі завдання

Студент _____ Костянтин ЛАПІТАН
підпис

Керівник роботи _____ Костянтин НЄМЧЕНКО
підпис

РЕФЕРАТ

Костянтин Лапітан «Перетворення Радона без сингулярності для пучка з точковим фокусом»

Кваліфікаційна робота бакалавра з прикладної фізики. – Х. Харківський національний університет імені В. Н.Каразіна, 2021. – 43 с.

У роботі проводиться дослідження існуючого використання комп’ютерної томографії та томосинтезу у медицині та техніці. Розглянуто сучасні методи відновлення зображень і пов’язані з ними проблеми. Запропоновано можливий засіб покращення якості зображень та розроблено необхідний алгоритм для томографа з точковим фокусом. Написано програмне забезпечення на підставі розробленого алгоритму та отримано результат, що можливо використовувати в реальних дослідженнях внутрішньої структури об’єктів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: КОМП’ЮТЕРНА ТОМОГРАФІЯ, ТОМОСИНТЕЗ, ПЕРЕТВОРЕННЯ РАДОНА, ВІДНОВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ

РЕФЕРАТ

Константин Лапитан « Преобразование Радона без сингулярности для пучка с точечным фокусом»

Квалификационная работа бакалавра по прикладной физике. – Х. Харьковский национальный университет имени В. Н.Каразіна, 2021. – 43 с.

В работе проводится исследование существующего использования компьютерной томографии и томосинтеза в медицине и технике. Рассмотрены современные методы восстановления изображений и связанные с ними проблемы. Предложено возможное средство улучшения качества изображений и разработан необходимый алгоритм для томографа с точечным фокусом. Написано программное обеспечение на основании разработанного алгоритма и получен результат, который возможно использовать в реальных исследованиях внутренней структуры объектов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: КОМПЬЮТЕРНАЯ ТОМОГРАФИЯ, ТОМОСИНТЕЗ, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА, ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

ABSTRACT

Konstantin Lapitan "Inverse Radon transform without singularity for rays with a point focus"

Qualification work of the bachelor of applied physics. – Kharkiv. – V.N. Karazin Kharkiv national university, 2021. – 43 p.

This work investigates the existing use of computed tomography and tomosynthesis in medicine and technology. Modern methods of image restoration and related problems are considered. A possible means of improving the quality of images is proposed and the necessary algorithm for a tomograph with a point focus is developed. The software was written on the basis of the developed algorithm and a result was obtained that can be used in real studies of the internal structure of objects.

KEY WORDS: COMPUTER TOMOGRAPHY, TOMOSYNTHESIS, RADON TRANSFORM, IMAGE RECOVERY

ЗМІСТ

ВСТУП 8
1. ОГЛЯД ОБЛАСТІ ДОСЛІДЖЕННЯ 10
1.1. Історія томографії 10
1.2. Математична основа томографії 13
1.2.1. Випадок паралельних променів 13
1.2.2. Випадок променів з точковим фокусом 15
1.3. Використання томографії та її види 18
1.3.1. Магнітно-резонансна томографія 18
1.3.2. Комп’ютерна томографія 19
1.3.3. Томосинтез 20
2. МЕТОДИ РЕКОНСТРУКЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ З ПРОЕКЦІЙ 23
2.1. Метод Фур’є синтезу 23
2.2. Метод зворотного проектування 26
2.2.1. Зворотне проектування у загальному вигляді 26
2.2.2. Зворотне проектування з одновимірною фільтрацією 30
3. АНАЛІЗ РОЗРОБЛЕНОГО ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ 34
3.1 Модель отримання проекційних даних 34
3.2 Реконструкція зображень 35

ВСТУП

Актуальність теми.

Необхідність реконструкції зображення по його проекціям багато раз випливала як засіб вивчення об’єкту у найрізноманітніших сферах науки, техніки та у медицині.

Проте найбільшу популярність і визнання отримала медична діагностика у вигляді томографії. Можливість зазирнути усередину людини без хірургічного втручання значно поліпшує процес вивчення роботи органів та складення діагнозу. Основу цього методу складає проникнення через об’єкт пучка променів під різними ракурсами та отримання на чутливій до цих променів поверхні тіньового зображення. Через те що тканини та кістки мають різну поглинаючу густину по таким проекціям можливо отримати доволі точне уявлення про наявність патологічних утворень або пошкоджень.

Незважаючи на всі переваги томографії вона має недоліки. Один з найсерйозніших це перевищення дози випромінювання для людини. Тому є декілька варіантів зниження навантажень на пацієнта, і один із них це використання методу томосинтезу замість комп’ютерної томографії. Томосинтез займає середнє положення по інформативності між комп’ютерною томографією та рентгенологією не значно перевищуючи дозу випромінювання останнього. А через це зараз по усьому світу ведуться роботи по покращенню методу томосинтезу аби розширити кількість захворювань які можливо діагностувати таким методом та роботи по підвищенню якості отриманих зображень.

Для досягнення поставленої мети визначені **задачі**:

Ознайомитися з методами ведення комп’ютерної томографії та малоракурсної лінійної томографії (томосинтезу). Визначити які існують засоби відновлення зображень на цей час. Розробити власну модель отримання томографічних проекцій для паралельного пучка та пучка з точковим фокусом.

Розробити необхідне програмне забезпечення та дослідити можливість

практичного використання розробленої моделі.

Об’єкт дослідження.

Використання перетворень Радону в явному вигляді для малоракурсної томографії.

Предмет дослідження.

Алгоритм відновлення зображень із сингулярною фільтрацією та без неї.

Методи дослідження.

Математична модель та програмне забезпечення яке дозволяє симулювати роботу реальних томографів.

Наукова новизна одержаних результатів.

Отримано наглядну різницю якості зображень комп’ютерної томографії, досліджено різні засоби відновлення зображень

Практичне значення отриманих результатів:

Результати роботи можливо застосовувати в діючих томографах для покращення дослідження структур малих розмірів та структур, що не сильно відрізняються за густиною.

Структура і обсяг роботи. Кваліфікаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи становить 43 сторінки, із них основного тексту 30 сторінок, 13 рисунків за текстом, список використаних джерел із 20 найменування на 3 сторінках.

1. ОГЛЯД ОБЛАСТІ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Історія томографії

На сьогодні візуалізація внутрішньої структури об’єктів гарно відома та розповсюджена до неї відносяться різноманітні методи кожен з котрих має свої переваги та місце застосування. Її використовують як задля відновлення зображень електронної мікроскопії бактеріофагів[1] так і для вивчення структури туманностей по даним рентгенограм з космічних ракет[2]. Деякі з них здатні генерувати тривимірні данні які надають перевагу у повноті інформації про внутрішній стан піддослідного зразку будь то структура кісток людини чи наявність мікротріщин у шарах металу. До таких методів відносяться магнітно-резонансна томографія та рентгенологія.[3]

Майже одразу із відкриттям рентгенівського випромінювання було зрозуміло усі його переваги задля діагностики захворювань людини. Таким чином було розроблено декілька різних методів рентгенографії і вони швидко розвивалися. До основних методів рентгенології належать рентгенографія, рентгеноскопія та флюорографія. Схема всіх цих досліджень схожа: пучок променів проходить крізь тіло пацієнта та потрапляє на чутливий до ретгенівского випромінювання датчик. У випадку рентгеноскопії промені потрапляють на флуоресцентний екран і формують на ньому тіньове зображення. Рентгенографія поділяється на два види: аналогову та цифрову. У першому випадку зображення формується на плівці, а у другому на спеціальних цифрових приладах. Так на початку 20-го сторіччя отримання знімку займало приблизно 1,5 години, що пояснюється низькою чутливістю плівки. Пізніше почали використовувати підсилюючі екрани між якими розміщували плівку задля підвищення контрасту зображень, а з появою достатньо розвиненого цифрового обладнання набула популярність флюорографія в якій замість використання дорогої плівки роблять фотографію з флуоресцентного екрану.

Проте стало швидко зрозуміло що двовимірні знімки не дають змогу в повній мірі оцінити стан пацієнта. Всі попередні методи давали лише цілісну

картину і не давали змоги оцінити стан структур всередині, тому подібні методи не виявляють або виявляють частково деякі негаразди, бо базуються на різній пропускній здібності тканин та кісток. Проекції тривимірних структур на площину перекривають органи які представляють зацікавленість у вивченні , що знижує діагностичну ефективність. Класична томографія була першою спробою подолати недоліки рентгенографії і була запропонована ще у 1914 році Каролем Маєром. Він використовував рух рентгенівської трубки та детектора паралельно нерухомого об’єкта на кут до 50 градусів, щоб підвищити різкість деталей які знаходяться близько до центру обертання. Такий метод розмиває вклад органів віще та нижче піддослідного шару, залишаючи нерухомими точки на рівні центру обертання, дозволяючи побачити що відбувається на певній глибині всередині тіла. Змінюючи вісь обертання можливо отримати перетин на заданій глибині, але даний метод отримує зображення лише одного шару і для отримання знімку на іншій глибині доведеться повторювати дослідження знову, що несе певні недоліки через повторне опромінення. Принципіальну схему класичної (лінійної) томографії зображено на Рис.1.1.

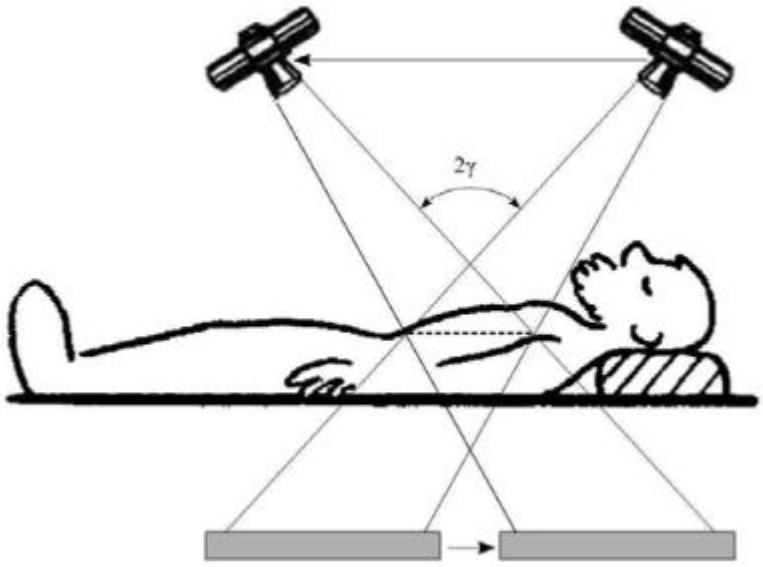


Рис. 1.1. Схема класичної томографії

Окрім нього у проміжку між 1920 та 1935 роками ще десять людей винайшли томографію кожен абсолютно не знаючи про розробки інших[4]. А коли дізналися про роботи одне одного, то почали змагатися за визнання першості. Це сприяло міжнародній обізнаності та швидшому розвитку методики томографії, хоча під час другої світової війни була відсутня співпраця та зв'язок. Так Андре Бокаж запатентував концепцію томографії у 1921 році. Він описав її як одночасне переміщення джерела рентгенівського випромінювання та детектора в синхронізованому русі. Хоча він ніколи не будував томографічного апарату, це зробив Бернард Зейдсес написавши роботу в докторській дисертації у 1934 році та в деяких роботах трохи раніше. Ще два французи Фелікс Портекс і Моріс Хаус запатентували томографію в 1921 році та продемонстрували креслення як це реалізувати. Також у 1934 році німець Густав Гроссман запатентував та побудував перше комерційне обладнання через свою компанію "Siemens-Reiniger-Veifa GmbH". Томограф запропонований Гроссманом став найбільш широко використовуваним обладнанням наприкінці 1930х років. Усі запропоновані або побудовані томографи не відрізнялися значно один від одного, хоча мали унікальні особливості що до швидкості руху та орбіт детектора та рентгенівської трубки. Апарат Вільяма Уотсона сконструйований у Великобританії в 1937 році став важливим винаходом, запатентувавши вдосконалену конструкцію осьової поперечної томографії.

Томографія швидко стала важливою та почала розвиватися. З часом з'явилося обладнання для дентальної томографії з криволінійним детектором, потім досить швидко з'явилась пошарова рентгеноскопія та багатоплощинна томографія. Для променевої терапії використовували томографи з горизонтальним розміщенням пацієнта. Проте, поява першого комп'ютерного томографа(КТ) відсунула усі інші методи томографії у тінь. Перше серійне обладнання КТ було розроблено та виготовлено у Англії компанією EMI Ltd. У відзнаку за це досягнення сер Годфрі Хаунсфілд та Алан Кормак, який продемонстрував математичні розрахунки для відновлення зображення у 1963,

отримали Нобелевську премію у 1979 році, хоча перші комп'ютерні томографи були розроблені навіть і раніше. Так А.Кормак сконструював лабораторний сканер ще у 1956 році, але тоді жодна компанія не зацікавилася розробкою. Медичний комп'ютерний томограф було сконструйовано у Києві в 1957 році. А в 1960 році Уїльям Ольдендорф продемонстрував експеримент в якому він рухав зразки, що оберталися між детектором та джерелом випромінювання. Багато ж інших працювали над математичною стороною реконструкції проекцій, і найперша модель 1917 року належить Радону

1.2. Математична основа томографії

1.2.1. Випадок паралельних променів

Ідея томографії укладена у пошуку математичного зведення проекцій об'єкту до функції густини від трьох змінних. Першим етапом зразок просвічують рентгенівськими променями та отримують тіньове зображення на детекторі, після чого змінюють кут нахилу детекторів та випромінювача і повторюють процедуру отримуючи кожен раз додаткову інформацію про стан внутрішньої структури. Коли отримують достатню кількість проекційних знімків, то можливо відновити внутрішню структуру об'єкту у тривимірному просторі. Схему отримання проекцій під різними кутами продемонстровано на Рис. 1.2.

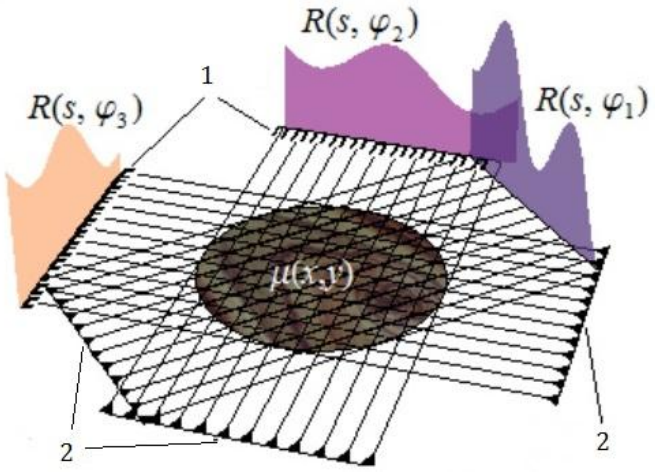


Рис.1.2. Схема отримання проекцій R(s,φ) одного шару (1 – детектори;

2 – джерела)

Під час дослідження випромінювач і датчики влаштовують таким чином, що реєструються данні тільки з променів, що знаходяться у площині зрізу і за один прохід рентгенівської трубки зазвичай отримують декілька перерізів об’єкту, в кожному з них густина f(x,y,z) представлена функцією двох змінних f(x,y) з фіксованою третьою і тому для відновлення тривимірного об’єкту розв’язують набір декількох двовимірних задач які потім зіставляють до повної структури, проте це стосується тільки випромінювача з набором паралельних променів, задля конусного напрямлення променів виходить дещо складніша задача. Такий метод отримання проекційних даних є основою реконструктивної томографії[5].

Хоча для отримання тіньових зображень жодні математичні дії не використовуються, вони мають доволі просту аналітичну інтерпретацію, що вперше зустрічається у роботі Йоганна Радона[6], який отримав формулу реконструкції багатовимірної функції за її інтегральними характеристиками. На Рис. 1.3. представлено переріз зразка та отримання проекційного зображення.

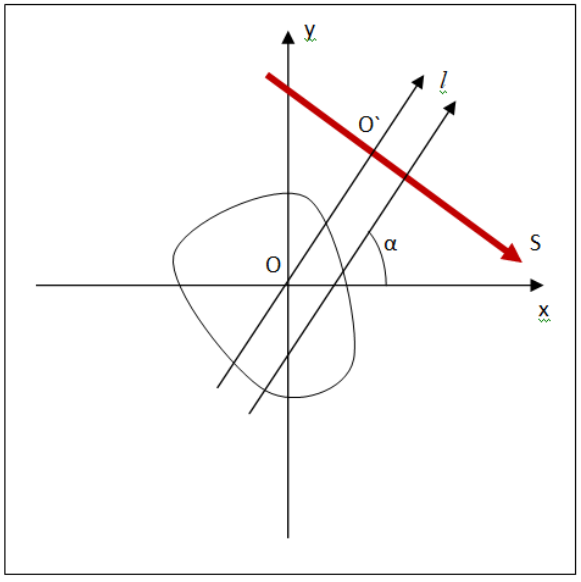


Рис.1.3. Отримання проекційних даних:

Де x,y – координати тіла в декартовій площині, S – координата детектору, l – напрямок проектування, α - кут нахилу нормалі до детектора.

Для отримання значення на детекторі S береться інтеграл вздовж напрямку проектування l.

$$R(s,\alpha) = \int f(x,y)dl \tag{1.1}$$

Як легко помітити з рис.1.3. зв'язок декартової системи координат та нахиленої системи детекторів пов'язані відношеннями:

$$\begin{cases} x = s\ \cos\alpha - \ l\sin\alpha \\ y = s\ \sin\alpha + \ l\ \cos\alpha \end{cases} \tag{1.2}$$

Використовуючи котрі можна отримати вираз для функції густини проекцій.

$$R(s,\alpha) = \int f(s\ \cos\alpha - \ l\sin\alpha\,, s\ \cos\alpha + \ l\ \sin\alpha)dl \tag{1.3}$$

Де кут нахилу α знаходиться в межах [0,pi], а координата детектору s обмежена розмірами тіла. Зміст цієї операції – це інтеграл від функції f(x,y) вздовж прямої l, що знаходиться на відстані s до початку координат. Дана інтегральна функція називається перетворення Радона для функції f(x,y), та основне досягнення Радона в тому,що він довів можливість відновлення первинної функції розподілу через інтеграл по всім прямим F(s,α).

1.2.2. Випадок променів з точковим фокусом

Паралельна геометрія розміщення детектора та випромінювача зазвичай використовується для теоретичних досліджень, хоча вона можлива для використання на практиці. Якщо трансформувати проекційні данні від інакших методів отримання проекційних даних, до паралельного виду, то час реконструкції зображення значно скорочується[7]. На відміну від паралельного проектування реальна томографія зазвичай використовує опромінення об'єкту із спільної фокальної точки. Принцип отримання проекційних даних такого методу не відрізняється від паралельного

проектування. Рентгенівські промені проходять крізь об’єкт та втрачають свою інтенсивність через поглинання. Після чого система детекторів повертається на кут α і все повторюється знову. На відміну від паралельного проектування за для повного дослідження об’єкту таким методом кут α знаходиться в межах [0,2*pi] Схема такого дослідження наведено на Рис.1.4

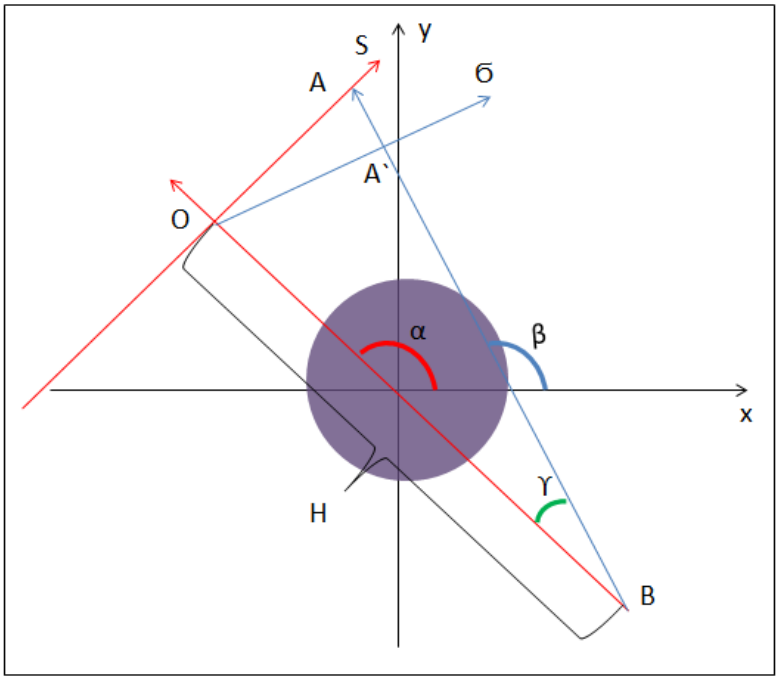


Рис.1.4 Система детекторів та точкового випромінювача.

Де H – відстань від детектора до випромінювача,α – кут нахилу системи детектор-випромінювач, γ – кут нахилу досліджуваного променя відносно центрального, β – кут нахилу променя відносно декартової системи.

У випадку точкового випромінювача так само як і в паралельному випадку береться інтеграл (1.1) вздовж напрямку проектування, але тепер пряма l залежить від двох кутів α і γ, тому вона набуває вигляд.

$$l = x\cos(\alpha-\gamma) + y\sin(\alpha-\gamma) - \frac{SH}{\sqrt{H^2+S^2}} =$$

$$= x\cos(\alpha-\gamma) + y\sin(\alpha-\gamma) - \frac{H^2\tan\gamma}{\sqrt{H^2+(H\tan\gamma)^2}} =$$

$$= x\cos(\alpha-\gamma) + y\sin(\alpha-\gamma) - \frac{H\tan\gamma}{\sqrt{1+(\tan\gamma)^2}} =$$

$$= x\cos(\alpha-\gamma) + y\sin(\alpha-\gamma) - H\sin\gamma \quad (1.4)$$

І фінальна формула для отримання проекції виглядає так.

$$Q(\alpha,\gamma) = \int f(x,y)\delta(x\cos(\alpha-\gamma) + y\sin(\alpha-\gamma) - H\sin\gamma)dxdy \quad (1.5)$$

Де $\delta(l)$ – це дельта функція Дірака, а H – це фіксована величина для кожного томографа.

Як було сказано раніше проекційні дані отриманні від точкового випромінювача можливо звести до паралельного вигляду за для швидшого та зручнішого ведення розрахунків.

Розглянемо два трикутники AOB та OA'B. Вони мають спільний кут B, що дорівнює γ. У трикутнику AOB прямі BO та OA перпендикулярні через умову, що BO відстань від випромінювача до детектора. У трикутника OA'B навмисно проведемо пряму OA' перпендикулярно до A'B. Тоді ці два трикутника є подібними через умову про рівність трьох кутів.

Тоді, знаючи відстань від точки O до точки A, що співпадає з координатою S детектора в який потрапляє промінь у разі томографії з точковим випромінювачем, можливо знайти відстань від точки O до точки A', що співпадає з координатою σ детектора, в який потрапляє промінь у разі томографії з паралельним набором детекторів та випромінювачів.

А також, через те що $\alpha = \beta + \gamma$, як легко побачити з Рис.1.4, можливо вивести формулу зведення одного виду проектування до іншого.

$$\begin{cases} \alpha = \beta + \sin^{-1}\left(\frac{\sigma}{H}\right) \\ \gamma = \sin^{-1}\left(\frac{\sigma}{H}\right) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \beta = \alpha - \gamma \\ \sigma = H\sin\gamma \end{cases} \quad (1.6)$$

Тоді паралельна та точкова системи випромінювачів пов`язані таким відношенням.

$$R(H\sin\gamma, \alpha-\gamma) = Q(\gamma,\alpha) \quad (1.7)$$

1.3. Використання томографії та її види

1.3.1. Магнітно-резонансна томографія

Магнітно-резонансна томографія(МРТ) це поширений метод медичної радіології для візуалізації внутрішніх структур тіла. Основою МРТ виступає проникнення магнітного поля крізь внутрішні органи. За наявності достатньої контрастності м’яких тканин такий метод дозволяє отримати тривимірне зображення органів у реальному часі. Магнітно-резонансна томографія відноситься до багатоплощинних досліджень, тобто можливо отримати зображення тіла у різних площинах без зміни положень. Перевага МРТ перед радіологічними дослідженнями полягає в тому, що можливо отримати більш високу роздільну якість зображення та уникнути радіаційного випромінювання.

МРТ складається з потужного магніту, системи охолодження, шимуючих та резонансних котушок. На відміну від рентгенівських досліджень магнітне випромінювання безпечне для пацієнтів, проте під час МРТ в якості мір застереження перед дослідженнями прохають знімати всі залізні предмети, включно з годинниками та прикрасами. Також наявність хірургічних імплантатів та інші сторонні тіла повинні бути безпечними для проведення томографії, бо наявність кардіостимуляторів, зажимів або протезів може призвести до ушкоджень або навіть смерті. Окрім цього до приміщення де проводиться дослідження залізні предмети також не можна заносити, бо їх може притягнути магнітом.

Головні області використання МРТ це дослідження мозку, серця, черевної порожнини зокрема дослідження печінки, селезінки, нирок та проведення медичних втручань під візуальним контролем. Порівняно з комп’ютерною томографією магнітно-резонансне дослідження дозволяє отримати більш чітке уявлення про поширення пухлин[8].

1.3.2. Комп’ютерна томографія

Комп’ютерна томографія(КТ) – це поширений метод візуалізації внутрішньої структурі об’єкта на основі рентгенівських променів для отримання зображення за допомогою цифрової реконструкції. Спочатку цей метод дослідження використовували для досліджень мозку, а трохи пізніше почали так досліджувати і всі інші органи.

Будова комп’ютерного томографа значно простіша ніж у магнітно-резонансного томографа, він складається з рентгенівської трубки та набору детекторів. Рентгенівська трубка випускає рентгенівське випромінювання, що пронизує піддослідний об’єкт після чого ці промені регіструються детекторами і по отриманим даним густини, вираженим у одиницях Хаунсфилда(шкала ослаблення рентгенівського випромінювання), відновлюються дво або тривимірне зображення із серії рентгенографічних знімків зроблених під різними кутами.

Розвиток комп’ютерних томографів пов’язан зі збільшенням кількості детекторів, що дозволяє за один прохід рентгенівської трубки отримати більшу кількість проекцій, чим зменшується час проведення дослідження. Ще однією модернізацією стало використання спірального сканування. Окрім обертального руху рентгенівської трубки та детекторів додається поступальний рух стола з пацієнтом вздовж осі перпендикулярної до площини сканування, що зображено на Рис.1.5.

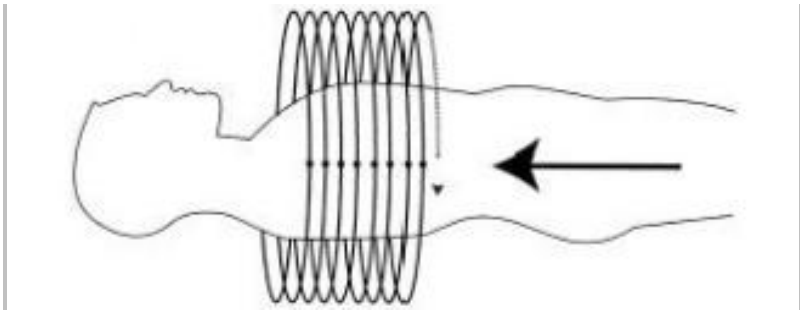


Рис.1.5. Схема спірального сканування

Сучасні томографи за один оберт рентгенівської трубки дозволяють повністю відсканувати цілий орган, значно скорочуючи час обстеження, що надає можливість сканувати серце у пацієнтів навіть якщо вони хворі на аритмію[9].

КТ-дослідження можна проводити при використанні контрастної рідини[10]. Вона допомагає відділити структури що мають однакову густину. Розділяють пероральне та внутрішньовенне введення контрасту. Перорально вводять при дослідженнях шлунково-кишкового тракту, а у вени для більш явних кровотеч або новоутворень. Введення контрасту забороняється для людей з тяжкими захворюваннями серця, діабетиків, хворим на анемію, а також астматиків та алергіків. Через те що під час КТ використовують рентгенівські промені подібне дослідження не є рекомендованими для вагітних або дітей через їх чутливість до випромінювання. А також не рекомендовано багаторазові призначення комп'ютерної томографія через перевищення допустимих доз опромінення.

Основне застосування КТ це томографія органів малого таза, кінцівок, ангіографія(дослідження судин), урографія, томографія грудної клітини високої якості[11].

1.3.3. Томосинтез

З появою цифрових рентгенівських детекторів високої якості класична томографія отримала друге дихання та почала еволюціонувати. Зараз набуває поширення ряд рентгенологічних медицинських технологій під назвою томосинтез(thomos – шар, переріз; synthesis – суміщення). Їх механічна реалізація подібна до лінійної томографії з цифровим детектором. Випромінювач рухається вздовж однієї точки обертання на кут від -40 до 40 градусів та робить серію знімків. Подібне дослідження знижує променеве навантаження на пацієнта та має більшу інформаційну користь.

Схема проведення томосинтезу зображена на Рис. 1.6.

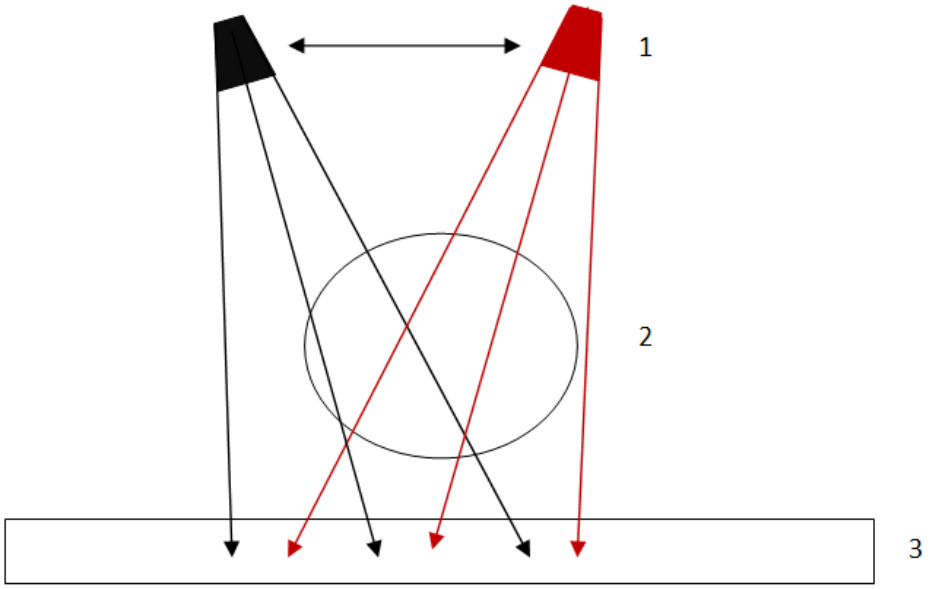


Рис. 1.6. Схема сканування за допомогою томосинтезу. 1 – джерело випромінювання; 2 – об’єкт дослідження; 3 – чутлива плівка (датчик)

Ідея томосинтезу полягає у тому, що різні шари піддослідного об’єкту можливо сформувати за один прохід рентгенівської трубки за рахунок рентгенограм зроблених під різними кутами. Кожний переріз містить частину інформації про піддослідну площину, тому для отримання повної картинки шари суміщаються один з одним таким чином, що у купі вони утворюють необхідний перетин. Головним недоліком томосинтезу є наявність у результуючому зображенні артефактів, що не піддаються фільтрації. Вони отримуються коли сліди об’єктів поза межами піддослідного перетину збігаються в одній точці.

Перевагу томосинтезу перед комп’ютерною томографією і рентгенологією легко побачити у мамографії, де томосинтез дозволяє отримати пошарові зображення на різній глибині та виявити злоякісні утворення на ранніх стадіях, та у діагностиці захворювань кісток і суглобів[12]. Так під час дослідження значно полегшується діагностика травм шийних хребців або виявлення остеоартритів кісток. Ще один напрямок томосинтезу це діагностика туберкульозу легенів. Виявлено, що томосинтез під час туберкульозу дозволяє детально характеризувати зміни у легеневій

тканині без значного навантаження на пацієнта як під час КТ. Також томосинтез застосовують для діагностики раку легень[13]. Менше добове навантаження дозволяє збільшити час спостереження за пацієнтом на відміну від комп’ютерної томографії, яка хоча і має значно вищу чутливість, але має значне променеве навантаження та вищу коштовність.

Томосинтез знайшов своє місце у наукових дослідженнях, його використовують при дослідженнях плазми[14], високотемпературних вогнів, діагностиці зварних деталей та структур композитів[15].

Висновок до розділу.

У розділі було оглянуто основні напрямки дослідження внутрішньої структури об’єкту,сформовано поняття томографії, розглянуто історію появи та розвитку томографії та її недоліки. Зокрема було розглянуто метод отримання проекційних даних та отримано математичну формулу зведення. Було розглянуто різні види томографії їх область використання та переваги один перед одним.

2. МЕТОДИ РЕКОНСТРУКЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ З ПРОЕКЦІЙ

2.1. Метод Фур'є синтезу

Інтегральні перетворення Фур'є часто використовується у прикладній математиці зокрема і для фільтрації зображень. Вони дозволяють уявити будь яку функцію у вигляді набору таких тригонометричних функцій як синус та косинус. При цьому вважається, що низькі частоти Фур'є простору відповідають за основний фон та великі об'єкти, а високі просторові частоти відповідні до малих об'єктів, деталей крупних форм та шумової компоненти[16]. Так по аналогії при розкладанні звуку на частоти низька частота відповідає за основний тон, а більш високі за його гармоніки.

Якщо f(x) – це дійсна або уявна функція дійсної змінної x, то перетворення Фур'є для такої функції, якщо воно існує, задається за формулою

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\, dx \qquad (2.1)$$

Де $F(w)$ – Фур'є образ функції f(x,y), та 0w – має значення частоти.

За певних умов збіжності інтегралу, функція f(x) може бути отримана із функції F(w), як результат зворотного перетворення Фур'є.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwx} dw \qquad (2.2)$$

У випадку коли дана функція двох змінних f(x,y), то її Фур'є перетворенням називають інтеграл виду

$$F(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i(w_1 x + w_2 y)} dx\, dy \qquad (2.3)$$

Де w_1, w_2 – координати у Фур'є просторі або координати у частотній області, а x, y – відповідні координати Декартового простору. Даний інтеграл отримується двократним використанням одновимірного перетворення Фур'є

по кожній з змінних. Тоді зворотне перетворення Фур'є такої функції буде відповідно виглядати так

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(w_1,w_2)e^{i(w_1x+w_2y)}dw_1dw_2 \qquad (2.4)$$

Розглянемо перетворення Фур'є (2.1) функції R(s, α).

$$\widetilde{\mathrm{R}}(\mathrm{w},\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{R}(\mathrm{s},\alpha).\, e^{-iws}\, ds \qquad (2.5)$$

Де R(s, α) це перетворення Радону (1.3) для функції f(x,y), тоді при підстановці формула (2.5) набуває вигляд.

$$\widetilde{\mathrm{R}}(\mathrm{w},\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s\ \cos\alpha - \ l\sin\alpha\,, s\ \cos\alpha + \ l\ \sin\alpha)dl\, e^{-iws}\, ds \qquad (2.6)$$

Розглянемо тепер зворотне двовимірне перетворення Фур'є для функції $F(w_1,w_2)$ в нахиленій системі координат (1.2)

$$f(s\ \cos\alpha - \ l\sin\alpha\,, s\ \cos\alpha + \ l\ \sin\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(w_1,w_2)e^{i\left(w_1(s\ \cos\alpha - \ l\sin\alpha)+w_2(s\ \cos\alpha + \ l\ \sin\alpha)\right)}dw_1dw_2 \qquad (2.7)$$

Зробимо підстановку (2.7) у вираз (2.6).

$$\widetilde{\mathrm{R}}(\mathrm{w},\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{2/3}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(w_1,w_2) *$$

$$* \ e^{-iws+i\left(w_1(s\ \cos\alpha - \ l\sin\alpha)+w_2(s\ \cos\alpha + \ l\ \sin\alpha)\right)}dw_1dw_2dlds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(w_1,w_2)dw_1dw_2 *$$

$$* \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{is(w-w_1\cos\alpha-w_2\sin\alpha)}e^{-il(w_1\sin\alpha-w_2\cos\alpha)}dlds \qquad (2.8)$$

У цьому виразі друга частина інтегралів представляє собою Фур'є образи дельта функцій Дірака з відповідними аргументами.

$$\widetilde{\mathrm{R}}(\mathrm{w},\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(w_1,w_2)dw_1dw_2\ *$$

$$*\ \delta(w-w_1\cos\alpha-w_2\sin\alpha)\delta(w_1\sin\alpha-w_2\cos\alpha)$$

Перейдемо тепер до полярних координат у частотному просторі.

$$\begin{cases}w_1=\omega cos\varphi\\ w_2=\omega sin\varphi\end{cases} \tag{2.9}$$

Якобіан такого переходу дорівнює ω.

$$\widetilde{\mathrm{R}}(\mathrm{w},\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\omega F(\omega cos\varphi,\omega sin\varphi)\ *$$

$$*\ \delta(w-\omega(cos\varphi\cos\alpha-sin\varphi\sin\alpha))\ *$$

$$*\ \delta(\omega(cos\varphi\sin\alpha-sin\varphi\cos\alpha))\ \ d\omega d\,\varphi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\omega F(\omega cos\varphi,\omega sin\varphi)*\delta\big(w-\omega cos(\varphi-\alpha)\big)*$$

$$*\frac{1}{\omega}\delta(\sin(\varphi-\alpha))\ \ d\omega d\varphi$$

Розпишемо тепер інтеграл від дельта функцій за визначенням.

$$\widetilde{\mathrm{R}}(\mathrm{w},\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega cos\alpha,\omega sin\alpha)*\delta\big(w-\omega cos(\alpha-\alpha)\big)\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega cos\alpha,\omega sin\alpha)*\delta(w-\omega)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(wcos\alpha,wsin\alpha) \tag{2.10}$$

Перепишемо для зручності фінальні перетворення.

$$F(w_1,w_2)=\ F(\omega\cos\alpha,\omega\sin\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(s,\alpha)e^{-i\omega s}ds=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{R}(\omega,\alpha) \tag{2.11}$$

Де $R(s,\alpha)$ – це радонівський образ функції f(x,y), а $\tilde{R}(\omega,\alpha)$ – це одновимірне перетворення Фур'є для радонівського образа по змінній s. Ця

формула має просту графічну інтерпретацію та відома під назвою «Теорема про центральний перетин». Введемо у частотній області систему координат в якої частоти w_1 і w_2 відповідають за вісь абсцис та вісь ординат, а по вертикалі відкладено значення функції $F(w_1, w_2)$. Проведемо під кутом φ_1 площину, що перпендикулярна до площини (w_1, w_2), та отримаємо у цьому перетині одновимірну функцію $\tilde{R}(\omega, \varphi_1)$ що залежить лише від ω. У такому разі одновимірне перетворення Фур'є для радонівського образа функції під кутом φ є перетином двовимірного перетворення Фур'є під тим самим кутом φ, що продемонстровано на Рис. 2.1

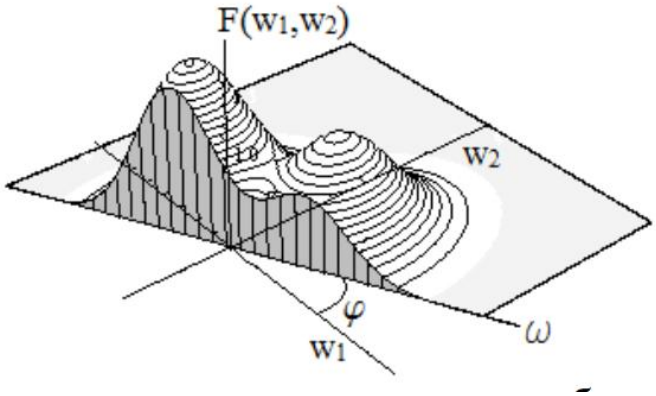


Рис.2.1. Центральний перетин двовимірного перетворення Фур'є.

Теорема затверджує, що одновимірний Фур'є образ $\tilde{R}(\omega, \varphi)$ отриманий з проекцій тіла $R(s, \varphi)$, отриманих системою випромінювача і датчика під кутом φ дозволяє синтезувати двовимірне Фурье перетворення початкової функції f(x,y). Після чого маючи Фур'є образ зображення $F(w_1, w_2)$ можливо відновити зображення за формулою (2.4)[17].

2.2. Метод зворотного проектування

2.2.1. Зворотне проектування у загальному вигляді

Розглянемо тепер задачу відновлення функції f(x,y) коли маємо її двовимірне Фур'є перетворення $F(w_1, w_2)$.

У формулі (2.4) зробимо заміну змінних та перейдемо до полярних координат за формулою (2.9). Якобіан переходу до нових координат у такому випадку дорівнює ω і формула (2.4) набуває наступний вигляд.

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \omega F(\omega\cos\varphi\,,\omega\sin\varphi)e^{i\omega s}d\omega d\varphi \qquad (2.12)$$

Де $s = x\cos\varphi + y\sin\varphi$.

Відтепер використовуючи зв'язок (2.11) можна замінити двовимірний Фур'є образ функції f(x,y) на одновимірний Фур'є образ перетворення Радону функції f(x,y).

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{R}(\omega,\varphi)e^{i\omega s}d\omega d\varphi \qquad (2.13)$$

На даному етапі нам потрібно подолати проблему того, що інтегрування по куту φ відбувається на проміжку [0,2pi], а функція $\tilde{R}(\omega,\varphi)$ визначена у межах [0,pi].

Щоб подолати цю проблему розіб'ємо інтеграл (2.13) на два. Далі розглянемо лише інтеграл на проміжку [pi,2pi]

$$\int_\pi^{2\pi}\int_0^{\infty} \omega\tilde{R}(\omega,\varphi)e^{i\omega s}d\omega d\varphi = |\varphi = \theta+\pi| = \int_\pi^{2\pi}\int_0^{\infty} \omega\tilde{R}(\omega,\theta+\pi)e^{i\omega s}d\omega d\varphi$$

Як легко довести $\tilde{R}(\omega,\varphi) = \tilde{R}(-\omega,\varphi+\pi)$, тому $\left|\tilde{R}(\omega,\theta+\pi) = \tilde{R}(-\omega,\theta)\right|$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} -\omega\tilde{R}(-\omega,\theta)e^{-i\omega s}d(-\omega)d\varphi = |\omega = -\sigma| =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{-\infty} \sigma\tilde{R}(\sigma,\theta)e^{i\sigma s}d\sigma d\varphi = \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{0} -\sigma\tilde{R}(\sigma,\theta)e^{i\sigma s}d\sigma d\varphi$$

Отже тепер інтеграл (2.13) можна переписати так

$$f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^{2/3}}\left(\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \omega\tilde{R}(\omega,\varphi)e^{i\omega s}d\omega d\varphi + \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{0} -\omega\tilde{R}(\omega,\theta)e^{i\omega s}d\omega d\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2/3}} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \tilde{R}(\omega, \varphi) e^{i\omega s} \, d\omega d\varphi \tag{2.14}$$

Тепер можна розглянути внутрішній інтеграл. Це ні що інакше як зворотне перетворення Фур'є згортки двох функцій у Фур'є просторі, тому для них можливо використати властивості згортки.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \tilde{R}(\omega, \varphi) e^{i\omega s} \, d\omega = \widehat{\mathcal{F}^{-1}} \left(\hat{\mathcal{F}}\left(R(s, \varphi)\right) \hat{\mathcal{F}} \left(\widehat{\mathcal{F}^{-1}}(|\omega|) \right) \right) =$$

$$= \widehat{\mathcal{F}^{-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{\mathcal{F}} \left(R(s, \varphi) * \widehat{\mathcal{F}^{-1}}(|\omega|) \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(R(s, \varphi) * \widehat{\mathcal{F}^{-1}}(|\omega|) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R(s, \varphi) * \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{i\omega s} d\omega \right) \tag{2.15}$$

Де $\widehat{\mathcal{F}^{-1}}$ - оператор зворотного перетворення Фур'є, $\hat{\mathcal{F}}$ - оператор перетворення Фур'є, * - згортка двох функцій.

Введемо заміну $\mathrm{G(s)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{i\omega s} d\omega$, та розпишемо згортку за визначенням тепер формула (2.15) набуває вигляд.

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} R(s, \varphi) * G(s) \, d\varphi = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(X, \varphi) G(s - X) \, dX d\varphi \tag{2.16}$$

Дана функція представляє собою методику зворотного проектування з фільтрацією згорткою проекційних даних. І використовується для відновлення даних отриманих під час паралельного проектування, для переходу до проектування з точковим фокусом треба використати зв'язок (1.6) (1.7), та виразити нові змінні через старі.

$$X = H \sin\gamma \, ; \; \varphi = \alpha - \gamma; s - X = \; H \sin(\hat{\gamma} - \gamma) \tag{2.17}$$

Тоді

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(H\sin\gamma\,, \alpha-\gamma) G(H\sin(\hat{\gamma}-\gamma))\, d(H\sin\gamma) d(\alpha-\gamma) =$$

$$= \int_0^{\pi} \int_{-\gamma_{max}}^{\gamma_{max}} H\cos\gamma\, Q(\gamma,\alpha) G(H\sin(\hat{\gamma}-\gamma))\, d\gamma d\alpha \qquad (2.18)$$

Розпишемо тепер внутрішню функцію $G(H\sin(\hat{\gamma}-\gamma))$, зробивши заміну $\omega = \hat{\omega}\frac{\hat{\gamma}-\gamma}{H\sin(\hat{\gamma}-\gamma)}$, отримаємо.

$$G(H\sin(\hat{\gamma}-\gamma)) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\omega}\frac{\hat{\gamma}-\gamma}{H\sin(\hat{\gamma}-\gamma)}\right| e^{i\hat{\omega}\frac{(\hat{\gamma}-\gamma)\,(H\sin(\hat{\gamma}-\gamma))}{H\sin(\hat{\gamma}-\gamma)}} d\hat{\omega}\frac{\hat{\gamma}-\gamma}{H\sin(\hat{\gamma}-\gamma)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{\hat{\gamma}-\gamma}{H\sin(\hat{\gamma}-\gamma)}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\omega}| e^{i\hat{\omega}(\hat{\gamma}-\gamma)} d\hat{\omega} =$$

$$= \left(\frac{\hat{\gamma}-\gamma}{H\sin(\hat{\gamma}-\gamma)}\right)^2 G(\hat{\gamma}-\gamma) \qquad (2.19)$$

Тоді якщо підставити (2.19) до (2.18) отримаємо формулу відновлення зображення отриманого від системи проектування з точковим фокусом.

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \int_{-\gamma_{max}}^{\gamma_{max}} \frac{\cos\gamma}{H}\left(\frac{\hat{\gamma}-\gamma}{\sin(\hat{\gamma}-\gamma)}\right)^2 Q(\gamma,\alpha) G(\hat{\gamma}-\gamma)\, d\gamma d\alpha =$$

$$= \int_0^{\pi} \int_{-\gamma_{max}}^{\gamma_{max}} T(\hat{\gamma}-\gamma) Q(\gamma,\alpha) G(\hat{\gamma}-\gamma)\, d\gamma d\alpha \qquad (2.20)$$

Де $T(\hat{\gamma}-\gamma) = \frac{\cos\gamma}{H}\left(\frac{\hat{\gamma}-\gamma}{\sin(\hat{\gamma}-\gamma)}\right)^2$ – це функція зведення даних до виду паралельної системи випромінювачів, $Q(\gamma,\alpha)$ – це вихідні данні з детекторів, $\mathrm{G}(\gamma)$ – ядро попередньої фільтрації. Розпишемо його трохи детально.

$$\mathrm{G}(\gamma) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{i\omega\gamma} d\omega = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| (\cos(\omega\gamma) + i\sin(\omega\gamma)) d\omega =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\int_{-\infty}^{0} |\omega|(\cos(\omega\gamma) + \ i\sin(\omega\gamma))d\omega + \int_{0}^{\infty} |\omega|(\cos(\omega\gamma) + \ i\sin(\omega\gamma))d\omega \right)$$

$$\mathrm{G}(\gamma) = \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\int_{0}^{\infty} |-\omega|(\cos(-\omega\gamma) + \ i\sin(-\omega\gamma))d\omega + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\infty} |\omega|(\cos(\omega\gamma) + \ i\sin(\omega\gamma))d\omega \right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\int_{0}^{\infty} |\omega|(\cos(\omega\gamma) - \ i\sin(\omega\gamma))d\omega + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\infty} |\omega|(\cos(\omega\gamma) + \ i\sin(\omega\gamma))d\omega \right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{0}^{\infty} |\omega|\, 2\cos(\omega\gamma)\, d\omega = = \frac{1}{2\pi^2}\int_{0}^{\infty} |\omega|\cos(\omega\gamma)\, d\omega \qquad (2.21)$$

Підставимо (2.21) в формулу (2.20) та отримаємо

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{0}^{\pi}\int_{-\gamma_{max}}^{\gamma_{max}}\int_{0}^{\infty} |\omega| T(\hat{\gamma}-\gamma)Q(\gamma,\alpha)\cos\big(\omega(\hat{\gamma}-\gamma)\big)\, d\omega d\gamma d\alpha \qquad (2.22)$$

У даному випадку не виникає поняття фільтра G, який використовується для попередньої фільтрації проекцій перед відновленням. Такий метод позбавлений недоліків стандартного методу відновлення, зокрема відсутня необхідність підбору просторової частоти ω_{max}, або різноманітних фільтрів в залежності від наявності шумової компоненти[18].

2.2.2. Зворотне проектування з одновимірною фільтрацією

У сучасних томографічних апаратах зазвичай використовують згортковий алгоритм відновлення[19] зображення представлений формулою (2.20) Але через те, що функція G(γ) має особливість подальше приведення формули зворотного проектування зводиться до пошуку наближених функцій,

які відражають основні властивості функції та призводять, до наближеного відновлення. Для цього зручно вводити обмеження просторової частоти W_{max}.

$$\mathrm{G}(\gamma) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-W_{max}}^{W_{max}} |\omega| e^{i\omega\gamma} d\omega =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\int_{-W_{max}}^{0} -\omega e^{i\omega\gamma} d\omega + \int_{0}^{W_{max}} \omega e^{i\omega\gamma} d\omega \right) \quad (2.23)$$

Розглянемо (2.16) на проміжку $[-W_{max},0]$

$$\int_{-W_{max}}^{0} -\omega e^{i\omega\gamma} d\omega = |\omega = -\bar{\omega}| = \int_{W_{max}}^{0} -\bar{\omega} e^{-i\bar{\omega}\gamma} d\bar{\omega} = \int_{0}^{W_{max}} \bar{\omega} e^{-i\bar{\omega}\gamma} d\bar{\omega} =$$

$$= \left| \begin{matrix} u=\bar{\omega} \\ dv=e^{-i\bar{\omega}\gamma} d\bar{\omega} \\ du=d\bar{\omega} \\ v=-\frac{1}{i\gamma} e^{-i\bar{\omega}\gamma} \end{matrix} \right| = \left(\frac{i\bar{\omega}}{s} e^{-i\bar{\omega}\gamma} \right)_{0}^{W_{max}} + \int_{0}^{W_{max}} \frac{-i}{s} e^{-i\bar{\omega}\gamma} d\bar{\omega} =$$

$$= \left(\frac{i\bar{\omega}}{\gamma} e^{-i\bar{\omega}\gamma} + \frac{-i}{-i\gamma^2} e^{-i\bar{\omega}\gamma} \right)_{0}^{W_{max}} =$$

$$= \frac{i\bar{\omega}}{\gamma} (\cos(-\bar{\omega}\gamma) + i\sin(-\bar{\omega}\gamma))_{0}^{W_{max}} +$$

$$+ \frac{1}{\gamma^2} (\cos(-\bar{\omega}\gamma) + i\sin(-\bar{\omega}\gamma))_{0}^{W_{max}} =$$

$$= \frac{iW_{max}}{\gamma} \cos(W_{max}\gamma) + \frac{W_{max}}{\gamma} \sin(W_{max}\gamma) + \frac{1}{\gamma^2} \cos(W_{max}\gamma) -$$

$$- \frac{1}{\gamma^2} \sin(W_{max}\gamma) - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{W_{max}}{\gamma} \sin(W_{max}\gamma) - \frac{1 - \cos(W_{max}\gamma)}{\gamma^2} +$$

$$+ \frac{iW_{max}}{\gamma} \cos(W_{max}\gamma) - \frac{1}{\gamma^2} \sin(W_{max}\gamma) \quad (2.24)$$

Відтепер розглянемо (2.23) на проміжку $[W_{max},0]$

$$\int_{0}^{W_{max}} \omega e^{i\omega\gamma} d\omega = |\omega = -\bar{\omega}| = \int_{0}^{-W_{max}} \bar{\omega} e^{-i\bar{\omega}\gamma} d\bar{\omega} =$$

$$= \frac{-W_{max}}{\gamma}\sin(-W_{max}\gamma) - \frac{1-\cos(-W_{max}\gamma)}{\gamma^2} + \frac{-iW_{max}}{\gamma}\cos(-W_{max}\gamma) -$$

$$-\frac{1}{\gamma^2}\sin(-W_{max}\gamma) = \frac{W_{max}}{\gamma}\sin(W_{max}\gamma) - \frac{1-\cos(W_{max}\gamma)}{\gamma^2} +$$

$$+\frac{-iW_{max}}{\gamma}\cos(W_{max}\gamma) + \frac{1}{\gamma^2}\sin(W_{max}\gamma) \quad (2.25)$$

Тоді функція G(γ) набуває вигляд.

$$\mathrm{G}(\gamma) = \frac{2}{(2\pi)^2}\left[\frac{W_{max}}{\gamma}\sin(W_{max}\gamma) - \frac{1-\cos(W_{max}\gamma)}{\gamma^2}\right] \quad (2.26)$$

До недоліків такого методу відноситься відсутність алгоритму вибору максимальної частоти W_{max} та наявність артефактів у відновленому зображенні при зашумлені проекційних даних.. Тому можуть використовувати метод помноження ядра фільтрації на швидко спадаючу функцію(вікно)[20], що дозволяє знизити вплив шумів на відновлене зображення.

До таких вікон відносяться:

Вікно Римана

$$\mathrm{G}(\gamma) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-W_{max}}^{W_{max}} |\omega| \frac{\sin\left(\frac{\pi\omega}{W_{max}}\right)}{\left(\frac{\pi\omega}{W_{max}}\right)} e^{i\omega\gamma} d\omega \quad (2.27)$$

Вікно Хемінга

$$\mathrm{G}(\gamma) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-W_{max}}^{W_{max}} |\omega| \left(\varkappa + (1-\varkappa)\cos\left(\frac{\pi\omega}{W_{max}}\right)\right) e^{i\omega\gamma} d\omega \quad (2.28)$$

Вікно Гаусса

$$\mathrm{G}(\gamma) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-W_{max}}^{W_{max}} |\omega| 2^{-\left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)} e^{i\omega\gamma} d\omega \quad (2.29)$$

Окрім цих вікон існує ще безліч інших. Хоча вибір віконної функції визначає якість відновленого зображення - методики вибору вікна фільтрації не існує. З тої причини що, ми отримуємо проективні дані не з реальних

детекторів і в них мала кількість або відсутні зовсім шуми, для відновлення стандартною методикою будемо використовувати функцію (2.26)

Висновок до розділу.

Було доведено теорему про центральний перетин та розглянуто метод відновлення зображення через синтез його Фур’є образу.

Отримано розрахункові алгоритми відновлення зображення для паралельної томографії та томографії з точковим фокусом.

Розглянуто декілька методів подолання сингулярності у фільтруючій функції та обрано оптимальний для поставленої задачі.

3. АНАЛІЗ РОЗРОБЛЕНОГО ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

3.1. Модель отримання проекційних даних

Представимо, що густина об’єкта у перетині виражена не неперервною функцією координат, а розділена на певну кількість елементів під назвою піксель(pixel – picture element). На Рис.3.1 вони зображені малими квадратиками.

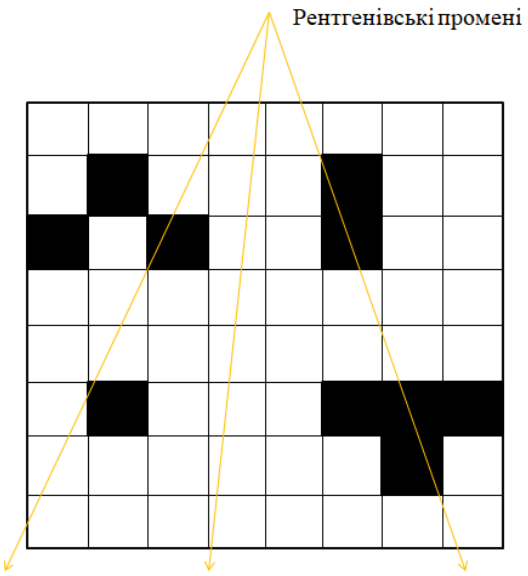


Рис.3.1 Представлення зображення у піксельній формі

Коли рентгенівській промінь проходить крізь піксель він втрачає свою інтенсивність як добуток густини пікселя на довжину променя у пікселі. Тому при проходжені променя крізь піксель не під прямим кутом, необхідно робити перерахунок важеля вкладу цього пікселя до повної проекційної картини. В такому разі інтенсивність випромінювання буде визначатися таким співвідношенням

$$\begin{cases} q = \sum_i f_i dl_i = \sum_i f(x_i, \dfrac{x_i \sin\gamma - l}{\cos\gamma}) dx \,, \gamma \le \dfrac{\pi}{4} \\ q = \sum_i f_i dl_i = \sum_i f(\dfrac{y_i \cos\gamma + l}{\sin\gamma}, y_i) dy \,, \gamma > \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \tag{3.1}$$

Але точність такого методу напряму залежить від дискретності розбиття зображення. Тому для отримання проекційних даних розглядалася не система

в якій нерухомий залишається об’єкт, а система в якій сумуємо вздовж променя перпендикулярного до пікселів зображення, що зображено на Рис.3.2

.

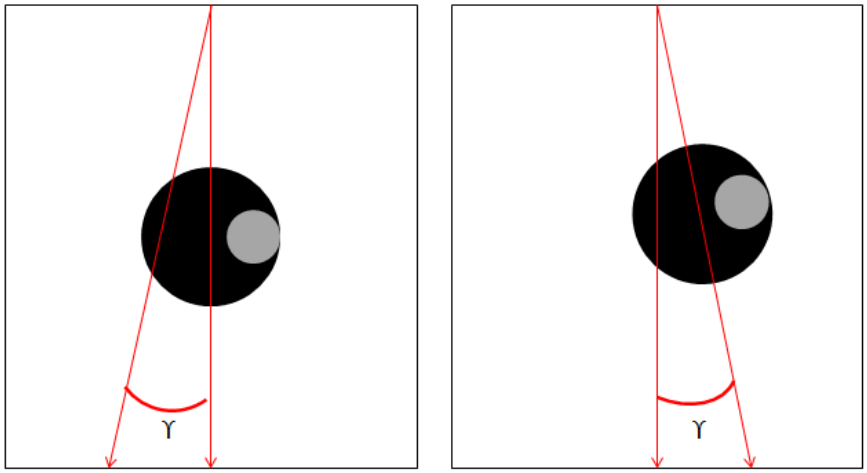


Рис.3.2 Поворот зображення на кут γ відносно фокальної точки.

В такому випадку інтенсивність променя дорівнює сумі густин вздовж прямої, що проходить крізь центр зображення.

$$q = \sum_i f(0, y_i) \tag{3.2}$$

Перехід до нової системи координат відбувається помноженням на матрицю повороту.

$$\begin{bmatrix} \acute{x} \\ \acute{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x0 \\ y - y0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Де $x0, y0$ - це координати точки, навколо якої обертається зображення. У разі зміни кута нахилу системи детекторів та випромінювача $x0, y0$ дорівнюють нулю, та обертання відбувається відносно центра зображення, а у разі зміни кута під яким падає промінь від випромінювача $x0, y0$ співпадають з координатою фокальної точки, та обертання відбувається навколо неї.

3.2. Реконструкція зображень

Як було сказано у першому розділі зведення проекційних даних від системи з точковим випромінювачем, до вигляду геометрії паралельних детекторів та випромінювачів прискорює роботу алгоритму відновлення

зображення, через використання значно простіших розрахункових операцій. Саме тому реконструкція буде відбуватися у два етапи: першим зводимо дані до виду паралельного проектування за формулами (1.5), другим етапом відновлюємо зображення від проекцій в паралельній геометрії.

При перерахуванні даних з одного виду до іншого наявні незначні артефакти, що видно на Рис.3.3, які потім згладжуємо методом трьох точок та інтерполюємо для більш плавних переходів.

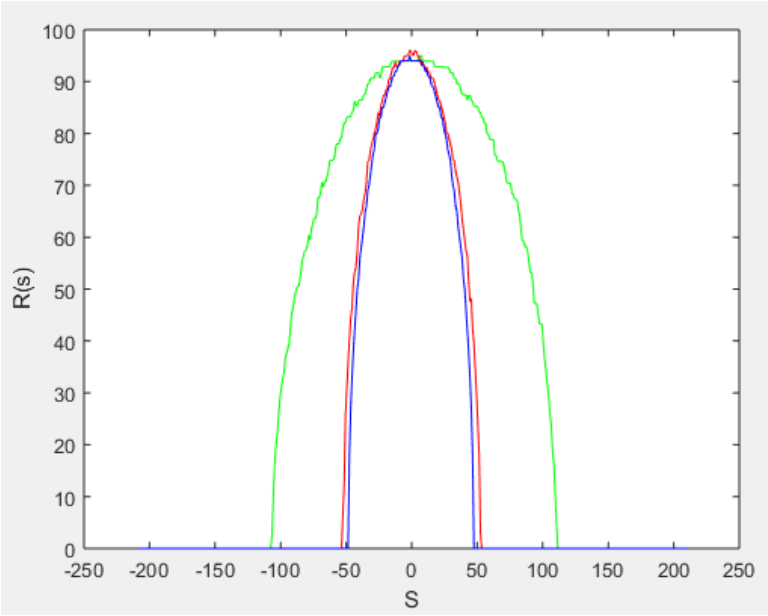


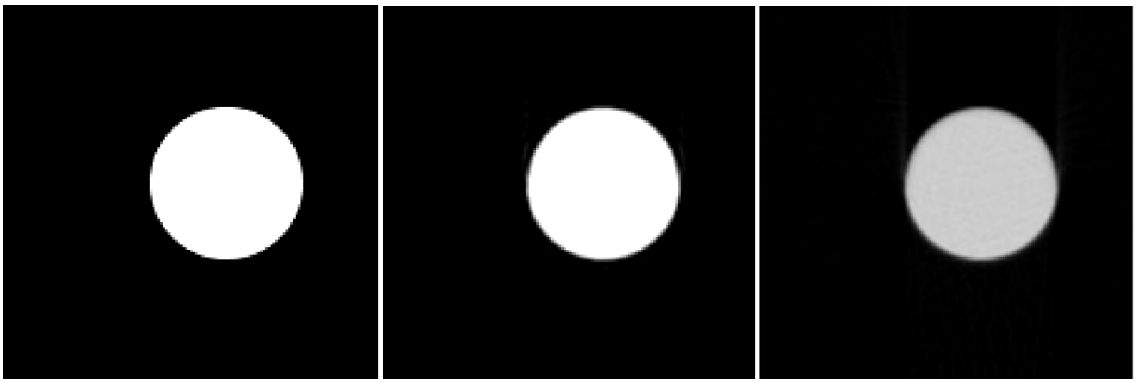
Рис.3.3. Проекційні данні отримані від паралельного проектування, та зведені від проектування з точковим фокусом. Де зеленим відображені дані отримані від променів з точковим фокусом, червоним зведені до виду паралельного проектування, синім отримані у паралельній геометрії детекторів і випромінювачів.

Роботу алгоритмів відновлення будемо перевіряти на декількох тестових зразках Рис.3.4.

1) Центральносиметричне коло суспільної густини.
2) Коло суспільної густини, що здвигнуто відносно центра зображення.
3) Концентричний розподіл різних густин.
4) Фантом Шеппа-Логана



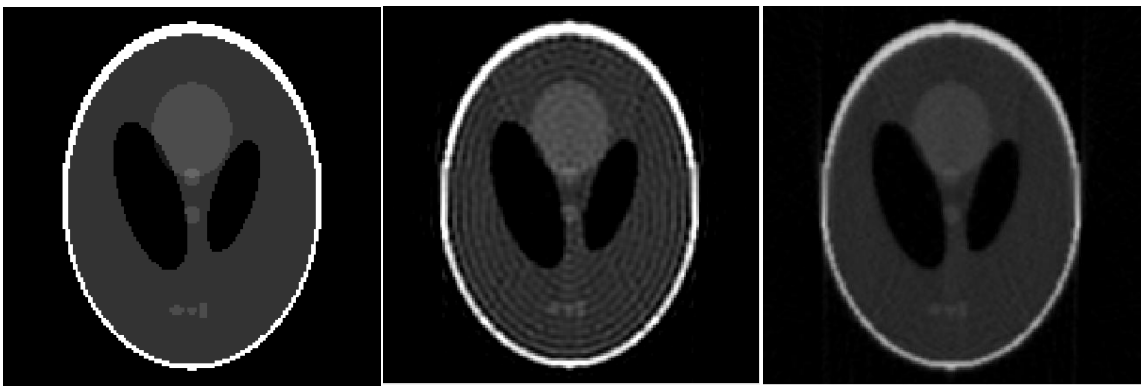
1.а 1.б 1.в



2.а 2.б 2.в



3.а 3.б 3.в



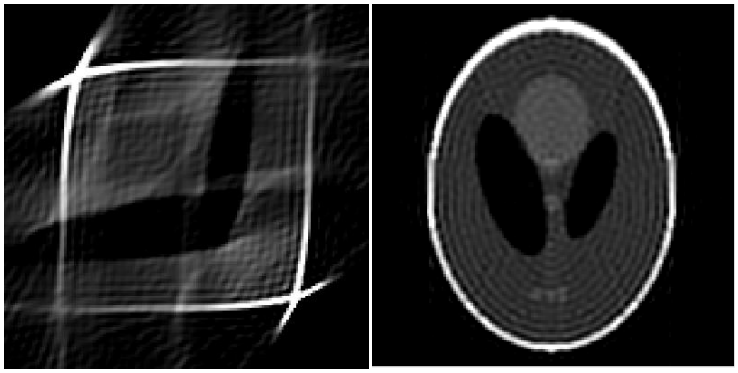
4.а 4.б 4.в

Рис.3.4. Перевірка роботи алгоритмів реконструкції

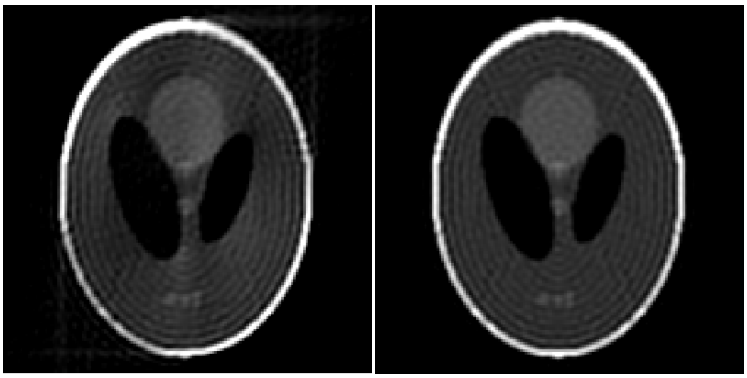
Де «а» позначені оригінали зображень, «б» зображення отримані від алгоритму відновлення без фільтрації, «в» зображення отриманні від алгоритму відновлення з введенням максимальної просторової частоти.

Отримані зображення показують, що відновлення без фільтрації має значну контрастність та точно передають границі міст зміни густини об’єкту і тому мають більшу практичну користь при дослідженнях об’єктів в яких наявні структури малих розмірів або структур, що незначно відрізняються за густиною. Використання такого методу відновлення має артефакти відновлення від різких границь, проте вони відрізняються від можливих структур всередині досліджуваних об’єктів. Також в реальних дослідженнях дані представлені у значному діапазоні і для відновлених внутрішніх структур вибирають необхідний проміжок який відповідає за ти чи інші структури, чи то кістки, чи то м’які тканини, чи то судини, тому в реальній томографії похибки такого роду можуть бути не критичні, але вони потребують подальшого дослідження для можливого усунення.

При збільшенні кількості ракурсів проектування кількість похибок відновлення значно знижується,що видно на Рис.3.5.



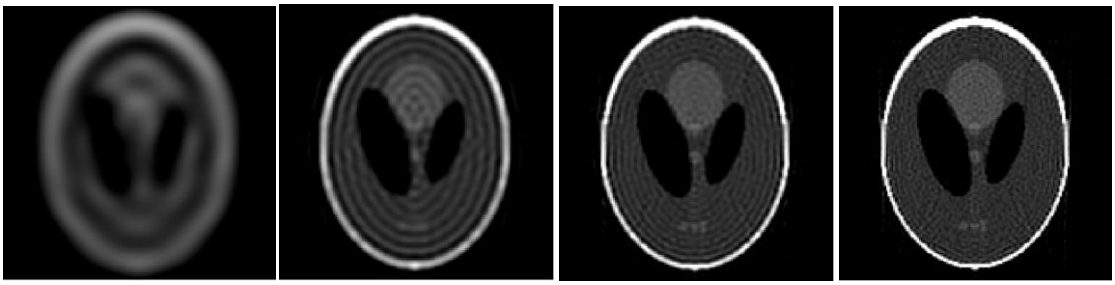
а б



в г

Рис.3.5. Відновлені зображення при різній кількості ракурсів. «а» 90 ракурсів, «б» 180 ракурсів, «в» 270 ракурсів, «г» 360 ракурсів.

Також при збільшенні максимальної частоти інтегрування вплив похибки зменшується, що видно на Рис.3.6.



а б в г

Рис.3.6 Зображення отримані при різних просторових частотах ω:

а) $\omega = 5$,б) $\omega = 15$,в) $\omega = 25$,г) $\omega = 35$

Висновок до розділу

Алгоритм зведення проекційних даних від системи променів з точковим фокусом вносить невеликі артефакти у відновлене зображення, що можливо подолати інтерполюючи та згладжуючи дані.

Використання зворотного перетворення Радону для відновлення зображень томографії має свої переваги, хоча в деяких випадках використання стандартної методики приносить значну користь.

ВИСНОВКИ

У роботі проведено ознайомлення з існуючими методами дослідження внутрішньої структури об’єктів, отримано представлення про засоби проектування під час томографії та розроблено на цій основі дискретну модель проектування зображень. Розглянуто паралельну геометрію розміщення датчиків та випромінювачів і геометрію для променів з точковим фокусом. Отримано формулу переходу від однієї геометрії до іншої. Досліджено методику відновлення зображення та отримано формулу зворотного перетворення Радону для пучка променів з точковим фокусом. На основі отриманих результатів розроблено програмне забезпечення на мові MatLab, що симулює роботу томографічного апарату та відновлює зображення з проекцій різними методами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Stanishneva-Konovalova T.B., Semenyuk P.I., Pechnikova E., Kurochkina L.P., Sokolova O.S. Cryo-EM Structure of the Single-Ring Chaperonin from Bacteriophage OBP P. fluorescence. *Microscopy and Microanalysis*. 2018. № 24. P. 1244-1245.
2. Bracewell R. N. Image reconstruction in radio astronomy. *Image Reconstruction from Projections: Implementation and Applications*. 1979. №69. P. 81-104
3. Марусина М.Я., Казначеева А.О. Современные виды томографии: Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. 132 с.
4. S. Webb. A brief history of tomography and CT. *RPI-Radiographi*. 1995. P. 429-430.
5. Доля П.Г. Введение в математические методы компьютерной томографи. Учебное пособие. Харьков: Харьковский Национальный Университет, 2015. 139 с.
6. J. Radon. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Journal of Mathematical Physics*, 1917. №69. P .262-277.
7. Лавров С.А. Разработка устойчивых методов реконструкции изображений с применением вейвлет-преобразования: дис. канд. физ.-мат. наук. Снежинск, 2012. 122 с.
8. Диагностическая визуализация. Магнитно-резонансная томография. https://www.who.int/diagnostic_imaging/imaging_modalities/dim_magres imaging/ru/ (Дата звернення: 3.05.2021)
9. Комп’ютерна томографія. http://nuclphys.sinp.msu.ru/nuc_techn/med/tom.htm (Дата звернення: 28.04.2021)
10. Сдвижков А.М., Юдин А.Л., Кожаков Л.Г. Мультиспиральная Компьютерная томография с трехмерным 3Д-моделированием в диагностике и лечении онкологических больных. *Применение*

компьютерной томографии в онкологии: материалы заседания, посв. памяти проф. Ю.Я. Грицмана. Москва. 2009. 3-4 с.

11. Диагностическая визуализация. Компьютерная томография. https://www.who.int/diagnostic_imaging/imaging_modalities/dim_computography/ru/ (Дата звернення: 3.05.2021)
12. M. Iwama, K. Takehara, K. Anraku. Use of tomosynthesis in the Aizawa. *Medical Now*, 2013. №75. P. 209-211.
13. D. Gur, G. S. Abrams, D. M. Chough, M. A. Ganott, C. M.Hakim, R. L. Perrin, G. Y. Rathfon, J. H. Sumkin, M. L. Zuley, A. I. Bandos. Digital breast tomosynthesis: Observer performance study. *American Journal of Roentgenology*, 2009. P. 586-591.
14. Филонин О.В. Методы и средства малоракурсной томографической диагностики параметров потоков ионных и плазменных двигателей КЛА. *Компьютерная оптика*. 2016.№ 40. С. 370-379.
15. Филонин О.В., Явцев В.Ф. Методы малоракурсной вычислительной томографии в диагностике сварных деталей. *Техническая диагностика и неразрушающий контроль*.1989. №2.
16. Воскобойникова Ю. Е., Гочаков А.В., Колкер А.Б. Фильтрация сигналов и изображений: Фурье и Вейвлет алгоритмы: монография. Новосибирск: СИБСТРИН, 2010. 195 с.
17. Грудин Б.Н. Параллельные вычисления в томографии: учебное пособие. Владивосток: ДВГУ, 2010. 97 с.
18. Вайсбурд А.И., Вихтинская Т. Г., Немченко К. Э. Обратное преобразование Радона не содержащее сингулярной фильтрации. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна*. 2017. № 36. 38-43 с.
19. G. Herman. Image reconstruction from projections: The Fundamentals of Computerized Tomography. Buffalo, Academic Press, 1980. 340 p.

20. Ершова А.А. Модифицированный метод регуляризации решения интегральных уравнений I рода в задачах математического моделирования: дис. канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2019. 109 с.