МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики

Кафедра фізики нетрадиційних енерготехнологій та екології

Пояснювальна записка

до дипломної роботи

за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр»

на тему: **«Вплив швидкості обертання та форми китайської дзиги на час перевороту»**

Виконав: студент 4 курсу, групи НФ-41
Олійник Ілля Олегович

Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

Освітня програма: Прикладна фізика енергетичних систем

Керівник к.ф.-м.н, доцент
Марущенко Ілля Миколайович

Харків – 2021 року

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Інститут Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра фізики нетрадиційних енерготехнологій та екології
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) бакалавр
Спеціальність 105. «Прикладна фізика та наноматеріали»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ **В. І. ТКАЧЕНКО**
підпис ініціали, прізвище

"____" _____2021__року

З А В Д А Н Н Я
НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ (ПРОЕКТ)

_____ Олійник Ілля Олегович_____
(прізвище, ім'я, по батькові студента)

1. Тема роботи «Вплив швидкості обертання та форми китайської дзиги на час перевороту»

керівник роботи Марущенко І. М., доцент, кандидат фіз.-мат. наук_____
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від "___"_____20__ року №___

2. Строк подання студентом роботи 21.05.2021_____

3. Перелік питань, які потрібно розробити
Вивчення теорії руху важкого дзиги. Знайомство з теорією гіроскопа. Огляд літератури, в якій описуються дзиги зі зміщеним центром ваги: китайський дзиґа, кельтський камінь, тощо. Знайомство з ефектом Джанібекова та його інтерпретацією.

Створення експериментальної моделі китайського дзиги. Проведення експерименту по перевертанню дзиги і фіксування експерименту на відеокамеру. Аналіз даних експерименту та їх інтерпретація.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1.	Вибір теми дипломної роботи, узгодження.
2.	Затвердження теми дипломної роботи на кафедрі.
3.	Робота над літературою.
4.	Написання вступу.
5.	Написання першого розділу.
6.	Написання другого розділу.
7.	Підготовка експерименту.
8.	Проведення експерименту та аналіз його результатів.
9.	Написання третього розділу.
10.	Написання висновків до дипломної роботи.
11.	Перевірка дипломної роботи науковим керівником.
12.	Попередній захист дипломної роботи.
13.	Захист дипломної роботи.

5. Дата видачі завдання 15.01.2021

Студент _____ **І. О. Олійник**
підпис ініціали, прізвище

Керівник роботи _____ **І. М. Марущенко**
підпис ініціали, прізвище

Зміст

Вступ 2

Розділ 1. Дзиґа зі зміщеним центром ваги 6

1.1 Прецесія гіроскопа 6

1.2 Китайська дзига 11

1.3 Кельтський камінь 16

1.4 Ефект Джанібекова 18

Розділ 2. Математична теорія перевороту китайської дзиги 21

2.1 Рівняння руху китайської дзиги 21

Розділ 3. Експериментальне дослідження перевороту китайської дзиги .....

3.1 Опис експерименту 27

3.2 Обертання та переворот китайської дзиги .....

Висновки 28

Список використаних джерел 29

Реферат

Олійник Ілля Олегович «Вплив швидкості обертання та форми китайської дзиги на час перевороту» (випускна робота бакалавра), - Харків: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2021.- 68 с.

Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків; містить 17 рисунків, 0 таблиць, список використаних джерел з 21 найменувань.

Проаналізовано механіку процесу перевороту дзиги Томсона. Розглянуто існуючі напрямки по роботі із дзигою Томсона. Експериментально визначена швидкість перевороту дзиги.

Ключові слова: дзиґа Томсона, китайська дзиґа

Abstract

Oliynyk Ilya Olehovych "Influence of the speed of rotation and the shape of the Chinese whirligig on the time of the coup" (bachelor's thesis), - Kharkiv: KhNU named after VN Karazina, 2021.- 68 p

The work consists of an introduction, three sections, conclusions; contains 17 figures, 0 tables, a list of used sources of 21 items.

The mechanics of the Thomson spin revolution are analyzed. The existing directions of work with the Thomson spinning top are considered. The spinning speed of the spinning top was experimentally determined.

Key words: Thomson's whirligig, Chinese whirligig

Вступ

На сьогодни у світі відомі три різні види гіроскопів: важкі обертові гіроскопи, оптичні гіроскопи та вібраційні гіроскопи. До першої категорії належать всі пристрої, що мають масу, що стабільно обертається навколо вільної рухомої осі. Оптичні гіроскопи засновані на ефекті Саньяка, яким стверджується, що зсув фаз між двома хвилями, що розповсюджуються в обертовому кільцевому інтерферометрі, пропорційний кутовій швидкості петлі. Вібраційні гіроскопи засновані на ефекті Коріоліса, який викликає зв'язок між двома резонансними режимами механічного резонатора.

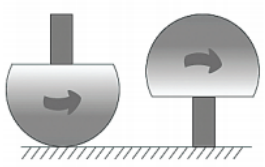
Основна конфігурація гіроскопа використовує інерційні властивості колеса (або ротора), що обертається з великою швидкістю, яке прагне утримувати напрямок своєї осі обертання внаслідок схильності тіла протистояти будь-якій зміні напрямку свого моменту. У 1960-х роках був розроблений Динамічно Налаштований Гіроскоп (DTG), який базується на цьому фізичному принципі. DTG багато років використовувався в аерокосмічній та військовій промисловості, він був також включений до обладнання космічного шаттла. Одним з найбільш успішних обертових масових гіроскопів є гіроскоп Control Moment Gyroscope (CMG), що широко використовується для стабілізації супутників. Він складається з обертового ротора та одного або декількох моторизованих карданних валів, які нахиляють кутовий момент ротора. У міру нахилу ротора мінливий кутовий момент викликає гіроскопічний крутний момент, який обертає космічний корабель. CMG використовувались десятиліттями у великих космічних кораблях, таких як Skylab, космічна станція "Мір" та міжнародна космічна станція.

Окрім високотехнологічних гіроскопів, що є дуже чутливими інструментами для космічної галузі, є також значно простіші за конструкцією та менші за розміром гіроскопи, що можуть визначити розташування тіла у просторі та зафіксувати його найменший рух. Такі гіроскопи можна знайти навіть в сучасних ноутбуках і

смартфонах. Таким чином, можна констатувати, що гіроскопи є дуже важливими інструментами для сучасного світу, вони добре вивчені і дозволяють виконувати обчислення с дуже великою точністю.

З точки зору своєї будови, важкий обертовий гіроскоп – це пристрій, в основі якого знаходиться масивна дзиґа. Рух звичайної дзиги важко назвати простим – їм захоплювались навіть такі вчені, як Нільс Бор та Вольфганг Паулі. Але для його опису можна використовувати класичну механіку, і описання руху традиційної важкої дзиги можна знайти у багатьох університетських підручниках.

Втім, існує особливий клас дзиг – дзиги зі зміщеним центром ваги. Вони також називаються дзигами Томсона. Ці дзиги відомі ще з XIX століття, їх також можна зустріти під назвою “китайський дзиґа”. Вони зазвичай мають форму гриба: це сфера зі зрізанім дном, до якого прикріплена ножка. Її особливість полягає в тому, що центр мас знаходиться внизу і положенням рівноваги для нерухомого дзиги є положення ногою вгору.



Мал.1.1. Китайський дзиґа.

Але, коли він починає рухатися, у якийсь момент дзиґа перевертається, стає на ногу і продовжує обертатися у такому положенні (див. рис. 1.1). Згодом його швидкість зменшується через втрату енергії на тертя і він знову падає. Найбільш цікавим моментом тут є перший етап, коли обертання з деякою швидкістю призводить до перевертання дзиги із рівноважного положення, але не відразу, а лише через деякий час. Більш того, після перевороту його рух буде дуже стійким, і якщо штовхнути дзигу вбік, він буде коливатися навколо нового положення рівноваги (ногою вниз і з

центром ваги у верхній частині). Якою повинна бути швидкість обертання, який час потрібен дзигі для перевороту і як це залежить від його форми?

Описання руху і перевороту китайського дзиги давалися неодноразово, у тому числі в класичній монографії Магнуса. Але ті питання, що сформульовані вище, ще не мають задовільної відповіді. Це і стало мотивацією для експериментального дослідження залежності часу перевороту китайського дзиги від його форми і швидкості обертання.

Мета дослідження: експериментально установити залежність часу перевороту китайської дзиги від її форми і швидкості обертання.

Об'єкт дослідження: китайська дзига.

Предмет дослідження: класична теорія гіроскопа зі зміщеним центром ваги.

Методи дослідження: обертання і переворот китайської дзиґи, що була виготовлена на 3-D принтері, фіксувалося за допомогою відеокамери і аналізувалося за допомогою тахометра. Результати експерименту порівнювались з класичною теорією китайської дзиґи.

Апробація отриманих результатів: результати роботи будуть представлені на конференції "Фізико-технічні проблеми енергетики та шляхи їх вирішення 2021", що відбудеться у червні 2021 року.

Розділ 1. Дзиґа зі зміщеним центром ваги

1.1Прецесія гіроскопа

Вільний гіроскоп.

У цьому випадку моменти всіх зовнішніх сил, включаючи гравітацію, щодо центра ваги гіроскопа дорівнюють нулю. Це можна реалізувати, наприклад, помістивши гіроскоп на кардан.

У такому випадку

$$M = 0; \qquad \frac{dL}{dt} = 0$$

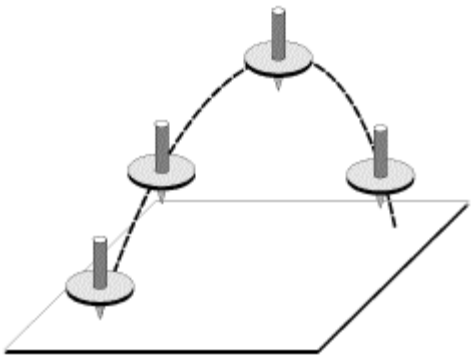
і момент імпульсу зберігається: L = const.

Гіроскоп рухається як вільне тіло обертання. Залежно від початкових умов, можливі декілька варіантів поведінки гіроскопа:

1. При обертанні гіроскопа навколо осі симетрії напрямки кутової швидкості і кутової швидкості збігаються:

$$L = L_\omega = const,$$

а напрямок осі симетрії гіроскопа залишається незмінним. Це можна перевірити, повернувши кронштейн, на якому кріпиться стабілізатор. При кожному повороті підтримувача вісь гіроскопа зберігає постійний напрям у просторі. З тієї ж причини джига «вистрілила» вгору (мал. 1), зберігаючи напрямок своєї осі під час польоту і рівномірно обертаючись до тих пір, поки кінетична енергія не буде вичерпана.



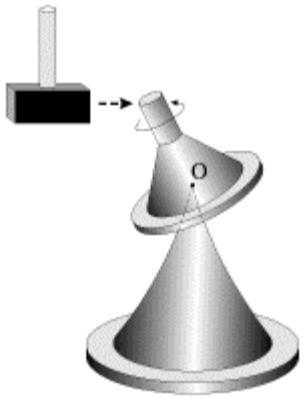
Мал.1.

Вільний гіроскоп, повернений навколо осі симетрії, дуже стійкий. З основного рівняння моментів бачимо, що зміна моменту імпульсу дорівнює

$$\Delta L = \int_0^{\Delta t} M dt.$$

Якщо часовий інтервал Δt малий, то $\Delta \mathbf{L}$ теж малий, тобто при короткочасному впливі дуже великих сил рух гіроскопа змінюється незначно. Гіроскоп, здається, чинить опір спробам змінити свій кутовий момент і здається «затверділим».

Візьмемо конусоподібний гіроскоп, який спирається на опорний стрижень в центрі його мас О (мал. 2). Якщо корпус гіроскопа не обертається, він знаходиться у стані рівноваги, та найменший поштовх зрушує його з місця. Але якщо це тіло змусити швидко обертатися навколо своєї осі, то навіть сильні удари дерев'яним молотком не зможуть істотно змінити напрямок осі гіроскопа в просторі. Стабільність вільного гіроскопа використовується у різних технічних пристроях, наприклад, в автопілоті.



Мал.2

2. Вільний гіроскоп обертається таким чином, що вектор миттєвої кутової швидкості і вісь симетрії гіроскопа не збігаються (зазвичай ця розбіжність несуттєва при швидкому обертанні). Коли це стосується гіроскопа, це називається нутацією. У цьому випадку вісь симетрії гіроскопа, вектори **L** та ω лежать у площині, що обертається навколо напрямку з кутовою швидкістю, рівною $\frac{L}{J_x}$, де J_x- момент інерції гіроскопа відносно головної центральної осі перпендикулярно осі симетрії. Ця кутова швидкість (назвемо її швидкістю нутації), як виявляється, досить велика при правильному і швидкому обертанні гіроскопа, і нутація сприймається оком як невелике тремтіння осі симетрії гіроскопа.

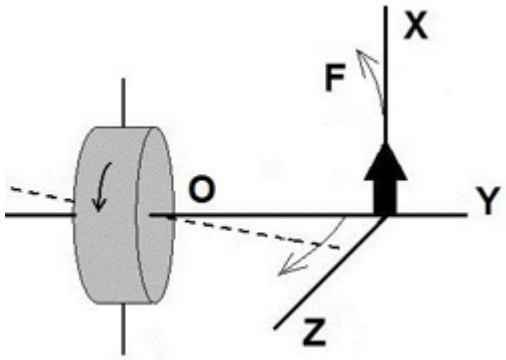
Рух нутації можна легко продемонструвати за допомогою гіроскопа, що показаний на мал. 2 - це відбувається при ударі молотка по стрижні гіроскопа, що обертається навколо своєї осі. У цьому випадку, чим більше обертається гіроскоп, тим більше кутовий момент L, і тим більше швидкість нутації і «тонше» розгойдування осі фігури.

У цьому дослідженні виявляється ще одна характерна особливість нутації - з часом вона поступово зменшується і зникає. Це результат неминучого тертя в оправі гіроскопа.

Наша Земля - це свого роду гіроскоп, і для неї теж характерний рух типу нутації. Це пов'язано з тим, що Земля дещо сплющена у полюсів, через що моменти інерції щодо осі симетрії (J_z) та відносно осі, що лежить в екваторіальній площині (J_x, J_y), розрізняються. В цьому випадку $J_x = J_y$ а $\frac{J_z - J_x}{J_x} \approx \frac{1}{300}$. У системі відліку, пов'язаною з Землею, вісь обертання рухається по поверхні конуса навколо осі симетрії Землі з кутовою швидкістю ω_0, що обчислюється за формулою, тобто здійснює один оберт приблизно за 300 днів. Насправді, через нібито неабсолютну жорсткість Землі, цей час виявляється більшим - близько 440 днів. У цьому випадку відстань між точкою на поверхні землі, через яку проходить вісь обертання, і точкою, через яку проходить вісь симетрії (Північний полюс), становить всього кілька метрів. Нутаційний рух Землі не згасає - можливо, він підтримується сезонними змінами, що відбуваються на поверхні.

Окремо можна виділити типи інерційних пропелерів, у яких використовуються ефекти, що виникають в результаті вимушеної прецесії гіроскопа.

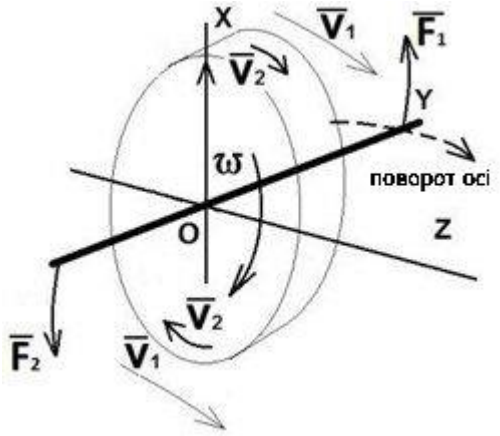
Розглянемо ефект примусової обробки у класичному сенсі: гіроскоп прагне підтримувати крутний момент, і будь-який рух його осі обертання (вимушена прецесія) створює пару сил, тобто, скажімо, додатковий крутний момент, що компенсує це обертання. На мал.3 зображено векторне накладення сил, що виникають при вимушеній прецесії осі гіроскопа.



Мал.3. Сили, що виникають при вимушеній прецесії осі гіроскопа

Важлива особливість: сила F не лінійна, вона створює поворот осі обертання гіроскопа в площині XOY, якщо на вісь діє зовнішня сила, що повертає її у площині ZOY. Інша особливість даного ефекта - це збільшення швидкості, якщо гіроскоп обертається швидше, і поворот осі в площині ZOY відбувається швидше.

Проаналізуємо ефект: ми спостерігаємо виникнення сили, схожої на силу Лоренца або Магнуса. Розглянемо аналогії і причини виникнення даної сили в рамках ефіродинаміки. На мал.4 показаний гіроскоп, який обертається навколо осі Y, і повертається в площині YOZ.



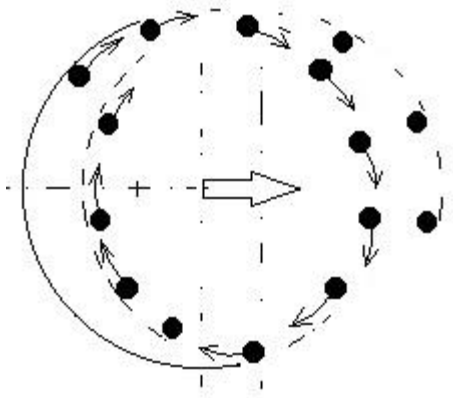
Мал.4. Векторне складання швидкостей вгорі та внизу гіроскопа.

Виникають дві гіроскопічні сили: F_1, що направлена вгору, та F_2, що направлена униз. Обидві сили знаходиться в площині XOY з точки зору спостерігача, який бачить обертання гіроскопа за годинниковою стрілкою навколо осі Y (обертання за годинниковою стрілкою).

Звернемо увагу на такий факт, що різні частини прецесійного гіроскопа рухаються з різною швидкістю щодо зовнішнього середовища. Швидкість руху частинок у верхній частині гіроскопа відносно зовнішнього середовища більша, ніж швидкість руху частинок у нижній частині гіроскопа відносно середовища, за рахунок додавання випрямляча векторів швидкостей V_1 та V_2. В результаті, як і в газовій динаміці за законом Бернуллі, тиск зовнішнього середовища на частинки речовини в різних частинах гіроскопа неоднаковий, тобто на попередньому гіроскопі існує градієнт тиску навколишнього середовища. Ефект проявляється як в повітрі, так і в вакуумі, тому є підстави говорити про динамічний тиску ефіру зовнішнього середовища на частинки речовини гіроскопа.

Таким чином, пара гіроскопічних сил може бути продемонстрована градієнтом тиску ефіру на обертових частинках гіроскопічної матерії. Отже, це зовнішня сила, і ми можемо використовувати її в конструкції гребних гвинтів активного типу. При проектуванні слід враховувати, що ця сила не переміщує гіроскоп лінійно, а обертає його вісь в площині XOY, збільшуючи крутний момент гіроскопа.

Також подивимося на проблему з іншого боку. На мал.5 показані траєкторії точки на периферії обертового гіроскопа під час його прецесії (обертання осі обертання).



Мал.5. Траєкторія точки на прецесіруєм гіроскопі

Відстань від даної точки до центру обертання гіроскопа постійна, але, з урахуванням того, що сам центр обертання гіроскопа (при вимушеній прецесії) рухається, така траєкторія руху точки в просторі вже не є окружністю. Очевидно, що кривизна різних ділянок даної траєкторії не є постійною, тому швидкість руху і прискорення криволінійного руху також не є постійним.

Відцентрова сила, що діє на тіло при його прискореному криволінійному русі, залежить від величини прискорення, і, в даному випадку, вона також не є однаковою на різних ділянках траєкторії. Таким чином, виникає градієнт сили, переважно в одному напрямку.

Розглянемо рух гіроскопа як наслідок фундаментального рівняння механіки

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M},$$

де L - вектор моменту імпульсу (вектор моменту кількості руху), t - час, M - вектор моменту кількості руху. У наближеної теорії гіроскопа момент кількості руху, пов'язаний з повільною прецесією гіроскопа, не враховується, і вважається, що момент кількості руху повністю визначається обертанням маховика:

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega},$$

де I - момент інерції маховика гіроскопа, а ω - вектор кутової частоти обертання маховика. З іншого боку, момент сил M, що діють на гіроскоп

$$\mathbf{M} = [\mathbf{a}, \mathbf{F}].$$

Тобто, векторний добуток радіус-вектора **a**, проведеного від центру гіроскопа до точки прикладання сили **F** = m**g**, де m - маса вантажу, **g** - вектор прискорення вільного падіння, і сили **F**.

Момент **L** змінюється тільки за рахунок прецесії гіроскопа з кутовою швидкістю **Ω**. Отже:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\Omega, \mathbf{L}].$$

Остаточно отримуємо:

$$[\Omega, I\boldsymbol{\omega}] = -[m\mathbf{g}, \mathbf{a}].$$

Оскільки вектор **ω** спрямований вздовж вектора **a**, ми можемо записати, таким чином

$$\Omega = -\left(\frac{am}{I\omega}\right)g.$$

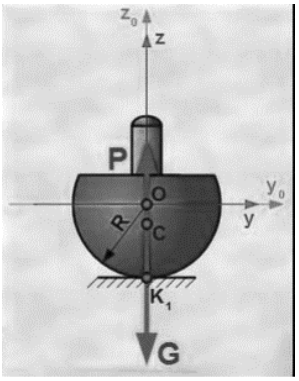
Таким чином, з цієї формули видно, що маховик гіроскопа буде здійснювати повільне обертання (прецесію) і кутова швидкість прецесії тим більша, чим більшою є маса підвішеного вантажу. Наведене вище міркування справедливо за умови Ω << ω, тобто для швидко обертового гіроскопа. Для гіроскопів, що використовуються в техніці, величина кутової швидкості прецесії в мільйони разів менше кутової швидкості обертання маховика.

1.2 Китайський дзиґа

Китайський дзиґа, або дзиґа Томсона - це сфера зі сферичним сегментом, відрізаним приблизно на половину або трохи більше половини радіусу сфери. Циліндрична ручка прикріплена до площини зрізу, що виходить за межі сферичної поверхні. При передачі китайській дзигі обертального імпульсу (моменту кількості руху) навколо осі, що проходить через центр сфери і збігається з віссю циліндричної ручки, спочатку спрямованої вертикально вгору, вона досить швидко піднімається, повертається на 180 °, піднімається, опирається на кінець ручки, і в цьому положенні, спираючись на шию, тепер спрямовану прямо вниз, продовжує стійке обертання. Це обертання на кінці ручки триває до тих пір, поки сила тертя не «подолає» кінетичний момент і кінетична енергія не перетвориться на теплову. В цьому суть цього явища.

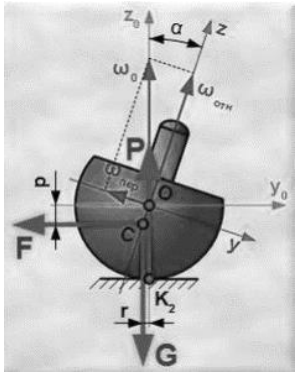
Китайська дзиґа в перевороті

1. Дзиґа в стані спокою знаходиться в стійкому положенні, торкаючись опорної поверхні точкою К1. Якщо придивитися, то ми впізнаємо дитячу іграшку «іван-встанька» (мал.6).



Мал.6. Китайська дзиґа

2. Проведіть верхню частину, повернувши її проти годинникової стрілки навколо осі Z, якщо дивитися зверху.
3. Китайська дзиґа обертається не на гострій ніжці, як у звичайній класичної стільниці, а на сферичної поверхні з радіусом R. Отже, через найменше відхилення осі z від вертикалі z_0, вершина обертається навколо осі z з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega_{отн.}}$ Напрям осі обертання починається безпосередньо від осі симетрії z, описує конус навколо вертикалі z_0 з невеликим кутом α і вершину в центрі радіусу кривизни поверхні шарикопідшипника до точки O (мал.7).



Мал.7.

4. Неможливо розпочати обертання без відхилення, мінімальне відхилення (мікрон) на практиці завжди буде через тертя в точці $\mathbf{K_1}$, через тертя з повітрям через неоднорідність матеріалу лицьової сторони і - як наслідок - невелике зміщення центру мас **C** від геометричної осі симетрії **z**.
5. Якщо з'явиться навіть невеликий кут розбіжності **α**, центр ваги вершини **C** відразу ж зміститься щодо вертикалі z_0 на відстань **r**.
6. Цей зсув негайно викличе відцентрову силу інерції **F**.

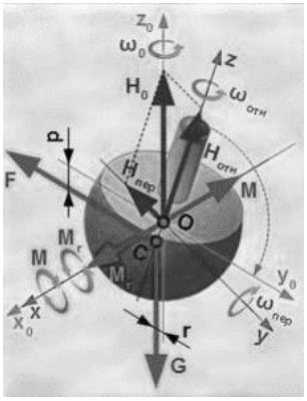
$$F = m \cdot a = m \cdot r \cdot \omega_0^2$$

яка, як зрозуміло із формули, прямо пропорційна масі дзиґи **m**, віддалі **r** від центру мас точки **C,** вертикалі z_0 і квадрату абсолютної кутовий швидкості ω_0 навколо осі z_0, яка верх вийшов при повороті.
7. Виникає сила **F**, що разом з вагою **G** створюють момент зовнішніх сил **M**:

$$M = F \cdot p - G \cdot r, \quad (M > 0)$$

що намагається повернути дзигу навколо осі **X** (точка **O**) за годинниковою стрілкою, якщо дивитися спереду.

8. Поява моменту зовнішніх сил викликає гіроскопічний ефект і прецесію, що робить китайську дзиґу здатною до прецесії. Гіроскопічний момент Mr, що протидіє моменту зовнішніх сил **M**, намагається його врівноважити. Вершина, відповідно до закону прецесії, обертається навколо осі **y**, намагаючись зв'язати свій вектор кутового моменту $\mathbf{H_{отн}}$ щодо осі **z** з вектором моменту зовнішніх сил **M** на найкоротшому шляху (тобто навколо осі **y**) (мал.8).



Мал.8

$$\boldsymbol{H}_{\text{отн}} = \boldsymbol{I_z} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r^2} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}$$

$$\boldsymbol{M_r} = \boldsymbol{H}_{\text{отн}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} = \boldsymbol{M}$$

9. Швидкість прецесії (швидкість повороту дзиґи навколо осі **y**) $\boldsymbol{\omega_{пер}}$ обчислюється за формулою:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} = \boldsymbol{M}/\boldsymbol{H}_{\text{отн}} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{\omega_0^2} \cdot \boldsymbol{p} — \ \boldsymbol{g})/(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r^2} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}})$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} = (\boldsymbol{\omega_0^2} \cdot \boldsymbol{p} — \ \boldsymbol{g})/(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}})$$

10. Якщо знехтувати тертям в точці, де м'яч торкається поверхні, і опором повітря, ми можемо припустити, що кутовий момент H_0 навколо вертикальної фіксованою осі z_0, отриманий спочатку зверху, залишається постійним:

$$H_0 = I_0 \cdot \omega_0 = const$$

11. У зв'язку з викладеним вище модулі кутових швидкостей $\omega_{\textbf{отн}}$ і $\omega_{\text{пер}}$ відносних і поперечних переміщень при повороті відносяться як катети прямокутного трикутника і визначаються по теоремі Піфагора:

$$\boldsymbol{I_0 \cdot \omega_0} = ((\boldsymbol{I_y \cdot \omega}_{\text{пер}})^2 + (\boldsymbol{I_z \cdot \omega}_{\text{отн}})^{\mathbf{2}})^{0,5} = \boldsymbol{const}$$

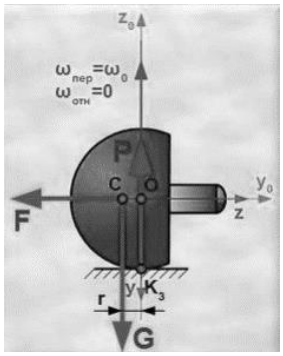
12. Отже, зі збільшенням нахилу осі **z** від вертикального положення переноситься кутова швидкість $\boldsymbol{\omega_{\text{пер}}}$ (швидкість прецесії) буде збільшуватися, а відносна кутова швидкість обертання $\boldsymbol{\omega_{\text{отн}}}$ буде зменшуватися.

13. Збільшення кутової швидкості прецесії $\boldsymbol{\omega_{\text{пер}}}$ означає, що обертання дзиґи навколо осі у буде безперервно прискорюватися, і в результаті прецесія швидко «заповнить» вершину в положенні, в якому ручка і вісь пов'язана з **z** буде в горизонтальній площині (мал.9)

14. Прямо зараз відбудеться дивовижна, але природна метаморфоза! Китайський дзиґв на мить припинить обертання навколо осі **z** і зупиниться. Але він продовжить обертатися зі швидкістю ω_0 навколо осі **y,** яка буде об'єднана з фіксованою вертикальною віссю z_0.

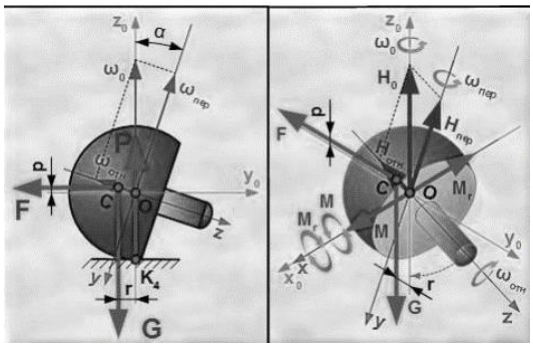
$$\boldsymbol{\omega_0} = \boldsymbol{\omega}\text{пер}$$

$$\boldsymbol{\omega}\text{отн} = 0$$



Мал.9.

15. Ця зупинка займе частки секунди. Аналогічно початкового моменту, обертаючись навколо осі z_0, вершина почне утворювати конус з дуже малим кутом **α** на вершині точки **O** через сферичну форму опорної поверхні (мал. 10). Прецесія (обертання навколо осі **y**) продовжиться.



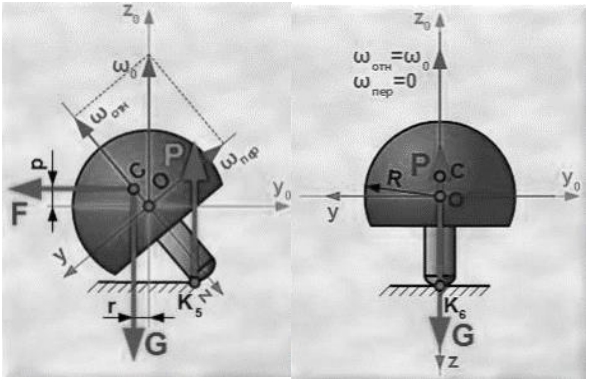
Мал.10.

16. Момент зовнішніх сил **M** змінить напрямок своєї дії, а сила інерції **F** «прийме в якості союзників» силу тяжіння **G** для «спільної боротьби» з гіроскопічним моментом **Mr**.

$$\boldsymbol{M = F \cdot p + G \cdot r}$$

17. Момент гіроскопа **Mr** змінить свій напрямок у відповідь на зміну напрямку моменту зовнішніх сил **M**. Китайська вершина почне обертатися навколо осі **Z** в напрямку, протилежному свого початкового обертанню.

18. У той час як моменти, описані вище, протилежні один до одного, прецесія і сила тертя, що котять сферичну поверхню столу за базовою площиною, будуть продовжувати «перевертатися» до тих пір, поки вісь **z** НЕ вирівняється з негативним напрямком $\mathbf{z_0}$ **(**мал.11).

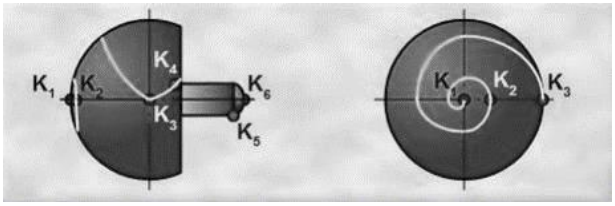


Мал.11. *Мал.12.*

19. Прийнявши вертикальне положення ручкою вниз, китайський дзиґа залишиться в стійкому положенні і продовжить обертатися до моменту «вичерпання» моменту імпульсу $\mathbf{H_0}$ (мал.12)

20. Оскільки китайський дзиґа, на відміну від класичного, при обертанні котиться, точка опори постійно змінюється, і кінчик його ручки повторює траєкторію точки опори. У період переворотів ця траєкторія не є конусом класичної вершини! Якщо на опорну поверхню всипається тонкий шар борошна

(або порошку, або тальку) і починається верх, то після закінчення обертання на поверхні кульки можна побачити спіральний слід (мал.13).

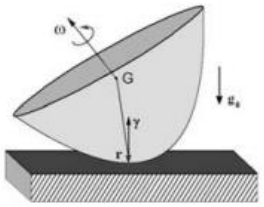


Мал.13

Це шлях точки повороту, що рухається по поверхні кулі. Спіральний слід спочатку закручується в одному напрямку (за годинниковою стрілкою на малюнку), а потім повертається у протилежному напрямку.

1.3 Кельтський камінь

Основною властивістю неголомної моделі є наявність неінтегруємих зв'язків, що означає, що швидкість точки контакту тіла з площиною вважається нульовою. У цій ситуації сила тертя не може здійснювати роботу, тому механічна енергія зберігається, і система в цьому сенсі консервативна. Неголомна модель кельтського каменю правильно передає основні якісні характеристики руху, але всі ефекти (коливання і розвороти) відбуваються за більш тривалі характерні часи, ніж в реальних експериментах.



Мал.14: Для виведення рівнянь руху моделі кельтського каменю: r - радіус-вектор, що з'єднує центр мас G з точкою контакту Q, v, ω - швидкість центру мас і кутова швидкість тіло

Умова нульової швидкості точки контакту можна записати у вигляді v + ω × r = 0. Передбачається, що всі вектори, що проектуються на осі, жорстко пов'язані з твердим тілом. Рівняння для зміни моменту і моменту кількості руху відносно центру мас G мають вигляд

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} - mg_0\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{N},$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{I\omega}) = \boldsymbol{I\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{N} \quad (1)$$

де N - реакція в точці контакту, γ - вертикальний одиничний вектор (спрямований проти сили тяжіння), m - маса тіла, g_0 - прискорення вільного падіння, I - тензор моментів інерції над центр мас. Виключаючи v і N за допомогою рівняння зв'язку, отримуємо

$$\left(\boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}\right) + m\boldsymbol{r} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}) + m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}})$$

$$= \boldsymbol{I\omega} \times \boldsymbol{\omega} + m(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + mg_0\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad (2)$$

де вектор ω виражається через M. Вектори r і γ пов'язані співвідношенням

$$\gamma = -\frac{gradF(\boldsymbol{r})}{|gradF(\boldsymbol{r})|}, \qquad (4)$$

де F (r) = 0 - рівняння поверхні тіла. Рівняння (3) характеризуються наявністю так званого геометричного інтеграла (γ, γ)=1 і інтеграла енергії $H = \frac{1}{2}(M, \omega) - mg_0(r, \gamma)$. На відміну від рівнянь Ейлера - Пуассона, для рівнянь (3) в загальному випадку немає інтеграла площ і інваріантної заходи, що призводить до нових динамічних ефектів, що не характерним для Гамільтонові систем _0_. При моделюванні руху кельтського каменю часто передбачається, що поверхня тіла має форму еліптичного параболоїда, для чого ми пишемо

$$F(r) = \frac{1}{2}\left(r_1^2 / \frac{a_1 + r_2^2}{a_2}\right) - (r_3 + h) = 0,$$

$$r_1 = -\frac{a_1\gamma_1}{\gamma_3}, \mathrm{r}_2 = -\frac{\mathrm{a}_2\gamma_2}{\gamma_3}, \qquad r_3 = -h + \frac{1}{2}\frac{a_1\gamma_1^2 + a_2\gamma_2^2}{\gamma_3^2}. \quad (5)$$

Тут a_1, a_2 - основні радіуси кривизни в вершині параболоїда, h - висота центру мас, розташованого на осі параболоїда.

Припустимо, що одна із головних осей інерції OX3 збігається з головною геометричною віссю $\mathbf{e}_3$, а дві інші головні осі інерції повернені щодо геометричних осей на кут δ. Отже, тензор інерції в геометричних осях має вигляд

$$I = \begin{pmatrix} I_1\cos^2\delta + \mathrm{I}_2\sin^2\delta & (I_1 - I_2)\cos\delta\sin\delta & 0 \\ (I_1 - I_2)\cos\delta\sin\delta & I_1\sin^2\delta + I_2\cos^2\delta & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Константи I_1, I_2, I_3 представляють основні центральні моменти інерції твердого тіла. У термінах кутів Ейлера система (3) описує поведінку кутів θ нутації і відповідного повороту φ, що визначаються виразами cos θ = γ_3, tg φ = γ_1 / γ_2. Кут прецесії ψ і положення точки контакту можна отримати зведенням в квадрат, якщо ми знаємо

рішення рівнянь (3). Замість кутів і змінних Ейлера (M, γ) при числовому дослідженні зручно використовувати змінні Андуайе - Депре (L, G, H, l, g). Не зупиняючись на обговоренні його фізичного сенсу, наведемо явні формули перерахунку:

$$L = M_3, \qquad G = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2},$$

$$H = M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 + M_3\gamma_3, \;\; l = \arg(M_2 + iM_1), \quad (7)$$

$$g = arg[HL/(G - G\gamma_3 + i(M_2\gamma_1 + M_1\gamma_2)]$$

При описі динаміки в даних змінних свідомо обрано фактор (γ, γ) = 1, і формули (7) при зазначеному обмеженні відгукуються позичково єдиному перетворенню. У фазовому місці в різноманітті, встановленому умовою сталості двох інтегралів руху, рівняння руху (3) встановлюють багатовимірний потік, розріз багатовимірної гіперплощини якого призводить до певного тривимірного відображення Пуанкаре. Воно, не зараховують до класу зберігають міру, що призначає разі перебування феноменів, подібних спостережуваним в дисипативних системах, в тому числі стабільних точок, що обмежують циклів, странних аттракторов, що відповідають за хаотичну динаміку. Тривимірне поділ чотиривимірної поверхні незмінною енергії H (L, G, H, l, g) = E зробимо площиною g = const, координати на якій можна задати величинами (l, L / G, H / G). Тому завдання доводиться до тривимірного відображення Пуанкаре F, що можна обчислювати певним в деякій тісному області. Відповідно до формул (7), на будь-якому рівні H / G = const можна ідентифікувати точки з координатами l і l + 2π, а того ж не відрізняти всі крапки прямій L / G = 1, зіставивши їй єдину точку. Встановивши ці угоди, набуваємо двовимірну сферу S^2, і фазовий місце відображення F гомеоморфним прямому добутку $S^2 \times [-1, 1]$. Нерухомим точкам відображення Пуанкаре F відповідають періодичні рішення потокової системи (3), його інваріантним кривим - двовимірні тори, а двовимірним точковим велика кількість - тривимірні різноманіття в фазовому просторі потокової системи.

1.4 Ефект Джанібекова

Ефект Джанібекова полягає в дивному русі тіла, у якого всі три головні моменти інерції є різними. Вперше цей ефект спостерігався у невагомості. Даний результат був розтлумачений через аксіому про перехідну вісь, або аксіому тенісної ракетки у традиційній механиці - закон про мінливості вертіння жорсткого тулуба відносно 2-ий основний осі інерції. Вважається результатом законів класичної механіки, що описують переміщення жорсткого тулуба зі 3-ма різними моментами інерції.

Аксіома представляє наступний дію: оборот предмета щодо основних осей зі максимальний також мінімальним факторами інерції вважається стабільним, у в такому випадку період так само як оборот близько основний осі зі перехідним фактором інерції (з яких місць також найменування аксіома перехідною осі) - відсутня. Джанібеков зауважив дане зі гайкою-баранчиком: скрутивши її в невагомості зі тривалої шпильки, хтось зазначив, то що кохана пролітає трохи, розгортається в 180 °, потім, ще трохи промчав, знову відбувається.

Загальноматематичний огляд результату

Аксіома тенісної ракетки в силах неодмінно проаналізована з підтримкою рівняння Ейлера.

Присутність вільного обертання, вони знаходять випливає конфігурацію:

$$I_1\dot{\omega_1} = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3, \quad (8)$$

$$I_2\dot{\omega_2} = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1, \quad (9)$$

$$I_3\dot{\omega_3} = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2, \quad (10)$$

Тут I_1, I_2, I_3 означають ключові моменти інерції, а також представляємо, то що $I_1 > I_2 > I_3$ Кругові швидкості 3-х ключових осей - $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, їх вивідні згідно періоду - $\dot{\omega_1}, \dot{\omega_2}, \dot{\omega_3}$.

Розберемо ситуацію, коли предмет крутиться біля осі зі фактором інерції I_1. З метою знаходження балансу сил, уявімо, то що є дві невеликі вихідні кругові швидкості відносно інших 2-ух осей. У підсумку, відповідно до рівняння (8), (ω_1)˙ вельми незначна. Тобто, зв'язком з періоду $\dot{\omega_1}$можливо не брати до уваги.

Тепер розмежовуємо зрівнювання (9), а також підставимо $\dot{\omega_3}$ з рівняння (10),

$$I_2I_3\ddot{\omega_2} = (I_3 - I_1)(I_1 - I_2)\omega_1^2\omega_2$$

Сфокусуємо інтерес, то що прикмети близько ω_2також $\ddot{\omega_2}$ різні. Таким чином, спочатку невеликий темп ω_2 бути залишатися невеликим також у подальшому. Диференціюючи рівність (10), можливо обґрунтувати також стабільність порівняно з обуренням ω_3. Так як ці дві швидкості ω_2 також ω_3 залишаються невеликими, невеликою залишається також $(\dot{\omega_1})$. За цієї причини оборот близько осі 1 відбувається зі стабільною швидкістю.

Подібне судження демонструє, то що оборот близько осі зі фактором інерції I_3 також постійно.

Зараз використовуйте дані роздуми до осі зі фактором інерції I_2. У даний один раз $\dot{\omega}_2$ вельми незначна. Таким Чином, зв'язком з періоду ω_2 можливо проігнорувати.

Зараз, розмежовуємо рівність (8) також підставимо $\dot{\omega}_3$ з рівняння (10)

$$I_1 I_3 \ddot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)(I_1 - I_2)\omega_2^2 \omega_1$$

Зосередимо інтерес, то що прикмети близько ω_1 також $\ddot{\omega}_1$ схожі. Таким чином, спочатку невеликий темп ω_2 стане показово збільшуватися аж до тих часів до тих пір поки $\dot{\omega}_2$ ніяк не припинить бути невеликою також вид вертіння близько осі 2 не зміниться. Подібним способом, в тому числі і незначні обурення по осей змушують предмет «перевертатися».

Розділ 2. Математична теорія перевороту китайської дзиґи

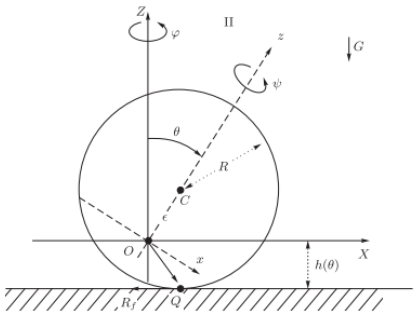
2.1 Рівняння руху китайської дзиґи

Проаналізуємо ексцентрикову область (мал.15) з геометральний осередком у пункті C також осередком мас у пункті O. Прямолінійний, що зв'язує орган темряви зі геометричний осередком, вважається віссю інерційної симетрії: у площині, перпендикулярній до цієї осі, тензор етапу інерції області має 2 схожих основні етапи інерції. З Метою відображення переміщення області, стануть застосовуватися 3 концепції відліку:

(I) інерціальна (лабораторний) концепція Mxyz, в якому місці M - якась місце в площині столу, лінія z стрімкі;

(II) (неінерційній) крутиться концепція OXY Z з базою розташування у фокусі темряви O також зі третьою віссю, крім того синхронної вертикалі; осі X також Y стануть встановлені далі;

(III) головна концепція осей Oxyz, у якою лінія z сходиться з віссю симетрії області (відзначимо, то що в праці [5] підставою відліку у концепціях (II) також (III) призначається ніяк не орган темряви, але орган області).

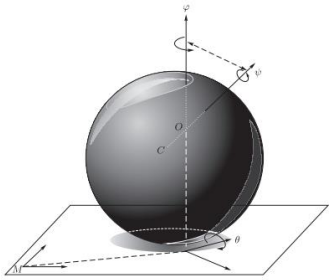


Мал.15. Форма дивного стрімголов у варіанті ексцентрикової області. R - радіус області, орган темряви O зрушать в дистанція є з геометральній середини. Іграшка крутиться в горизонтальному столі з пунктом контакту Q. Лінія симетрії Oz також стрімка лінія OZ встановлюють область П (що включає безпосередню OQ), що крутиться біля осі OZ з вугільний швидкістю φ˙. Рівень місця O треба столом однакова h (θ).

Концепції відліку (II) також (III) представлені в малюнку 4. Оригінальність є є дистанція серед осередком темряви O також геометричний осередком C, присутність

даному 0 <ε <R , в якому місці R - радіус області. Моменти інерції станемо називати за допомогою Ix = Iy ≡ A, Iz ≡ C. Місце контакту зі площиною опори відзначимо допомогою Q.

Відзначимо допомогою (θ, φ, ψ) Ейлерові кути оглядається тулуба порівняно осі OZ (рис. 5) . Область II (область O_zZ) включає градієнт q = OQ, що зв'язує орган темряви зі пунктом контакту. Область II схилена під кутом φ до вертикальній площині Mxz також крутиться близько вертикалі OZ зі вугільний швидкістю φ˙. Підберемо горизонтальну лінію OX у площині II подібним способом, для того щоб лінія OY існувала перпендикулярна до даної площини. У крутиться концепції лінія Ox знаходиться під площині II також перпендикулярна до осі симетрії Oz, але лінія Oy сходиться з OY. (Відзначимо, то що осі Ox також Oy припускають основні осі, проте вони ніяк не скріплені з тулубом.) Ракурс серед вертикаллю OZ також віссю стрімголов Oz класифікується за допомогою θ. Кругова темп ˙ θ представляє нутацію тулуба у вертикальній площині II.Ракурс ψ встановлює ухил тулуба згідно стосункам до концепції OXY Z, похідна ψ˙ - оборот області близько її осі симетрії. Відзначимо допомогою e_1, e_2, e_3 окремі вектори в доль осей OX, OY, OZ, але за допомогою i, j, k - окремі вектори по осей Ox, Oy, Oz. Відзначимо, то що e_2 = j. З за присутності природного трансляційної симетрії (тіла в площині) характеризуємо тулуб, скориставшись умовними (переміщаються) концепціями відліку (II також III), але ніяк не досконалою концепцією I. Присутність даному я нехтуємо трансляційне переміщення згідно площині також концентруємося в умовному переміщенні тулуба, у якому також висловлюється дії китайської дзиґи.



Мал.16. Ейлерови кути (φ, θ, ψ), цілком характеризують положення тулуба, зі координатами середини темряви O, встановленими у інерційної концепції зі осередком M. Градієнт (умовного) затвердження тулуба має тип

$$x = xi + yj + zk = Xe_1 + Y e_2 + Ze_3, \qquad (2.1)$$

або x = (x, y, z) Oxyz = (X, Y, Z) OXY Z. Відзначимо, то що концепції відліку (II) також (III) об'єднані співвідношеннями

$$x = X\cos\theta - Z\sin\theta,$$

$$y = Y, \qquad (2.2)$$

$$z = X \sin\theta + Z \cos\theta.$$

Концепції відліку (II) також (III) крутяться з відносними круговими швидкостями

$$\Omega_{II} = (0, 0, \dot{\varphi})_{OXYZ} = (-\dot{\varphi} \sin\theta, 0, \dot{\varphi} \cos\theta)_{Oxyz}, \qquad (2.3)$$

$$\Omega_{III} = (-\dot{\varphi} \sin\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}\cos\theta)_{Oxyz}$$

Кругова темп тулуба ω включає, крім цього, кругову темп ψ˙

$$\omega = -\dot{\varphi} \sin\theta \boldsymbol{i} + \dot{\theta}\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k} = \dot{\psi} \sin\theta e_1 + \dot{\theta} e_2 + \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta\right) e_3 =$$

$$= (n - \dot{\varphi}\cos\theta) \sin\theta e_1 + \dot{\theta} e_2 + (\dot{\varphi}\sin^2\theta + n\cos\theta)\, e_3, \quad (2.4)$$

де n ≡ ψ˙ + ˙φ cos θ - відображення вектора ω в лінія Oz, найбільш знаменита так само як обертання. Потім я станемо використовувати зазначенням ω = (ω_i, ω_j, ω_k). У відповідності зі даними станемо називати за допомогою I тензор інерції області, в той час вугільний період області стане рівний

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I\omega} = -A\dot{\varphi} \sin\theta \boldsymbol{i} + A\,\dot{\theta}\boldsymbol{j} + Cn\boldsymbol{k} = (Cn - A\dot{\varphi}\cos\theta)\sin\theta e_1 + A\dot{\theta} e_2 + A\dot{\varphi}\sin^2\theta + Cn\cos\theta) e_3. \quad (2.5)$$

Цяточка контакту Q володіє розташування

$$Q = \left(-h^2(\theta)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\cos\theta}{h(\theta)}\right), 0, -h^2(\theta)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{h(\theta)}\right)\right)_{Oxyz} =$$

$$= (\epsilon \sin\theta, 0, \epsilon\cos\theta - R)_{OXYZ} = (R\sin\theta, 0, \epsilon - R\cos\theta)_{Oxyz} \quad (2.6)$$

Темп точки контакту Q однакова

$$V_Q = v_0 + \omega \times q, \qquad (2.7)$$

де q = OQ позначає градієнт, виконаний з середини темряви O до пункті контакту Q, але v_O - темп середини темряви. Припускаючи v_O = Ue_1 + V e_2 + We_3 також скориставшись цим прецедентом, то що Q = ⟦(h ^, (θ), 0, -h (θ)) (OXY Z), набуваємо

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q} = \left(-\dot{\theta}h(\theta), \sin\theta\left(\epsilon\dot{\varphi} + R\dot{\psi}\right), -\dot{\theta}h(\theta)\right)_{OXY\,Z} =$$

$$= (-\dot{\theta}h(\theta), \sin\theta(\epsilon\dot{\varphi} + R(n - \dot{\varphi}\cos\theta)), -\dot{\theta}h(\theta))_{OXY\,Z}. \quad (2.8)$$

Таким чином,

$$V_Q = (U - \dot{\theta}h(\theta), V + sin\,\theta(\epsilon\dot{\varphi} + R(n - \dot{\varphi}cos\,\theta)), W - \dot{\theta}h\,(\theta))_{OXY\,Z}(2.9)$$

Ця обставина, то що область залишається у контакті з столом, проявляється (голономних) взаємозв'язком

$$Z_{\,O}h(\theta) = R - \epsilon cos\,\theta,(2.10)$$

Де h (θ) - рівень середини темряви O треба столом (мал.15). З даного вимога необхідно, то що e3-елемента вектора v_O володіє тип

$$W \equiv \frac{d}{dt}Z_O = \dot{\theta}h\,(\theta) = \epsilon\dot{\theta}sin\,\theta,(2.11)$$

таким чином то що Z-елемента вектора VQ дорівнює нулю у відповідності зі покладеним обставиною. Відзначимо, то що фізіологічна тлумачення вектора VQ зажадає обліку дійства ковзання. У разі VQ ≠ 0 тулуб ковзає згідно площині. Навпаки, обертальний рух тулуба характеризується цим прецедентом, то що $V_Q = 0$. Рівняння переміщення станемо брати до атмосфері Ньютона, так само як результат впливу зовнішніх сил. В тулуб функціонують відповідне мощі:

(I) гравітаційна вплив $G = -mge_3$, в якому місці m - абсолютна безліч області;

(II) Сила $F_Q = R_n + R_f$, що функціонує в місце контакту Q . Тут $R_n = R_n e_3$ - звичайна вплив взаємодії опори під пункті Q (пояснена строгістю площині), R_f - вплив незгоду. З Метою всебічності згадаємо службу [20], в якому місці запропонована точна форма дивного Кубарєв, що враховує гнучкі якості столу також Кубарєв.

Тертя передбачає собою міць протидії, що функціонує серед станами, що намагається заважати переміщенню також призупинити його. Як Правило відрізняють тертя спокою (вплив незгоду перешкоджає послужити причиною в рух покоїться тулуб) також тертя переміщення (вплив незгоду намагається призупинити переміщення тулуба). Я на увазі, то що вплив незгоду цілком визначена ковзанням області по площині, також ігноруємо абсолютно всіма іншими джерелами незгоду. Мощі незгоду можуть мати непростий тип, також з метою їх є різноманітні модифікації. Я отримуємо здогад тягучого незгоду [9, 15, 21] також маємо на увазі, то що вплив незгоду володіє тип

$$R_{\,f} = -\mu R_n V_Q,(2.12)$$

в якому місці μ - показник незгоду ковзання зі розмірністю (швидкість) $^{-1}$. Градієнт R_f сумірний величиною потужності стандартної взаємодії опори також з часом спадає аж до нульової позначки VQ → 0. (Інший модифікацією мощі незгоду вважається таким чином іменоване кулоновское тертя $R_f = -\mu R_n (V_Q / | V_Q |)$. Подібна форма непридатна

присутність $V_Q \rightarrow 0$ з-за єдиною натури даної мощі присутність $V_Q = 0$.) Ейлерови рівняння переміщення для сфери

$$\frac{dL}{dt} + \Omega \times L = q \times F_Q \quad (2.13)$$

описують еволюцію кутового моменту L в неінерціальної системи відліку, що обертається з частотою Ω під дією моменту сили q × FQ. Рівняння руху центру мас O під обертається системі відліку має вигляд

$$m\left(\frac{dv_0}{dt} + \Omega \times \mathrm{v}_0\right) = -G + F_Q \quad (2.14)$$

У координатах системи відліку (III) рівняння руху (2.13) приймають вид

$$\begin{gathered} A\ddot{\varphi} sin\,\theta = (Cn - 2A\dot{\varphi} cos\,\theta)\dot{\theta} + z_Q F_Y, \\ A\ddot{\theta} = -\dot{\varphi} sin\,\theta(Cn - A\dot{\varphi} cos\,\theta) + Z_Q F_X - X_Q R_n, \quad (2.15) \\ C\dot{n} = x_Q F_Y, \end{gathered}$$

де $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)_{Oxyz} = (X_Q, Y_Q, Z_Q)_{OXY\,Z}$ та $F_Q = (F_X, F_Y, F_Z)_{OXY\,Z}$.. З рівняння руху центру мас (2.14) в координатах системи відліку (II), отримуємо

$$\begin{gathered} m(\dot{U} - \dot{\varphi} V) = F_X, \\ m(\dot{V} + \dot{\varphi} U) = F_Y, \quad (2.16) \\ m\dot{W} = R_n - mg. \end{gathered}$$

Згадавши, що $W = \theta h$, (θ), з останнього рівняння цієї групи можна вивести вираз для Rn:

$$R_n = mg + m\frac{d}{dt}(\dot{\theta} h'(\theta)) = mg + m\epsilon\left(\ddot{\theta} sin\,\theta + \dot{Q}^2 cos\,\theta\right) \quad (2.17)$$

Рівняння переміщення (2.15) також (2.16) можна записати у варіанті концепції з 6 сполучених нелінійних звичайних диференціальних рівнянь 1-ий режиму у нестійких (u, v, α, φ, β, θ, n), в якому місці $\alpha \equiv \dot{\varphi}, \dot{\beta} \equiv \dot{\theta}, u \equiv mU, v \equiv mV$ Припускаючи з метою нескладності m = 1, можливо уявити дані рівняння в традиційній фігурі

$$\begin{gathered} \dot{b} = f(b) \text{ (при } \sin\theta \neq 0\text{):} \\ \dot{\alpha} = \frac{1}{sin\,\theta}\left[\frac{C}{A} n\beta - 2\alpha\beta\, cos\,\theta + z_Q \frac{F_Y}{A}\right], \\ \dot{\beta} = \frac{1}{A}[\alpha\, sin\,\theta(A\alpha\, cos\,\theta - Cn) - R_n X_Q + Z_Q F_X], \quad (2.18) \\ \dot{\theta} = \beta, \\ \dot{n} = \frac{x_Q F_Y}{C} \end{gathered}$$

$$\dot{u} = \alpha v + F_X ,$$
$$\dot{v} = -\alpha u + F_Y ,$$
$$\dot{\varphi} = \alpha,$$
$$\dot{\psi} = n - \alpha \cos\theta.$$

Необхідно пригадати, то що величини Rn, F_X, F_Y знаходяться в залежності крім того з інших нестійких. До Прикладу, з (2.17) також (2.18) отримуємо

$$R_n = \frac{g + \beta^2 h''(\theta) + h'(\theta)\alpha \sin\theta(\alpha\cos\theta - Cn/A)}{1 + h'(\theta)/A[-h(\theta)\mu(U - \beta h(\theta)) + h'(\theta)]}. \quad (2.19)$$

Згадаємо умову Rn≥0. У Випадку Якщо прибрати цю вимогу, область втрачає зв'язок зі поверхнею. Формулювання з метою F_X також F_Y подібним способом випливають з (2.12). Важливо мати на увазі, то що якась частка текстури рівнянь переміщення (2.18) визначена симетрією. Пригадаймо, то що гармонія показана евклідовскій командою E (2) (містить трансляції, вертіння також відображення у площині Mxy) також командою вертіння SO (2), що функціонує так само як оборот області близько її осі симетрії. Вплив евклідовскій симетрії виражається в тому, то що реакційна частка рівнянь переміщення ніяк не включає даних про стан області в площині Подібно, через поворотною симетрії рівняння ніяк не включають в явному вигляді кута φ. Концепцію можливо аналізувати так само як 3 пов'язаних концепції з взаємозв'язком виду косоокий роботи: розвиток величин α, β, θ також n ніяк не залежить з u, v також φ, але розвиток u також v ніяк не залежить з φ. Відзначимо крім того, то що стан середини темряви згідно стосункам до площини (у координатах Mxy) у переконанні можна знайти, інтегруючи швидкості u також v згідно періоду. Так Як я беремо до уваги тертя, аксіома Нетер ніяк не може бути застосована, таким чином то що зазначені категорії симетрії не повинні бути джерелом (також ніяк не приводять) до зберігається величинам. Але, так само як визначив зі підтримкою приблизних міркувань Джеллетт [8] також в подальшому аргументував Раус [6], концепції (2.18) відповідає подальша зберігається розмір:

$$J = -L \cdot q$$

У самому процесі, з (2.13) необхідно (dL / dt + Ω × L) ⊥q, таким чином то що

$$\frac{d}{dt}J = -L\left(\frac{d}{dt}q + \Omega \times \mathrm{q}\right) = -(Cn - A\dot{\varphi}\cos\theta)h'(\theta)^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin\theta}{h'(\theta)}\right) = 0$$

Відзначимо, то що інваріант Джеллетта можна записати у варіанті [10 , 15, 21]

$$J = Cn(R\cos\theta - \epsilon) + A\dot{\varphi}R\sin^2\theta$$

РОЗДІЛ 3: Експериментальне дослідження перевороту китайської дзиги

Проведен експеримент. Для визначення перерахованих вище параметрів необхідно було проаналізувати швидкість обертання джиги і зробити відеозапис моменту обертання високошвидкісною камерою з частотою зйомки 120 кадрів в секунду. Використовуючи отриману розкадрування, крім швидкості обертання 1,49 1 / с, яка була зафіксована в момент обертання поворотної платформи за допомогою лазерного тахометра, ми визначаємо кутову швидкість обертання за формулою: $\omega = 2\pi\nu$ отримуємо, що швидкість при ударі 9,35 рад / с.



Мал.3.1. Момент перевороту джиги

Розглянемо сили, що діють на тіло. Сила тяжіння P і сила реакції опори N створюють момент сили, який прагне перекинути стільницю. Це призводить до того, що вісь вершини зміщується перпендикулярно площині дії цих сил, тобто прецесії. Напрямок зміщення осі показано на малюнку 5 червоною стрілкою. Під час прецесії вісь вершини описує конічну поверхню з вершиною в точці L. Слід зазначити, що

прецесія осі вершини також існувала на самому початку її обертання через неминуче поштовху, про який ми говорили їй під час обертання (ідеально крутити дзига неможливо), але ця прецесія була невеликою.

Крім моменту пари сил P і N, на пік також впливає момент сили тертя F Тр щодо центру мас стільниці. На малюнку 6 показаний верхній наконечник в збільшеному вигляді. Якщо точка контакту наконечника з поверхнею не перебуває на осі обертання стільниці (стільниця нахилена), момент сили тертя лежить в площині креслення і спрямований вертикально. Вершина завжди рухається, коли присутні ці дві речі. Давайте тепер повернемося до саміту Томсона і спробуємо пояснити його поведінку.

Оскільки вовчок Томсона являє собою кулю з обрізаної вершиною, його центр тяжіння знаходиться нижче геометричного центру. При розгортанні дзиги мимоволі відхиляє свою вісь від вертикального положення. Але оскільки верхня частина має сферичну форму, в результаті цього відхилення кінчик її опори змінюється. Вісь повороту площини залишиться колишнім - вертикальним і не буде збігатися з її геометричною віссю. А оскільки центр ваги верху знаходиться нижче геометричного центру м'яча, тому в результаті цього відхилення його центр ваги більше не буде перебувати на осі обертання. Літак не затримується в бічному положенні, а ковзає по ньому за інерцією, торкаючись своєю ногою площині, на якій він обертається. Як тільки це відбудеться, точка повороту вершини переміститься з точки А в точку В, а вершина, обертаючись навколо своєї осі, він почне прецесію навколо осі В-В '.

Іншими словами, дзига Томсона буде вести себе як «звичайний» дзига. Під дією моменту сили тертя він вирівняє свою вісь з вертикальною віссю ВВ' і продовжуйте обертати м'яч вгору. З наведених вище міркувань ясно, що ми зобов'язані таким дивним поведінкою вершини Томсона силі тертя. Дійсно, якщо сила тертя була відсутня, то дзига, вдаряючись ногою об площині, повертався в бічне становище і обертав гачок до тих пір, поки він мав досить великий кут швидкість. І тоді під дією моменту сили тяжіння повернувся б в початкове положення.

Для визначення максимальної швидкості було вирішено провести експеримент, в якому за допомогою високошвидкісної камери можна визначити кутову швидкість обертання, а також розрахункову швидкість обертання і перенесення центру. сила тяжіння.

Звичайна дзига при повороті (в обидва напрямки) має такі властивості:

• в процесі обертання вістрі нагорі, стикається з жорсткою площиною, не змінюється

• висота центру ваги вгорі залишається постійною під час процесу

На перший погляд здається, що ці властивості повинні дотримуватися на будь-який стільниці (без джерела енергії всередині). Однак через особливої форми і розподілу ваги на корпусі стільниці може статися складне обертання: через деякий час після початку обертання з верхнього положення стільниця переходить в фазу бічного обертання з ніжкою по горизонталі, а потім різко повертає ногу з піднятим центром тяжіння і починає обертатися, торкаючись площині кінчиком ноги, зберігаючи напрямок обертання. Зверніть увагу, що величина кутового моменту не змінюється в процесі обертання.

Загальний висновок:

У роботі розглянуто теоретичні відомості про ефект Джанібековим, а також виділені відомості про фізику процесів, що відбулися при ударі так званого китайського дзиґи. Оскільки китайський джига, на відміну від класичного, при обертанні котиться, точка опори постійно змінюється, кінчик його ручки повторює траєкторію точки опори. У період переворотів ця траєкторія не є конусом класичної вершини! Якщо на опорну поверхню прокидається тонкий шар борошна (або порошку, або тальку) і запускається верх, то після закінчення обертання на поверхні кулі видніється спіралевидний шар. Кутова швидкість обертання Томсона також була визначена експериментально. Було визначено, що сферична форма підстави стільниці сприяє реалізації можливості повороту (переходу з нестабільного стану при обертанні в стійкий).

Список використаних джерел

[1] Perry J. Spinning tops and gyroscopic motions. New York: Dover, 1957. 102 pp. [Перри Дж. Вращающийся волчок. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютерн. исслед., 2001. 112 с.]

[2] Cohen R. J. The tippe top revisited // Amer. J. Phys., 1977, vol. 45, no. 1, pp. 12–17.

[3] Gray C. G., Nickel B. G. Constants of the motion for nonslipping tippe tops and other tops with round pegs // Amer. J. Phys., 2000, vol. 68, no. 9, pp. 821–828.

[4] Or A. C. The dynamics of a tippe top // SIAM J. Appl. Math., 1994, vol. 54, no. 3, pp. 597–609.

[5] Bou-Rabee N. M., Marsden J. E., Romero L. A. Tippe top inversion as a dissipation-induced instability // SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 2004, vol. 3, no. 3, pp. 352–377.

[6] Routh E. J. Dynamics of a system of rigid bodies. New York: MacMillan, 1905. 431 pp. [Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел: В 2-х тт. М.: Наука, 1983. 464 с.]

[7] Braams C. M. On the influence of friction on the motion of a top // Physica, 1952, vol. 18, pp. 503– 514.

[8] Jellett J. H. A treatise on the theory of friction. London: MacMillan, 1872. 220 pp. [Джеллетт Дж. Х. Трактат по теории трения. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютерн. исслед., 2009. 264 с.]

[9] Kane T. R., Levinson D. A realistic solution of the symmetric top problem // J. Appl. Mech., 1978, vol. 45, no. 4, pp. 903–909.

[10] Ciocci M. C., Langerock B. Dynamics of the tippe top via Routhian reduction // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2007, vol. 12, no. 6, pp. 602–614.

[11] Branicki B. Y. M., Moffatt H. K., Shimomura Y. Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface: 3. Geometry of steady state structures for convex bodies // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2006, vol. 462, no. 2066, pp. 371–390.

[12] Branicki B. Y. M., Shimomura Y. Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface: 4. Stability of steady spin states and the «rising egg» phenomenon for convex axisymmetric bodies // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2006, vol. 462, no. 2075, pp. 3253–3275.

[13] Ebenfeld S., Scheck F. A new analysis of the tippe top: Asymptotic states and Liapunov stability // Ann. Physics, 1995, vol. 243, no. 2, pp. 195–217.

[14] Rauch-Wojciechowski S., Sk¨oldstam M., Glad T. Mathematical analysis of the tippe top // Regul. Chaotic Dyn., 2005, vol. 10, no. 4, pp. 333–362.

[15] Moffatt H. K., Shimomura Y., Branicki M. Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface: 1. Stability and the gyroscopic approximation // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2004, vol. 460, no. 2052, pp. 3643–3672.

[16] Bastiaens R., Detand J., Rysman O., Defloo T. Efficient use of traditional-, rapid- and virtual prototyping in the industrial product development process // Proc. of the 4th Internat. Conf. on Adv. Res. in Virtual and Rapid Prototyping (VRAP'09) (Lleira, Portugal, 2009) / P. J. da Silva B´artolo et al. London: Taylor & Francis, 2010. P. 515–520.

[17] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Динамические системы — 3 / В. И. Арнольд. (Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, т. 3.) М.: ВИНИТИ, 1985. С. 5–290.

[18] Moffatt H. K., Tokieda T. Celt reversals: A prototype of chiral dynamics // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 2008, vol. 138, no. 2, pp. 361–368.

[19] Tokieda T. Private communications, in Proceedings of the Geometric Mechanics and its Applications (MASIE), Lausanne, Switzerland, July 2004.

[20] Friedl Ch. Der Stehaufkreisel: Zulassungsarbeit zum 1. Staatsexamen. Universit¨at Augsburg, 1997. 63 pp. http://www.physik.uniaugsburg.de/%18wobsta/tippetop/index.shtml.en.

[21] Ueda T., Sasaki K., Watanabe S. Motion of the tippe top: Gyroscopic balance condition and stability // SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 2005, vol. 4, no. 4, pp. 1159–1194.