МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАУКОВО-НАВЧАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ

Кафедра комп'ютерної фізики

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем бакалавр

«Числове дослідження коливань заповнювача в резервуарах при сейсмічних впливах»

Виконав: студент 4 курсу, групи НФ-44 Куценко М.С.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Комп'ютерна фізика
Керівник: ас. Караєв Артем Олександрович

Рецензент:

Харків – 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики

Кафедра комп'ютерної фізики

Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) бакалавр

Спеціальність: 105 Прикладна фізика та наноматеріали

Освітня програма: Комп'ютерна фізика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Костянтин НЄМЧЕНКО

підпис

«_____» _____ 2022 року

ЗАВДАННЯ

на кваліфікаційну роботу бакалавра студентові

Куценку Михайлу Сергійовичу

1. Тема роботи «Числове дослідження коливань заповнювача в резервуарах при сейсмічних впливах», керівник роботи ас. Караєв Артем Олександрович, затверджені наказом по університету від 27 квітня 2022 № 4201 – 5/121.

2. Строк подання студентом роботи 10.06.2022

3. Перелік питань, які потрібно розглянути:

№ з/п	Перелік питань
1	Варіаційне формулювання динамічної задачі теорії пружності
2	Формулювання задачі дослідження коливань пружної оболонки з

	рідиною. Метод заданих форм.
3	Вимушені коливання оболонок з рілиною
4	Сейсмічне навантаження на циліндричну оболонку з рідиною

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми, узгодження, а також затвердження її на кафедрі
2	Робота над літературою та іншими джерелами
3	Затвердження теми на кафедрі
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6	Написання третього розділу
7	Завершення написання дипломної роботи (висновки та література)
8	Подача науковому керівнику
9	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
10	Попередній захист
11	Захист

5. Дата видачі завдання « » _____ 2022 р.

Студент _____ Михайло КУЦЕНКО

підпис

Керівник роботи _____ Артем КАРАЄВ

підпис

ЗМІСТ

ВСТУП 7

СУЧАСНИЙ СТАН ПРОБЛЕМИ ДЕМПФУВАННЯ ПЛЕСКАНЬ В РУХОМИХ РЕЗЕРВУАРАХ ТА З'ЯСУВАННЯ ЕФЕКТІВ РІЗНИХ ПРИСТРОЇВ, ПРУЖНИХ АБО ЖОРСТКИХ ПЕРЕГОРОДОК 11

1.1. Огляд конструкцій ємностей для зберігання отруйних легкозаймистих рідин 12

1.2. Класифікація конструкцій ємностей за обсягом та місцезнаходженням 13

1.3. Огляд спектру експлуатаційних впливів та аварійних ситуацій досліджуваних об'єктів 14

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З РІДИНОЮ 21

2.1 Варіаційне формулювання динамічної задачі теорії пружності. 21

2.2 Формулювання задачі дослідження коливань пружної оболонки з рідиною 22

2.3 Метод заданих форм 24

2.4 Розробка алгоритму розрахунку власних коливань оболонок обертання, частково заповнених рідиною 27

2.5 Розробка алгоритму розрахунку вимушених коливань оболонок обертання, частково заповнених рідиною. 29

ЧИСЛЕННИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ, ЗАПОЛНЕНИХ І НЕЗАПОЛНЕНИХ РІДИНОЮ. 31

3.1. Вимушені коливання напівсферичної оболонки, заповненої та заповненої рідиною. 31

3.2 Вимушені коливання напівсферичної оболонки із рідиною. 34

3.3 Вимушені коливання циліндричної оболонки із рідиною. 37

СЕЙСМІЧНЕ НАВАНТАЖЕННЯ НА ЦИЛІНДРИЧНУ ОБОЛОНКУ З РІДИНОЮ .. 40

ВИСНОВКИ 45

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 47

ВСТУП

Оболонки та оболонкові конструкції, що мають відділення, частково заповнені рідиною, широко застосовуються в сучасній техніці. Це паливні баки і контейнери, які застосовуються в різних галузях, таких як енергетичне машинобудування, аерокосмічна, нафтогазова промисловість, і транспорт.

Найчастіше такі резервуари працюють при підвищених експлуатаційних навантаженнях та містять агресивні або легкозаймисті заповнювачі. При інтенсивних силових впливах, раптово прикладеному навантаженні в резервуарах, що частково заповнені рідиною, спостерігається явище плескання.

Плескання рідини - це цікавий фізичний феномен величезного практичного значення, що має додатки в широкому спектрі технологій і технічних дисциплін. Це явище спостерігається в рухомих резервуарах, що містять рідину, таких як паливні баки ракет, баки, що застосовуються в морському і космічному транспорті, в сховищах, греблях, які перебувають під сейсмічним впливом, а також в реакторах і атомних судах. Баки для зберігання рідини є важливими складовими рятувальних і промислових об'єктів. Наземні циліндричні цистерни використовуються для зберігання різноманітних рідин - води для пиття та гасіння пожеж, нафти, вина, зрідженого природного газу, тощо. Поломка цистерн після руйнівних землетрусів може призвести до екологічної небезпеки, втрати цінного вмісту, пожеж.

Не добре спроектовані цистерни зазнали великої шкоди в минулих землетрусах, що призвело до катастрофічних наслідків. Наземні циліндричні цистерни використовуються для зберігання різноманітних рідин - води для пиття та гасіння пожеж, нафти, вина, зрідженого природного газу, тощо. Поломка цистерн після руйнівних землетрусів може призвести до екологічної небезпеки, втрати цінного вмісту, пожеж. Не добре спроектовані цистерни зазнали великої шкоди в минулих землетрусах, що призвело до катастрофічних наслідків.

Плескання - це низькочастотні коливання вільної поверхні рідини саме в частково заповненому контейнері.

На практиці існують значні проблеми щодо проектування та сейсмічного моделювання резервуарів для зберігання рідини. Динамічний відгук резервуарів з рідиною виражається в плесканні, що діє на вільних поверхнях. Коли паливний бак заповнений частково, велика кількість палива рухається всередині бака з поступальним і обертальним пришвидшенням, і генерує плескання. Зі зменшенням рівня пального протягом місії вплив сил, які діють на паливо, що залишилося, стає все більш помітним. Динаміку рідини, яка взаємодіє зі стінками пружного контейнера, в якому вона знаходиться, складно, і навіть неможливо, передбачити. Контроль плескань палива дуже потрібний для забезпечення стійкості космічного апарату.

Саме частково заповнені резервуари піддаються дії особливо сильних плескань. Потужний рух рідини може створити високий локалізований тиск рідини на стінки резервуара, що в свою чергу може призвести до руйнування конструкції або до втрати стійкості. Тому проектування таких резервуарів та паливних баків потребує ретельного дослідження поведінки рідини в ємностях в умовах експлуатації. Зауважимо, що ці умови змінюються під час польоту космічних апаратів, зокрема, ракет-носіїв. Як один з ефективних шляхів зменшення амплітуди плескань під час руху, використовують перегородки різного типу. Їх розміри, місця розташування, властивості матеріалів, з яких виготовлені ці демпфери, можуть бути визначені шляхом експериментальних досліджень. Але такі експерименти є досить коштовними та в деяких випадках можуть призвести до руйнування зразків та навіть гибелі персоналу, що проводив експеримент. Тому комп’ютерне моделювання динамічних процесів, що відбуваються в рухомих резервуарах та паливних баках з рідиною, є ефективним і потужним засобом віртуальних випробувань з метою отримання оптимальних варіантів конструкцій резервуарів.

Внаслідок геополітичного становища України після розпаду СРСР на її території залишилося безліч сховищ вогнебезпечних, отруйних хімічних речовин, що зберігаються в ємностях та резервуарах, які виготовлені ще у 60-ті роки минулого століття та фактично вичерпали свій нормативний ресурс. Як із

ємностями, так і зі сховищами за останні 20 років практично не проводилося регламентних та профілактичних робіт. Про це свідчать, приміром, систематичні вибухи складів боєприпасів під Мелітополем. Виявлено також небезпечні ушкодження судин тиску, які відпрацювали понад 20-30 років. Термін безпечної експлуатації такого обладнання вичерпано. Це може призвести до аварій та надзвичайних ситуацій техногенного характеру (вибухів, погіршення екологічної ситуації та умов життєдіяльності людини.)

Аналіз причин аварій та надзвичайних ситуацій техногенного характеру за останні роки показав, що майже у половині випадків (48 відсотків) вони мають технічний характер (незадовільний стан споруд, конструкцій, обладнання, їх значна зношеність). За підрахунками фахівців, зношеність зазначених об'єктів становить 50-70% і має тенденцію до збільшення. Наприклад, на ДП "Південний машинобудівний завод" 50% судин тиску з агресивним заповнювачем вичерпали нормативний ресурс довгострокової експлуатації. Виявлено небезпечні корозійні тріщини у зварних швах судин.

Навіть якщо ємності, укриття та сховища перебувають у справному стані, не виключено можливості їх руйнування внаслідок порушення умов транспортування, непередбачених катастроф, землетрусів, терактів та ін. Зазначимо, що таку кількість небезпечних об'єктів неможливо модернізувати та оновити у найкоротший термін.

Тому актуальною проблемою є оцінка їх міцності під дією експлуатаційних та форс-мажорних навантажень для вирішення питань порядку їх заміни та утилізації, а також створення сучасного підходу, заснованого на комп'ютерних технологіях, для аналізу операційного стану ємностей з агресивними, отруйними та легкозаймистими.

Зазначимо також, що не тільки оцінка стану існуючого обладнання, а й проектування нових високоефективних машин та споруд, що володіють необхідним рівнем надійності, потребує визначення міцності їх елементів. Ці дані дозволяють оцінити межу міцності конструкції при ударному чи сейсмічному впливі, зробити відбудову від небажаних резонансних частот,

виявити ще стадії проектування найнебезпечніші з погляду концентрації напруг зони. Специфікою конструкцій, що розглядаються, є їх робота при взаємодії з повітряним або водним середовищем, внаслідок чого для визначення шуканих міцнісних характеристик необхідно вирішувати завдання гідро-аеропружності, тобто. визначати поля напруг, деформацій та частоти коливань виходячи з того, що на пружне тіло діють сили тиску рідини чи газу.

Актуальність теми. У сучасному світі зберігання великих обсягів рідин є необхідністю, починаючи від звичайних водонапірних веж і закінчуючи цистернами з паливом на нафтопереробних заводах, в яких можуть зберігатися легкозаймисті рідини такі як: бензин, гас і різноманітні горючі речовини.

Непоодинокі випадки пошкодження резервуарів під дією сейсмічних сил, викликаних безпосередньо землетрусом або опосередковано.

На жаль, зараз ця проблема дуже актуальна в Україні, під час воєнних дій, під час сильного вибуху створюється ударна хвиля, здатна викликати сильні коливання рідини в ємності та призводити до виходу її зі строю.

Метою бакалаврської роботи є розроблення ефективного обчислювального методу для аналізу власних і вимушених коливань

Об’єкт дослідження - процеси коливань оболонок, частково заповненими рідиною.

Предмет дослідження – частоти та форми коливань рідини у оболонкових конструкцій

Методи дослідження обчислювальні методи скінченних і граничних елементів

Структура та обсяг роботи. Бакалаврська робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел з 40 найменувань, а також містить 20 рисунків та 4 таблиці. Загальний обсяг роботи складає 45 сторінок.

РОЗДІЛ 1
СУЧАСНИЙ СТАН ПРОБЛЕМИ ДЕМПФУВАННЯ ПЛЕСКАНЬ В РУХОМИХ РЕЗЕРВУАРАХ ТА З'ЯСУВАННЯ ЕФЕКТІВ РІЗНИХ ПРИСТРОЇВ, ПРУЖНИХ АБО ЖОРСТКИХ ПЕРЕГОРОДОК

Проведено аналіз наукової літератури. Вивчено методики моніторингу висотних споруд та резервуарів під дією вітрового та сейсмічного навантаження. На підставі проведеного аналізу вироблено деякі положення комп'ютерної технології моніторингу. Передбачається, що споруди та резервуари, які розташовані не в сейсмічно небезпечних районах, можуть піддаватися дії інтенсивних імпульсних впливів унаслідок вибухів, переміщення пластів на місцях видобутку корисних копалин. Такі навантаження можна промоделювати як дію горизонтального сейсма. Вивчено дані про технічний стан та аварійні ризики сховищ та ємностей з небезпечними заповнювачами, уточнено навантаження, що діють на аналізовані оболонкові конструкції, їх геометричні та конструкційні особливості.

Аналіз та вивчення науково-технічної літератури проводилися за такими напрямами:

- за методами дослідження динамічного стану оболонкових конструкцій
- з проблеми та об'єктів дослідження
- по спектру експлуатаційних впливів та аварійних ситуацій досліджуваних об'єктів
- щодо аналізу ситуацій аварійного ризику

Огляд методів вирішення задач динаміки оболонкових конструкцій показав, що використовуються:

- аналітичні методи [1,2] – до розрахунку спрощених моделей резервуарів;
- сіткові методи – використовуються рідко;
- метод кінцевих елементів (МКЕ) [3,4] - найбільш використовуваний та універсальний. Традиційне рішення пов'язаних задач гідропружності методом

кінцевих елементів пов'язане з дискретизацією як тіла, що деформується, так і всього об'єму рідини. Цей підхід призводить до завдань великої розмірності і відповідно до великих витрат часу для отримання необхідної точності.

- Програмні комплекси (МКЕ): ANSYS, NASTRAN, L-DYNA, API-100 (American Petroleum Institute), AWWA (American Water Work Association) та ін.
- Метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР)

При цьому підході вирішення крайових завдань механіки зводиться до граничних сингулярних інтегральних рівнянь. У задачах гідропружності шукані функції задаються як потенціали простого або подвійного шару з невідомими щільностями, що визначаються на межах суцільного середовища. При такому підході потенціали автоматично задовольняють диференціальні рівняння, які описують фізичне явище. Спроба задовольнити граничні умови призводить до інтегральних рівнянь на межах тіла. Вирішення цих рівнянь фактично вирішує початкову проблему.

Метод граничних елементів (МГЕ) [5] - чисельна реалізація МДІУ. Головна перевага зазначеного методу полягає у зниженні на одиницю розмірності вихідної крайової задачі. Це дозволяє суттєво скоротити час розрахунку, що призводить до якісно нових можливостей під час моделювання динамічної поведінки конструкцій.

При моніторингу технічного стану об'єктів необхідний точний та швидкий аналіз даних. Тому МГЕ кращий.

1.1. Огляд конструкцій ємностей для зберігання отруйних легкозаймистих рідин

Класифікація судин за геометричною формою (Рис. 1):

- конічні оболонки;
- циліндричні судини, що працюють під тиском пари або газу;
- сферичні ємності;
- призматичні цистерни та судини для транспортування та збереження зріджених газів, рідин та сипких матеріалів;

- складові оболонки обертання з плаваючими кришками

Різноманітні також розміри контейнерів. [6] наводяться розміри циліндричного контейнера для зберігання зрідженого природного газу: Діаметр 76м, висота стінки 41м, рівень заповнення рідиною 38м, об'єм рідини 172000м3, маса контейнера 4470 тонн, маса зрідженого газу 68954 тонн.

1.2. Класифікація конструкцій ємностей за обсягом та місцезнаходженням

Залежно від обсягу та місця розташування резервуари поділяють на три класи:

Клас 1 – особливо небезпечні резервуари об'ємом 10 000 м3 і більше, а також резервуари об'ємом 5000 м3 і більше розташовані безпосередньо по берегах річок, великих водойм та в межах міської забудови;

Клас 2 – резервуари підвищеної небезпеки обсягом від 5000 до 10000 м3;

Клас 3 – небезпечні резервуари об'ємом від 100 до 5000 м3.

Відстань між резервуарами приймають рівними: для резервуарів з плаваючими дахами не менше 0,5 діаметра; для резервуарів зі стаціонарними дахами та понтонами - 0,65 діаметра; для резервуарів зі стаціонарними дахами, але без понтонів – 0,75 діаметра.

Кожна група наземних резервуарів огороджується земляним валом або стінкою, висота яких приймається на 0,2 м вище за розрахунковий рівень рідини, що розлилася.

Класифікація судин характером заповнювача.

- цистерни для зберігання аварійного запасу питної води;
- судини, що працюють із радіоактивним середовищем;
- судини та балони для зберігання та транспортування зрідженого газу;
- судини, що містять агресивне середовище;
- судини, що містять вибухонебезпечне середовище;
- нафтосховища

По конструктивним особливостям вертикальні циліндричні резервуари поділяються на такі типи:

- резервуар із стаціонарним дахом без понтона;
- резервуар зі стаціонарним дахом із понтоном;
- резервуар з плаваючим дахом.

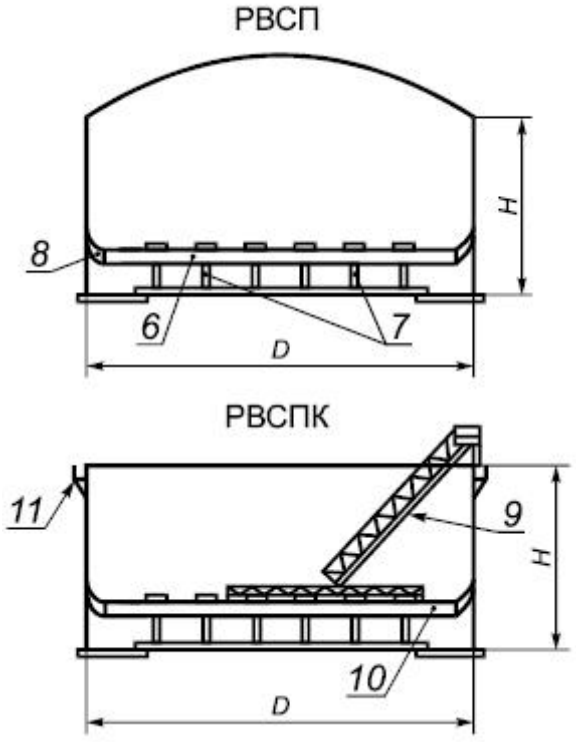


Рис 1 - Типи резервуарів

1 – каркас даху; 2 – пояси стінки; 3 – проміжні кільця жорсткості; 4 - кільце окраек; 5 – центральна частина днища; 6 – понтон; 7 – опорні стійки; 8 - ущільнюючий затвор; 9 - котучі сходи; 10 - плаваючий дах; 11 - верхнє кільце жорсткості (майданчик обслуговування)

1.3. Огляд спектру експлуатаційних впливів та аварійних ситуацій досліджуваних об'єктів

В результаті проведеного огляду уточнено та доповнено види навантажень, яким піддаються нафтосховища та резервуари з вогненебезпечними та отруйними рідинами. В експлуатаційному стані резервуари, найчастіше виготовлені у 60-70 рр. минулого століття, піддаються дії корозії, що призводить

до підвищення внутрішньої напруги, виникнення та зростання втомних тріщин. Це, у свою чергу, веде до часткового руйнування конструкції, витоку небезпечного з екологічного погляду вмісту.

В експлуатаційному стані багато видів наземних резервуарів піддаються дії вітрового навантаження, яке може призвести до втрати стійкості та несучої здатності конструкції.

У ситуаціях, пов'язаних з аварійним ризиком, резервуари можуть зазнавати впливу ударних та імпульсних навантажень, викликаних сейсмічними впливами, вибухами, пов'язаними з аваріями, терактами.

Хоча Україна не знаходиться в сейсмічній зоні, нова інформація вказує: рух пластів можуть відбуватися не тільки внаслідок землетрусів і вибухів, а й внаслідок провалів ґрунту на місцях вугільних виробок. Зазначимо, що на території Лисичанська є нафтосховища, що знаходяться у безпосередній близькості від таких виробок. Навантаження, що виникають під час руху пластів, можуть бути промодельовані як навантаження горизонтального сейсму.

Основними розрахунковими навантаженнями є:

- внутрішній чи зовнішній тиск;
- масові зусилля (маса об'єкта та вмісту);
- зусилля від реакції опор;
- температурне нагрівання;
- вібраційне навантаження.

Залежно від матеріалу виготовлення, резервуари поділяються на металеві та неметалічні. Металеві резервуари споруджують переважно із сталі, іноді з алюмінію. До неметалевих відносяться залізобетонні та пластмасові резервуари.

За схемою установки резервуари поділяються на: наземні та підземні.

Розробка математичних моделей взаємодії пружних конструкцій з рідиною

Як ємності для зберігання рідини обрана модель осесиметричної складової оболонки обертання. Оболонка вважається тонкою і до неї застосовуються гіпотези лінійної теорії Кіргофа-Лява. Рідина розглядається ідеальна,

несжимаемая, і її рух - потенційний. На першому етапі досліджень розглядаються малі коливання оболонки з рідиною у лінійному наближенні.

У роботі дано формулювання та запропоновано методи вирішення наступних завдань досліджень:

- Вільні коливання пружних оболонок обертання з рідиною.
- Вимушені коливання пружних оболонок обертання.

Проблема плескання рідини в контейнерах і баках знаходиться в центрі уваги багатьох дослідників протягом кількох останніх десятиліть. Цей феномен може бути описаний як рух вільної поверхні рідини, що міститься в резервуарі під дією раптово прикладеного навантаження. H. Olsen навів у [1] класифікацію коливань вільної поверхні рідини в резервуарах, виділивши три основні форми плескань: а) поздовжні плескання; б) вертикальні плескання; і) обертальні плескання. Плющування – це феномен, який виявляється у широкому діапазоні промислових додатків: у контейнерах для зберігання зрідженого газу, паливних баках ракет та літаків, у резервуарах вантажних танкерів.

Відомо, що частково заповнені резервуари схильні до дії особливо сильних хлюпань. Потужний рух рідини може створити високий локалізований тиск рідини на стінки резервуара, що може призвести до руйнування конструкції або викликати втрату стійкості.

Проектування таких резервуарів потребує ретельного дослідження поведінки рідини у резервуарах в експлуатаційних умовах. Плющування проявляється як результат впливу зовнішніх сил, викликаних прискоренням (раптовим уповільненням або зупинкою) об'єкта, що рухається, що містить рідину. На особливу увагу заслуговує вивчення розподілу тиску на стінках резервуара, виявлення його локальних максимумів, які можуть удвічі перевищувати значення відповідних величин у незаповненому резервуарі [7,8]. У вантажних танкерах проблема хлюпань стоїть особливо гостро: навіть малі рухи контейнера можуть призвести до значних хлюпань, що потребує вивчення стійкості.

Ряд досліджень, присвячених проблемам плескань рідини в резервуарах, знайшло своє відображення в ґрунтовних оглядах [9,10].

Перші роботи у цій галузі з'явилися торік у 1960-х і були пов'язані з вивченням плескань рідкого палива в реактивних двигунах. Оскільки ракетна техніка використовує рідке паливо, стало очевидним, що характер поведінки рідини в паливному баку істотно впливає на динаміку польоту. Це призвело до сплеску інтересу до проблем хлюпань рідини в резервуарі на початку 60-х років минулого століття, особливо після початку космічних програм СРСР та NASA (Gemini and Apollo programs). До цих досліджень відносяться роботи Г. Абрамсон [11-13].

У [14] Chwang та Wang застосували нелінійну теорію для визначення сили тиску на стінки кругових та призматичних резервуарів, що рухаються з прискоренням. Було виявлено, що на початковій стадії руху під дією імпульсного навантаження хвилі на вільній поверхні не виникають, а вся маса рідини переміщується на один бік контейнера. Далі, у роботах Г. Попова та співавторів [15,16] досліджувався вплив прискорення та кривизни вільної поверхні при русі у прямокутних контейнерах (плоска задача) та було встановлено, що динамічні характеристики істотно залежать від відношення рівня заповнення до ширини контейнера. У цих роботах показано, що максимальна висота підйому спостерігається у квадратних контейнерах з рівнем заповнення 30-60%, а максимальні зусилля виникають при рівні заповнення в межах 75-93%. Аналогічно, Ye і Birk [17] досліджували розподіл тиску на стінках горизонтального циліндричного судини безпосередньо після впливу ударного навантаження при рівні заповнення рідиною до 95%. Дослідження показало, що тиск на стінки резервуару зростає разом із збільшенням рівня заповнення. Faltinsen [18] вивчав короткочасні навантаження на резервуари з рідиною і описав п'ять різних фаз руху рідини з різними амплітудами. Chen і Chiang [19] провели чисельний експеримент для двовимірного прямокутного резервуара з жорсткими стінками при дії горизонтального і вертикального прискорення. У роботі розглядалася нев'язка несжимаемая рідина, враховувався нелінійний

характер руху. Тут також показано, що основна частота коливань суттєво залежить від ширини резервуара та рівня заповнення. Ефекти в'язкості досліджувалися в [20] Фалтінсен і Рогнебакке. Ними виявлено, що в'язкість проявляється при малих амплітудах та високому рівні заповнення. Проте, Bass в [21] встановив, що ефекти в'язкості можна знехтувати при великих амплітудах плескання. Традиційні підходи, що використовуються для оцінки навантажень при плескання включають лінійну і нелінійну теорію потенціалу, натурний експеримент та експеримент на модельних зразках. Останніми роками робляться спроби застосування методів обчислювальної механіки рідини (Computational Fluid Dynamics, CFD). До цих робіт слід зарахувати [22, 23]. Тут також показано, що частоти коливань істотно залежить від рівня заповнення. Тим не менш, методи та теорія потенціалу мають деякі обмеження та не здатні дати аналіз систем при явищах фрагментації рідини або злиття її окремих частин.

На цей час розроблено велику кількість моделей плескання рідини в резервуарі. Зупинимося тут на деяких із них.

У різних додатках досить застосовувати спрощені моделі для опису руху рідини в рухомому (наприклад, коливається) резервуарі. Перевага цих моделей полягає в тому, що вони дозволяють описати плескання достатньою точністю, використовуючи при цьому найпростіші рівняння. У окремих випадках вдається отримати аналітичні рішення. Зазначимо, що аналітичні рішення придатні лише для опису плескань із невеликою амплітудою у контейнерах простої геометричної форми. Такі дослідження не можуть бути узагальнені на плескання з великою амплітудою у контейнерах складної форми, з конструкційними перегородками [24].

Нелінійні рухи вільної поверхні можна вивчати лише з допомогою чисельних методів. У деяких випадках результати, отримані за спрощеними двовимірними моделями, можуть бути застосовані для опису поведінки рідини в тривимірній постановці. Проте такий перехід є проблематичним. Faltinsen в [25] встановив, що збудження коливань навіть на нижчій частоті вільних коливань рідини у двовимірному резервуарі може призвести до того, що рух стане

нестійким, потім суттєво тривимірним, і навіть хаотичним. У [26-27] Faltinsen провів серію досліджень тривимірних хлюпань, включаючи нелінійні хлюпання в кубічних та близьких до кубічних резервуарів.

В даний час використовується ціла серія різних чисельних методів та схем для опису характеру плескань у резервуарах із вільною поверхнею рідини. Wu зі співавторами в [29] розробив кінцево-елементний підхід для вирішення завдань про потенційну течію рідини та застосував його до дослідження тривимірної нелінійної поведінки рідини в резервуарі. Далі ці ж дослідники [30] розробили підхід, заснований на методі кінцевих різниць, для вивчення динаміки рідини в рухомому резервуарі в тривимірній постановці.

Curadelli [31] використовував метод кінцевих елементів для вивчення частот і форм вільних коливань сферичного резервуару. У [32] наведено уточнені рівняння для визначення форми вільної поверхні та запропоновано варіант методу кінцевих різниць для їх вирішення.

Визначення нелінійних хлюпань рідини в резервуарі можливе за допомогою методів CFD, що вимагає залучення складного математичного та програмного забезпечення. На практиці складніші моделі використовують для опису специфіки плескань у резервуарах складної форми, наприклад у паливних ракетних баках. Найчастіше використовують два типи найпростіших моделей. Перший – це так звана модель маятника, другий – це пружинна аналогія [33]. Обидві моделі ґрунтуються на наступному підході. Потрібно перетворити рух рідини так, щоб вона могла бути розглянута або як прикріплений до резервуару маятник або як прикріплена пружина. Звичайно, при цьому плескання можуть бути розглянуті лише в лінійній постановці.

Наступна модель визначає малі коливання. Розроблено та широко використовується програма SMALLSLOSH [34], за допомогою якої можна обчислити власні частоти та форми коливань для осесиметричного резервуару. Програмне забезпечення реалізує потенційну теорію, коли розглядається нев'язка та стислива рідина ([34]). У цьому вивчається безвихровий рух, тобто. Існує потенціал швидкостей, що задовольняє рівняння Лапласа. Вирішуючи це

рівняння за відповідних граничних умов на днищі та стінках резервуара, отримуємо розв'язання задачі про визначення руху рідини та характеру плескань.

У [35] запропоновано таку модель. Розв'язуючими рівняннями є рівняння Нав'є-Стокса, що є змішаною системою гіперболічних і еліптичних нелінійних диференціальних рівнянь у приватних похідних для опису руху в'язкої несжимаемой рідини. Положення та переміщення вільної поверхні рідини в резервуарі визначається за допомогою процедури, відомої як метод рідких обсягів. Це відомий потужний метод, заснований на застосуванні функцій, значення яких рівні одиниці всередині рідкого об'єму та нулю поза ним. Далі область, зайнята рідиною, ділиться на безліч мінімальних контрольних обсягів. Рівняння руху задовольняються кожному контрольному обсязі. Для визначення нового положення вільної поверхні використовуються стандартні методи розв'язання диференціальних рівнянь у приватних похідних.

РОЗДІЛ 2

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З РІДИНОЮ

2.1 Варіаційне формулювання динамічної задачі теорії пружності.

Наведемо варіаційне формулювання завдання динамічної теорії пружності. Рівняння руху отримаємо з варіаційного принципу Гамільтона

$$\delta L = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = 0 \ ,$$

де $\Pi = \int_V \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - f_i u_i\right) dV - \int_S P_i u_i \, dS$ та $T = \frac{1}{2}\int_V \rho \dot{u}_i \, \dot{u}_i dV$ – повна потенційна та кінетична енергія пружної системи;

$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ – тензор напружень;

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$ – тензор деформацій,

u_i – вектор переміщень;

f_i, P_i – масові і поверхневі навантаження.

При варіюванні невідомих змінних отримаємо рівняння руху тіла

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i + f_i = 0, \quad i,j = 1,3,$$

а також граничні та початкові умови. За відсутності зовнішніх (f_i=0, P_i=0) сил приходимо до рівняння вільних коливань. Тривимірна задача динамічної теорії пружності для тіл обертання зводиться до двовимірної методом розкладів у ряди Фур'є за окружною координатою. Кінематичні гіпотези теорії оболонок дозволяють зобразити основні невідомі через переміщення та зусилля у серединній поверхні оболонки. Таким чином, задача стає одномірною.

Скористаємося методом розкладання за власними формами коливань:

$u_i(x_i,t) = \sum_{k=1}^{n} \phi_i^k\left(x_j\right) c_k(t), \quad \sigma_{ij}(x_l,t) = \sum_{k=1}^{n} s_{ij}^k(x_l)\, c_k(t),$

де ϕ_i^k – власні вектори, c_k – невідомі коефіцієнти. Враховуючи, що $s_{ij,j}^k =$

$\rho\omega_k^2\phi_i^k$, а також властивість ортогональності власних векторів, приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь для визначення c_k

$$\omega_j^2\delta_{kj}c_j - \delta_{kj}\ddot{c}_j + \int_V f_i\varphi_i^j dV = 0, j=1,n,$$

де ω_j – власні частоти коливань; $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$.

Для розв'язання незв'язаної задачі динаміки використовується МСЕ. Вибрано криволінійний ізо-параметричний елемент з кубічною апроксимацією переміщень. Цей метод розроблено в ІПМаш НАН України.

2.2 Формулювання задачі дослідження коливань пружної оболонки з рідиною

Розглянемо задачу про вільні коливання пружної оболонки обертання, частково заповненої ідеальною нестисливою рідиною, рис. 2.1.

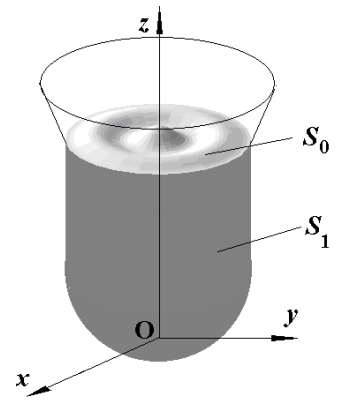


Рис. 2.1. Оболонка обертання, частково заповнена рідиною

Систему рівнянь руху символічно записуємо у вигляді

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}) = \mathbf{P}, \qquad (2.1)$$

де **L**, **M** – оператори пружних і масових сил;.

U=(u_1, u_2, u_3) – вектор-функція переміщень;

P – тиск рідини на змочену поверхню оболонки.

Розглянемо малі гармонічні коливання пружної оболонки. Зобразимо вектор **U** в формі $\mathbf{U}=\mathbf{u}e^{i\Omega t}$, де Ω – частота, а **u** власна форма коливань оболонки з рідиною.

Шукатимемо власні форми коливань у рідині у вигляді

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{N} c_k \boldsymbol{u}_k,$$

де c_k – невідомі коефіцієнти, що залежать лише від часу;

$\mathbf{u}_k$ – власні форми коливань незаповненої оболонки.

Використовуємо співвідношення ортогональності

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_k) = \Omega_k^2 \mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \quad (\mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j) = \delta_{kj}. \tag{2.2}$$

З цих рівнянь отримаємо

$$(\mathbf{L}(\mathbf{u}_\mathrm{k}), \mathbf{u}_\mathrm{j}) = \Omega_\mathrm{k}^2 \delta_\mathrm{kj} \ . \tag{2.3}$$

Ці співвідношення показують, що форми коливань незаповненої конструкції ортонормовані по матриці мас.

Розглянемо праву частину рівняння (2.1). Зазначимо, що вектор P направлений за нормаллю до змочених поверхонь оболонкової конструкції, що розглядається, внаслідок того, що ідеальна рідина створює тільки нормальну складову тиску на змочені поверхні. Вважаємо, що $|\boldsymbol{P}| = p$.

Вважається, що рідина ідеальна, нестислива, а її рух, індукований коливаннями оболонки, почався зі стану спокою, і є безвихровим. У цих умовах існує потенціал швидкостей Ф

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

який задовольняє рівнянню Лапласа.

На вільній поверхні рідини S_0 (рис. 2.1) повинні мають бути виконані такі кінематична та динамічна умови:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0|_{S_0} = 0,$$

де функція ζ визначає форму та положення вільної поверхні.

Для потенціалу швидкостей маємо таку крайову задачу

$$\nabla^2\Phi = 0,\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_1} = \frac{\partial w}{\partial t},\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{S_0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t};\quad p\big|_{S_0} = 0,\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t} + gz\right|_{s_0} = 0.$$

Використовуючи рівняння руху рідини та умови потенційності потоку, приходимо до інтеграла Коші-Лагранжа у наступній формі

$$p = -\rho_l\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + a_{st}(t)x + gz + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right].$$

Якщо розглядаються малі коливання рідини (вивчається лінеаризована постановка), то отримуємо

$$p = -\rho_l\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + a_{st}(t)x + gz\right].$$

Таким чином, побудовано математичну модель для опису динамічної поведінки системи «оболонка-рідина» під дією горизонтального сейсму або горизонтального імпульсного навантаження:

$$\begin{cases} L\mathbf{U} + M\ddot{\mathbf{U}} = -\rho_l\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} + gz + a_{st}(t)x\right) \\ \Delta\Phi = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

за такі граничні умови

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t} + gz + a_{st}(t)x\right|_{S_0} = 0;\quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{S_0} = \dot{\zeta};\quad z = \zeta; \\ &\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{S_0} = \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.5}$$

В рівняннях (2.4)-(2.5) функція w – це нормальна складова переміщень оболонки, ζ - функція, що описує положення вільної поверхні, $a_{st}(t)$ – прискорення горизонтального навантаження.

2.3 Метод заданих форм

Потенціал швидкостей Ф представимо у вигляді суми двох потенціалів.

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Для визначення Φ_1 сформулюємо наступне крайове завдання

$$\nabla^2\Phi_1 = 0,\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial w}{\partial t}\ ,\quad \mathbf{P}\in S_1,\ \ \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} = 0\ ,\quad \mathbf{P}\in S_0.$$

де,

$$w(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{m} w_k\,(x,y,z)c_k(t).$$

функції $w_k(x,y,z)$- нормальні компоненти власних форм коливань порожньої оболонки,

$$\Phi_1(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_{1k}(x,y,z)\dot{c}_k\,(t)$$

Для визначення функцій φ_{1k} маємо такі крайові задачі

$$\nabla^2\varphi_{1k} = 0,\ \ \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial\mathbf{n}} = w_k\ ,\quad \mathbf{P}\in S_1,\quad \varphi_{1k} = 0\ ,\quad \mathbf{P}\in S_0.$$

Потенціал Φ_2 шукаємо у вигляді

$$\Phi_2(x,y,z,t) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} d_k(t)\varphi_{2k}(x,y,z).$$

де функції φ_{2k} – власні форми коливань рідини у жорсткому резервуарі. Визначимо ці власні форми. Для функцій φ_{2k} розглянемо такі крайові задачі

$$\nabla^2\varphi_{2k} = 0,\ \frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\mathbf{n}} = 0\ ,\quad \mathbf{P}\in S_1,\ \frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\mathbf{n}} = \dot{\zeta}\ ,\ \mathbf{P}\in S_0,\ \dot{\varphi_{2k}} + g\zeta = 0\ ,\quad \mathbf{P}\in S_0. \tag{2.6}$$

Останнє із рівнянь (2.6) є динамічною умовою на вільній поверхні. Диференціюючи це рівняння за змінною *t*, приходимо до рівняння для потенціалу швидкостей рідини в жорсткому резервуарі

$$\ddot{\varphi}_{2k} + g\,\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\mathbf{n}} = 0\ ,\quad \mathbf{P}\in S_0.$$

У випадку гармонічних коливань маємо

$$\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial n} = \frac{\chi_k^2}{g}\varphi_{2k}.$$

Для рівняння вільної поверхні отримаємо вираз

$$\zeta = \sum_{k=1}^{N} c_k\,\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial n} + \sum_{k=1}^{M} d_k\,\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial n}.$$

Розглянемо сумарний потенціал Ф. Маємо

$$\Delta\Phi = 0,\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}\right|S_1 = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Виконано також рівність $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}$. Для того, щоб на вільній поверхні виконалася рівність $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\zeta\right|_{s_0} = 0,$ необхідно вирішити таку систему диференціальних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k\varphi_{1k} + \sum_{k=1}^{M}\ddot{d}_k\varphi_{2k} + g\left(\sum_{k=1}^{N}c_k\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial z} + \sum_{k=1}^{M}d_k\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial z}\right) = 0. \tag{2.7}$$

В силу граничних умов отриману систему диференціальних рівнянь можна спростити

$$\sum_{k=1}^{M}\ddot{d}_k\varphi_{2k} + g\sum_{k=1}^{N}c_k\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial n} + \sum_{k=1}^{M}d_k\chi_k^2\varphi_{2k} = 0. \tag{2.8}$$

Після знаходження базисних функцій $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}$, виконання граничних умов на змочених поверхнях та отримання скалярних добутків здобудемо таку систему диференціальних рівнянь другого порядку

$$c_j(t)\Omega_j^2 + \ddot{c}_j(t) = -\rho_2\left(\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k(t)\left(\varphi_{1k},\mathbf{u}_j\right) + \sum_{k=1}^{M}\ddot{d}_k(t)\left(\varphi_{2k},\mathbf{u}_j\right)\right),$$

$$\ddot{d}_j(t) + g\sum_{k=1}^{N}c_k(t)\left(\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial n},\varphi_{2j}\right) + g\chi_j^2 d_j(t) = 0 \tag{2.9}$$

Зазначимо, що шукані базисні функції у циліндричній системі координат допускають зображення

$$u_j(r,z,\theta) = u_j(r,z)\cos\alpha\theta;$$
$$\phi_{1j}(r,z,\theta) = \phi_{1j}(r,z)\cos\alpha\theta;\quad \phi_{2k}(r,z,\theta) = \phi_{2k}(r,z)\cos\alpha\theta$$

Тут α – номер гармоніки. Тобто, окремо розглядаються частоти та форми вільних коливань для різних α.

Таким чином, для визначення вимушених коливань оболонки обертання, частково заповненої рідиною, необхідно визначити такі три системи базисних функцій: форми вільних коливань оболонки у вакуумі, форми коливань рідини у жорсткій оболонці під дією сили тяжіння, форми коливань пружної оболонки без урахування дії сили тяжіння.

Після цього вирішується система диференціальних рівнянь другого порядку (2.9) з використанням методу Рунге-Кутта 4-го та 5-го порядку.

2.4 Розробка алгоритму розрахунку власних коливань оболонок обертання, частково заповнених рідиною

Розв'язок системи диференціальних рівнянь шукаємо у вигляді

$$c_k(t) = C_k e^{i\Omega t}; \quad d_k(t) = D_k e^{i\Omega t} \tag{2.10}$$

Приходимо до таких рівнянь

$$C_j\omega_j^2 - \Omega^2 C_j + \rho_l\left(\Omega^2\sum_{k=1}^{m} C_k\left(\phi_{1k},u_j\right)+\Omega^2\sum_{k=1}^{n} D_k\left(\phi_{2k},u_j\right)\right)=0, \quad j=\overline{1,m},$$

$$\kappa_l^2 D_l - \Omega^2 D_l + \frac{g}{\left(\phi_{2l},\phi_{2l}\right)}\sum_{k=1}^{m} C_k\left(\frac{\partial\phi_{1k}}{\partial n},\phi_{2l}\right)=0, \quad l=\overline{1,n}.$$

Вводимо такі матриці та вектори

$$C=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_m \end{pmatrix}; \quad D=\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_n \end{pmatrix}; H_\chi=\begin{pmatrix} \kappa_1^2 & .0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \kappa_n^2 \end{pmatrix}, H_\omega=\begin{pmatrix} \omega_1^2 & .0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \omega_m^2 \end{pmatrix},$$

$$P=\{p_{kj}\}; \quad p_{kj}=\left(\phi_{1k},u_j\right); \quad k,j=\overline{1,m},$$

$$B=\{b_{jk}\}; \quad b_{jk}=\left(\phi_{2j},u_k\right),$$

$$A=\{a_{jk}\}; \quad a_{jk}=\left(\frac{\partial\phi_{1k}}{\partial n},\phi_{2j}\right); \quad k=\overline{1,m}; \; j=\overline{1,n}.$$

Приходимо до проблеми власних значень

$$\Omega^2 EC + H_\omega C + \Omega^2 \rho_l PC + \Omega^2 \rho_l BD = 0,$$

$$\Omega^2 ED + gAC + H_\chi D = 0$$

Далі вводимо вектор $X = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$ розмірності $n+m$ і квадратні матриці $M = \begin{pmatrix} E + \rho_2 P & \rho_2 B \\ 0 & E \end{pmatrix}$ та $G = \begin{pmatrix} H_\omega & 0 \\ gA & H_\chi \end{pmatrix}$ розмірності $(n+m)\times(n+m)$.

Отримаємо

$$(G - \Omega^2 M)X = 0.$$

Після обернення матриці M знаходимо

$$\left(M^{-1}G - \Omega^2 E\right)X = 0,$$

де E – одинична матриця, матриця $M^{-1}G$ визначається за формулою

$$M^{-1}G = \begin{pmatrix} P_1 & -\rho_l P_1 B \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_\omega & 0 \\ gA & H_\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 H_\omega - \rho_l g P_1 BA & -\rho_l P_1 B H_\chi \\ gA & H_\chi \end{pmatrix};$$

$$P_1 = \left(E + \rho_l P\right)^{-1}.$$

Таким чином, завдання визначення частот та форм вільних коливань оболонки, частково заповненої рідиною, зведено до вирішення проблеми власних значень.

Для визначення базисних функцій використано метод кінцевих елементів, а знаходження - метод граничних елементів з постійної апроксимацією невідомої густини на елементах.

Зазначимо, що запропонований підхід дозволяє визначати частоти коливань оболонки з рідиною за різного рівня гравітації. Зазначимо також, що розв'язання задачі про коливання системи «оболонка-рідина» в загальному випадку не призводить до спектрів коливань пружної оболонки і рідини, що «відокремлюються».

2.5 Розробка алгоритму розрахунку вимушених коливань оболонок обертання, частково заповнених рідиною.

Представимо невідомі функції у вигляді рядів Фур'є по окружній координаті з компонентами

$$u_j(r,z,\theta)=u_j(r,z)\cos\alpha\theta;$$
$$\phi_{1j}(r,z,\theta)=\phi_{1j}(r,z)\cos\alpha\theta;\quad \phi_{2k}(r,z,\theta)=\phi_{2k}(r,z)\cos\alpha\theta$$

Для вирішення задачі про вимушені коливання резервуару з рідиною необхідно визначити потенціали φ_1 та φ_2. Ці завдання зведено до вирішення систем сингулярних інтегральних рівнянь кожного члена.

Опишемо рішення змішаного завдання рівняння Лапласа. Шукатимемо гармонійну функцію φ у вигляді суми потенціалів простого та подвійного шарів, тобто використовуємо пряме формулювання методу граничних інтегральних рівнянь.

$$2\pi\varphi(P_0)=\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|}dS-\iint_S \varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|}dS \tag{2.11}$$

Для змішаної задачі уявлення (2.11) призводить до наступної системи сингулярних інтегральних рівнянь:

$$2\pi\varphi(P_0)+\iint_{S_1}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|}dS_1-\iint_{S_0} q\frac{1}{|P-P_0|}dS_0=\iint_{S_1} w\frac{1}{|P-P_0|}dS_1;\quad P_0\in S_1;$$
$$\iint_{S_1}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|}dS_1-\iint_{S_0} q\frac{1}{|P-P_0|}dS_0=\iint_{S_1} w\frac{1}{|P-P_0|}dS_1;\quad P_0\in S_0 \tag{2.12}$$

щодо невідомих функцій φ та q. При цьому функція φ, визначена на поверхні S_1, є тиском на змочену поверхню оболонки, а функція q, визначена на поверхні S_0, являє собою нормальну складову швидкості рідини на вільній поверхні.

Шукатимемо рішення системи інтегральних рівнянь (2.12) у вигляді

$$\varphi = \varphi(r,z)\cos\alpha\theta; \quad q = q(r,z)\cos\alpha\theta \qquad .$$

(2.13)

У циліндричних координатах маємо

$$2\pi\varphi(z_0) + \int_\Gamma \varphi(z)Q(z,z_0)r(z)d\Gamma - \int_0^R q(\rho)\Psi(P,P_0)\rho d\rho = \int_\Gamma w(z)\Psi(P,P_0)r(z)d\Gamma_1; P_0 \in S_1 \qquad (2.14)$$

$$\int_\Gamma \varphi(z)Q(z,z_0)r(z)d\Gamma - \int_0^R q(\rho)\Psi(P,P_0)\rho d\rho = \int_\Gamma w(z)\Psi(P,P_0)r(z)d\Gamma_1;\ P_0 \in S_0,$$

$$Q(z,z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}}\left\{\frac{1}{2r}\left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b}\mathsf{E}_\alpha(k) - \mathsf{F}_\alpha(k)\right]n_r + \frac{z_0 - z}{a-b}\mathsf{E}_\alpha(k)n_z\right\};$$

$$\Psi(P,P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}}\mathsf{F}_\alpha(k); \quad a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z^* - z_0)^2; \quad b = 2\rho\rho_0.$$

Отриману систему будемо розв’язувати методом граничних елементів.

РОЗДІЛ 3

ЧИСЛЕННИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ, ЗАПОЛНЕНИХ І НЕЗАПОЛНЕНИХ РІДИНОЮ.

3.1. Вимушені коливання напівсферичної оболонки, заповненої та заповненої рідиною.

Розглядалася напівсферична оболонка (рис. 3.1) з такими параметрами: радіус R=5.08 м, товщина h=0.0254 м, модуль пружності E=70 ГПа ($0.7\cdot10^{11}$ Па), коефіцієнт Пуассона ν=0.3, щільність матеріалу ρ=2770 кг/м^3. Умови закріплення – шарнірне опір за контуром оболонки. ($u_z=u_r=u_f=0$).

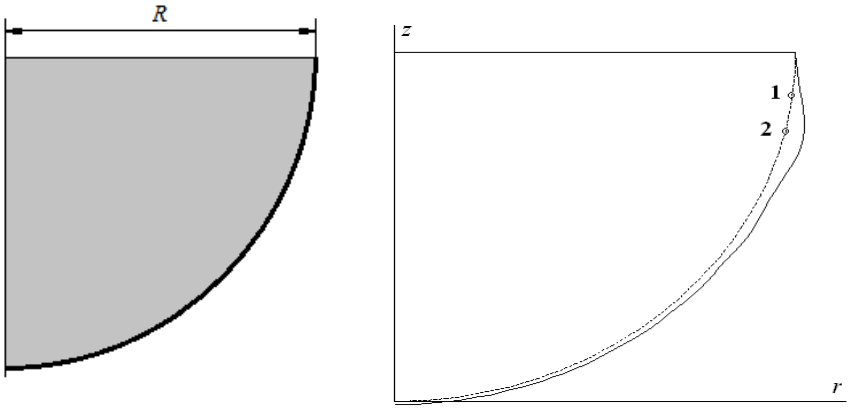


Рис. 3.1. – Напівсферична оболонка

Обчислено частоти вільних коливань для цієї незаповненої та повністю заповненої рідиною оболонки.

Проведено розрахунки своїх коливань незаповненої напівсферичної оболонки. Нижче наведено власні частоти коливань для різного числа вузлових діаметрів α порівняно з результатами, отриманими за кінцево-елементним програмним комплексом.

Таблиця 3.1. Власні частоти коливань незаповненої напівсферичної оболонки.

α	n	Частоти (Гц)		
			ANSYS (Shell61)	ANSYS (Shell63)
0	1	117.19	117.33	116.47
	2	146.17	146.22	
	3	152.66	152.69	
	4	155.70	155.72	
	5	158.34	158.35	
1	1	87.938	88.024	87.99
	2	138.91	138.97	137.43
	3	150.34	150.38	
	4	154.36	154.39	
	5	157.01	157.02	
2	1	141.54	141.58	141.06
	2	151.37	151.40	
	3	154.94	154.96	
	4	157.41	157.42	
	5	159.83	159.83	

У таблиці 3.2 наведено власні частоти гідропружних коливань оболонки для різного числа α. Отримані результати порівнюються з даними В.В.Мокеева [36] (для рідини, що стискається) і з результатами розрахунків по комплексу

ANSYS (для стисливої рідини). Тут наведено результати для такої кінцево-елементної сітки: 200 елементів на поверхні оболонки; 30 елементів на вільній поверхні; число сухих частот у розкладанні – 30.

Таблиця 3.2

α	n	Частоти (Гц)		
		МГЭ	[B44]	МКЭ (Shell63)
0	1	22.17	22.00	22.07
	2	33.50	33.38	33.41
	3	41.38	42.02	41.30
1	1	22.23	22.44	22.18
	2	34.77	36.88	34.68
	3	43.03	48.92	42.98
2		31.48	31.57	31.48
		40.49	41.55	40.50
		47.38	50.29	47.45
3		36.55	36.98	36.65
		44.44	46.27	44.74
		50.78	54.86	

Зазначимо, що для нижчої частоти при всіх наведених α різниця у результатах з роботою [36] становить близько 1%. Для більш високих частот відмінність у результатах більш помітна; це, можливо, пояснюється лише тим, що Мокєєв В.В. в [36] отримав рішення для рідини, що стискається.

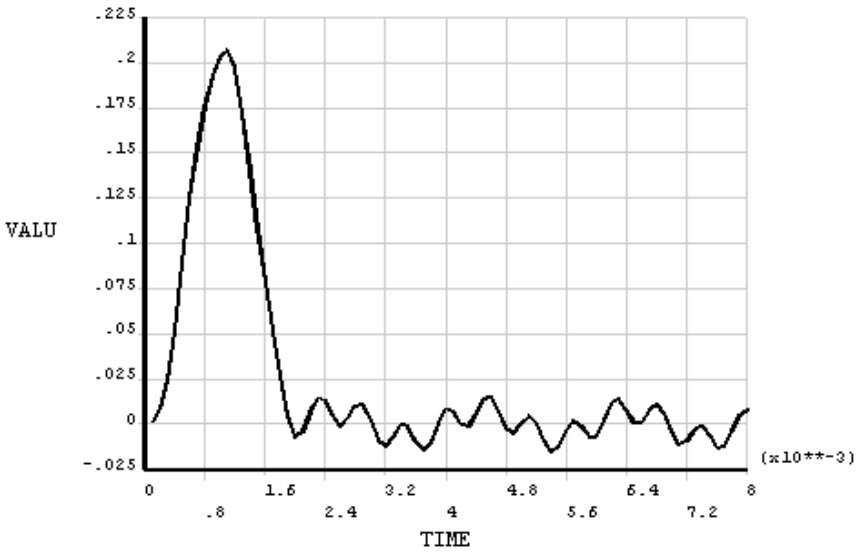
3.2 Вимушені коливання напівсферичної оболонки із рідиною.

Розглянуто напівсферичну оболонку (рис.3.1) під дією імпульсного навантаження $Q(r,\vartheta,z,t)=P(r,\vartheta,z)\Theta(t)$, $P=const$. Імпульсне навантаження приймалося у формі:

$$\Theta(t)=\begin{cases}1, & t\le T_1\\ 0, & t>T_1\end{cases} \qquad (3.1)$$

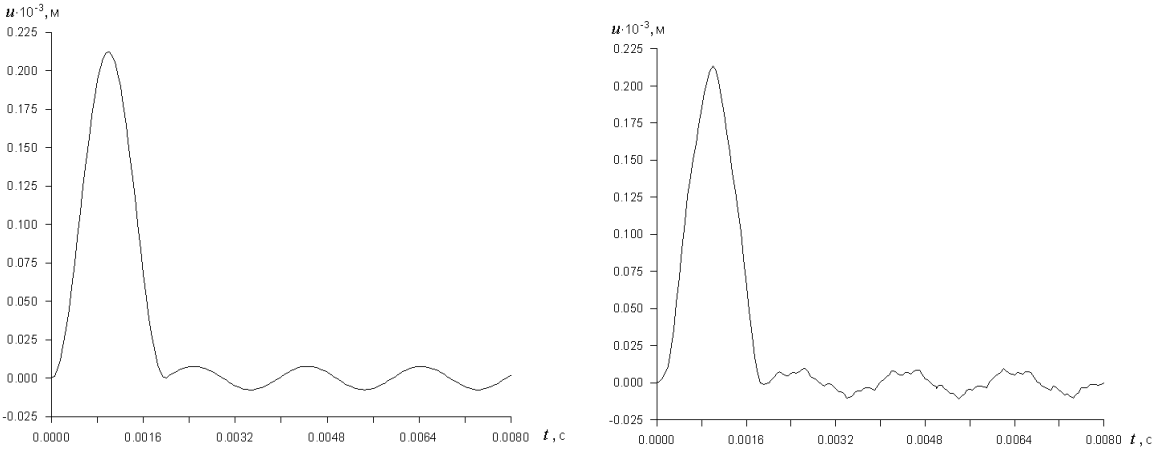
де $T_1 = 0.002$ с.

Схема оболонки зображена на рис.3.1.



На рисунках 3.2, 3.4 (а–б) наведено залежності осьового переміщення у полюсі сфери (вузол 2) від часу. Усі графіки наводяться порівняно з розрахунками за сертифікованим програмним комплексом, заснованим на МКЕ.

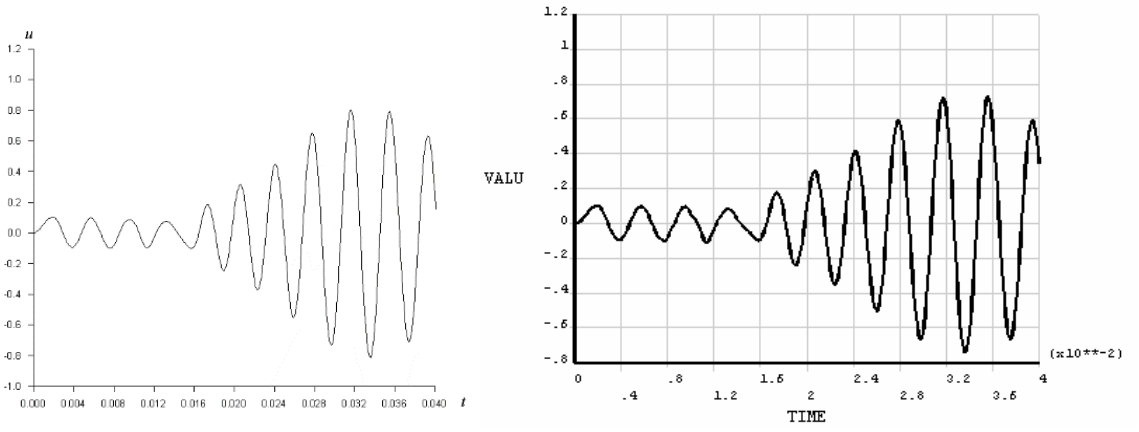
Рис. 3.2 – Залежність переміщень від часу при імпульсному навантаженні пластини (МКЕ)



(а) (б)

Рис. 3.4 – Залежність переміщень від часу при імпульсному навантаженні пластини а) $K_f = 1$; б) $K_f = 10$

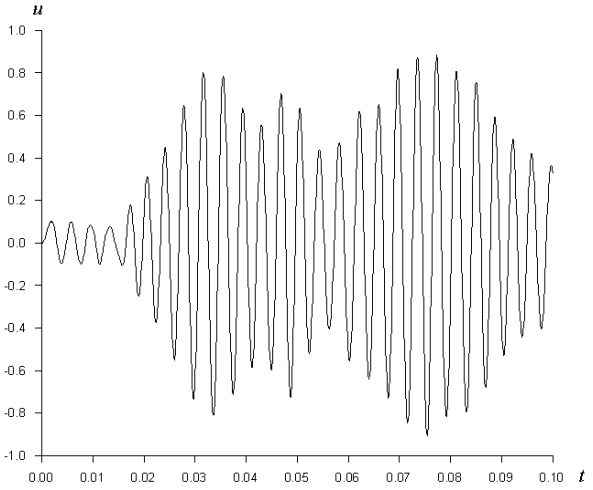
На рис. 3.5 (а-б) показано порівняння результатів, отриманих розробленим методом та МКЕ. Отримані дані свідчать про достовірність результатів.



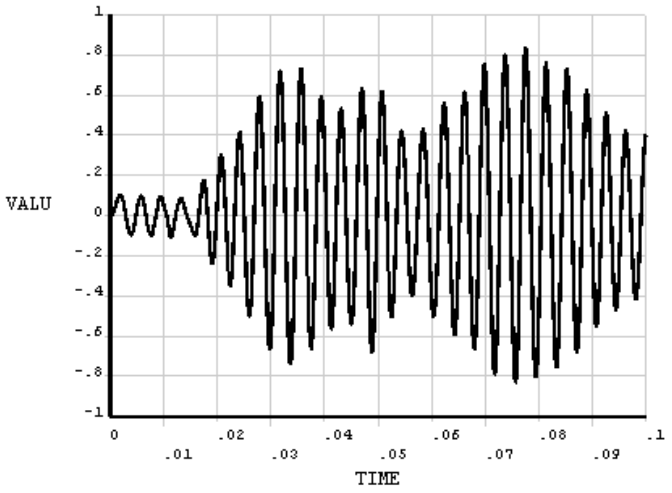
(а) (б)

Рис. 3.5 – Коливання сферичної оболонки при імпульсному навантаженні а) за розробленим методом; б) за допомогою МКЕ

Зі збільшенням числа кроків за часом отримані результати, що характеризують коливання напівсфери, які представлені на рис. 3.6 (а-б). Коливання сфери набувають пульсуючого характеру (режим биття).



(а)



(б)

Рисунок 3.6 – Коливання сферичної оболонки при імпульсному навантаженні

а) за розробленим методом; б) за допомогою МКЕ

На малюнку 3.7 наведено залежність тиску в точках 1 та 2 від часу.

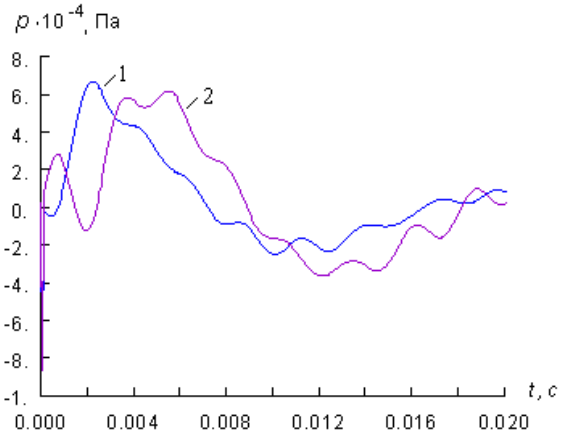


Рис.3.7 Залежність тиску від часу

Наведені дані свідчать про достовірність отриманих чисельних результатів, збіжність запропонованого методу, ефективність розробленого підходу.

3.3 Вимушені коливання циліндричної оболонки із рідиною.

Геометрія резервуару показано на рис. 3.8 параметри резервуара наступні: радіус R = 1м, товщина h = 0.01м, довжина L = 2м, модуль пружності $E = 2\cdot10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона ν = 0.3, щільність матеріалу ρ=7800 кг/м^3, щільність рідини ρ_l=1000 кг/м^3. Рівень заповнюючої рідини позначений через H (H=0.8м). Граничні умови приймалися як: $u_r = u_z = u_\theta = 0$ при $z = 0$ и $r=R$. Результати розрахунків показані у табл. 7.

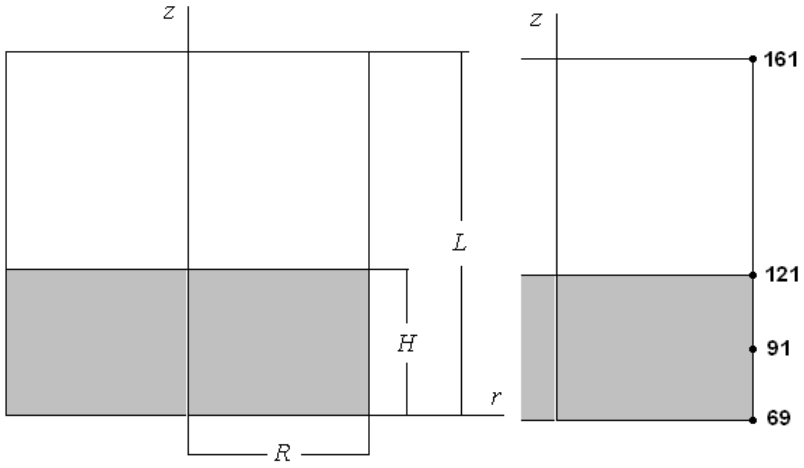


Рис. 3.8. Циліндричний резервуар із рідиною.

Розглянемо завдання про вимушені коливання оболонки з рідиною під впливом імпульсного навантаження. Радіальне навантаження раптово діє на циліндричну поверхню резервуару

$$q(r,z,t) = q_0 \cos k\phi(r,z) \exp(-t/\tau),$$

где q_0=0.1 МПа, $\tau = 14.2 \cdot 10^{-6}$ с. Час дії імпульсу $t_n = 5 \cdot 10^{-3}$с.

Для ілюстрації розрахунків радіальне переміщення обчислено чотирьох точках, які показані на рис. 3.8; точка 1 (вузол 91) розташована на змоченій частині стінки, точка 2 (вузол 121) належить межі вільної поверхні рідини, точка 3 (вузол 69) знаходиться поблизу основи, точка 4 (вузол 161) знаходиться на вершині стінки оболонки. На рис. 3.9-3.11 представлені радіальні переміщення, обчислені запропонованим методом (суцільна лінія) та за допомогою кінцево-елементного комплексу (штрихова лінія).

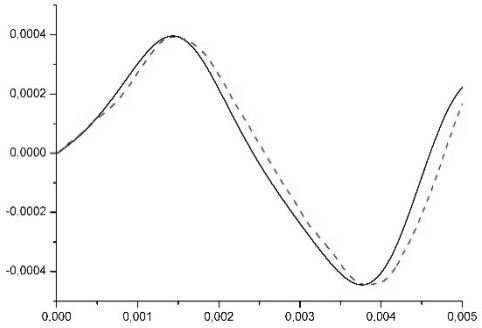
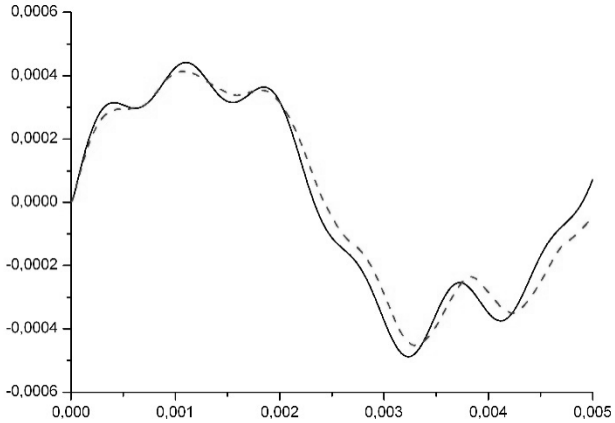


Рис. 3.9. Зміна у часі радіального переміщення у точці 1.



3.10. Зміна у часі радіального переміщення у точці 2.

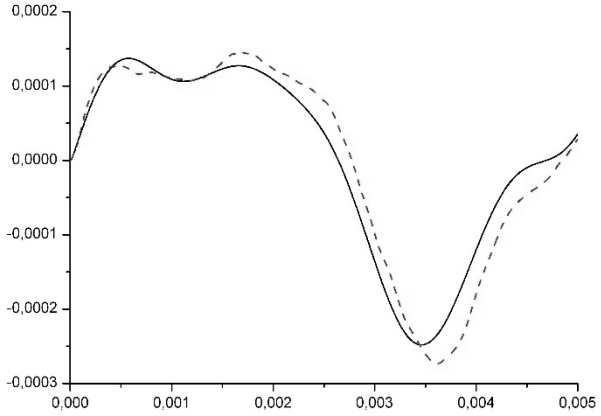


Рис. 3.11. Зміна у часі радіального переміщення у точці 3.

Максимальне радіальне переміщення має місце в точці на межі між водою та повітрям (далі «контрольна точка»). Тому доцільно вивчити, як змінюється рух залежно від рівня заповнення рідиною. На рис. 3.12 показано залежність радіального переміщення в контрольній точці при різних рівнях заповнення рідиною H=40см, H=80см, H=190см.

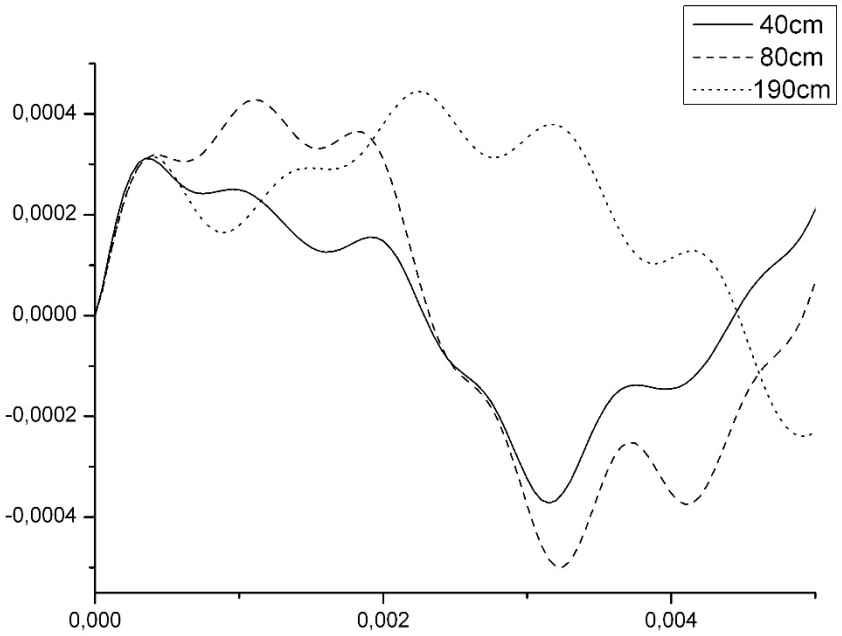


Рис. 3.12. Залежність радіального переміщення від часу у контрольній точці.

Таким чином, розроблений метод дає змогу оцінити переміщення резервуарів під дією зовнішнього навантаження з годиною.

РОЗДІЛ 4

СЕЙСМІЧНЕ НАВАНТАЖЕННЯ НА ЦИЛІНДРИЧНУ ОБОЛОНКУ З РІДИНОЮ

В цьому розділі вивчені плескання рідини в жорстких резервуарах під дією сейсмічного навантаження.

Розрахунки проведено методом граничних елементів, розробленим в роботах [37,38].

Розглянемо жорстку циліндричну оболонку з плоским днищем, частково заповнену рідиною. Параметри резервуара: радіус $R = 1$ м, , довжина $L = 2$ м, рівень заповнення $H = 1.0$ м.

Визначимо тиск p на стінки оболонки з лінеаризованого інтегралу Коші-Лагранжа за формулою

$$p = -\rho_l(\Phi'_t + g\zeta) + p_0 + a_s(t)x, \tag{4.1}$$

де $a_s(t)$ – функція, що характеризує прискорення, зовнішній вплив (горизонтальний сейсм або імпульс).

Вважаємо, що радіальне навантаження раптово прикладається до бічної поверхні резервуара, а саме

$$a_s(t) = Q_0 a(t),$$

де Q_0 – розподілений тиск,

$$a(t) = \begin{cases} 1, & t < T \\ 0, & t \geq T \end{cases}.$$

Вважаємо, що $Q_0 = 10$ МПа, $T = 1.5$ с.

Після визначення потенціалу швидкостей та рівня підйому вільної поверхні у вигляді

$$\Phi = \sum_{k=1}^{M} \dot{d}_k \varphi_{2k}, \quad \zeta = \sum_{k=1}^{M} d_k(t) \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}} \tag{4.2}$$

приходимо до співвідношення

$$\sum_{k=1}^{M} \ddot{d}_k \varphi_{2k} + g \sum_{k=1}^{M} d_k \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}} + a_s(t) r = 0 \tag{4.3}$$

Після знаходження скалярного добутку рівняння (3) на ортогональні згідно з [38] функції $\varphi_{2l}\ \left(l=\overline{1,M}\right)$ отримаємо

$$\ddot{d}_k+\chi_k^2 d_k+a_s(t)F_k=0;\quad F_k=(r,\varphi_{2k})/(\varphi_{2k},\varphi_{2k});\quad k=\overline{1,M} \tag{4.4}$$

Припустимо, що до подання горизонтального імпульсу бак знаходився у стані спокою. Тоді маємо розв'язати систему диференціальних рівнянь (4.4) за нульових початкових умовах.

Вивчено вимушені коливання резервуара при заданому сейсмічному навантаженні. Для визначення прискорень за заданої сили землетрусу використовуємо таблицю 4.1, [39].

Таблиця 4.1. Рівень прискорення в залежності від сейсмічності

Сейсмічність, бали	5	6	7	8	9	10
Максимальний рівень прискорення (в частках g)	0.025	0.05	0.1	0.2	0.4	0.8

Для 6-ти бального землетрусу отримуємо прискорення 0,05 g.

У таблиці 4.2 наведено нижчі частоти коливань вільної поверхні та стінок резервуару.

Таблиця 4.2 Нижчі частоти коливань системи «оболонка-рідина

N частоти	Частота, Гц	гармоніка	Вид вібрації
1	0.6418	1	плескання
2	0.9739	0	плескання
3	1.1509	1	плескання
4	1.3208	0	плескання

5	1.4564	1	плескання
6	1.5909	0	плескання
7	1.7054	1	плескання
8	1.9212	1	плескання
9	2.0249	0	плескання
10	7.6591	0	коливання днища

Характерна частота сейсмічного навантаження при 6 балах дорівнює 2Гц. Для побудови сейсмічного навантаження використовуємо акселограму СА-482 (РТМ 108.020.37-81).

На рис. 4.1 показано цю синтезовану акселограму.

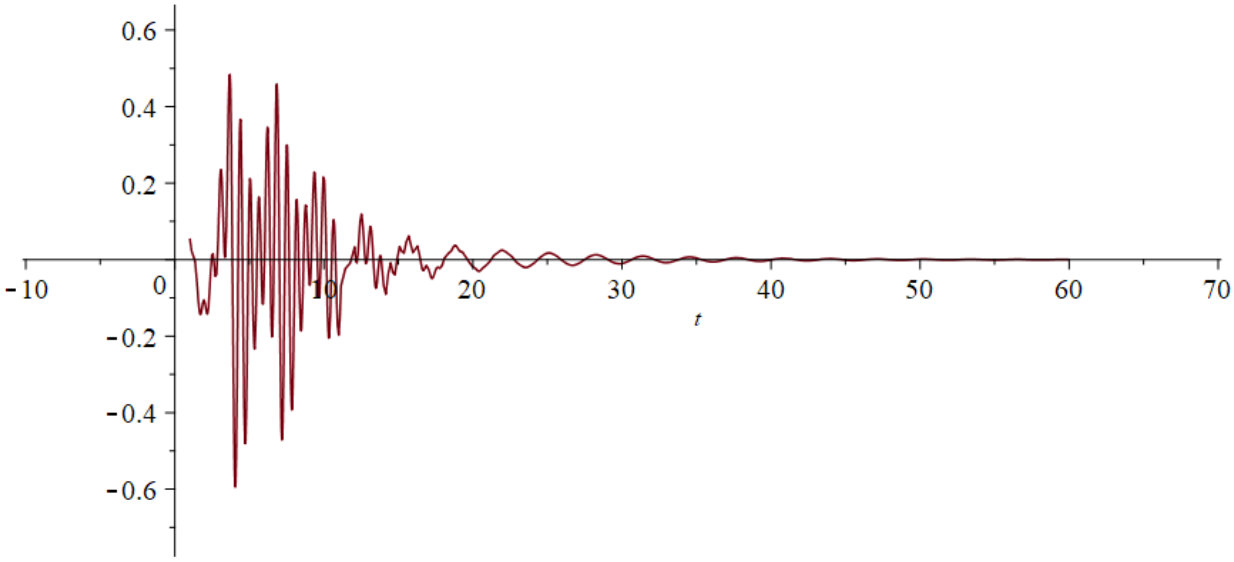


Рисунок 4.1. Синтезована акселограма

Максимальне відхилення (зсув від нульової лінії) сейсмограми становить близько 0.6 м і досягається в момент часу 2.5 сек.

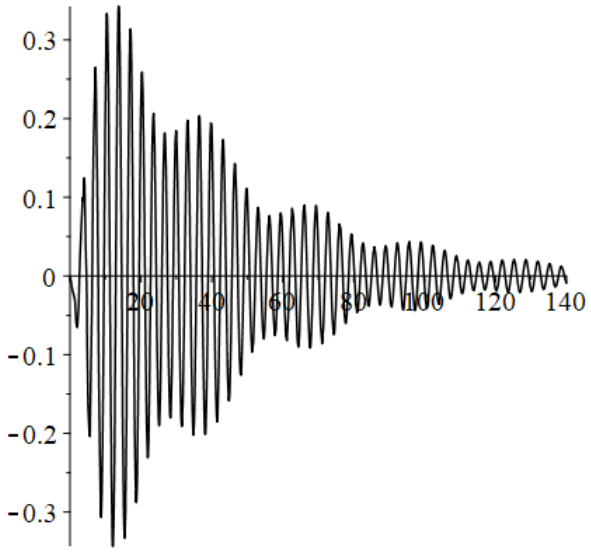


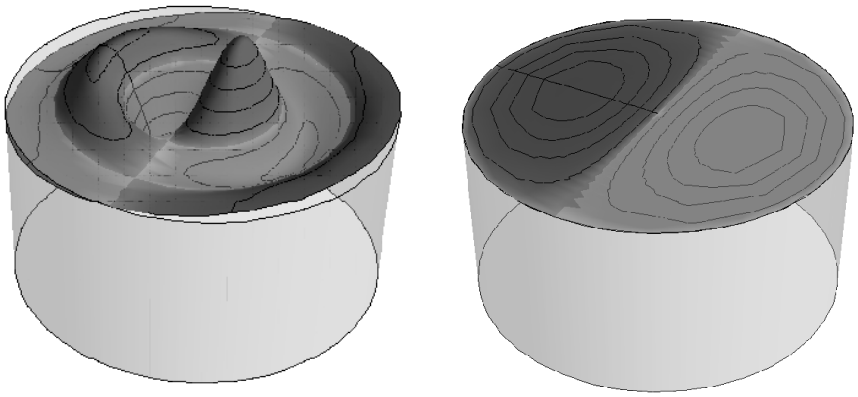
Рисунок 4.2. Висота підйому вільної поверхні рідини в циліндричному резервуарі під дією сейсмічного навантаження CA-482

На рис 4.2 показано висоту підйому вільної поверхні рідини в резервуарі під дією сейсмічного навантаження за акселограмою CA-482.

Зауважимо, що розв'язок системи диференціальних рівнянь (4.4) отримано за нульові початкові умови. Використовувалось 10 рівнянь відповідно до таблиці 4.2. Підйом вільної поверхні обчислено за допомогою другої з формул (4.2).

Бачимо, що піл дією сейсмічного навантаження відбуваються плескання рідини в резервуарі. Від початкового положення рідини є відхилення до 0.3 м. Згасання коливань відбувається приблизно через 100 секунд. Зміна підйому рівня вільної поверхні може призвести до небажаного виплескування заповнювача, що в свою чергу, веде до небезпечних наслідків. Для запобігання виплескування встановлюють внутрішні перегородки, використовують плавучі кришки.

В роботі [40] показано, що наявність кришки-мембрани дає суттєве зменшення амплітуди коливань.



а) б)

Рисунок 4.3. Коливання рідини в циліндричному резервуарі

а) без кришки, б) з кришкою

Рис. 4.3 демонструє ефективність наявності плавучої кришки.

ВИСНОВКИ

Розроблено метод для аналізу міцносних та динамічних характеристик оболонок та оболонкових конструкцій, що частково заповнені рідиною. Отримано зв’язану систему диференціальних рівнянь відносно пружних переміщень конструкції та діючого тиску рідини. За допомогою методу граничних елементів досліджено зміну рівня підйому вільної поверхні рідини за часом.

Досліджені вимушені коливання рідини в сферичних та циліндричних резервуарах під дією гармонічного та сейсмічного навантажень. Вивчено підйом вільної поверхні рідини за умови землетрусу силою в 6 балів. Встановлено, що під дією сейсмічного навантаження відбуваються плескання рідини в резервуарі. Від початкового положення рідини є відхилення до 0.3 м. Згасання коливань відбувається приблизно через 100 сек. Для зменшення амплітуди плескань запропоновано встановити плавучу кришку. Встановлення такої кришки приводить до суттєвого зменшення амплітуди плескань.

Також, розроблено метод оцінки коливань рідини в призматичних та циліндричних резервуарах під дією періодичних горизонтальних і вертикальних навантажень. Характер поведінки рідини в резервуарі встановлюється залежно від частоти сили збудження.

Наявність резервуарів, які можуть перебувати під впливом сейсмічної активності, є потребою в різних державах і континентах, особливо актуальною є дана проблема для країн, що знаходяться в сейсмічно-активних зонах, таких як Центральна Америка, острови Карибського басейну та острови в Тихому океані.

Оскільки в сучасному світі зберігання великих запасів легкозаймистих рідин відбувається у всіх куточках нашої планети, вихід з ладу такого резервуару під дією сейсмічної активності може також призвести до екологічної катастрофи, такої як зараження ґрунтових або прибережних вод, або пожеж горючих рідин на великих площах, які дуже важко ліквідовуються.

Завдяки отриманим даним у ході дослідження можливе доопрацювання існуючих резервуарів, замість дорогої заміни їх на нові. Як показало дослідження, установка однієї тільки плавучої кришки дозволяє суттєво зменшити хлюпання рідини в ємності під впливом сейсмічної активності.

Так як плавуча кришка не є структурною частиною ємності з рідиною, сучасні матеріали дозволяють створити її легкою і досить міцною, щоб не вийти з ладу під тиском рідини. Її використання можна впровадити у різних галузях, наприклад, такий галузі як авіакосмічне будова. Відомі випадки, коли баки літака були пошкоджені під дією сильної турбулентності або жорсткої посадки, авіаконструктори почали застосовувати поділ баків на секції зменшення плескання палива, проте застосування плавучої кришки може допомогти в економії маси, замість поділу баків на секції.

З цього випливає, що плавуча кришка є ефективним і недорогим засобом для мінімізації ризиків виходу з ладу ємності з рідиною під дією сил, які можуть викликати хлюпання.

Ця робота також має допомогти у подальшому дослідженні проблеми зберігання великого обсягу рідин та пошуку нових та ефективних рішень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. I. Lukovsky. Numerical simulation of sloshing of a liquid in a moving closed rectangular container, International Journal of Fluid Mechanics Research, Vol. 26, 1999.

2. V. D. Kubenko and P. S. Koval'chuk. Nonlinear problems of the dynamics of elastic shells partialiy filled with a liquid, International Applied Mechanics, Vol. 36, No. 4,1999, pp. 421-448

3. O.C.Zienkiewicz. The finite element method in engineering science, Mcgraw-Hill-London, 1971.

4. Bathe KJ. Finite element procedures. Prentice-Hall; 1996. C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, and L.C. Wrobel, Boundary Element Techniques, Springer-verlag, Berlin, 1984.

5. C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, and L.C. Wrobel, Boundary Element Techniques, Springer-verlag, Berlin, 1984.

6. Strelnikova E.,Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid// Proc. of XXXII Conference "Boundary elements and other mesh reduction methods" WITPress, Transaction on Modeling and Simulation, 2010, P. 203-211.

7. H. Olsen. "What is sloshing?" Seminar on Liquid Sloshing. Det Norske Veritas,1976.

8. L. Khezzar, A. C. Seibi, A. Goharzadeh. Water Sloshing in Rectangular Tanks – An Experimental Investigation & Numerical Simulation. International Journal of Engineering (IJE), Vol. 3, No. 2. pp. P. 174-184, 2010.

9. R.A. Ibrahim, V.N. Pilipchuck, and T. Ikeda. Recent Advances In Liquid Sloshing Dynamics. Applied Mechanics Reviews, Vol. 54, No. 2, pp. 133-199, 2001.

10. R.A. Ibrahim. "Liquid Sloshing Dynamics" Cambridge University Press, New York, 2005.

11. H.N. Abramson, W.-H. Chu and L.R. Garza; Liquid sloshing in spherical tanks; AIAA J. 1, pp. 384- 389; 1963

12. H.N. Abramson; Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers; Applied Mechanics Reviews, 16, pp. 501 - 506; 1963

13. H.N. Abramson; The dynamic behavior of liquids in moving containers; NASA SP-106; 1966

14. A.T. Chwang, and K.H. Wang. “Nonlinear Impulsive Force on an Accelerating Container” J. of Fluids Eng., Vol. 106, pp. 233-240, 1984.

15. G. Popov, S. Sankar, T.S. Sankar, and G.H. Vatitas. 'Liquid Sloshing in Rectangular Road Containers, Computers Fluids, Vol. 21, No. 4, pp. 551-569, 1992.

16. G. Popov, S. Sankar, T.S. Sankar, and G.H. Vatitas. "Dynamics of liquid sloshing in horizontal cylindrical road containers," Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 207, 1993.

17. Z. Ye, and A.M. Birk. Fluid Pressures in Partially Liquid-Filled Horizontal Cylindrical Vessels Undergoing Impact Acceleration, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 116 No. 4, pp. 449- 459, 1994.

18. O. Faltinsen, O. Rognebakke, N. Alexander, and A.N. Timokha. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin, part 2. effect of higher modes, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 523, pp. 199–218, 2005.

19. B.F Chen, and H.W. Chiang. Complete 2D and Fully Nonlinear Analysis of ideal fluid in tanks, Journal of Engineering Mechanics, pp. 70-78, 1999.

20. O.M. Faltinsen, and O.F. Rognebakke. Sloshing, In NAV2000: International Conference on Ship and Ship Research, Venice, 2000.

21. R.L. Bass, J.E.B. Bowles, R.W. Trundell, J. Navickas, J.C. Peck, N. Yoshimura, S. Endo, and B.F.M. Pots. Modeling criteria for scaled LNG sloshing experiments, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 107, pp. 272–280, 1985.

22. B. Godderidge, M. Tan, S. Turnock, and C. Earl. A Verification and Validation Study of the Application of Computational Fluid Dynamics to the Modelling of lateral Sloshing. Ship Science Report No 140, Fluid Structure Interaction Research Group, University of Southampton, 2006.

23. M.S. Celebi, and H. Akyildiz. Nonlinear Modeling of Liquid Sloshing in a Moving Rectangular Tank, Ocean Engineering, Vol. 29, pp. 1527-1553, 2001.

24. El-Sayad, M.A., Hanna, S.N., Ibrahim, R.A. Parametric excitation of nonlinear elastic systems sloshing impact. Nonlinear Dynamics 18, pp. 25–50, 1999.

25. Faltinsen, O.M., Rognebakke, O.F., Timokha, A.N. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin. Journal of Fluid Mechanics 487, pp. 1–42, 2003.

26. Faltinsen, O.M., Rognebakke, O.F., Timokha, A.N., 2005. Classification of three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base tank with finite depth. Journal of Fluids and Structures 20, 81–103.

27. Faltinsen, O.M., Rognebakke, O.F., Timokha, A.N. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin. Part 3: base aspect ratio perturbations. Journal of Fluid Mechanics, 551, pp. 93–116, 2006.

28. Faltinsen, O.M., Timokha, A.N. Sloshing. Cambridge University Press, Cambridge. , 2009.

29. Wu, G.X., Ma, Q.W., Eatock Taylor, R. Numerical simulation of sloshing waves in a 3-D tank based on a finite element methods. Applied Ocean Research 20, pp. 337–355, 1998.

30. Wu, C.H., Chen, B.F. Sloshing waves and resonance modes of fluid in a 3-D tank by a time-independent finite difference method. Ocean Engineering, 36, pp. 500–510, 2009.

31. Curadelli, O., Ambrosini, D., Mirasso, A., Amani, M. Resonant frequencies in an elevated spherical container partially filled with water: FEM and measurement. Journal of Fluids and Structures 26, pp. 148–159, 2010.

32. Alemi Ardakani, H., Bridges, T.J. Shallow-water sloshing in vessels undergoing prescribed rigid-body motion in three dimensions. Journal of Fluid Mechanics 667, pp. 474–519, 2011.

33. J. Weiß; Smallslosh Eigenvalues and mechanical models (pendulum or springmass) for tanks with NEWTANK geometry; software manual and documentation; 2009.

34. F. T. Dodge; The new dynamic behaviour of liquids in moving containers, Southwest Research Institute; San Antonio, Texas; 2000.

35. Celebi, M.S., Kim, M.H., Beck, R.F. Fully Non-linear 3-D Numerical Wave Tank Simulation. J. of Ship Research, Vol.42, No.1, pp. 33-45, 1998.

36. Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов// Изв. РАН. Механика твердого тела.–1998.–№ 6.–С.166-174

37. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles, Journal of Modern Technology & Engineering Vol.3, No.1, 2018, pp.15-52.

38. V. D. Kubenko and P. S. Koval’chuk. Nonlinear problems of the dynamics of elastic shells partialiy filled with a liquid, International Applied Mechanics, Vol. 36, No. 4,1999, pp. 421-448

39. Шульженко М. Г., Гонтаровський П. П., Гармаш Н. Г., Глядя А. О., Швецов В. Л., Гришин М. М., Губський О. М. Оцінка реакції потужного турбоагрегату на сейсмічне навантаження. Вібрації в техніці та технологіях. 2016. № 2 (82). С. 85–93.

40. Neelam Choudhary, Narveen Kumar, Elena Strelnikova, Vasil Gnitko, Denys Kriutchenko, Kyryl Degtyariov, Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes, Journal of King Saud University - Science, Volume 33, Issue 8, 2021.