МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Н.КАРАЗІНА

НАВЧАЛЬНО – НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ

Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем бакалавр
«Властивості електромагнітного поля поблизу шорсткої поверхні»

Виконав: студент 4 курсу, групи НФ-43
Спотар М.С.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма:
Прикладна фізика енергетичних систем
Керівник: к.ф.-м.н., ст..викл. Нємченко Є.К.
Рецензент:

Харків – 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Навчально - науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) бакалавр
Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали
Освітня програма: Прикладна фізика енергетичних систем

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
_____Руслан СУХОВ
“ ” 2022 року

З А В Д А Н Н Я
НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ

Спотар Микита Сергійович

1.Тема роботи «Властивості електромагнітного поля поблизу шорсткої поверхні» керівник роботи: Нємченко Єгор Костянтинович, кандидат фізико-математичних наук. Затверджено наказом по університету від 27 квітня 2022 року № 4201–05/121.
2. Строк подання студентом роботи 10.06.2022
3. Перелік питань, які потрібно розробити:
1) провести критичний аналіз літератури, та скласти огляд існуючих методів розрахунку полів поблизу шорстких поверхонь
2) дослідити основні механізми формування електричного поля над шорсткими поверхнями;
3) розглянути тіла з поверхнею різного рівня шорсткості та статистичні властивості поверхонь таких тіл;

4) розв'язати конкретну задачу про поле точкового заряду поблизу провідника з шорсткою поверхнею;
5) розглянути задачу про взаємодію електромагнітної хвилі з поверхнею з заданою шорсткістю;
6) зробити висновки з ефективності певних методів розрахунку електромагнітних полів з поверхнями різного ступеня шорсткості.
4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми
2	Затвердження теми на кафедрі
3	Робота над літературою та іншими джерелами
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6	Написання третього розділу
7	Завершення написання дипломної роботи (висновки та література)
8	Подача науковому керівнику
9	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
10	Попередній захист
11	Захист

5. Дата видачі завдання " ____ "_____ 2022 року.

Студент _____ Микита СПОТАР
Керівник роботи _____ Єгор НЄМЧЕНКО

РЕФЕРАТ

Микита Спотар. «Властивості електромагнітного поля поблизу шорсткої поверхні» Кваліфікаційна робота бакалавра з прикладної фізики. – Х.: Харківській національний університет імені В. Н.Каразіна, 2022. — 60 с.

У роботі досліджуються властивості електромагнітних полів різної конфігурації поблизу шорсткої поверхні провідників та діелектриків. Зокрема, проведено критичний аналіз літератури, та складено огляд існуючих методів розрахунку полів поблизу шорстких поверхонь. У дипломі наведено аналіз методів опису шорстких поверхонь, і, як прикладні задачі розглянуто тіла з поверхнею різного рівня шорсткості та статистичні властивості поверхонь таких тіл. Також в роботі досліджено основні механізми формування електричного поля над шорсткими поверхнями. При цьому увага приділяється як задачам про формування стаціонарних електричних полів, так й взаємодії електромагнітних хвиль з поверхнями. Такий підхід дозволив розв'язати конкретні задачі, зокрема, про поле точкового заряду, що знаходиться поблизу провідника з шорсткою поверхнею, ємність конденсатора з не гладкими обкладинками, та розглянути задачу про взаємодію електромагнітної хвилі з поверхнею з заданою шорсткістю. Результати роботи дозволили зробити висновки про ефективність певних методів розрахунку електромагнітних полів з поверхнями різного ступеня шорсткості, а також запропонувати методологію проведення числових розрахунків та реальних експериментів, як для перевірки результатів роботи, та для подальшого застосування цих результатів на практиці.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ШОРСТКІСТЬ ПОВЕРХНІ, МЕТОД ЗОБРАЖЕНЬ, ДИСПЕРСІЯ ШОРСТКУВАТОСТІ, ВІДБИТТЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ

РЕФЕРАТ

Никита Спотар. «Свойства электромагнитного поля вблизи шероховатой поверхности» Квалификационная работа бакалавра по прикладной физике. — Х.: Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2022.— 60 с.

В работе исследуются свойства электромагнитных полей разной конфигурации вблизи шероховатой поверхности проводников и диэлектриков. В частности, проведен критический анализ литературы и составлен обзор существующих методов расчета полей вблизи шероховатых поверхностей. В дипломе представлен анализ методов описания шероховатых поверхностей, и, как прикладные задачи, рассмотрены тела с поверхностью разного уровня шероховатости и статистические свойства поверхностей таких тел. Также в работе исследованы основные механизмы формирования электрического поля над шероховатыми поверхностями. При этом внимание уделяется, как задачам о формировании стационарных электрических полей, так и взаимодействии электромагнитных волн с поверхностями. Такой подход позволил решить конкретные задачи, в частности, о поле точечного заряда, находящегося вблизи проводника с шероховатой поверхностью, емкость конденсатора с не гладкими обложками, и рассмотреть задачу о взаимодействии электромагнитной волны с поверхностью с заданной шероховатостью. Результаты работы позволили сделать выводы об эффективности определенных методов расчета электромагнитных полей с поверхностями разной степени шероховатости, а также предложить методологию проведения числовых расчетов и реальных экспериментов, как для проверки результатов работы, так и для дальнейшего применения этих результатов на практике.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ШЕРОХОВАТОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ, МЕТОД ИЗОБРАЖЕНИЙ, ДИСПЕРСИЯ ШЕРОХОВАТОСТИ, ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН.

ABSTRACT

Mykyta Spotar. "Properties of the electromagnetic field near a rough surface"Qualifying work of a bachelor of applied physics. – Kh.: V.N.Karazin Kharkiv National University, 2022. – 60 p.

The properties of electromagnetic fields of various configurations near the rough surface of conductors and dielectrics are investigated. In particular, a critical analysis of the literature was conducted, and a review of existing methods for calculating fields near rough surfaces was made. The diploma presents an analysis of methods for describing rough surfaces, and, as applied problems, we consider bodies with a surface of different levels of roughness and statistical properties of the surfaces of such bodies. The main mechanisms of electric field formation over rough surfaces are also investigated. The attention is paid both to the problems of formation of stationary electric fields and to the interaction of electromagnetic waves with surfaces. This approach allowed us to solve specific problems, in particular, the field of a point charge near a conductor with a rough surface, the capacitance of a capacitor with non-smooth covers, and to consider the problem of the interaction of an electromagnetic wave with a surface with a given roughness. The results allowed to draw conclusions about the effectiveness of certain methods of calculating electromagnetic fields with surfaces of different degrees of roughness, as well as to propose a methodology for numerical calculations and real experiments, both to verify the results and to further apply these results in practice.

KEYWORDS: SURFACE ROUGHNESS, IMAGE METHOD, ROUGHNESS DISPERSION, REFLECTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES

Зміст

Вступ **8**

1 Основні ідеї і рівняння **10**

1.1 Рівняння Максвелла 10

1.2 Інтегральні теореми 11

1.3 Природа розсіювання на шорсткій поверхні 14

1.4 Метод Кірхгофа 15

1.5 Метод малих збурень 16

1.6 Метод інтегральних рівнянь 19

1.7 Висновки розділу 20

2 Взаємодія електромагнітного поля з шорсткою поверхнею **21**

2.1 Параметри опису шорстких поверхонь 21

2.2 Наближення Кірхгофа 23

2.3 Фур'є перетворення кореляційних функцій 26

2.4 Задача про плоский конденсатор з шорсткими обкладками у наближенні Кірхгофа 28

2.5 Випромінювання в наближенні Кірхгофа 31

2.6 Висновки розділу 35

3 Задача про поле поблизу поверхні **36**

3.1 Поле точкового заряду 36

3.2 Метод розкладання в ряд за малим параметром 38

3.3 Розв'язок методом ітерацій 40

3.4 Числовий розв'язок задачі про поле точкового заряду 41

3.5 Висновки розділу 43

Висновки **44**

Література **45**

Вступ

Актуальність теми. Моделі розсіювання електромагнітних хвиль від випадкових шорстких поверхонь були розроблені протягом останніх двох століть, і науковий інтерес до проблеми залишається великим і сьогодні через важливість цього явища в різних областях науки, таких як вимірювання в оптиці, геофізики, зв'язку та дистанційного зондування Землі. Такі моделі можна розділити на емпіричні моделі, аналітичні моделі та їх комбінацію. Хоча емпіричні моделі дуже прості, вони сильно залежать від умов експерименту. Незважаючи на їх складність, лише теоретичні моделі можуть дати значне розуміння взаємодії між електромагнітними хвилями та поверхнею Землі, хоча точне рішення рівнянь, що регулюють цю взаємодію, не завжди може бути доступним, і необхідно використовувати наближені методи.Розсіювання хвиль на шорстких поверхнях є важливою проблемою в різних областях науки, таких як вимірювання в медицині, оптиці, акустиці, геофізики, комунікації та наземному або позаземному дистанційному зондуванні. Наближені моделі все ще є необхідністю через непереборну чисельну складність реалістичних задач розсіювання. Навіть сучасні машини не можуть впоратися з величезною кількістю обчислень, необхідних для точних чисельних розрахунків найзагальнішого тривимірного розсіювання електромагнітних хвиль від багатомасштабних поверхонь діелектриків або провідників. Ця необхідність породила розробку безлічі наближених моделей з більш-менш ретельними виведеннями з перших принципів, таких як рівняння Максвелла. Навіть попереджені користувачі можуть заблукати в меандрах більш ніж двадцяти приблизних моделей без або з невеликими вказівками щодо того, за яких умов ця або інша модель є справедливою.

Основною метою дипломної роботи є дослідження властивостей електромагнітних полів різної конфігурації поблизу шорсткої поверхні провідників та діелектриків. Зокрема, у дипломі проведено критичний аналіз літератури, та складено огляд існуючих методів розрахунку полів поблизу шорстких поверхонь. У роботі також наведено аналіз методів опису шорстких поверхонь, і, як прикладні задачі розглянуто тіла з поверхнею різного рівня шорсткості та статистичні властивості поверхонь таких тіл. Також в дипломі досліджено основні механізми формування електричного

поля над шорсткими поверхнями. При цьому увага поділяється як задачам про формування стаціонарних електричних полів, так й взаємодії електромагнітних хвиль з поверхнями. Такий підхід дозволяє розв'язати конкретні задачі, зокрема, про поле точкового заряду, що знаходиться поблизу провідника з шорсткою поверхнею, ємність конденсатора з не гладкими обкладинками, та задачу про взаємодію електромагнітної хвилі з поверхнею з заданою шорсткістю.

Об'єкт дослідження – електромагнітні поля поблизу шорстких поверхонь.

Предмет дослідження – процеси формування просторового розподілу електромагнітного поля певній системи зарядів або електромагнітної хвилі поблизу поверхонь з заданою шорсткістю. Методи дослідження – математичні методи теорії електродинаміки суцільних середовищ та методи стохастичної фізики у застосування до опису взаємодії електромагнітного поля з поверхнями довільної шорсткості.

Наукова новизна одержаних результатів – досліджено механізми формування електричного та електромагнітного полів над шорсткими поверхнями та запропоновано оригінальні методики розв'язання основних прикладних задач в цієї області.

Практичне значення отриманих результатів – Результати роботи дозволяють зробити висновки про ефективність певних методів розрахунку електромагнітних полів з поверхнями різного ступеня шорсткості, а також запропонувати методологію проведення числових розрахунків та реальних експериментів, як для перевірки результатів роботи, та для подальшого застосування цих результатів на практиці.

Структура і обсяг роботи. Бакалаврська робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи становить 46 сторінок, із них основного тексту 44 сторінок, 6 рисунків, список використаних джерел із 14 найменувань на 2 сторінці.

1 Основні ідеї і рівняння

1.1 Рівняння Максвелла

Електромагнітна взаємодія описується за допомогою рівнянь Максвелла. Для однорідного, лінійного, ізотропного, стаціонарного провідника вони записуються як [1]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{1.4}$$

де $\mathbf{E}$ напруженість електричного поля, $\mathbf{D}$ індукція електричного поля, $\mathbf{H}$ напруженість магнітного поля, $\mathbf{B}$ індукція магнітного поля, ρ густина електричного заряду, $\mathbf{J}$ густина електричного струму. Разом з граничними умовами рівняння Максвелу повністю описують електромагнітне поле у всіх точках простору та часу. У випадку відображення від шорсткої поверхні, її профіль має значний вплив на граничні умови. При розгляданні гармонічних у часі полів, значення електромагнітних характеристик поля у заданий час залежать від їх комплексних форм. У такому випадку рівняння Максвелла можуть бути записані як

$$\nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} = \rho \tag{1.5}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \tag{1.6}$$

$$\nabla \cdot \mu\mathbf{H} = 0 \tag{1.7}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + j\omega\varepsilon\mathbf{E} \tag{1.8}$$

де ε діелектрична стала середи, μ магнітна проникність середовища. З рівнянь (1.6) та (1.8) виводиться хвильове векторне рівняння Гельмгольца

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{J} \tag{1.9}$$

Для випадку розповсюдження хвилі у ділянці простору без заряду $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ рівняння спрощується до

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{E} = 0 \tag{1.10}$$

Найпростіше рішення (1.10) у сферичній системі координат

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{1.11}$$

де $\mathbf{E}_0$ постійне значення комплексного вектора, яке визначає поляризаційні властивості та комплексний вектор проникності хвилі, $\mathbf{k}$ визначається як

$$\mathbf{k} = \hat{\mathbf{x}} k_x + \hat{\mathbf{y}} k_y + \hat{\mathbf{z}} k_z \tag{1.12}$$

причому

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \tag{1.13}$$

Рівняння (1.11) описує плоску хвилю, для якої її константа розповсюдження. У випадку лінійної поляризації рівняння (1.11) може бути записано як

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{p}} \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{p}} E^i \tag{1.14}$$

де $\mathbf{k}_i = \hat{\mathbf{k}}_i k$, $\hat{\mathbf{p}}$ вектор поляризації, E_0 амплітуда. Магнітне поле подібної хвилі описує рівняння

$$\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{k}}_i \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r})}{\eta} \tag{1.15}$$

де $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ хвильовий опір середовища.

1.2 Інтегральні теореми

Для будь-якої границі розділу середовищ електромагнітне поле повинно задовольняти умовам неперервності [2]

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}_1) = 0 \tag{1.16}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \tag{1.17}$$

$$\tag{1.18}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\varepsilon \mathbf{E} - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1) = \rho_s \tag{1.19}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\varepsilon \mathbf{H} - \varepsilon_1 \mathbf{H}_1) = 0 \tag{1.20}$$

де $\hat{\mathbf{n}}$ вектор нормалі до шорсткої поверхні, ρ_S та $\mathbf{J}_s$ густини заряду та струму на поверхні відповідно.

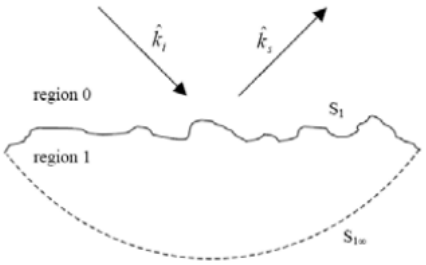


Рис. 1.1. Границя між двома середовищами

Завдяки тому, що поле задовольняє хвильове рівняння Гельмгольца (1.9) у зоні 0 електромагнітне поле задовольняє принципу Гюйгенса та умовам границі випромінювання на нескінченості, тому $\mathbf{E}$ задається рівнянням [3; 4]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \int_{S_1} [-j\omega\mu \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') - \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \, ds' \tag{1.21}$$

де $\bar{\bar{\mathbf{G}}}$ діадична функція Гріна для хвильового рівняння Гельмгольца, яка визначається як

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = [\bar{\bar{\mathbf{I}}} + \frac{\nabla^2}{k^2}] g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tag{1.22}$$

де $\bar{\bar{\mathbf{I}}}$ діада, $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ функція Гріна, яка задовольняє скалярне рівняння хвилі та задається як

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{1.23}$$

У рівнянні (1.21) перший член правої частини відповідає полю створеному джерелом у необмеженому середовищі з діелектричною сталою ε та магнітною проникністю середовища μ тобто падаючій хвилі. Другий член являється інтегралом по поверхні тангенціальних компонент поля $\mathbf{E}_t$ та $\mathbf{H}_t$ відповідає полю відбитої від поверхні хвилі. Рівняння (1.21) постулює математичну основу принципу Гюйгенса у векторній формі. Згідно з принципом електромагнітне поле в середовищі без джерел $\mathbf{J} = 0$ однозначно

визначено після того, як його тангенціальні компоненти досягли границі середовища. Оскільки існування наведеного струму у середовищі 0 будо припущено, повне електричне поле може бути вражено сумою падаючої $\mathbf{E}^i$ та відбитої $\mathbf{E}^s$ хвилі

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) \tag{1.24}$$

З чого слідує що поле відбитої хвилі можливо представити як

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = \int_{S_1} [-j\omega\mu\bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') - \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')]\, ds' \tag{1.25}$$

Якщо точка спостереження знаходиться у зоні далекого поля, то функція Гріна у (1.25) може бути спрощена, що дозволяє записати поле відбитої хвилі як [3; 4]

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = K\mathbf{r} \times \int_{S_1} [(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) - \eta\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}'))] e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}\, ds' \tag{1.26}$$

де

$$k = \frac{-jke^{-jkr}}{4\pi r} \tag{1.27}$$

а $\hat{\mathbf{r}}$ вектор спрямований у напрямок спостереження. Поверхневі тангенціальні поля $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}$ та $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$ можуть бути задані як [5]

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = 2\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i - \frac{1}{2\pi}\hat{\mathbf{n}} \times \int \varepsilon\, ds' \tag{1.28}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} = 2\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i + \frac{1}{2\pi}\hat{\mathbf{n}} \times \int \mathcal{H}\, ds' \tag{1.29}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_t = -\frac{1}{2\pi}\hat{\mathbf{n}}_t \times \int \varepsilon_t\, ds' \tag{1.30}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_t = \frac{1}{2\pi}\hat{\mathbf{n}}_t \times \int \mathcal{H}_t\, ds' \tag{1.31}$$

де

$$\varepsilon = jk\eta(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}')G_1 - (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}') \times \nabla' G_1 - (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{E}')\nabla' G_1 \tag{1.32}$$

$$\mathcal{H} = \frac{jk}{\eta}(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}')G_1 - (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}') \times \nabla' G_1 - (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{H}')\nabla' G_1 \tag{1.33}$$

$$\varepsilon_t = -\left[jk_2\eta_2(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}')G_2 - (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}') \times \nabla' G_2 - \frac{(\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{E}')\nabla' G_2}{\varepsilon_r}\right] \tag{1.34}$$

$$\mathcal{H}_t = -\left[\frac{jk_2}{\eta_2}(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}')G_2 - (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}') \times \nabla' G_2 - \frac{(\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{H}')\nabla' G_2}{\mu_r}\right] \tag{1.35}$$

де $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{n}}'$, $\hat{\mathbf{n}}_t$ вектори нормалі до поверхні, причому $\hat{\mathbf{n}}_t = -\hat{\mathbf{n}}$; $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}$ та $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$ тангенціальні поля на шорсткій поверхні в середовищі падаючої хвилі; G_1 та G_2 функції Гріна у середовищах падаючої та розсіяної хвиль відповідно; $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, $\mu_r = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$, $k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$.

1.3 Природа розсіювання на шорсткій поверхні

Коли електромагнітна хвиля контактує з поверхнею розмежування двох середовищ явище поверхневого розсіювання відбувається при умові, що обидві середовища однорідні. Якщо нижня середа неоднорідна або утворена з матеріалів з різними діелектричними властивостями, частина випромінювання заломлюється та може бути відбито крізь границю розділу назад у верхнє середовище. У цьому випадку відбувається явище об'ємного розсіювання. У загальному випадку вважається що на практиці завжди наявні обидва види розсіювання, але у більшості випадків лише один з них переважає. У випадку коли границя двох середовищ ідеально гладка, відображення відбувається в дзеркальному напрямку за законами Френеля. У випадку шорсткої границі частина випромінювання продовжує відображатися дзеркально, а інша частина - розсіюватись в усіх напрямках. Для ідеально рівної поверхні функія кутового розподілу випромінювання відбитої хвилі являється функцією Дірака δ зосереджена навколо напряму дзеркального відображення. Для поверхні малої шорсткості функія кутового розподілу випромінювання відбитої хвилі складається з двох компонент: відображеної та розсіяної. Компонента відповідальна за явище відображення, або компонента когерентного розсіювання, також зосереджена навколо напряму дзеркального відображення, але має більший

розкид у порівнянні з функцією ідеально гладкої поверхні. Компонента відповідальна за розсіювання, або компонента не когерентного (дифузного) розсіювання, рівно розповсюджується по усім напрямкам, але має меншу інтенсивність ніж когерентна. З подальшим збільшенням шорсткості вплив когерентної компоненти зменшується.

1.4 Метод Кірхгофа

У цьому розділі ми розглянемо підхід Кірхгофа (також його іноді називають наближенням дотичної площини) для опису розсіювання від шорстких поверхонь, який був одним із перших застосованих методів. Ми будемо розглядати поверхні з випадковими профілями поверхні (тобто поверхонь періоду) і в контексті теорії векторів ми обговоримо наближення Кірхгофа. Розглянемо тут випадок розсіювання на 2-вимірних діелектричних поверхнях. Ми наведемо результати для випадку поверхні, яку можна схарактеризувати як Гауссів випадковий процес. Ми також згадаємо деякі розширення наближення Кірхгофа та дамо посилання на подальше читання про підхід Кірхгофа. Список літератури далеко не повний, оскільки література про наближення Кірхгофа величезна. Хороше представлення методу Кірхгофа можна знайти, наприклад, у [4; 6]. Як зазначалося в попередньому абзаці, метод Кірхгофа сам по собі не враховує затінення і не враховує (у описаній тут формі) багаторазове розсіювання на поверхні. Через відсутність цих двох ефектів збереження енергії не задовольняється. Однак у [3] це збереження демонструється з урахуванням цих двох ефектів. У літературі розподіл висоти поверхні в більшості випадків вважається Гауссовим. Причина цього, як згадувалося раніше, полягає в тому, що середньоквадратична висота шорсткості поверхні та автокореляційна функція повністю визначають випадковий процес, і тому коефіцієнт бістатичного розсіювання можна виразити через ці дві величини. Метод Кірхгофа був застосований до поверхонь, описаних фрактальною геометрією. Як приклад можна згадати, що в [7] для моделювання розсіювання від природної шорсткої поверхні була використана модель дробового броунівського руху. У поєднанні з методом Кірхгофа отримано аналітичне рішення для коефіцієнта бістатичного розсіювання.

1.5 Метод малих збурень

Метод малих збурень належить до великого сімейства розв'язків хвильового рівняння з розкладанням збурень. Підхід базується на формулюванні розсіяння як крайової задачі диференціального рівняння в частинних похідних. Основна ідея полягає в тому, щоб знайти рішення в термінах плоских хвиль, яке відповідає поверхневим граничним умовам, які стверджують, що тангенціальна складова поля повинна бути безперервною вздовж границі. Поверхневі поля розкладаються в ряд збурень по висоті поверхні, наприклад, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \dots$. У цьому випадку $\mathbf{E}_0$ було б полем плоскої поверхні. Філософія цього підходу полягає в тому, що невеликі ефективні поверхневі струми на середній поверхні замінюють роль вкладу малої шорсткості. Таким чином, цей метод застосовується до поверхонь з невеликими змінами висоти та малими нахилами у порівнянні з довжиною хвилі, але радіус кривизни поверхні немає на нього впливу. Тому поверхню більше не потрібно апроксимувати площинами. Мала шорсткість розкладається в ряд Фур'є, і тому внесок у поле аналізується в термінах різних компонентів довжини хвилі.

Для випадку, коли середовище являється діелектриком, у [6] використовуючи умови нерозривності електромагнітного поля (1.16) та (1.17) можуть бути виражені за допомогою невідомих $\mathbf{a}(\mathbf{r}_\perp)$ та $\mathbf{b}(\mathbf{r}_\perp)$

$$ds\nu\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = d\mathbf{r}_\perp \mathbf{a}(\mathbf{r}_\perp) = ds\nu\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) \tag{1.36}$$

$$ds\nu\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = d\mathbf{r}_\perp \mathbf{b}(\mathbf{r}_\perp) = ds\nu\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \tag{1.37}$$

де $\mathbf{r}_\perp = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ mean height plane point, ν хвильовий спротив. Коли $\mathbf{a}(\mathbf{r}_\perp)$ та $\mathbf{b}(\mathbf{r}_\perp)$ визначені використовуючи (1.21) у [6] поле визначається як

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \int e^{j\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{r}_\perp} e^{-jk_z z} \frac{k}{k_z}\, d\mathbf{k}_\perp \int e^{j\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{r}'_\perp} e^{-jk_z\zeta(\mathbf{r}'_\perp)}\, d\mathbf{k}_\perp \times \\ \times\{[\hat{\mathbf{h}}(-k_z)\hat{\mathbf{h}}(-k_z) + \hat{\mathbf{v}}(-k_z)\hat{\mathbf{v}}(-k_z)] \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}_\perp)' + \\ +[-\hat{\mathbf{v}}(-k_z)\hat{\mathbf{h}}(-k_z) + \hat{\mathbf{h}}(-k_z)\hat{\mathbf{v}}(-k_z)] \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}'_\perp)\}\end{aligned} \tag{1.38}$$

$$0 = \frac{1}{8\pi} \int e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} e^{-jk_z z} \frac{k}{k_z}\, d\mathbf{k}_\perp \int e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}'_\perp} e^{-jk_z \zeta(\mathbf{r}'_\perp)}\, d\mathbf{k}_\perp \times$$
$$\times \{[\hat{\mathbf{h}}(-k_z)\hat{\mathbf{h}}(-k_z) + \hat{\mathbf{v}}(-k_z)\hat{\mathbf{v}}(-k_z)] \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}'_\perp) +$$
$$+ [-\hat{\mathbf{v}}(-k_z)\hat{\mathbf{h}}(-k_z) + \hat{\mathbf{h}}(-k_z)\hat{\mathbf{v}}(-k_z)] \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}_\perp)'\} \tag{1.39}$$

де

$$\hat{\mathbf{h}}(\pm k_z) = \frac{\hat{\mathbf{x}} k_y - \hat{\mathbf{y}} k_x}{k_p} \tag{1.40}$$

$$\hat{\mathbf{v}}(\pm k_z) = \mp k_z \frac{\hat{\mathbf{x}} k_x - \hat{\mathbf{y}} k_y}{k_p k} + \frac{\hat{\mathbf{z}} k_p}{k} \tag{1.41}$$

$$k_p = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \tag{1.42}$$

Поле відображеної хвилі, у свою чергу, задається

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi} \int e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} e^{jk_z z} \frac{k}{k_z}\, d\mathbf{k}_\perp \int e^{-j\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}'_\perp} e^{-jk_z \zeta(\mathbf{r}'_\perp)}\, d\mathbf{k}_\perp \times$$
$$\times \{[\hat{\mathbf{h}}(k_z)\hat{\mathbf{h}}(k_z) + \hat{\mathbf{v}}(k_z)\hat{\mathbf{v}}(k_z)] \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}'_\perp) +$$
$$+ [-\hat{\mathbf{v}}(k_z)\hat{\mathbf{h}}(k_z) + \hat{\mathbf{h}}(k_z)\hat{\mathbf{v}}(k_z)] \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}'_\perp)\} \tag{1.43}$$

Метод полягає у розкладанні в ряд

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}'_\perp) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{a}^{(m)}(\mathbf{r}'_\perp) \tag{1.44}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}'_\perp) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{b}^{(m)}(\mathbf{r}'_\perp) \tag{1.45}$$

$$e^{\pm jk_z \zeta(\mathbf{r}'_\perp)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\pm jk_z \zeta(\mathbf{r}'_\perp)]^m}{m!} \tag{1.46}$$

де m означає m-мірність рішення. Виражаючи $\hat{\mathbf{n}}$ через похідні висоти поверхні $\zeta(\mathbf{r}'_\perp)$ та використовуючи (1.36) та (1.37) відносини між невідомими

компонентами поверхні виражаються як

$$\mathbf{a}_z^{(0)}(\mathbf{r}_\perp) = \mathbf{b}_z^{(0)}(\mathbf{r}_\perp) = 0 \tag{1.47}$$

$$\mathbf{a}_z^{(m)}(\mathbf{r}_\perp) = (\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial\zeta}{\partial y})\mathbf{a}_\perp^{(m-1)}(\mathbf{r}_\perp) \tag{1.48}$$

$$\mathbf{b}_z^{(m)}(\mathbf{r}_\perp) = (\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial\zeta}{\partial y})\mathbf{b}_\perp^{(m-1)}(\mathbf{r}_\perp) \tag{1.49}$$

У цьому методі використовується припущення, що значення висоти поверхні та її похідних, тобто нахилу, є малими величинами.

$$\zeta(\mathbf{r}'_\perp) << 1 \tag{1.50}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x'} << 1 \tag{1.51}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y'} << 1 \tag{1.52}$$

Підставляючи (1.44), (1.45) та (1.46) у (1.38) та (1.39), можливо послідовними обчисленнями за допомогою (1.47), (1.48) та (1.49) знайти рішення відповідного порядку для поля, де рішення нульового порядку відповідає полю хвилі, яка відображена від абсолютно гладкої поверхні, та задається як

$$\mathbf{E}_0^s = \{R_h[\hat{\mathbf{h}}(-k_{iz})\cdot\hat{\mathbf{q}}]\hat{\mathbf{h}}(-k_{iz}) + R_v[\hat{\mathbf{v}}(-k_{iz})\cdot\hat{\mathbf{q}}]\hat{\mathbf{v}}(-k_{iz})\}e^{j\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}} \tag{1.53}$$

де R_h та R_v горизонтальний та вертикальний коефіцієнти Френеля.
Бістатичний коефіцієнт розсіювання для цього методу задається [3] як

$$\sigma_{qp}^0 = 8|k^2\sigma|\cos\theta_i\cos\theta_i\alpha_{qp}|^2 W(k_x + k\sin\theta_i, k_y) \tag{1.54}$$

де

$$k_x = -k\sin\theta_s\cos\phi_s \tag{1.55}$$

$$k_y = -k\sin\theta_S\sin\phi_s \tag{1.56}$$

$$W(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(u,v)e^{-j(k_x u + k_y v)}\,du\;\,dv \tag{1.57}$$

σ середнє квадратичне відхилення поверхні, $\rho(u,v)$ кореляційний коефіцієнт поверхні, α_{qp} спеціальний коефіцієнт введений в [3] вплив, якій відображає вплив поляризації.
Критерії застосовності даного метода для поверхні з Гауссовою кореляційною функцією задається у [8] як

$$k\sigma < 0.3 \qquad kL > \frac{\sqrt{2}k\sigma}{0.3} \tag{1.58}$$

1.6 Метод інтегральних рівнянь

Відносно новим методом розрахунку розсіювання електромагнітних хвиль від шорстких поверхонь є метод інтегральних рівнянь. В останні роки цей метод широко використовується в мікрохвильовій області, і він дає хороші прогнози для широкого діапазону профілів поверхонь. Цей метод можна розглядати як розширення методу Кірхгофа та методу малих збурень, оскільки було показано, що він відтворює результати цих двох методів у відповідних межах. метод інтегральних рівнянь є відносно складним методом у своїй загальній формі (включаючи багаторазове розсіювання), і повне представлення методу виходить за рамки цього огляду. Більш детальну презентацію цього метода можна знайти в [9]. Рівняння тангенціальних компонент поля для методу інтегральних рівнянь задаються

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E})_K + (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E})_C \tag{1.59}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} = (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H})_K + (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H})_C \tag{1.60}$$

де перший член суми це тангенціальне поле наближення Кірхгофа, яке буде докладніше розібрано в наступній частині, а другий

$$(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E})_C = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^r) - \frac{1}{2\pi} \int [\mathcal{E}]\, ds' \tag{1.61}$$

$$(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H})_C = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^i - \mathbf{H}^r) - \frac{1}{2\pi} \int [\mathcal{H}]\, ds' \tag{1.62}$$

де $\mathcal{E}$ та $\mathcal{H}$ визначені у (1.32) та (1.33) відповідно. Поле у віддаленої зони у цьому випадку задається у [10] як

$$E_{qp}^{s} = -\frac{jk}{32\pi^3 R} e^{-jkR} \int F_{qp} e^{ju(x-x')+jv(y-y')+(\mathbf{k}_s-\mathbf{k}_i)\cdot\mathbf{r}'} \, dxdydx'dy'dudv \tag{1.63}$$

де F_{qp} функція комплементарного тангенціального поверхневого поля. Коли з рівнянь (1.61) та (1.62) отримано приблизне значення розсіяного поля, можливо обчислити середнє розсіяне випромінювання та бістатичний коефіцієнт розсіювання, який буде складатися з трьох компонент

$$\sigma_{qp}^{0} = \sigma_{qp}^{0K} + \sigma_{qp}^{0KC} + \sigma_{qp}^{0C} \tag{1.64}$$

вклад Кірхгофа σ_{qp}^{0K} , комплементарний вклад σ_{qp}^{0KC} та вклад їх перетинання σ_{qp}^{0C} .

1.7 Висновки розділу

Ми представили результати пошуку у літературі моделей розсіювання електромагнітних хвиль на випадкових шорстких поверхнях. Зокрема, ми зосередилися на розрахунку коефіцієнта бістатичного розсіювання у трьох різних класах методів: наближенні Кірхгофа, методі малого збурення та методі інтегральних рівнянь. З них перші два є одними з ранніх підходів, які, однак, все ще широко використовуються. Останній є прикладом останніх підходів, які були розроблені як спроба розширити дію перших методів.

2 Взаємодія електромагнітного поля з шорсткою поверхньою

2.1 Параметри опису шорстких поверхонь

Шорсткість поверхні це величина характеризуючи розподіл значень відхилень висоти цієї поверхні $z = \zeta(x, y)$. Шорсткість поверхні може бути знайдена емпіричним виміром профілю поверхні або створенням стохастичної моделі поверхні. Стохастичні моделі поверхні описують ансамблі поверхонь, які мають відповідні статистичні характеристики, що дозволяє зручно описувати поверхні утворені у схожих умовах. Задача аналізу поверхонь створених у фіксованих умовах розповсюджені на практиці. Шорсткість описується розподілом ймовірностей

$$F(x, y, z) = \mathbb{E}[\Theta\left(z - \zeta(x, y)\right)] \tag{2.1}$$

де $\Theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(t)\, dt$ - функція Гевісайда. У деяких випадках зручніше використовувати щільність ймовірності

$$w(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} F(x, y, z) \tag{2.2}$$

Для характеристики висоти не лише в точці спостереження, а й у сусідніх точках використовують багатомірну функцію розподілу

$$F_n(x, y, z, \ldots, x_n, y_n, z_n) = \mathbb{E}[\prod_{i=1}^{n} \Theta\left(z_i - \zeta(x_i, y_i)\right)] \tag{2.3}$$

та відповідну щільність ймовірностей

$$w_n(x, y, z, \ldots, x_n, y_n, z_n) = \frac{\partial^n}{\partial z_1 \ldots \partial z_n} F(x, y, z) \tag{2.4}$$

До статистичних характеристик поверхні відносяться:
Середнє значення

$$\langle \zeta \rangle(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta w(\zeta, x)\, d\zeta \tag{2.5}$$

Середнє квадратичне відхилення висоти

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta^2 w(\zeta, x)\, d\zeta \tag{2.6}$$

являється мірою розкиду значень висоти поверхні.
Кореляційна функція

$$W(x_1, x_2) = \frac{\langle \zeta(x_1)\zeta(x_2) \rangle}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \zeta_1 \zeta_2 w_2(\zeta_1, x_1, \zeta_2, x_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2 \tag{2.7}$$

являється мірою залежності висоти поверхні у двох точках спостереження.
Кореляційний радіус

$$l^2 = \frac{1}{\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} W(x, y)\, dx\, dy \tag{2.8}$$

являється радіусом кола, всередині котрого відхилення висоти поверхні корелюють. У випадку анізотропних поверхонь радіус кореляції визначають вздовж осей симетрії. Також кореляційний радіус може бути визначений як лінійний розмір довжини між максимумами та мінімумами висоти поверхні

$$\frac{1}{l^2} = \nabla_{\mathbf{r}} W(\mathbf{r}) \tag{2.9}$$

Нахил середнього квадратичного відхилення висоти

$$\sigma_s = \frac{\sigma\sqrt{2}}{l} \tag{2.10}$$

Найбільш розповсюдженими у практичному використанні являються нормальний розподіл $f(\mathbf{r}) = e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{l^2}}$ та експоненційний розподіл $f(\mathbf{r}) = e^{-\frac{|\mathbf{r}|}{l}}$. Бістатичний коефіцієнт розсіювання визначається як відношення розсіяного випромінювання до середнього падаючого випромінювання на поверхні сфери з радіусом, рівним відстані від точки розсіювання до точки спостереження характеристик відбитої хвилі, та відображає характеристики розсіювання розгляданої поверхні для даних частоти, поляризації, кута падіння та відбиття. У термінах поля падаючої та

відбитої хвилі він виражається як

$$\sigma^0_{q,p}(\theta_i, \phi_i, \theta_s, \phi_S) = \frac{4\pi R^2 |\mathbf{E}^s_p|^2}{A_0 \mathbf{E}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{q}}} \tag{2.11}$$

де R відстань на якої приймається хвиля, A площа поверхні яка опромінюється.

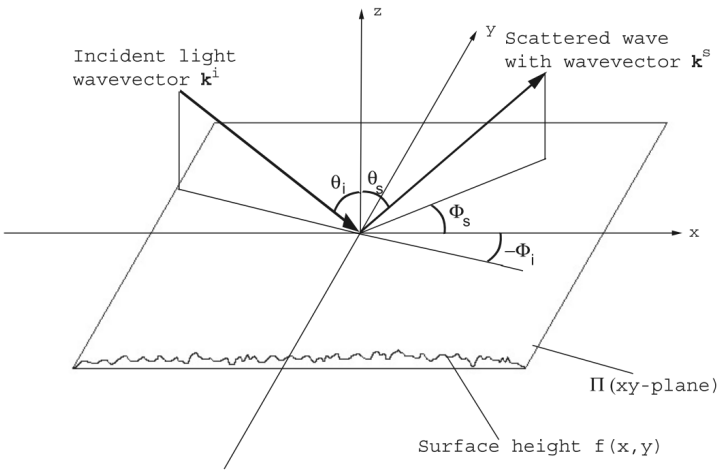


Рис. 2.1. Розсіювання на шорсткій поверхні

2.2 Наближення Кірхгофа

Розглянемо наближення Кірхгофа на прикладі лінійного, монохроматичного, поляризованого пакета плоских хвиль з фізичними параметрами

$$\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{p}} E_0^{-j(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} \tag{2.12}$$

$$\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{k}}_i \times (\hat{\mathbf{p}} E^i)}{\eta} \tag{2.13}$$

для котрих $\mathbf{k}_i = \hat{\mathbf{k}}_i k$, $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$, $\hat{\mathbf{p}}$ вектор поляризації та $\mu = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ хвильовий опір.

Поле далекої зони відображеної хвилі в цьому випадку задається як [3; 10]

$$E^s_{qp} = -\frac{jk}{4\pi R} e^{-jkR} \int [\hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{k}}_s \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_p) + \eta \hat{\mathbf{q}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_p)] e^{j(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r})} \, ds \tag{2.14}$$

де

$$\mathbf{k}_s = k\hat{\mathbf{k}}_s = \hat{\mathbf{x}}k_{xx} + \hat{\mathbf{y}}k_{yy} + \hat{\mathbf{z}}k_{zz} \tag{2.15}$$

У наближені Кірхгофа значення параметрів поля у кожній точці поверхні приймається наближеним до значень поля но нескінченно розширеній дотичній поверхні у цій точці. У цьому випадку профіль поверхні поблизу цієї точки апроксимується дотичної до неї поверхнею. Як наслідок відображення в околиці розгляданої точки вважаємо дзеркальним. Це наближення вимагає великого, відносно довжини падаючої хвилі, радіуса кривизни поверхні, для можливості його використання. Тангенціальні компоненти поля в такому випадку можно записати як [9]

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^r) \tag{2.16}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^r) \tag{2.17}$$

де $\mathbf{E}^r$ та $\mathbf{H}^r$ характеристики поля хвилі, відбитої від дотичної поверхні до профілю у розгляданій точці, яка розповсюджується в напрямку $\hat{\mathbf{k}}_r$. При таких умовах можливо виразити параметри відбитої хвилі через параметри падаючої хвилі за допомогою коефіцієнтів Френеля

$$R_{\check{s}} = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \cos\theta_t} \tag{2.18}$$

$$R_{\check{p}} = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \frac{\mu_1}{\mu_2} \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \frac{\mu_1}{\mu_2} \cos\theta_t} \tag{2.19}$$

де θ_i кут падіння, θ_t кут зломлення, n_1 показник заломлення середовища, з котрого падає хвиля, n_2 показник заломлення середовища, у которому розповсюджується зломлена хвиля.

$$\mathbf{E}^i = \hat{\mathbf{s}}E^i_{\check{s}} + \hat{\mathbf{p}}E^i_{\check{p}} \tag{2.20}$$

$$\mathbf{E}^r = \hat{\mathbf{s}}E^r_{\check{s}} + \hat{\mathbf{p}}E^r_{\check{p}} = \hat{\mathbf{s}}R_{\check{s}}E^i_{\check{s}} + \hat{\mathbf{p}}R_pE^i_{\check{p}} \tag{2.21}$$

$$\mathbf{H}^i = \hat{\mathbf{s}}H^i_{\check{s}} + \hat{\mathbf{p}}H^i_{\check{p}} \tag{2.22}$$

$$\mathbf{H}^r = \hat{\mathbf{s}}H^r_{\check{s}} + \hat{\mathbf{p}}H^r_{\check{p}} = \hat{\mathbf{s}}R_{\check{s}}H^i_{\check{s}} + \hat{\mathbf{p}}R_{\check{p}}H^i_{\check{p}} \tag{2.23}$$

де $\hat{\mathbf{s}}$ орт s-поляризації, $\hat{\mathbf{p}}$ - p-поляризації. Припустимо, що для поверхні малої шорсткості локальний кут падіння в коефіцієнті Френеля буде дорівнювати куту падіння хвилі на поверхню θ_i , а для поверхні високої шорсткості - куту відбиття θ_{sp} , який визначається як

$$\cos\theta_{sp} = -\hat{\mathbf{k}}_r \cdot \hat{\mathbf{k}}_i \tag{2.24}$$

Для цього наближення поверхні з малою шорсткістю задовольняють умові [8]

$$min\ \sigma_s < 0.25 \tag{2.25}$$

а поверхні високої шорсткості

$$k\sigma > \frac{\sqrt{10}}{|\cos\theta_i + \cos\theta_s|} \tag{2.26}$$

Це наближення приводить [9] до

$$E^s_{qp} = -\frac{jk}{4\pi R} e^{-jkR} \int f_{qp} e^{j(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i)\cdot\mathbf{r}}\, ds \tag{2.27}$$

де f_{qp} незалежна функція просторових змінних і для $\check{s}$- та $\check{p}$-поляризацій

$$f_{\check{p}\check{p}} = \frac{2R_{\check{p}}[\sin\theta_i \sin\theta_s - (1 + \cos\theta_i \cos\theta_S)\cos\phi_s - \phi_i]}{\cos\theta_i + \cos\theta_s} \tag{2.28}$$

$$f_{\check{s}\check{s}} = -\frac{2R_{\check{s}}[\sin\theta_i \sin\theta_s - (1 + \cos\theta_i \cos\theta_S)\cos\phi_s - \phi_i]}{\cos\theta_i + \cos\theta_s} \tag{2.29}$$

$$f_{\check{s}\check{p}} = (R_{\check{p}} - R_{\check{s}})\sin\phi_s - \phi_i \tag{2.30}$$

$$f_{\check{p}\check{s}} = (R_{\check{p}} - R_{\check{s}})\sin\phi_i - \phi_s \tag{2.31}$$

Коефіцієнт бістатичного розсіювання для цього випадку [9]

$$\sigma^{0K}_{qp} = \frac{1}{2}k^2 |f_{qp}|^2 e^{-\sigma^2(k_{sz}+k_z)^2} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{[\sigma^2(k_{sz}+k_z)^2]^n W^{(n)}(k_{sz}-k_x, k_{sy}-k_y)}{n!} \tag{2.32}$$

де $W^{(n)}$ спектр n-мірної кореляційної функції,

$$k_x = k \sin\theta \cos\phi \tag{2.33}$$

$$k_y = k \sin\theta \sin\phi \tag{2.34}$$

$$k_z = k \cos\theta \tag{2.35}$$

$$k_{sx} = k \sin\theta_s \cos\phi_s \tag{2.36}$$

$$k_{sy} = k \sin\theta_s \sin\phi_s \tag{2.37}$$

$$k_{sz} = k \cos\theta_s \tag{2.38}$$

2.3 Фур'є перетворення кореляційних функцій

Перетворення Фур'є для одномірної $e^{-\frac{|x|}{d}}$

$$\begin{aligned} F_r(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{d}} e^{-jkx}\, dx &= \int_{0}^{+\infty} e^{(-\frac{1}{d}-jk)x}\, dx + \int_{-\infty}^{0} e^{(\frac{1}{d}-jk)x}\, dx = \\ &= -\frac{e^{(-\frac{1}{d}-jk)x}}{(-\frac{1}{d}-jk)x}\Big|_0^{+\infty} + \frac{e^{(\frac{1}{d}-jk)x}}{(\frac{1}{d}-jk)x}\Big|_{-\infty}^{0} = \\ &= \frac{1}{(-\frac{1}{d}-jk)x} + \frac{1}{(-\frac{1}{d}-jk)x} = \frac{2}{\frac{1}{d}+k^2 d} \end{aligned} \tag{2.39}$$

Перетворення Фур'є для одномірної $e^{-\frac{|x|^2}{d^2}}$

$$\begin{aligned} F_{r^2}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|^2}{d^2}} e^{-jkx}\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{x^2}{d^2}+jkx+(\frac{jkd}{2})^2)+(\frac{jkd}{2})^2}\, dx = \\ &= e^{-\frac{jkd}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{x}{d}+\frac{jkd}{2})}\, dx = d\sqrt{\pi} e^{-\frac{jkd}{2}} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Перетворення Фур'є для двомірної $e^{-\frac{|x|^2}{d^2}}$

$$\begin{aligned} F_{r^2}(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{d^2}} e^{-jkx} e^{-jky}\, dx\ dy = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|^2}{d^2}} e^{-jkx}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|^2}{d^2}} e^{-jky}\, dy \end{aligned} \tag{2.41}$$

що згідно з (2.40) дорівнює

$$F_{r^2}(k_x) \cdot F_{r^2}(k_y) = d^2\pi e^{-\frac{jk_X d}{2}} e^{-\frac{jk_y d}{2}} \tag{2.42}$$

Перетворення Фур'є для двомірної $e^{-\frac{|x|}{d}}$

$$F_r(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{d}} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y}\, dx\ dy \tag{2.43}$$

перейдемо до полярної системи координат

$$\begin{aligned} k_x &= k\cos\psi \qquad & x &= r\cos\varphi \\ k_y &= k\sin\psi \qquad & y &= r\sin\varphi \end{aligned} \tag{2.44}$$

отримаємо

$$\begin{gathered} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{r}}{d}} e^{-jk\cos\psi r\cos\varphi} e^{-jk\sin\psi r\sin\varphi} r\, dr\ d\varphi\ = \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r(\frac{1}{d}+jk\cos\varphi)} r\, dr\ d\varphi\ = \\ = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{[\frac{1}{d}+jk\cos\varphi]^2}\, d\varphi \\ = 4d^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-k^2d^2\cos^2\varphi}{[1+k^2d^2\cos^2\varphi]^2}\, d\varphi\ = 4d^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\frac{k^2d^2}{1+\tan^2\varphi}}{[1+\frac{k^2d^2}{1+\tan^2\varphi}]^2}\, d\varphi \end{gathered} \tag{2.45}$$

використаємо заміну змінної на $t = \tan\varphi$

$$dt = d\tan\varphi = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = (1+\tan^2\varphi)d\varphi d\varphi = \frac{dt}{1+t^2} \tag{2.46}$$

отримаємо

$$\begin{gathered} 4d^2 \int_0^{\infty} \frac{1-k^2d^2+t^2}{[1+k^2d^2+t^2]^2}\, dt\ = 4d^2 \int_0^{\infty} \frac{1+k^2d^2+t^2}{[1+k^2d^2+t^2]^2}\, dt \\ +4d^2 \int_0^{\infty} \frac{-2k^2d^2}{[1+k^2d^2+t^2]^2}\, dt\ = \\ = 4d^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1+k^2d^2+t^2}\, dt\ - 8k^2d^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{[1+k^2d^2+t^2]^2}\, dt \end{gathered}$$

використаємо заміну змінної на $t' = \frac{t}{\sqrt{1+k^2d^2}}$ та отримаємо

$$\frac{4d^2}{\sqrt{1+k^2d^2}} \int_0^\infty \frac{1}{1+t'^2}\,dt' - \frac{8k^2d^2}{[1+k^2d^2]^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \frac{1}{[1+t'^2]^2}\,dt'$$

де правий інтеграл дорівнює

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t'^2}\,dt' = \frac{\pi}{2} \tag{2.47}$$

а для обчислення лівого ми використаємо заміну $t' = \tan u$

$$dt' = \frac{du}{\cos^2 u} \tag{2.48}$$

отримаємо

$$\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2} \int (1+\cos 2u)\,du = \frac{1}{2}(u + \sin u \cos u) \tag{2.49}$$

повертаючись до змінної t'

$$\sin \arctan t' = \frac{t'}{\sqrt{1+t'^2}} \qquad \cos \arctan t' = \frac{t'}{\sqrt{1+t'^2}}$$

отримаємо

$$\frac{1}{2}\left(\arctan t' + \frac{t'}{t'^2+1} \right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \tag{2.50}$$

отже кінцевий вираз для (2.43) виглядає як

$$F_r(k) = \frac{2\pi d^2}{[1+k^2d^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{2.51}$$

2.4 Задача про плоский конденсатор з шорсткими обкладками у наближенні Кірхгофа

Як приклад застосування наближення Кірхгофа розглянемо задачу про ємність конденсатора з шорсткими обкладками. Така задача має як практичне застосування, так і служить прикладом демонстрації конкурентних вкладів різних властивостей шорсткостей. Мається на увазі конкуренція

вкладів висоти шорсткості та її нахилу.

Використовуємо формулу для плоского конденсатора, тобто для конденсатора з обкладками нескінченної площі.

$$C = \frac{S}{4\pi H} \tag{2.52}$$

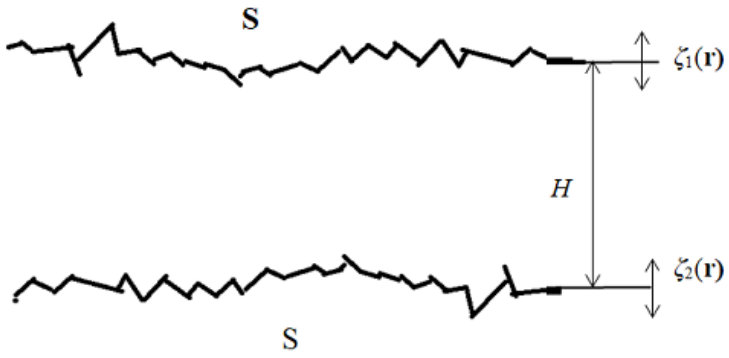


Рис. 2.2. Конденсатор з шорсткими обкладками

У першому прикладі випадковою величиною є відстань між обкладками, при цьому в кожній точці поверхні нормалі до обкладок залишаються паралельними. У найпростішій моделі Кірхгофа ємність такого конденсатора можна уявити як ємність паралельно з'єднаних конденсаторів, у яких відстань між обкладками розподілені випадковим чином

$$C(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{S}{4\pi H(\zeta_1, \zeta_2)} \tag{2.53}$$

В цьому випадку шукана ємність конденсатора буде визначитися середнім за розподілом відстаней

$$\begin{aligned} C = \langle C(\zeta_1, \zeta_2) \rangle = & \int \frac{S}{4\pi H(\zeta_1, \zeta_2)} f(\zeta_1) f(\zeta_2)\, d\zeta_1 d\zeta_2 \; = \\ = & \frac{S}{4\pi} \int \frac{1}{H_0 + \zeta_1 - \zeta_2} f(\zeta_1) f(\zeta_2)\, d\zeta_1 d\zeta_2 \; = \\ = & \frac{S}{4\pi H_0} \int \frac{1}{1 + \frac{\zeta_1}{H_0} - \frac{\zeta_2}{H_0}} f(\zeta_1) f(\zeta_2)\, d\zeta_1 d\zeta_2 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Обчислимо цей інтеграл шляхом розкладання

$$\int \frac{1}{1+\frac{\zeta_1}{H_0}-\frac{\zeta_2}{H_0}} f(\zeta_1)f(\zeta_2)\,d\zeta_1 d\zeta_2 \;= \left\langle \frac{1}{1+\frac{\zeta_1}{H_0}-\frac{\zeta_2}{H_0}} \right\rangle =$$
$$= \left\langle 1+\sum_{n=1}\big(\frac{\zeta_2-\zeta_1}{H_0}\big)^n \right\rangle = 1+\left\langle \sum_{n=1}\big(\frac{\zeta_2-\zeta_1}{H_0}\big)^n \right\rangle =$$
$$= 1+\sum_{n=1}\frac{1}{H_0^n}\sum_{m=0}^{m=n}(-1)^{m-n}C_n^m\langle\zeta_2^m\zeta_1^{n-m}\rangle \qquad (2.55)$$

де $f(\zeta_1)$ та $f(\zeta_2)$ щільність ймовірностей розподілу дял ζ_1 та ζ_2 відповідно. Для нашого розгляду обмежимося розкладанням до квадратичного члена за малою висотою шорсткості

$$\left\langle \frac{1}{1+\frac{\zeta_1}{H_0}-\frac{\zeta_2}{H_0}} \right\rangle = \left\langle 1-\frac{\zeta_1}{H_0}+(\frac{\zeta_1}{H_0})^2+\frac{\zeta_2}{H_0}+(\frac{\zeta_2}{H_0})^2-\frac{2\zeta_1\zeta_2}{H_0^2} \right\rangle =$$
$$= 1-\left\langle \frac{\zeta_1}{H_0} \right\rangle + \left\langle \Big(\frac{\zeta_1}{H_0}\Big)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{\zeta_2}{H_0} \right\rangle + \left\langle \Big(\frac{\zeta_2}{H_0}\Big)^2 \right\rangle - \left\langle \frac{2\zeta_1\zeta_2}{H_0^2} \right\rangle =$$
$$= 1+\left\langle \Big(\frac{\zeta_1}{H_0}\Big)^2 \right\rangle + \left\langle \Big(\frac{\zeta_2}{H_0}\Big)^2 \right\rangle = 1+\frac{\triangle\sigma_1}{H_0^2}+\frac{\triangle\sigma_2}{H_0^2} = 1+\frac{2\triangle\sigma}{H_0^2} \qquad (2.56)$$

де $\triangle\sigma$ дисперсія розподілу шорсткості за висотою. Вона передбачається однаковою на обох обкладках.

Ми бачимо, що в другому наближенні по висоті шорсткості, ємність може бути записана у вигляді

$$C = \frac{S}{4\pi H_0}\frac{1}{1-\frac{2\sigma}{H_0^2}} \qquad (2.57)$$

Тепер розберемо ситуацію, коли шорсткості можуть мати певний нахил

$$C = \langle C(\zeta_1,\zeta_2)\rangle = \frac{1}{4\pi\sigma_0}\left\langle \int_S \frac{\sigma_{eff}(\mathbf{r})}{H_0+\zeta_1(\mathbf{r})-\zeta_2(\mathbf{r})}\,d^2(\mathbf{r}) \right\rangle =$$

$$= \frac{S_0}{4\pi H_0}\frac{1}{S_0}\left\langle \int_S \frac{\frac{\sigma_{eff}(\mathbf{r})}{\sigma_0}}{1+\frac{\zeta_1(\mathbf{r})}{H_0}-\frac{\zeta_2(\mathbf{r})}{H_0}}\,d^2(\mathbf{r}) \right\rangle\right\rangle =$$

$$= \frac{S_0}{4\pi H_0}\frac{1}{S_0}\left\langle \int_S \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2}}{1+\frac{\zeta_1(\mathbf{r})}{H_0}-\frac{\zeta_2(\mathbf{r})}{H_0}}\, d^2(\mathbf{r}) \right\rangle =$$

$$= \frac{S_0}{4\pi H_0}\frac{1}{S_0}\left\langle \int_S \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial \mathbf{r}}\right)^2}}{1+\frac{\zeta_1(\mathbf{r})}{H_0}-\frac{\zeta_2(\mathbf{r})}{H}}\, d^2(\mathbf{r}) \right\rangle \tag{2.58}$$

Розкладаючи інтеграл (2.58) в ряд до другого порядку отримаємо

$$\left\langle \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\zeta}{l}\right)^2}}{1+\frac{\zeta_1(\mathbf{r})}{H_0}-\frac{\zeta_2(\mathbf{r})}{H_0}} \right\rangle \approx 1+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\zeta_1}{l_1}\right)^2+\left(\frac{\zeta_2}{l_2}\right)^2\right]+\left[\left(\frac{\zeta_1}{H_0}\right)^2+\left(\frac{\zeta_2}{H_0}\right)^2\right] =$$

$$= 1+\frac{\triangle\sigma}{2l^2}+\frac{2\triangle\sigma}{H_0^2} \tag{2.59}$$

де l радіус кореляції (2.9).

Перший доданок після одиниці визначає збільшення ємності просто за рахунок геометричного збільшення ефективної площі обкладки, другий доданок визначає збільшення ємності за рахунок ефективного зменшення відстані між обкладками.

Такий розрахунок демонструє один із недоліків моделі Кірхгофа. У цій моделі не враховуються особливості конкретного фізичного завдання. На прикладі конденсатора, очевидно, що при шорсткості другого типу розподіл заряду буде неоднорідним. Тому, на гострих піках шорсткості збиратиметься велика кількість заряду, які створюватимуть локальні місця зі збільшеною напруженістю електричного поля. Такий ефект призводить до зменшення ефективної ємності системи і як видно з формул, він не знайшов відображення в моделі, що розглядається.

2.5 Випромінювання в наближенні Кірхгофа

Наближення Кірхгофа може застосовуватися як опис ансамблю не тільки для стаціонарних задач, розглянутих у попередньому підрозділі, але і при вирішенні завдань про проходження та відображення хвиль

від шорстких кордонів між двома середовищами. Задля справедливості треба зазначити, що саме для таких завдань це наближення було вперше використане і широко використовується досі.

Як конкретний реальний приклад розглянемо задачу про випромінювання тепла твердим тілом у газ або рідину. За низькими температурами ці потоки тепла можуть розглядатися у квантово-механічній моделі як потоки квазічастинок – фононів. Основні рівняння для руху фононів мають такий самий вигляд, як і для електромагнітних хвиль, зокрема закон дисперсії. І якщо для електромагнітних хвиль швидкістю є швидкість світла, то для фононів або квантів коливання густини, швидкістю руху, природно, є швидкість звуку в даній речовині.

Але, як відомо, швидкість звуку в різних середовищах, наприклад, у твердому тілі та газі, а, отже, і імпеданс границь, може відрізнятися істотно, на кілька порядків. У такому випадку потік тепла з твердого тіла має відбуватися практично за нормаллю до поверхні.

Такі експерименти, зокрема проводилися при вивченні випромінювання фононів з твердого матеріалу в надплинний гелій [11—14]. При цьому прямі вимірювання кутового розподілу показали, що кутовий розподіл випромінюваних фононів досить широкий. Однією з причин такого «розмитого» розподілу випромінюваних фононів за кутами може бути не гладкий характер поверхні.

Найпростіша модель, яка може пов'язати кутовий розподіл випромінювання з властивостями шорсткої поверхні є наближення Кірхгофа. Розглянемо приклад його застосування. Нехай розподіл інтенсивності за напрямком дається співвідношенням

$$I_0 = A\Theta(\theta_m - \theta) \tag{2.60}$$

Тут $\Theta(x)$ – це функція Гевісайда, або функція - сходинка. Тобто, розподіл за кутами є рівномірним для кутів менших за θ_m а для кутів, більших за θ_m фононів немає.

Тепер припустимо, що розподіл шорсткостей за нахилами є таким:

$$G(\chi) = \frac{e^{-\frac{\chi^2}{2\Delta_\chi}}}{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{\chi'^2}{2\Delta_\chi}}\, d\chi'} \tag{2.61}$$

Тут кут χ - це кут між нормаллю до шорсткої поверхні в даному місці. У запропонованому розподілу мається на увазі що середній нахил дорівнює нулю, а дисперсія Δ_χ визначає середній квадратичний розмір нахилу шорсткості:

$$\delta\chi = \sqrt{\Delta_\chi} \tag{2.62}$$

Тепер можна застосувати наближення Кірхгофа для визначення кутового розподілу випромінення у випадку, коли поверхня є шорсткою. У цьому наближення кінцевий розподіл буде визначатися усередненням за ансамблем різних абсолютно пласких площин, нормалі яких розподілені за розподілом (2.61) нахилів реальної заданої поверхні.

$$I(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} I_0(\theta - \chi) G(\chi)\, d\chi \tag{2.63}$$

З математичної точки зору це звичайна інтегральна згортка функції розподілу випромінювання ідеальної поверхні $I_0(\theta)$ та функції «розмиття» $G(\chi)$, яка визначається нахилами шорсткостей реальної поверхні.



Рис. 2.3. Приклад розподілу випромінювання шорсткої реальної поверхні

На Рис.2.3 наведено приклад того, як потік фононів практично перпендикулярний до площини випромінювання, формує потік тепла, спрямований рівномірно на всі сторони.

На Рис.2.4 наведено приклади розрахунку за формулою (2.63) результуючого потоку тепла, в якому розподіл випромінювання від плоскої поверхні (2.60) має ширину $\theta_m = 25°$, а ширина (2.62) розподілу шорсткості

за нахилами (2.61) $\delta\chi = 30°$.

На Рис.2.5 наведено приклади розрахунку за формулою (2.63) результуючого потоку тепла, в якому розподіл випромінювання від плоскої поверхні (2.60) має ширину $\theta_m = 25°$, а ширина (2.62) розподілу шорсткості за нахилами (2.61) $\delta\chi = 40°$.

Ми бачимо, що в цьому випадку кутовий розподіл практично не відрізняється від ізотропного розподілу за законом косинуса (зелена лінія), який спостерігався на експерименті.

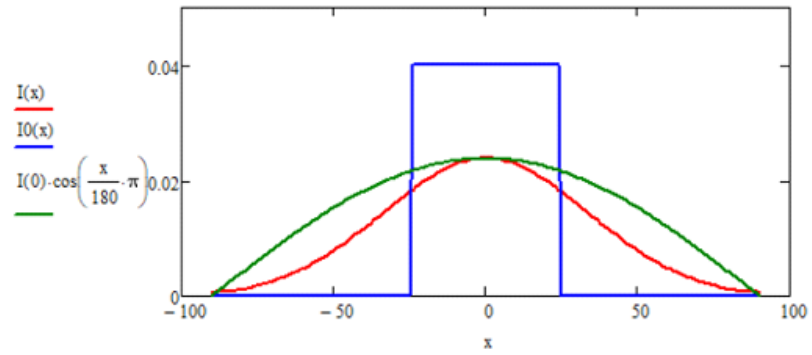


Рис. 2.4. Кутова залежність випромінювання від плоскої поверхні (2.60) – синя лінія, випромінювання від шорсткої поверхні за формулою (2.63) для ширини розподілу шорсткості за нахилами $\delta\chi = 30°$ – червона лінія, та апроксимація даних експерименту [11—14]

Таким чином, результати експерименту можуть бути пояснені певним

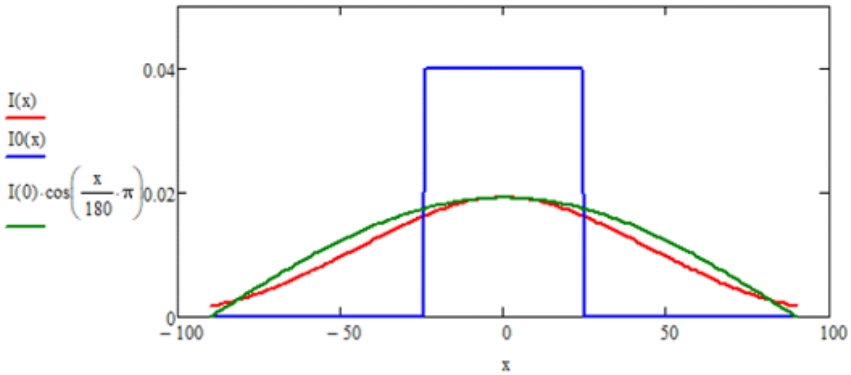


Рис. 2.5. Кутова залежність випромінювання від плоскої поверхні (2.60) – синя лінія, випромінювання від шорсткої поверхні за формулою (2.63) для ширини розподілу шорсткості за нахилами $\delta\chi = 40°$ – червона лінія, та апроксимація даних експерименту [11—14]

ступенем шорсткості поверхні нагрівача, і, більше того, порівняння розрахунків за формулою (2.63) дозволяє визначити параметри шорсткості такої поверхні.

2.6 Висновки розділу

У розділі досліджено основні способи опису шорстких поверхонь. Введено параметри, які характеризують такі поверхні. Як найпростіший приклад розв'язання задач про взаємодію полів з шорсткими поверхнями, вирішено два завдання у наближенні Кірхгофа. Перше модельне завдання було присвячено обчисленню ємності конденсатора у разі шорстких обкладок. Друге завдання присвячене опису теплових потоків у квантово-механічній моделі, коли такі потоки є хвильовим рухом квантів звуку – фононів. Розв'язання цієї задачі дозволило оцінити можливі параметри шорсткості поверхонь нагрівачів, які реалізувалися в експериментах і могли б пояснити надзвичайно широкий кутовий розподіл потоків тепла.

3 Задача про поле поблизу поверхні

3.1 Поле точкового заряду

Розглянемо основну задачу цього диплома, а саме задачу про знаходження поля точкового заряду поблизу шорсткої поверхні. Розв'язання такої задачі добре відоме для випадку ідеально плоскої поверхні провідника. У цьому випадку на поверхні провідника індукуються заряди, які створюють поле, що повністю збігається з полем точкового заряду, що розміщений у точці, симетричній точці розташування заданого заряду щодо заданої площини та має протилежний знак. Такий фіктивний заряд називається «зображенням» вихідного заряду. Використання цього факту під час розв'язання статистичних електричних і магнітних задач називається «методом зображень».

У дипломі буде розв'язано задачу про поле, яке створюють заряди, що індуковані точковим зарядом на поверхні провідника, залежно від статистичних властивостей шорсткості. Тут ми припускаємо, що висота шорсткості поверхні, або, іншими словами, рівняння поверхні провідника, дається співвідношенням

$$\zeta = \zeta(x, y). \tag{3.1}$$

У цьому разі нормаль до шорсткої поверхні задається як

$$\mathbf{N} = \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial x}, -\frac{\partial \zeta}{\partial y}, 1 \right) \tag{3.2}$$

Елемент заряду на цій поверхні задається як

$$dq = \sigma ds = \sigma |\mathbf{N}| ds' = \sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2} ds' = \sigma_{eff} ds' \tag{3.3}$$

де ds елемент площини на шорсткій поверхні, ds' елемент площини на гладкій поверхні $z = 0$, σ щільність заряду шорсткій поверхні, σ_{eff} щільність заряду на одиницю гладкої поверхні

$$\sigma_{eff} = \sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2} \tag{3.4}$$

Потенціал створений точковим зарядом біля поверхні

$$\varphi(x,y,z) = \varphi_s(x,y,z) + \varphi_c(x,y,z) \tag{3.5}$$

де $\varphi_s(x,y,z)$ власний потенціал точкового заряду, $\varphi_c(x,y,z)$ потенціал індукованого на поверхні заряду. Згідно з законом Кулона потенціал дорівнює

$$\varphi(x,y,z) = \int \frac{\sigma(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\, dV' \tag{3.6}$$

У нашому випадку

$$\varphi(x,y,z) = \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(H-z)^2}} + \\ + \int \frac{\sigma_{eff}(x',y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-\zeta(x',y'))^2}}\, ds' \tag{3.7}$$

використовуючи вектор $\mathbf{r} = (x,y)$

$$\varphi(\mathbf{r},z) = \frac{q}{\sqrt{\mathbf{r}^2+(H-z)^2}} + \int \frac{\sigma_{eff}(\mathbf{r}')}{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2+(z-\zeta(\mathbf{r}'))^2}}\, ds' \tag{3.8}$$

Густина поверхневого заряду визначається з граничних умов (1.16)

$$\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} \cdot \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\bigg|_{(\mathbf{r},\zeta(\mathbf{r}))} = 2\pi\sigma \tag{3.9}$$

$$\mathbf{N} \cdot \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\bigg|_{(\mathbf{r},\zeta(\mathbf{r}))} = 2\pi\sigma_{eff} \tag{3.10}$$

підставляючи (3.8) знаходимо

$$2\pi\sigma_{eff}(\mathbf{r}) = \frac{q(H-\zeta(\mathbf{r})-\mathbf{r}\cdot\frac{\partial\zeta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}})}{(\mathbf{r}^2+(H-\zeta(\mathbf{r}))^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ + \int \frac{[\zeta(\mathbf{r})-\zeta(\mathbf{r}')-(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\frac{\partial\zeta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}]\sigma_{eff}(\mathbf{r}')}{[(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2+(\zeta(\mathbf{r})-\zeta(\mathbf{r}'))^2]^{\frac{3}{2}}}\, ds' \tag{3.11}$$

3.2 Метод розкладання в ряд за малим параметром

Розкладання в ряд (3.11)

$$\sigma_{eff} = \sum_m \sigma^{(m)} \qquad \sigma^{(n)} = \overline{o}(\zeta^n) \tag{3.12}$$

Для зручності введемо у (3.11) $R = \sqrt{\mathbf{r}^2 + H^2}$

$$2\pi\sigma_{eff}(\mathbf{r}) = \frac{q(H - \zeta(\mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot \frac{\partial\zeta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}})}{R^3(1 - \frac{2H\zeta(\mathbf{r})}{R^2} + \frac{\zeta^2(\mathbf{r})}{R^2})^{\frac{3}{2}}} + \\ + \int \frac{[\zeta(\mathbf{r}) - \zeta(\mathbf{r}') - (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \frac{\partial\zeta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}]\sigma_{eff}(\mathbf{r}')}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + (\zeta(\mathbf{r}) - \zeta(\mathbf{r}'))^2]^{\frac{3}{2}}}\, ds' \tag{3.13}$$

Нульовий член розкладання (3.12) буде виглядати, як

$$2\pi\sigma^{(0)} = -\frac{qH}{R^3} \tag{3.14}$$

Розкладання знаменника першого члену правої частини (3.11) в ряд Тейлора по малому $\zeta(\mathbf{r})$

$$\frac{1}{(1 - \frac{2H\zeta(\mathbf{r})}{R^2} + \frac{\zeta^2(\mathbf{r})}{R^2})^{\frac{3}{2}}} = 1 - \frac{3}{2}\frac{\zeta^2(\mathbf{r}) - 2H\zeta(\mathbf{r})}{R^2} + \frac{15}{8}\left[\frac{\zeta^2(\mathbf{r}) - 2H\zeta(\mathbf{r})}{R^2}\right]^2 - \cdots = \\ = 1 + \frac{3H}{R^2}\zeta(\mathbf{r}) + \frac{15H^2 - 3R^2}{2R^4}\zeta^2(\mathbf{r}) + \overline{o}(\zeta^3) \tag{3.15}$$

Тобто

$$2\pi\sigma^{(0)} + 2\pi\sigma^{(1)} = \frac{q}{R^3}\left(\zeta(\mathbf{r}) - H - \mathbf{r} \cdot \frac{\partial\zeta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\right)\left(1 + \frac{3H}{R^2}\zeta(\mathbf{r})\right) + \\ + \int \frac{[\zeta(\mathbf{r}) - \zeta(\mathbf{r}') - (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \frac{\partial\zeta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}]}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^3}\sigma^{(0)}\left(1 - \frac{3\zeta(\mathbf{r})\zeta(\mathbf{r}')}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}\right) ds' = \\ = \frac{-qH}{R^3} - \frac{q}{R^3}\mathbf{r} \cdot \frac{\partial\zeta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} + \left(\frac{q}{R^3} - \frac{3qH^2}{R^5}\right)\zeta(\mathbf{r}) - \frac{3qH}{R^5}\zeta(\mathbf{r})\mathbf{r} \cdot \frac{\partial\zeta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} + \\ + \frac{3qH}{R^5}\zeta^2(\mathbf{r}) + \int \frac{[\zeta(\mathbf{r}) - \zeta(\mathbf{r}') - (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \frac{\partial\zeta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}]}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^3}\sigma^{(0)}\left(1 - \frac{3\zeta(\mathbf{r})\zeta(\mathbf{r}')}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}\right) ds' \tag{3.16}$$

При розкладанні до другої ступені

$$2\pi\sigma^{(0)} + 2\pi\sigma^{(1)} + 2\pi\sigma^{(2)} = \frac{q}{R^3}\left(\zeta(\mathbf{r}) - H - \mathbf{r}\cdot\frac{\partial\zeta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\right)\times$$
$$\times\left(1 + \frac{3H}{R^2}\zeta(\mathbf{r}) + \frac{15H^2 - 3R^2}{2R^4}\zeta^2(\mathbf{r})\right) +$$
$$+ \int \frac{[\zeta(\mathbf{r}) - \zeta(\mathbf{r}') - (\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\frac{\partial\zeta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}]}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^3}\sigma^{(1)}\left(1 - \frac{3\zeta(\mathbf{r})\zeta(\mathbf{r}')}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}\right)ds' =$$
$$= \frac{-qH}{R^3} - \frac{q}{R^3}\mathbf{r}\cdot\frac{\partial\zeta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} + \left(\frac{q}{R^3} - \frac{3qH^2}{R^5}\right)\zeta(\mathbf{r}) -$$
$$-\frac{3qH}{R^5}\zeta(\mathbf{r})\mathbf{r}\cdot\frac{\partial\zeta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} + (\frac{3qH}{R^5} + \frac{qH[3R^2 - 15H^2]}{2R^7})\zeta^2(\mathbf{r}) +$$
$$+ \int \frac{[\zeta(\mathbf{r}) - \zeta(\mathbf{r}') - (\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\frac{\partial\zeta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}]}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^3}\sigma^{(1)}\left(1 - \frac{3\zeta(\mathbf{r})\zeta(\mathbf{r}')}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}\right)ds' \tag{3.17}$$

Коефіцієнт при $\zeta(\mathbf{r})$:

$$\frac{q}{R^3} - \frac{3qH^2}{R^5} \tag{3.18}$$

коефіцієнт при $\mathbf{r}\cdot\frac{\partial\zeta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}$:

$$-\frac{q}{R^3} \tag{3.19}$$

коефіцієнт при $\zeta^2(\mathbf{r})$:

$$\frac{3qH}{R^5} + \frac{qH[3R^2 - 15H^2]}{2R^7} \tag{3.20}$$

коефіцієнт при $\zeta(\mathbf{r})\mathbf{r}\cdot\frac{\partial\zeta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}$:

$$-\frac{3qH}{R^5} \tag{3.21}$$

коефіцієнт порядку ζ :

$$\mathtt{k}_1 \approx \frac{q}{R^3} - \frac{3qH^2}{R^5} - \frac{q}{R^3} \tag{3.22}$$

коефіцієнт порядку ζ^2 :

$$\mathtt{k}_2 \approx \frac{3qH}{R^5} + \frac{qH[3R^2 - 15H^2]}{2R^7} - \frac{3qH}{R^5} \tag{3.23}$$

Усереднення (3.12) по ζ дає

$$\langle \sigma_{eff} \rangle = \langle \sigma^{(0)} + \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} \rangle = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3qH}{R^5} + \frac{qH[3R^2 - 15H^2]}{2R^7} \right) \triangle\sigma \tag{3.24}$$

3.3 Розв'язок методом ітерацій

Розкладання в ряд по розміру шорсткості

$$\sigma_{eff} = \sum_m \sigma^{(m)} \tag{3.25}$$

Підставляємо (3.25) у (3.8)

$$\begin{aligned} \sum_m \sigma^{(m)} \; &= \frac{q(H - \zeta(\mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \zeta(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}})}{2\pi(\mathbf{r}^2 + (H - \zeta(\mathbf{r}))^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ + \frac{1}{2\pi} \int & \frac{[\zeta(\mathbf{r}) - \zeta(\mathbf{r}') - (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \frac{\partial \zeta(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}](\mathbf{r}')}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + (\zeta(\mathbf{r}) - \zeta(\mathbf{r}'))^2]^{\frac{3}{2}}} \sum_m \sigma^{(m)} \, ds' \end{aligned} \tag{3.26}$$

Нульова ітерація :

$$\sigma^{(0)} = \frac{q(H - \zeta(\mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \zeta(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}})}{2\pi(\mathbf{r}^2 + (H - \zeta(\mathbf{r}))^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.27}$$

Перша ітерація :

$$\sigma^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{[\zeta(\mathbf{r}) - \zeta(\mathbf{r}') - (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \frac{\partial \zeta(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}] \sigma^{(0)}(\mathbf{r}')}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + (\zeta(\mathbf{r}) - \zeta(\mathbf{r}'))^2]^{\frac{3}{2}}} \, ds' \tag{3.28}$$

Друга ітерація :

$$\sigma^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{[\zeta(\mathbf{r}) - \zeta(\mathbf{r}') - (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \frac{\partial \zeta(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}] \sigma^{(1)}(\mathbf{r}')}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + (\zeta(\mathbf{r}) - \zeta(\mathbf{r}'))^2]^{\frac{3}{2}}} \, ds' \tag{3.29}$$

Вклад в ітерацію дає інтеграл з (3.11) який містить попереднє значення, отже член N-ої ітерації $N > 0$ задається як

$$\sigma^{(N)} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{[\zeta(\mathbf{r}) - \zeta(\mathbf{r}') - (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \frac{\partial \zeta(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}]\sigma^{(N-1)}(\mathbf{r}')}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + (\zeta(\mathbf{r}) - \zeta(\mathbf{r}'))^2]^{\frac{3}{2}}} \, ds' \tag{3.30}$$

3.4 Числовий розв'язок задачі про поле точкового заряду

Розв'язання основного інтегрального рівняння (3.11) проводитимемо методом кінцевих елементів. Для цього візьмемо досить великий квадрат розмірами $L \times L$ на площині XY зі сторонами паралельними осям координат та центром у початку координат. Далі розіб'ємо цей великий квадрат на малі квадрати, кількість яких $N \times N$ достатньо для того, щоб сторона малого квадрата $h = \frac{L}{d}$ була значно меншою за характерний розмір неоднорідності.

Розмір L ми також підбираємо так, щоб він у кілька разів перевершував відстань від заряду до площини H.

Всі ці розміри згодом верифікуються таким чином, щоб їх зміна не змінювала результати, що одержуються.

Далі ми переходимо до основного інтегрального рівняння для визначення ефективної щільності заряду, яку запишемо у вигляді

$$2\pi\sigma_{eff}(\mathbf{r}) = \frac{q(H - \zeta(\mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \zeta(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}})}{(\mathbf{r}^2 + (H - \zeta(\mathbf{r}))^2)^{\frac{3}{2}}} + \int M(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\sigma_{eff}(\mathbf{r}') \, ds' \tag{3.31}$$

де $M(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ядро цього інтегрального рівняння.

Далі інтегруємо це рівняння за площею певного малого квадрата з координатами, наприклад (m, n)

Шуканою невідомою величиною тепер у нас стане заряд цього малого квадрата (елемента площини)

$$Q_k = \int_{x_m - \frac{h}{2}}^{x_m + \frac{h}{2}} \int_{y_n - \frac{h}{2}}^{y_n + \frac{h}{2}} \sigma_{eff}(\mathbf{r}) \, dx \; dy \tag{3.32}$$

Тут індекс k нумерує всі елементи площини та змінюється в межах

$$k = 0 \ldots (N^2 - 1) \tag{3.33}$$

Його можна пов'язати з номерами квадратів різними методами, наприклад таким

$$k = m + N \cdot n. \tag{3.34}$$

Величина Q при такому підході є шуканим вектором елементарних зарядів, який задовольняє матричному рівнянню.

$$Q_k = \int_{x_m - \frac{h}{2}}^{x_m + \frac{h}{2}} \int_{y_n - \frac{h}{2}}^{y_n + \frac{h}{2}} \sigma_{eff}(\mathbf{r})\, dx\ dy\ = qG_k + \sum_{k1=0}^{k1=N^2-1} F_{k,k1} Q_{k1} \tag{3.35}$$

де індекс $k1$ пов'язаний з номерами квадратів аналогічним образом

$$k1 = m1 + N \cdot n1. \tag{3.36}$$

Тут вектор $\mathbf{G}$ дається своїми коефіцієнтами G_k

$$G_k = \int_{x_m - \frac{h}{2}}^{x_m + \frac{h}{2}} \int_{y_n - \frac{h}{2}}^{y_n + \frac{h}{2}} \frac{q(H - \zeta(\mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \zeta(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}})}{(\mathbf{r}^2 + (H - \zeta(\mathbf{r}))^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx\ dy \tag{3.37}$$

А коефіцієнти $F_{k,k1}$ задається співвідношенням

$$F_{k,k1} = \frac{1}{h^2} \int_{x_m - \frac{h}{2}}^{x_m + \frac{h}{2}} \int_{y_n - \frac{h}{2}}^{y_n + \frac{h}{2}} \int_{x_{m1} - \frac{h}{2}}^{x_{m1} + \frac{h}{2}} \int_{y_{n1} - \frac{h}{2}}^{y_{n1} + \frac{h}{2}} M(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, ds\ ds' \tag{3.38}$$

Рівняння (3.35) можна записати у векторному вигляді

$$\mathbf{Q} = q\mathbf{G} + \hat{F}\mathbf{Q} \tag{3.39}$$

Тут матриця $\hat{F}$ складена з відповідних коефіцієнтів

$$\hat{F} = ||F_{k,k1}|| \tag{3.40}$$

Рішення рівняння (3.39) проводиться у роботі методом послідовних ітерацій:

$$\mathbf{Q}^{(0)} = q\mathbf{G} \tag{3.41}$$

$$\mathbf{Q}^{(1)} = \hat{F}\mathbf{Q}^{(0)} \tag{3.42}$$

$$\mathbf{Q}^{(2)} = \hat{F}\mathbf{Q}^{(1)} \tag{3.43}$$

$$\dots \tag{3.44}$$

$$\mathbf{Q}^{(N)} = \hat{F}\mathbf{Q}^{(N-1)} \tag{3.45}$$

В якому шукане рішення подається у вигляді ряду

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{(0)} + \mathbf{Q}^{(1)} + \mathbf{Q}^{(2)} + \dots \tag{3.46}$$

Здобутий розв'язок визначає густину наведених зарядів на поверхні та дозволять визначити всі параметри електричного поля: потенціал, напруженість і силу, що діє на заряд.

3.5 Висновки розділу

В розділі розглянуто основну задачу диплома, а саме задачу про знаходження поля точкового заряду поблизу шорсткої поверхні. Здобуто основне інтегральне рівняння для розподілу поверхневого заряду на цієї поверхні. Запропоновані методи розв'язання цього інтегрального рівняння. Зокрема, розглянуто метод розкладання за малим параметром, що відповідає розміру шорсткостей та малим нахилам цих шорсткостей. Також запропоновано метод послідовних ітерацій. Його застосовано для розв'язання відповідного матричного рівняння, що було здобуто у рамках методу Здобутий у підрозділі розв'язок дозволяє знайти густину наведених зарядів на поверхні й, таким чином, визначити всі параметри електричного поля: потенціал, напруженість і силу, що діє на заряд.

Висновки

В дипломній роботі проведено дослідження властивостей електромагнітних полів різної конфігурації поблизу шорсткої поверхні провідників та діелектриків. Зокрема, у дипломі проведено аналіз літератури, та складено огляд існуючих методів розрахунку полів поблизу шорстких поверхонь. У роботі також наведено аналіз методів опису шорстких поверхонь, і, в якості прикладних задач розглянуто тіла з поверхнею різного рівня шорсткості та статистичні властивості поверхонь таких тіл.

Також в дипломі досліджено основні механізми формування електричного поля над шорсткими поверхнями. При цьому були розглянуті як задачі про формування стаціонарних електричних полів, так задачі про взаємодію електромагнітних хвиль з поверхнями. Такий підхід дозволив розв'язати конкретні задачі, зокрема, про поле точкового заряду, що знаходиться поблизу провідника з шорсткою поверхнею, ємність конденсатора з не гладкими обкладинками, та задачу про взаємодію електромагнітної хвилі з поверхнею з заданою шорсткістю.

Таким чином в дипломі було досліджено механізми формування електричного та електромагнітного полів над шорсткими поверхнями та запропоновано оригінальні методики розв'язання основних прикладних задач в цієї області.

Результати роботи дозволяють зробити висновки про ефективність певних методів розрахунку електромагнітних полів з поверхнями різного ступеня шорсткості, а також запропонувати методологію проведення числових розрахунків та реальних експериментів, як для перевірки результатів роботи, та для подальшого застосування цих результатів на практиці.

Література

1. *Фейнман Р.*, *Лейтон Р.*, *Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Том 5. Электричество и магнетизм // Изд.«Мир», М. — 1966. — с. 289.
2. *Balanis C. A.* Advanced engineering electromagnetics. — John Wiley & Sons, 2012.
3. *Ulaby F. T. Moore R. K. F. A. K.* Microwave remote sensing: active and passive. — 1982.
4. *Tsang L. Kong J. A. D. K.-H.* Electromagnetic Waves, theories and applications. — 2000.
5. *Andrew J. Poggio E. K. M.* Integral Equation Solutions of Three-dimensional Scattering Problems. — 1973.
6. *Tsang L. K. J. A.* Scattering of Electromagnetic Waves, Advanced Topics. — 2001.
7. Scattering from natural rough surfaces modeled by fractional Brownian motion two-dimensional processes / G. Franceschetti [та ін.] // IEEE transactions on antennas and propagation. — 1999. — т. 47, № 9. — с. 1405—1415.
8. *Khenchaf A.*, *Daout F.*, *Saillard J.* Polarization degradation in the sea surface environment // 'Challenges of Our Changing Global Environment'. Conference Proceedings. OCEANS'95 MTS/IEEE. т. 3. — IEEE. 1995. — с. 1517—1522.
9. *K. F. A.* Microwave Scattering and Emission Models and Their Application. — 1994.
10. *Vesperinas M. N.* Scattering and diffraction in physical optics. — World Scientific Publishing Company, 2006.
11. The Angular Distribution of Phonons Radiated from the Cleaved< 100> Faces of NaF, KC1 and MgO into Liquid 4 He / G. Page [та ін.] // Phonon Scattering in Solids. — Springer, 1976.
12. Angular Distribution of Phonons Radiated from a Heated Solid into Liquid He 4 / R. Sherlock [та ін.] // Physical Review Letters. — 1972. — т. 29, № 19. — с. 1299.

13. *Sherlock R.*, *Mills N.*, *Wyatt A.* The angular distribution of phonons radiated from a heated solid surface into liquid 4He. II. Cleaved sodium fluoride (100) faces // Journal of Physics C: Solid State Physics. — 1975. — т. 8, № 3. — с. 300.

14. *Wyatt A.*, *Sherlock R.*, *Allum D.* The temperature of phonon pulses injected into liquid 4He // Journal of Physics C: Solid State Physics. — 1982. — т. 15, № 9. — с. 1897.