МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. В. Н. КАРАЗІНА
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ

Кафедра фізики нетрадиційних енерготехнологій та екології

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи

за освітньо-кваліфікаційним рівнем «магістр»

«Механізми прискорення дифузії за високочастотного зовнішнього впливу»

Виконав: студент 2 курсу
магістратури , групи НФ-61
Колесник Віталій Віталійович

Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

Освітня програма: Прикладна фізика енергетичних систем

Керівник: д. ф.-м. н., професор
Марченко Іван Григорович

Рецензент: д. ф.-м. н., завідувач відділом ННЦ ХФТІ
Соколенко Володимир Іванович

Харків – 2022 року

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

ННІ Комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра фізики нетрадиційних енерготехнологій та екології
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магістр
Спеціальність 105–Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____Олександр КУЛИК
підпис прізвище

"15" вересня 2022 року

З А В Д А Н Н Я
НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ (ПРОЕКТ)

Колесник Віталій Віталійович
(прізвище, ім'я, по батькові студента)

1. Тема роботи Механізми прискорення дифузії за високочастотного зовнішнього впливу

керівник роботи Марченко І.Г., доктор ф.-м. наук, професор
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від "03" жовтня 2022р. №4201-5/1669

2. Строк подання студентом роботи 20.11.2022р.

3. Перелік питань, які потрібно розробити
Провести літературний аналіз робіт по прискоренню дифузії частинок у просторово-періодичних потенціалах. Зробити розрахунки дифузії частинок під впливом високочастотного зовнішнього поля. Провести аналіз траєкторій окремих частинок в просторово-періодичному потенціалі під дією зовнішнього періодичного поля. Провести аналіз отриманих чисельних результатів.

4. План роботи

№ з/п	**Назви етапів роботи**
1.	Проведення літературного аналізу робіт по транспорт частинок у просторово-періодичних потенціалах
2.	Вивчення методів вирішення стохастичних диференціальних рівнянь
3.	Проведення розрахунків зміни середньої швидкості та кінетичної температури в ансамблі частинок в залежності від часу для різних діючих сил
4.	Проведення розрахунків дисперсії в ансамблі частинок, які рухаються в періодичному потенціалі під дією зовнішньої сили
5.	Побудова отриманих залежностей та проведення аналізу чисельних результатів

5. Дата видачі завдання_____

Студент _____ **Колесник В.В.**
підпис, ініціали,
прізвище

Керівник роботи _____ **Марченко І.Г.**
підпис, ініціали,
прізвище

РЕФЕРАТ

Колесник Віталій Віталійович тема дипломної роботи «Механізми прискорення дифузії за високочастотного зовнішнього впливу» (випускна робота за освітнім рівнем – магістр). Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна. – 49 сторінок.

Дипломна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновку та списку літератури. Використано літератури – 43 джерела.

Мета роботи: знайти причину виникнення гігантської дифузії та температурно-аномальної дифузії для частинок під впливом високочастотного поля.

Об’єкт дослідження: Броунівські частинки.

Мета дослідження: дослідити як будуть поводити себе частинки у зовнішньому високочастотному полі на відміну від зовнішнього постійного поля.

Наукова новизна одержаних результатів: під час досліджуваної дифузії утворюються «локалізовані» та «біжучі» рішення, завдяки яким і відбувається ТАД.

SUMMARY

Kolesnyk Vitalii Mitaliiovych thesis topic "Mechanisms of acceleration of diffusion under the high-frequency external influence" (graduation thesis of master's educational level). V. N. Karazin Kharkiv National University. - 49 pages.

The thesis consists of an introduction, three chapters, a conclusion, and a list of references. Used literature - 43 sources.

The purpose of the research work: find the cause of enormous diffusion and temperature-anomalous diffusion for particles under the influence of a high-frequency field.

Research object: Brownian particles.

The purpose of the research: analyze the difference in the behavior of particles in an external high-frequency field and an external constant field.

The scientific novelty of the obtained results: TAD occurs as a result of the formation of "localized" and "running" solutions at the studied diffusion.

Зміст

Вступ……7

1. Аналіз науково-технічної літератури……8

1.1 Актуальність теми……...8

1.2 Огляд…….9

1.3 Періодичні у часі сторонні збурення ……..……...10

1.4 Постановка задачі ……12

2. Методи рішення диференціальних стохастичних рівнянь……...13

2.1 Дифузія частинок у просторово-періодичних потенціалах під постійним зовнішнім впливом……13

2.2 Інтерпретації Ітo та Стратоновича……20

2.3 Метод Гойна……...24

2.4 Схема Мільштейна…….24

2.5 Метод Мільштейна без похідних……..26

2.6 Визначення потрібного методу……27

2.7 Опис моделі частинок……28

2.8 Квантатори, які використовуються для опису дифузії……...31

3. Опрацювання результатів…….33

3.1 Перехід до безрозмірних величин.……...……33

3.2 Розгляд графіків……36

Висновки……...45

Список літературних джерел……46

Вступ

Процеси та явища в системах, далеких від рівноваги, можуть проявляти несподівані та незвичайні властивості. Вони існують будь де в природі, від мікромасштабу до макромасштабу. Кілька найпростіших прикладів, які інтенсивно вивчаються у фізиці: стохастичний або когерентний резонанс, ефект храповика, абсолютна негативна рухливість, аномальний транспорт і аномальна дифузія. Дифузія відіграє ключову роль у багатьох процесах фізики, хімії, біології та техніки. Для нормальної дифузії, описаної Ейнштейном, для броунівської частинки коефіцієнт дифузії D залежить лише від двох параметрів: він монотонно зростає зі зростанням температури T і зменшується зі зростанням коефіцієнта тертя. Проте в нерівноважних умовах залежність D від параметрів системи може бути дивною та немонотонною. Існує багато сценаріїв виведення систем із стану рівноваги. Один із найпростіших способів — прикласти постійну силу. Наступним є використання періодичного в часі збурення. Останнім часом активні флуктуації привернули великий інтерес, які з’являються, наприклад, у живих клітинах, де енергія постачається у формі біохімічних реакцій, які рухають активні клітинні процеси. У таких системах дифузія може бути нормальною; однак навіть тоді він зазвичай не є гаусовим [1–3] або просто є аномальним [4], тобто виявляє субдифузійну або супердифузійну поведінку. У цій роботі розглядається поведінка дифузії за високочастотного зовнішнього впливу. З теоретичних даних було встановлено, що зі збільшенням частоти дифузія збільшується. Також у цій роботі буде досліджено це явище, та визначення причин підвищення дифузії. Також досліджено виникнення зон ТАД, а саме причини та наслідки.

1. Аналіз науково-технічної літератури

1.1 Актуальність теми

Контроль процесів дифузії дозволяє в свою чергу контролювати і процес переносу хімічних та біологічних реагентів у зазначене місце та з великою точністю [5]. Саме через подібні здатності управління процесами дифузії є дуже важливим питанням у таких галузях, як фізика, хімія, біологія, матеріалознавство та ін.

До сьогоднішнього часу основним параметром керування Броунівськими частинками була температура. У в'язких середовищах коефіцієнт дифузії лінійно залежить від температури, така залежність була доведена Ейншейном [6]. У твердих тілах, в свою чергу, коефіцієнт дифузії також збільшується зі збільшенням температури і добре описується залежністю Ареніуса [7], це було доведено експериментально.

Але підвищення температури не тільки збільшує дифузну рухливість частинок, але і активує багато інших процесів, які можуть бути не бажаними для експерименту. Також дуже важливо мати змогу керувати дифузією лише певних реагентів, молекул чи атомів не використовуючи при цьому зміну температури середовища.

Тому вирішенням подібних проблем є використання зовнішнього впливу на частинки. Д. Кім та ін. показали, що збільшення рушійного тиску призводить до зростання коефіцієнту дифузії ДНК, також потім досягає свого піку при значенні, яке в рази перевищує рівноважний коефіцієнт дифузії. Також, Ю.М. Петров та ін. показали, що впливаючи на дифузію зовнішніми напругами, її можна значно посилити. Наприклад, якщо взяти атом нікелю та піддати його інтенсивній пластичній деформації, то коефіцієнт дифузії підвищується і при температурі 77 К

буде у чотири рази вищим, ніж при 295 К.

Також існує легко реалізований спосіб впливу на транспорт частинок є застосування зовнішніх періодичних полів у часі. Наприклад, Тіерно та ін. спостерігав, як на одноосьовій гранатовій плівці під дією магнітного поля, що осцилює, виникло гігантське посилення дифузії частинок [8]. R. Gommers та ін. показали, що рухливістю холодні атоми в керованій дисипативній оптичній решітці можна ефективно управляти змінюючи частота руху.

1.2 Огляд

У роботі досліджено поведінку дифузії частинок у косінусоїдальному просторово-періодичному потенціалі під впливом зовнішньої високочастотної сили. Встановлено, що на відміну від випадку постійної сили високочастотна періодична сила істотно впливає на дифузію при амплітудах, які в десятки разів перевершують величину критичної сили. При цьому коефіцієнт дифузії осцилює зі зростанням сили. Зі збільшенням амплітуди зовнішнього впливу виникають області температурно-аномальної (ТАД) і нормальної дифузії, що періодично чергуються. Особливості поведінки коефіцієнта дифузії, що спостерігаються, пов'язані зі зміною характеру розподілу ансамблю частинок за локалізованими і рухомими рішеннями в залежності від амплітуди зовнішнього впливу.

Останнім часом зростає цікавість до експериментальних досліджень керування дифузією частинок зовнішніми полями. Змінюючи параметри поля, можна ефективно керувати процесами дифузії. Наприклад, при вивченні дифузії частинок у колоїдах з оптичними пастками (оптичними вихорами) спостерігалося величезне підвищення коефіцієнта дифузії.

Значне збільшення дифузії спостерігалося також при дослідженні дифузії парамагнітних частинок на поверхнях гранатових феритів під дією зовнішнього періодичного в часі магнітного поля. Таким самим чином зростання дифузії з силою струшування було помічено в експериментах із гранульованим газом. Варіюючи зовнішнє електромагнітне поле, стало можливим збільшити дифузію іонів у каналах мембрани. Змінюючи коефіцієнти дифузії в різних напрямках, можна збільшити швидкість дифузійно-обмежених фізичних процесів і ефективно розділити мікро- та наночастинки різної природи.

Незважаючи на ці чудові досягнення, кількісний опис такої посиленої дифузії під впливом зовнішніх сил досі залишається фрагментарним. Це дослідження сприяє розгляду цієї теми, зосереджуючись на системах з періодичним полем.

1.3 Періодичні у часі сторонні збурення

У більшості практичних застосувань періодичні в часі зовнішні сили легше реалізувати, ніж постійний рух. Цілком природно вивчити, як висновки для проблеми постійним полем модифікуються для налаштування періодичного поля, як з теоретичної, так і з практичної точки зору. Змінюючи коефіцієнт дифузії за допомогою періодичних зовнішніх полів, можна створювати поверхневі структури із заданими властивостями; впливати на динаміку точкових дефектів у кристалах, частково при опроміненні; змінювати динаміку руху дислокації; підвищення швидкості хімічної реакції в обраних напрямках; маніпулювати ефективністю процесів у біологічних системах [10].

Велика частина робіт з періодичного керування стосується систем храпового типу [11] або стохастичного резонансу. Досліджень, присвячених властивостям дифузії в симетричних періодичних системах,

мало. Практично не відомі роботи, які б систематично вивчали комбіновану залежність коефіцієнта дифузії від температури, амплітуди руху та частоти в широкому діапазоні цих параметрів. Залежність коефіцієнта дифузії від взаємодії між зовнішнім періодичним полем і силу решітки досліджували в [12] у двовимірній установці з надмірним демпфуванням. Частота руху була зафіксована на одному значенні. Було показано, що в системі з сумою потенціалів Юкави у вузлах квадратної сітки дифузія частинок була значно підвищена для певного складного набору смуг рушійних амплітуд і орієнтацій відносно сітки. При спеціальному приводі ТАД спостерігається для деяких компонент тензора дифузії, і одне з його головних значень зростало експоненціально з оберненою температурою. Головне значення іншого тензора дифузії експоненціально зменшувалось. Ймовірно, що ефекти багатовимірності були вирішальними для ТАД. Замість того, щоб мати дві, заблоковані та запущені, популяції в одному вимірі, що враховує особливості дифузії, потоки у проблемах вищих вимірів є більш складними, і, як відомо, вони призводять до подальших особливостей у транспорті та дифузії [13].

У роботі [14] досліджувалась одновимірна система з недостатнім демпфуванням із синусоїдальним за x потенціалом і синусоїдальним за часом. Спостерігалося збільшення дифузії на порядки. ТАД спостерігався для деяких (низьких) робочих частот при досліджуваній амплітуді керування $0{,}15F_0$. Залежність дифузії від збуджуючої частоти була вивчена більш детально раніше, і було показано, що вона є немонотонною при досить великих амплітудах збуджування ($0{,}15F_0$ і $0{,}25F_0$, при $k_BT/U_0 = 0{,}258$). При $0{,}15F_0$ максимум у частотній залежності коефіцієнта дифузії $D(\Omega)|_{T,F} = const$ зберігалася для всіх досліджуваних температур, відповідна частота Ω_{max} зростала від $\sim 2 \times 10^{-4}$ до $\sim 6 \times 10^{-3}$, при температурах $k_BT/U_0 \in [0{,}129; 0{,}388]$. ТАД також було помічено в [15] на змодельованій частоті керування.

1.4 Постановка задачі

Раніше методами комп'ютерного моделювання виконувалися досліджували посилення дифузії броунівських частинок на одновимірних ґратах під дією зовнішнього періодичного поля низької частоти. Тоді було показано, що дифузією частинок можна ефективно керувати, змінюючи амплітуду та частоту зовнішнього впливу. Крім того, було встановлено, що в певному інтервалі амплітуд діючих сил виникає так звана температурно-аномальна дифузія (ТАД). В цьому випадку дифузійну рухливість Броунівських частинок можна ефективно підвищувати за низьких температур.

У цій роботі розглядається інший випадок – високочастотний зовнішній вплив. В цьому випадку наявність періодичних ґрат істотно впливає на дифузію частинок. Навіть при амплітудах поля, що в десятки разів перевершують мінімальну силу необхідну для подолання енергетичного бар'єру, що відокремлює сусідні вузли, коли вплив решітки, здавалося б, має бути незначним, грати продовжують суттєво впливати на величину коефіцієнта дифузії. Дивним є той факт, що коефіцієнт дифузії D періодично змінюється із збільшенням амплітуди зовнішнього поля. При цьому різниця між максимальним та мінімальним значенням D може становити кілька порядків. Також можна буде побачити, що при значеннях амплітуд, у яких коефіцієнт дифузії досягає локальних максимумів, спостерігається ТАД, і коефіцієнт дифузії зростає зі зниженням температури. У той же час при амплітудах з мінімальними значеннями D коефіцієнт дифузії поводиться звичайним чином і падає зі зниженням температури. Таким чином, зі зростанням амплітуди зовнішнього впливу чергуються смуги ТАД та звичайної дифузії. Але залишається невідомою причина таких явищ, тому основною задачею дипломної роботи є – встановлення фізичних механізмів прискорення дифузії за високочастотного зовнішнього впливу.

2. Методи рішення диференціальних стохастичних рівнянь

2.1 Дифузія частинок у просторово-періодичних потенціалах під постійним зовнішнім впливом

Візьмемо ансамбль Броунівських частинок у періодичному потенціалі, який піддається зовнішньому впливу F_t. Динаміку частинок у цьому випадку легко описати рівнянням Ланжевена:

$$m\ddot{x} = -dU(x)/dx - \gamma\dot{x} + F_t(t) + \xi(t) \qquad (2.1.1)$$

Тут, t – час, x – координата частинки, m – маса частинки, γ – коефіцієнт тертя. Крапки позначають диференціювання за часом. $\xi(t)$ позначає теплову флуктуацію. А потенціальна енергія $U(x)$ визначається, як:

$$U(x) = -(U_0/2)cos(2\pi x/a) \qquad (2.1.2)$$

Тут a – постійна решітки, U_0 – висота потенціального бар'єра. Силу решітки F_{lat} можна визначити, як:

$$F_{lat} = -dU/dx = -F_0 sin(2\pi x/a) \qquad (2.1.3)$$

У цьому випадку $F_0 = \pi U_0/a$ є силою, яка необхідна для переходу частинки через потенціальний бар'єр, який розділяє потенціальні мінімуми в одномірній решітці під великим тертям.

Перші дослідження руху броунівської частинки в періодичному потенціалі, нахиленому додатковим постійним силовим полем, $dF_t/dt = 0$, або як його ще називають «потенціалі пральної дошки», для всіх значень тертя були проведені Ріскеном та його співробітниками [16]. Під час цих досліджень було показано, що при низькому терті була важливою, для поведінки ансамблю частинок, поява «заблокованих» розчинів, тобто при яких частинка коливається навколо одного мінімуму потенціалу і «бігаючих» розчинів, тобто де частинка проходить багато потенційних періодів, не потрапляючи в пастку в окремих мінімумах. При малих температурах та під дією сили, яка перевищувала деяку критичну ($F_{кр}$) плинні розчини виникають різко, а у випадку менших зусиль реалізується єдиний клас розв'язків, який в свою чергу є заблокованим.

Шляхом, для дослідження задачі, було обрано розв'язання рівняння Фоккера-Планка (РФП) для функції розподілу за швидкостями та координатами $\widetilde{N}(V, x; t)$. Найближче розв'язання було передбачено завдяки методу матричного безперервного дробу, для коефіцієнтів розкладання стаціонарного $\widetilde{N}(V, x)$ за відповідним (нескінченним) повним набором функцій. Завдяки цьому методу можна ефективно отримати два провідні коефіцієнти розширення, достатні для обчислення потоку частинок, але не достатні для обчислення дифузії [17].

У випадку низького тертя можливо використати інший підхід, в цьому випадку енергія E повільно змінювалась, тобто змінювалася на часових масштабах в'язкої дисипації, тоді як x коливався з коротким періодом. Відповідно, і функцію розподілу було переписано в інших змінних (E, x). Але, у випадку $F \neq 0$, властивості дифузії залишилися не дослідженими жодним із методів. Питання такого виду частково розглядалося в інших роботах, у яких відбувалось моделювання стохастичного рівняння Ланжевена.

Подібні дослідження дифузії за допомогою чисельного

моделювання рівняння Ланжевена в періодичному потенціалі з додатковим постійним рухом було здійснено Костянтіні та Марчесоні [18]. Вони у своїх дослідженнях проаналізували параметри як з надмірним, так і з недостатнім демпфуванням. Було зроблено наступні висновки, що у випадку низької дисипації спостерігалось значне посилення просторової дифузії поблизу критичної сили F_{cr}, а саме коефіцієнт дифузії в десять разів перевищував його максимальне значення при $F = 2F_{cr}$, за температури, яка дорівнює 60% потенційної ями, глибина якої – U_0. Такий результат пов'язаний з особливостями статистики стрибків частинок, та переходу від блокування до руху. Подібне моделювання було використано раніше для руху з часово-періодичним компонентом [19].

Наступні дослідження дифузії під впливом постійної сили були зроблені К. Ліндерберг та ін., вони дослідили часову залежність дисперсії ансамблю частинок [20]. У підсумку досліджень було показано, що в недодемпфованих системах реалізується особливий режим бездисперсійного переносу, під час цього режиму дисперсія практично не змінюється з часом, на певному обмеженому інтервалі часу. Цьому явищу було дане пояснення, що сильно нерівноважний розподіл частинок у просторі (з крутим фронтом і експоненціальним хвостом, який утворюється, коли частинки вперше виходять зі своєї первісної потенційної ями) зберігається протягом тривалого часу, перш ніж зрештою розшириться і прийме нормальну форму Гаусса.

Також К. Ліндерберг та ін. дослідили температурну залежність коефіцієнта дифузії [21]. Вони помітили, що максимальний коефіцієнт дифузії D_{max} досягається поблизу F_{cr}. До того ж було показано, що у випадку низького тертя D_{max} аномально залежить від температури, а саме, він зростає зі зниженням температури T. Методом підгонки вдалося отримати співвідношення для трьох досліджуваних температур $D_{max} \propto T^{-3.5}$.

Така аномальна температурна залежність є одним з важливих аспектів, завдяки її присутності з'являється можливість відрізнити недостатньо демпфуванні системи від недодемпфованих. Наприклад, для рухомих броунівських частинок у просторово-періодичних потенціалах певні особливості дифузії при низьких температурах спостерігаються у ситуації наддемпфування. Рейман та ін. [22] показали, що для випадку синусоїдального потенціалу в просторі при значенні зовнішньої постійної сили поблизу F_0 сила відношення D_{max} до значення дифузії D_0, яка необхідна для прямого витягування частинки через потенційний бар'єр, у в'язкому середовищі без ґратки зростає при зниженні температури $\propto T^{-2/3}$. Але у випадку, коли $T \to 0$ сама дифузія все ще звертається до нуля, так як максимальний коефіцієнт дифузії змінюється за законом $D_{max} \propto T^{1/3}$, і тому монотонно зростає з T.

Результат $\partial D/\partial T < 0$ було знайдено в задачі наддемпфування Б. Лінднер та ін. в просторі параметрів, в яких, були знайдені в задачі наддемпфування в B. Lindner, для спеціально створених екзотичних потенціалів. Області в просторі параметрів, в яких $\partial D/\partial T < 0$, були знайдені в задачі наддемпфування в [23] для спеціально створених екзотичних потенціалів, плоских, крім вузьких піків.

В задачі наддемпфування для спеціально створених екзотичних потенціалів, крім вузьких піків, було знайдено області в просторі параметрів, в яких $\partial D/\partial T < 0$. Аномальну залежність $D(T)$ було врешті решт пов'язано з великим співвідношенням часу релаксації до часу виходу в такій системі. Подібним чином, була знайдена аномальна поведінка $D(T)$ для кусково-лінійного потенціалу під час екстремальної асиметрії, інакше кажучи «пилкоподібного» потенціалу. Отже, при великому терті, для існування параметрів $\{F, T\}$, таких щоб $\partial D/\partial T < 0$, повинні бути виконані особливі нетипові умови. Це правило працює і навпаки, такі параметри існують універсально в задачі з малим тертям.

Але є ще одна відмінність поведінки дифузії в проблемі надмірного демпфування, це те, що максимум D(F) досягається близько до F_0, а у випадку низького тертя $D_{max}(F)$ досягається при F_{cr} (зазвичай набагато меншому).

Теоретичні результати наддемпфованої установки було перевірено в ряді експериментальних досліджень. Аналітичну залежністю D(F), яку вивели П. Рейман та ін., можна гарно узгодити з дифузія колоїдних частинок у нахиленому періодичному потенціалі, створеному за допомогою лазерних пасток, що було показано М. Євстигнєєвим та ін [24]. Параметрами підгонки у цьому випадку були висота потенційного бар'єру та коефіцієнт вільної дифузії. До того ж коефіцієнт дифузії може змінюватися немонотонно, разом з F, та з максимумом поблизу F_0, також досить добре узгоджується з аналітичними прогнозами. Потенціал був виведений на основі незалежного дослідження функції просторового розподілу колоїдних частинок. Тобто у цій роботі колоїдні частинки дифундували над потенціалом, який було створено нижньою сіткою колоїдних сфер, додатковий постійний рух було зумовлено силою тяжіння, виконувалося контролювання завдяки куту нахилу зразка. Різні граничні випадки аналітичних прогнозів для середньої швидкості частинок і дифузії порівнювалися з експериментальними результатами при різних налаштуваннях і показали гарну узгодженість.

У випадку недодемпфованих систем фізична причина аномальної температурної залежності дифузії лежить в довжині стрибка частинок, що біжать, тобто знаходяться на етапі перед повторним захопленням в іншому потенційному мінімумі [25], який збільшується зі зниженням температури, це явище відсутнє в надмірно демпфованих системах, такі системи зазвичай не мають належних робочих станів при $F < F_0$. Максимальний коефіцієнт дифузії досягається під час руху в околиці F_{cr}, оскільки при цьому значенні популяції заблокованих і рухомих частинок приблизно рівні, і саме взаємний рух між цими двома популяціями призводить до

швидкого поширення частинок, що проявляється у вигляді гігантської дифузії.

Ретельний аналіз температурної та силової залежності дифузії в недодемпфованих системах проведено раніше. Було виконано чисельне моделювання рівняння Ланжевена для широкого діапазону температур і керування F. Також показано, що явище зростання коефіцієнта дифузії разом зі зниженням температури, яке в свою чергу має назву ТАД, тобто «температурно-аномальна дифузія», проявляється у вузькому інтервалі застосованих зовнішніх рушійних значень поблизу F_{cr}. Цей інтервал можна позначити областю II. За межами цього інтервалу, тобто при більш слабкому (область I) і більш сильному (область III) залежність коефіцієнта дифузії від температури була нормальною, зростаючою. Було визначено, що в області II коефіцієнт дифузії зростає зі зниженням температури як $D_{max} \propto T^{2/3} exp[E/(k_B T)]$ для певних $E > 0$ (k_B є сталою Больцмана). Перевірено дійсність такого масштабування для набору температур у $k_B T/U_0 \in [0{,}05;\ 0{,}85]$; тоді як відповідність степеневому закону $D_{max} \propto T^{-3,5}$, запропонована для TAD, могла б наблизити результати лише у вузькому інтервалі температур, дослідженому. Зараз можна побачити, що основний фактор експоненціального зростання є результатом такого експоненційного зростання часу кореляції τ_{corl} при зниженні температури, знайденого моделюванням.

У роботі броунівський рух описується рівнянням Ланжевена (2.1.1), з тепловими флуктуаціями $\xi(t)$, представленими білим шумом Гауса з кореляцією

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\gamma k_B T \delta(t - t'); \qquad \langle \xi(t) \rangle = 0 \qquad (2.1.4)$$

тут k_B — постійна Больцмана, а T — температура. Кутові дужки $\langle . . . \rangle$ без індексів означає усереднення за ансамблем частинок.

Для фізичних значень ми використовуємо ті самі параметри, що й у [25], характерні для дифузії адатомів на щільно упакованих металевих поверхнях. а саме

$$U_0 = 80meV, a = 2\text{Å} \tag{2.1.5}$$

для бар'єру активації та сталої гратки.

Є дві можливості для дослідження зовнішнього періодичного поля: кусково-постійне періодичне поле

$$F_t(t) = F_e sgn[sin(\Omega t)] \tag{2.1.6}$$

і синусоїдальний,

$$F_t(t) = F_e sin(\Omega t) \tag{2.1.7}$$

Тут Ω — кутова частота зовнішньої сили,F_e — її амплітуда.

Зручно використовувати безрозмірний час t′ і просторову координату x′, нормуючи фізичні величини на період малих коливань,

$$\mathcal{T}_0 = 2\pi/\Omega_0 = a(2m/U_0)^2 \tag{2.1.8}$$

при мінімумі потенціалу за відсутності тертя і до просторового періоду ґратки a відповідно:

$$t' = \frac{t}{\mathcal{T}_0} = \frac{t}{a}\sqrt{\frac{U_0}{2m}}, \qquad x' = \frac{x}{a} \tag{2.1.9}$$

Безрозмірна температура T′ і коефіцієнт тертя γ′ додатково вводяться:

$$T' = 2k_B T/U_0, \qquad \gamma' = \gamma a(mU_0/2)^{-1/2} \tag{2.1.10}$$

Рівняння (2.1.1) і (2.1.4) в цих безрозмірних одиницях читаються

$$d^2x'/dt'^2 = -dV(x')/dx' - \gamma' dx'/dt' + F_t'(t') + \xi'(t'),$$
$$\langle \xi'(t_1')\xi'(t_2')\rangle = 2\gamma' T'\delta(t_1' - t_2'); \langle \xi'(t')\rangle = 0 \tag{2.1.11}$$

з безрозмірним $F_t' = 2aF_t/U_0$, $\xi' = 2a\xi/U_0$, $V(x') = cos(2\pi x')$.

В и з н а ч е н н я (2.1.9) та (2.1.10) відрізняються від таких у [26] додатковими множниками 2, які з'являються у визначенні t', а отже, також у T' та γ'. Поточне визначення полегшує інтерпретацію результатів ($t' = 1$ відповдає одному періоду коливань при малому γ').

2.2 Інтерпретації Ito та Стратоновича

Розглянемо випадок, коли потрібно мати справу з системою, у якої детермінована динаміка, на яку, в свою чергу, діє зовнішній шум. Це означає, що якщо б була можливість видалити шум, вимкнувши його, якщо можливо, або ізолювавши систему та ін., її рівняння руху були б чисто детермінованими:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(t), t)dt \qquad (2.2.1)$$

Тепер врахуємо, що на систему діє Гаусівський білий шум. Тоді враховуючи його ефект нам потрібно додати до (2.2.1) член $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}(t), t)d\boldsymbol{W}(t)$ отримаємо:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(t), t)dt \; + \; \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}(t), t)d\boldsymbol{W}(t) \qquad (2.2.2)$$

Тут функція $\boldsymbol{g}$ – визначається фізичними міркуваннями, а $\boldsymbol{W}$ є незалежними змінними Вінеровськими процесами. Процес Вінера [27] – це випадковий Гаусівський процес, майже безперервний, де неперекриваючі прирости незалежні:

$$\begin{aligned} &(i) && W(0) = 0, \\ &(ii) && \langle W(t) \rangle = 0, \\ &(iii) && Var\big(W(t) - W(s)\big) = t - s. \end{aligned} \qquad (2.2.3)$$

Спочатку перепишемо рівняння (2.2.2) у іншому вигляді:

$$\boldsymbol{X}(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(s), s)ds + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}(s), s)d\boldsymbol{W}(s) \qquad (2.2.4)$$

Проблема виникає при визначенні інтеграла по Вінерівським процесам. Якщо взяти розбиття $\{t_0, \dots, t_N\}$ на інтервалі $[t_0, t]$ (де $t_N = t$), і оскільки τ_i є значенням між t_{i-1} і t_i, то $\tau_i = (1 - \lambda)t_{i-1} + \lambda t_i$, можна було б визначили інтеграл будь-якої функції Ф як:

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(\boldsymbol{X}(s), s) d\boldsymbol{W}(s) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{N} \Phi(\boldsymbol{X}(\tau_i), \tau_i) [W(t_i) - W(t_{i-1})] \quad (2.2.5)$$

тут $\Delta = max\{t_i - t_{i-1} | i\}$. Проблема полягає в тому, що наведена вище межа відрізняється для різних варіантів λ. Найпоширенішими інтерпретаціями є схема Ito, в якій функція обчислюється в лівій кінцевій точці кожного підінтервалу (λ = 0), і схема Стратоновича, в якій функція обчислюється в середній точці кожного підінтервалу (λ = 1/2). Зазвичай потрібно писати числення Стратоновича з колом перед dW, тобто ($\circ\, dW$).

Розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь різні для обох інтерпретацій, враховуючи, що стохастичні інтеграли мають різне значення для кожного. Наприклад, поглянемо на інтеграл нижче в обчисленні Ito:

$$\int_{t_0}^{t} W(s) dW(s) = \frac{1}{2}[W(t)^2 - W(t_0)^2] - \frac{1}{2}(t - t_0) \quad (2.2.6)$$

А у випадку Стратоновича:

$$\int_{t_0}^{t} W(s) \circ dW(s) = \frac{1}{2}[W(t)^2 - W(t_0)^2] \quad (2.2.7)$$

Вибираючи одну інтерпретацію, завжди можна виконати обчислення в іншій інтерпретації, якщо модифікувати f за допомогою формули корекції дрейфу Ito-Стратоновича [28] два наведені нижче рівняння:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(t), t)dt \; + \; \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}(t), t)d\boldsymbol{W}(t) \qquad (2.2.8)$$

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(t), t)dt + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}(t), t) \circ d\boldsymbol{W}(t) \qquad (2.2.9)$$

мають однакове рішення, якщо їхні дрейфи відповідають відношенню:

$$\underline{f_i}(\boldsymbol{X}(t), t) = f_i(\boldsymbol{X}(t), t) - \frac{1}{2} g_{kj}(\boldsymbol{X}(t), t) \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(\boldsymbol{X}(t), t) \qquad (2.2.10)$$

Коли у рівнянні (2.2.2) моделюють фізичну систему, «білий шум» dW насправді є ідеалізацією білого шуму, що відрізняється малим часом кореляції, автокореляційна функція $dW(t)$ насправді не є дельта-функцією, а має різкий пік, тобто час його кореляції малий, але позитивний. Отже, стохастична функція $dW(t)$ насправді не є сингулярною, а стохастичні диференціальні рівняння (2.2.2) мають чітко визначений розв'язок. В межах часу кореляції $dW(t)$, що прямує до нуля, такий розв'язок має тенденцію до інтегрування рівнянь з інтерпретацією Стратоновича. Тому скористаємося інтерпретацією Стратоновича.

Розглянемо три полегшених методи чисельного інтегрування, що ведуть до інтерпретації Стратоновича. Вони вимагають використання зразка дискретизованого процесу Вінера на кожному кроці інтегрування. Нехай h буде довжиною кроку за часом, який використовується для чисельного інтегрування. Тоді, відповідно до властивостей Вінерівського процесу (2.2.3), нам потрібно а вибірка незалежних випадкових величин $\xi_i(t_n)$ при кожному із значень часу в $\{t_n\}$ у дискретизації, розподілений як $\sqrt{h}\mathcal{N}(0,1) = \mathcal{N}(0,h)$, де $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$ позначає нормальний розподіл із середнім a та дисперсією σ^2.

2.3 Метод Гойна

Однією з найпростіших схем дискретизації, яка веде до інтерпретації Стратоновича, є метод Гойна [29, 30]. Це метод предиктора-коректора, тобто задається значення $\boldsymbol{X}$ у момент часу t_n дискретизації, спочатку отримуємо предиктори (допоміжні значення), за схемою інтеграції Ейлера:

$$\overline{x}_i(t_{n+1}) = x_i(t_n) + f_i(x(t_n), t_n)h + g_{ij}(x(t_n), t_n)\xi(t_n) \qquad (2.2.11)$$

Тут $t_{n+1} = t_n + h$. Тоді можна отримати $\boldsymbol{X}(t_{t+1})$ як:

$$x_i(t_{n+1}) = x_i(t_n) + \frac{1}{2}[f_i(x(t_n), t_n) + f_i(\overline{x}(t_{n+1}), t_{n+1})]h$$
$$+\frac{1}{2}[g_{ij}(x(t_n), t_n) + g_{ij}(\overline{x}(t_{n+1}), t_{n+1})]\,\xi(t_n) \qquad (2.2.12)$$

Тут використовується тензорна угода Ейнштейна про підсумовування повторюваних індексів.

2.4 Схема Мільштейна

Для Схеми Мільштейна потрібно використовувати похідні від коефіцієнтів дифузії. Вона у загальному випадку має вигляд:

$$x_i(t_{n+1}) = x_i(t_n) + f_i h + g_{ij}\xi_j + g_{lj}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l}J_{(j,k)} \qquad (2.2.13)$$

де всі члени в правій частині (2.2.13) беруться в момент часу t_n, а $J_{(j,k)}$ є кратним інтегралом Стратоновича:

$$J_{(j,k)} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\int_{\mathrm{t_n}}^{\mathrm{s_1}} dW_j(s_2) \right) dW_k(s_1) \qquad (2.2.14)$$

Ці інтеграли не можна легко виразити через прирости ξ_j і ξ_k компонентів Вінерівського процесу. Але можна розглянути окремий випадок діагонального шуму, де кожен компонент системи має свій власний, незалежний шум, тобто існує стільки незалежних вінерівських процесів (кількість компонентів W), скільки змінних у системі (кількість компонентів X), на кожен компонент x_i від X впливає лише відповідний компонент W_i процесу Вінера, а діагональний коефіцієнт дифузії g_{ii} залежить лише від x_i і, інколи, від часу. Отже g_{lj} у (2.2.13) не дорівнює нулю лише там, де $l = j$, g_{ik} лише там, де $i = k$, а $\partial g_{ii}/\partial x_l$ лише там, де $i = l$. Зібравши все разом, можна отримати останній член у (2.2.13):

$$g_{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_i} J_{(i,i)}$$

Розглянемо останній множник у наведеному вище добутку, завдяки (2.2.14) можемо переписати враховуючи, що $j = k = i$:

$$J_{(i,i)} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [W_i(s_1) - W_i(t_n)] \circ dW_i(s_1)$$

$$= \int_{t_n}^{t_{n+1}} W_i(s_1) \circ dW_i(s_1) - W_i(t_n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \circ dW_i(s_1)$$

$$= \frac{1}{2}[W_i(t_{n+1})^2 - W_i(t_n)^2] - W_i(t_n)[W_i(t_{n+1}) - W_i(t_n)]$$

$$= \frac{1}{2}[W_i(t_{n+1}) - W_i(t_n)]^2 \qquad (2.2.15)$$

тут (2.2.7) використано у третій рівності. Тому для чисельного інтегрування потрібно використовувати наступну рівність:

$$J_{(i,i)} = \frac{1}{2}\xi_i^2 \qquad (2.2.16)$$

В результаті, у випадку діагонального шуму метод Мільштейна (2.2.13) стає в інтерпретації Стратоновича:

$$x_i(t_{n+1}) = x_i(t_n) + f_i h + g_{ii}\xi_i + \frac{1}{2} g_{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_i} \xi_i^2 \qquad (2.2.17)$$

2.5 Метод Мільштейна без похідних

Метод Мільштейна вимагає аналітичної специфікації першої похідної дифузійного члена. Такий підхід іноді може бути не таким ефективним через складний аналітичний вираз похідної, або тому, що потрібно використовувати багато різних функцій для g тощо. Тоді можна

використовувати числове наближення для похідної від g для використання у схемі Мільштейна.

Наведемо вираз для діагонального шуму. Перш за все, опорні значення отримаємо, як:

$$\overline{x}_i = x_i + f_i h + g_{ii}\sqrt{h} \qquad (2.2.18)$$

Тоді, виходячи з (2.2.17) для інтерпретації Стратоновича, отримаємо:

$$x_i(t_{n+1}) = x_i(t_n) + f_i h + g_{ii}\xi_i + \frac{1}{2\sqrt{h}}[g_{ii}(\overline{x}, t_n) - g_{ii}]\xi_i^2 \qquad (2.2.17)$$

2.6 Визначення потрібного методу

У результаті можна стверджувати, що метод Гойна є найкращим, оскільки у цьому разі можна отримати набагато кращу точність за певний час обчислення порівняно з методами Мільштейна. Краща продуктивність методу Гойна була певною мірою очікуваною, враховуючи, що у випадку адитивного шуму схема Мільштейна зводиться до базової схеми Ейлера, тоді як схема Гойна завжди (також для адитивного шуму і навіть без шуму взагалі) метод предиктора-коректора другого порядку.

2.7 Опис моделі частинок

Розглянемо відносно просту модель системи в нерівноважному стані. Це класична броунівська частинка маси M, яка піддається дії одновимірного, просторово періодичного потенціалу $U(x)$ і рухається з незмінною та симетричною періодичною в часі силою $F(t)$. Її динаміку можна описати рівнянням Ланжевена у формі:

$$M\ddot{x} + \Gamma\dot{x} = -U`(x) + F(x) + \sqrt{2\Gamma k_B T}\xi(t) \qquad (2.7.1)$$

де крапка та штрих позначають диференціювання за часом t та координатою частинки x відповідно. Параметр Γ – коефіцієнт тертя. Припускається, що потенціал $U(x)$ є симетричним просторовому періоду L і висоті бар'єру $2\Delta U$, у повному вигляді:

$$U(x) = U(x + L) = -\delta U cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \qquad (2.7.2)$$

Зовнішня рушійна сила змінного струму амплітуди A та кутової частоти Ω має найпростішу гармонічну форму:

$$F(t) = Asin(\Omega t) \qquad (2.7.3)$$

Флуктуації теплової рівноваги внаслідок взаємодії частинки з навколишнім середовищем температури T моделюються як δ-корельований Гаусівський білий шум нульового середнього значення:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \qquad \langle \xi(T)\xi(s) \rangle = \delta(t-s) \qquad (2.7.4)$$

де дужка $\langle \cdot \rangle$ позначає середнє за реалізаціями білого шуму (середнє по ансамблю). Інтенсивність шуму $2\Gamma k_B T$ у формулі. (2.7.1) випливає з флуктуаційно-дисипаційної теореми, де k_B — стала Больцмана. Якщо $A = 0$, стаціонарний стан є станом теплової рівноваги. Якщо $A \neq 0$, то зовнішня сила $F(t)$ виводить систему зі стану рівноваги.

Існує кілька фізичних систем, які можна змоделювати за допомогою рівняння (2.7.1). Можна згадати напівкласичну динаміку різниці фаз на Джозефсонівському переході та її варіації, а також динаміку холодних атомів, що живуть в оптичних ґратках.

Модель, задана рівнянням (2.7.1) вивчалася протягом десятиліть і використовувалася для аналізу різноманітних шумових явищ як у детермінованих регулярних, так і в хаотичних режимах. Тим не менш, для цієї системи все ще залишаються нові явища, які потрібно розкрити, які, у свою чергу, містять потенціал для нових застосувань. Як останні приклади, можна навести немонотонну температурну залежність коефіцієнта дифузії в нормальних режимах дифузії і перехідну, але розширену залежну від часу аномальну дифузію, щоб назвати лише деякі.

Тепер перетворимо рівняння (2.7.1) до безрозмірної форми. Для цього використаємо такі масштаби як характерні одиниці тривалості та часу:

$$\hat{x} = 2\pi \frac{x}{L}, \qquad \hat{t} = \frac{t}{\tau_0}, \qquad \tau_0 = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{M}{\Delta U}} \qquad (2.7.5)$$

Використавши нові позначення можна переписати рівняння (2.7.1), у вигляді:

$$\ddot{\hat{x}} + \gamma\dot{\hat{x}} = -sin\hat{x} + asin(\omega\hat{t}) + \sqrt{2\gamma Q}\hat{\xi}(\hat{t}) \qquad (2.7.6)$$

У цьому масштабуванні безрозмірна маса $m = 1$, а інші чотири безрозмірні параметри рахуються наступним чином:

$$\gamma = \frac{\tau_0}{\tau_1}, \quad a = \frac{1}{2\pi}\frac{L}{\Delta U}A, \quad \omega = \tau_0\Omega, \quad Q = \frac{k_B T}{\Delta U} \qquad (2.7.7)$$

тут другий характерний час $\tau_1 = M/\Gamma$. Він має фізичну інтерпретацію часу релаксації для швидкості вільної броунівської частинки. З іншого боку, характерний час τ_0 пов'язаний з періодом малих коливань у потенціальних $U(x)$ ямах.

Змінений потенціал періоду $L = 2\pi$ дорівнює $\widehat{U}(\hat{x}) = U\big((L/2\pi)\hat{x}\big)/\Delta U = -cos\hat{x}$, а відповідна потенціальна сила дорівнює $-\widehat{U}'(\hat{x}) = -sin\hat{x}$. Перемасштабований тепловий шум дорівнює $\hat{\xi}(\hat{t}) = (L/2\pi\Delta U)\xi(t) = (L/2\pi\Delta U)\xi(\tau_0\hat{t})$ і має ті самі статистичні властивості, що й $\xi(t)$; тобто $\langle\hat{\xi}(\hat{t})\rangle = 0$ та $\langle\hat{\xi}(\hat{t})\hat{\xi}(\hat{s})\rangle = \delta(\hat{t} - \hat{s})$. Безрозмірна інтенсивність шуму Q є відношенням теплової енергії та половини енергії активації, необхідної частинці для подолання незмінного потенційного бар'єру. Відтепер потрібно дотримуватися цих безрозмірних змінних. Щоб ще більше спростити позначення, описування позначення капелюха відбувається у рівнянні (2.7.6).

2.8 Квантатори, які використовуються для опису дифузії

Дифузія характеризується середнім квадратичним відхиленням (дисперсією) положення частинки *x(t)*, а саме:

$$\langle \Delta x^2(t) \rangle = \langle [x(t) - \langle x(t) \rangle]^2 \rangle = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 \qquad (2.8.1)$$

Тут і далі $\langle \cdot \rangle$ означає середнє за реалізаціями теплового шуму, а також за початковими координатами $x(0)$ і швидкостями $v(0) = \dot{x}(0)$ броунівської частинки. Для нормального режиму дифузії $\langle \Delta x^2(t) \rangle$ є лінійною функцією часу, а коефіцієнт дифузії можна визначити співвідношенням:

$$D = \lim_{t \to \infty} \frac{\langle \Delta x^2(t) \rangle}{2t} \qquad (2.8.2)$$

Розкид позиційних траєкторій, виміряний коефіцієнтом дифузії, може бути визначений поведінкою швидкості частинок. Відповідною величиною, що характеризує транспорт броунівської частинки, є усереднена за часом швидкість, яка має вигляд:

$$\bar{v} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t ds \dot{x}(s) \qquad (2.8.3)$$

Оскільки система, задана рівнянням (2.7.6), яке є симетричним і незміщеним, а переважний напрямок руху заборонено протягом тривалого часу. Отже, усереднена по ансамблю та за часом швидкість повинна дорівнювати нулю як для нульового, так і для ненульового температурних режимів:

$$\langle \bar{v} \rangle = 0 \qquad (2.8.4)$$

Останнє є обов’язковим для детермінованого варіанту динаміки, який може бути неергодичним і, отже, чутливим до конкретного вибору початкового положення та швидкості частинки. Однак для будь-якої ненульової температури Q > 0 система є ергодичні та початкові умови не впливають на властивості системи в тривалому стаціонарному режимі. Завдяки наведеній вище умові розкид усередненої за часом швидкості можна кількісно визначити лише за її другим моментом, тобто:

$$\sigma_{\bar{v}}^2 = \langle \bar{v}^2 \rangle - \langle \bar{v} \rangle^2 = \langle \bar{v}^2 \rangle \qquad (2.8.5)$$

3. Опрацювання результатів

3.1 Перехід до безрозмірних величин.

Для дослідження руху броунівських частинок під впливом періодичної у часі сили F(t) потрібно використати рівняння Ланжевена:

$$m\ddot{X} = -\frac{d}{dX}U(x) - GX + F_t(t) + \sqrt{2GkT}\xi(t) \qquad (3.1.1)$$

тут t – час, X – координата частки, m – її маса, G – коефіцієнт тертя, $\xi(t)$ – Гауссів білий шум з інтенсивністю рівною одиниці. Крапка зверху означає диференціювання за часом. k – постійна Больцмана, T – температура. Зовнішня періодична сила, яку потрібно розглянути має вигляд:

$$F_t(t) = Fsin(\Omega t) \qquad (3.1.2)$$

тут Ω– кутова частота зовнішньої сили, а F – її амплітуда.

Періодичний потенціал частинки в полі решітки (U) дорівнює:

$$U(x) = -\frac{U_0}{2}cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \qquad (3.1.3)$$

тут a – період одномірної решітки, а U_0 – висота потенційного бар'єру.

Також, відповідно, на частинку, крім періодичної зовнішньої сили, діяла сила з боку ґрат F_{lat}:

$$F_{lat} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_0 sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \qquad (3.1.4)$$

Потенційний бар'єр між будь-якими двома послідовними ямами U(x) зникає в критичному полі $F_0 = \frac{\pi}{a}U_0$. Частота власних малих коливань поблизу дна потенційної ями дорівнює $\omega = 2\pi/\tau_0$, тут $\tau_0 = a(2m/U_0)^{1/2}$ – період цих коливань.

Параметри використовуваного просторово-періодичного потенціалу, що використовується в рівнянні (3.1.1), були такими: U_0 = 0.08 еВ, a = 2.0 Å. Маса частинок дорівнювала 1 атомній одиниці маси (а.о.м).

Для дослідження дифузії потрібно чисельно вирішити рівняння (3.1.1), використовуючи Алгоритм типу Верле. Крок за часом вибирався таким чином, щоб максимальна відстань, що проходить частинка за один крок, не перевищувала 10^{-3} періоду ґрат. Статистичне усереднення проводилося за ансамблем з кількістю частинок не менше N = 5 * 10^4. Коефіцієнт дифузії обчислювався за дисперсією $\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ у розподілі ансамблю частинок, що рухаються, де дужки ⟨…⟩ позначають усереднення за ансамблем. Для підвищення точності обчислень при обмеженому часі розрахунків коефіцієнт дифузії обчислювався наступним чином. При кожному розрахунку визначався час t_{lin} досягнення лінійної залежності дисперсії від часу $\sigma^2 = A + 2Dt$, де D - коефіцієнт дифузії, а A - величина пов'язана зі зростанням дисперсії на фазі супердифузії. Коефіцієнт дифузії на одновимірних гратах визначався як 1⁄2 нахилу кривої $\sigma^2(t)$. Лінійна залежність виходила припасуванням даних моделювання за методом найменших квадратів у випадку $t > 10t_{lin}$. Достовірність припасування у всіх випадках становила щонайменше 0.999.

Для того, щоб порівняти отримані результати з наявними раніше, зручно перейти до безрозмірних величин. Найчастіше використовуються

безрозмірні величини, введені Х. Рискеном, у цьому випадку рівняння (3.1.1) набуває максимально простого вигляду:

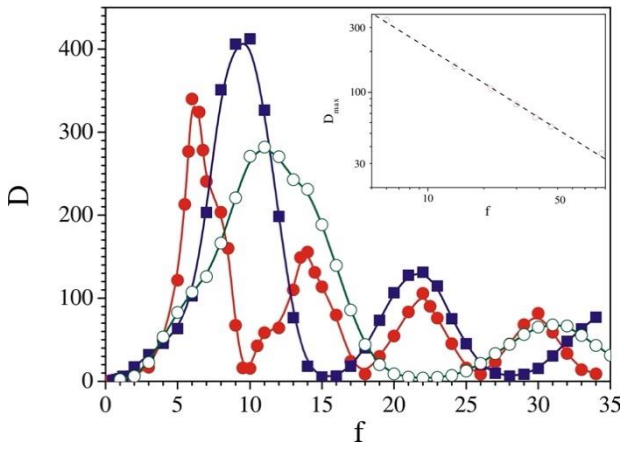
$$\ddot{x} = -sinx - \gamma x + fsin(\omega x) + \sqrt{2\gamma Q}\xi(t) \qquad (3.1.5)$$

Безрозмірні одиниці пов'язані з силою, коефіцієнтом тертя та температурою наступним чином:

$$\gamma = G\frac{\tau_0}{2\pi m} \quad , \quad f = \frac{F}{F_0} \quad , \quad Q = \frac{2kT}{U_0} \qquad (3.1.6)$$

тут Q – теплова енергія. У цих одиницях частота своїх коливань частинок у ґратах поблизу дна потенційної ями дорівнює $\omega_0 = 1$. Коефіцієнт тертя був таким самим, як і в роботах [31–33] і в безрозмірних одиницях дорівнював g = 0.03183.

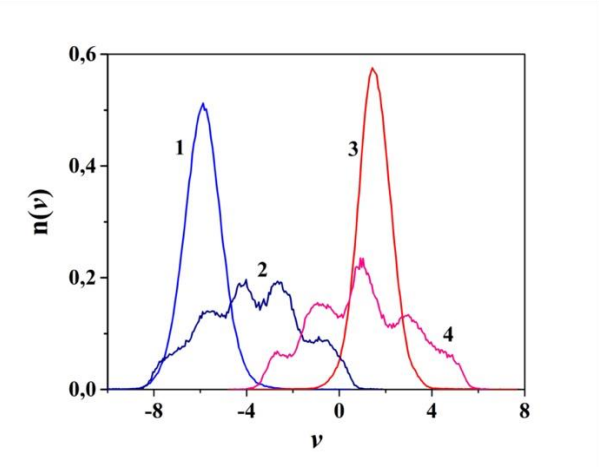
3.2 Розгляд графіків



Мал. 1. Залежність коефіцієнтів дифузії від амплітуди періодичної сили для різних частот зовнішнього поля. Заштриховані круглі маркери – w = 1.59, квадратні маркери – w = 2.0, пусті круглі маркери – w = 2.4. Вставка на малюнку: залежність $D_{max}(F)$ від амплітуди періодичної сили для частоти зовнішнього поля ω = 1.59. Пунктирна лінія апроксимація степеневою залежністю $D_{max}(F) = AF^{-0.85}$.

На мал. 1 наведено залежності коефіцієнта дифузії від амплітуди коливань зовнішнього поля різних частот для випадку, коли w > 1 . При малих амплітудах (f << 1) зовнішнє періодичне поле слабко впливає на коефіцієнт дифузії, як можна побачити на графіку. У цьому випадку, коефіцієнт дифузії близький до значення D у періодичній решітці без сили. При великих амплітудах і малих частотах D прагне значення коефіцієнта дифузії частинок у в'язкому середовищі. Однак, як видно із рис. 1, додаток зовнішньої сили великої амплітуди з високою частотою кардинально змінює картину: коефіцієнт дифузії починає осциллювати по мірі зростання амплітуди. Максимальні значення коефіцієнта дифузії $D_{max}(f_i)$ слабо зменшуються зі збільшенням амплітуди поля. Дивним є те, що з періодичним високочастотним впливом, він починає впливати на f, значення якого потім перевищує багато десятків. Як видно з графіка на вставці до мал. 1, навіть у випадку f = 86 коефіцієнт дифузії більш ніж удвічі перевищує D_{vis} і просторова структура решітки все ще продовжує істотно впливати на дифузійну рухливість броунівських частинок. Ця поведінка D кардинально відрізняється від випадку постійного поля. При

дії постійної зовнішньої сили F коефіцієнт дифузії мало відрізняється від коефіцієнта дифузії у в'язкому середовищі D_{vis} при F_{cr}.



Мал. 2. Залежності функції розподілу частинок за швидкостями n(v) для амплітуди f = 10 (1,3) та f = 6 (2,4) у моменти часу $t = 800\tau$ *(1,2) та* $t = (800 + 0.3)\tau$ *(3,4) Q = 0.39.*

Щоб зрозуміти, з чим пов'язане посилення дифузії у точках максимуму $D_{max}(f_i)$ розглянемо поведінку функції розподілу частинок за швидкостями $n(v)$ у випадку різних амплітуд зовнішньої сили. На мал. 2 наведено приклади функцій розподілу частинок за швидкостями в момент часу $t = (800 + 0.3)\tau$, тут τ – період зовнішніх коливань, для значень f = 6.0 та f = 10.0. Ці значення амплітуди відповідають положенню першого максимуму та мінімуму функції $D'(f; \omega = 1.59)$. Як випливає з малюнка, вид функцій розподілу частинок за швидкостями у цих двох випадках якісно відрізняється. При значенні амплітуди поля, що відповідає максимуму дифузії (f = 6.0) функція $n(v)$структура функції розподілу $n(v)$ має кілька чітко виражених піків. Протягом періоду зовнішніх коливань положення піків синхронно зміщуються по v, проте структура $n(v)$ залишається незмінною. При інших значеннях f , за яких спостерігалися максимуми $D'(f)$ (f =14.0 , f = 22.0 , f = 30.0 та ін.) функція $n(v)$ мають якісно подібний вигляд: розподіл за швидкостями завжди мав декілька максимумів. Мінімальна кількість максимумів – три. Таким чином, за

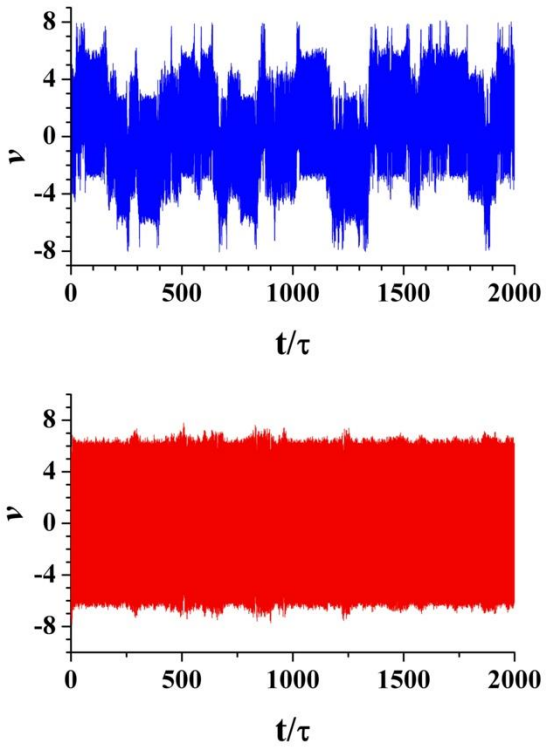
присутності амплітуд максимальної дифузії існує щонайменше три популяції (ансамблю) частинок з різними середніми швидкостями. Як було показано раніше, наявність бімодального розподілу частинок за швидкостями може призводити до так званої гігантської дифузії. Раніше було показано, що подібна ситуація виникає у разі руху частинок у потенціалі пральної дошки у недодемпфованих системах.

У такому разі в ансамблі броунівських частинок існує дві популяції, що відповідають так званим "локалізованим" та "біжучим" рішенням [34]. При локалізованому рішенні середня швидкість частинок $\bar{v} = 0$, а у випадку частинок що біжать $\bar{v} \approx f/g$. Існування двох піків функції $n(v)$ під впливом постійної сили пов'язане з розподілом броунівських частинок за цими двома рішеннями. Ефективне посилення дифузії та виникнення гігантської дифузії можливе лише при певному розподілу частинок за біжучими та локалізованими рішеннями.

Наявність періодичного зовнішнього впливу ускладнює картину. У відсутність теплового шуму рівняння (3.1.3) являє собою рівняння маятника, що періодично збуджується. Як відомо, це рівняння демонструє багату нелінійну динаміку [35]. Залежно від величин f і ω , а також початкових умов, можуть існувати як області хаотичного руху, так і різні локалізовані (осцилюючі) і ті, що біжать (транспортні або обертальні) рішення. Перехід до хаосу може реалізовуватися різними сценаріями: подвоєнням періоду за Фейгенбаумом [36], потроєнням періоду [37], виникненням перемежуючого (переривчастого) та падаючого хаосу [38]. Так як немає аналітичного рішення для детермінованого варіанта рівняння (3.1.1), було виконане його чисельне рішення в досліджуваному діапазоні f та ω. Початкові координати рівномірно розподілялися на період решітки з інтервалом 0.005 постійної решітки. Початкові швидкості рівномірно розподілені на інтервалі $[V_{min}(F); V_{max}(F)]$, де $V_{min}(F)$ та $V_{max}(F)$ мінімальні та максимальні значення початкових швидкостей і були розбиті

на 200 інтервалів. У досліджуваному діапазоні ω та f знаходили тільки локалізовані і ряд рішень, що біжать. Це відповідає отриманим раніше результатам [39], де автори не спостерігали хаотичних рішень при великих амплітудах.

Було встановлено, що при значеннях f менше критичного $f_{crt}(\omega)$ існують виключно локалізовані рішення з середньою швидкістю $\bar{v} = 0.0$. Де $\bar{v} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t x dt$. При $f > f_{crt}(w)$ відбувається ряд біфуркацій та виникають додаткові рішення, що біжать. Використовуючи симетрію детермінованого варіанта рівняння (3.1.3), можна легко показати що виникаючі “біжучі” рішення повинні мати усереднену за часом швидкість $\bar{v} = \pm k\omega$, де , k – цілі числа. Отримані чисельні рішення показують, що набір значень k залежить від амплітуди зовнішньої сили. У випадку F' = 6.0 крім локалізованого рішення, існують ще чотири рішення, що біжать з k = ±1,±3 . Максимуми, що спостерігаються на мал. 2, відповідають цим різним рішенням. При інших значеннях сили з максимальною дифузією існує кілька рішень. Так при $f = 14.0$ існують рішення, що біжать з k = ±1,±2,±3,±4,±5 . Таким чином, під впливом зовнішнього періодичного впливу, ансамбль частинок розбивається на ряд "популяцій" відповідних локалізованим і різним рішенням, що біжать. Шпеєр та ін [40], у разі руху броунівських частинок на квадратній решітці в потенціалі Юкави в передемпфованій системі спостерігали існування локалізованого та двох біжучих (транспортних) рішень з протилежними швидкостями. Зростання дифузії, яке спостерігали автори пов'язували з індукованим шумом переходом між цими рішеннями. У роботі [41] при русі ансамблю броунівських частинок під впливом періодичного зовнішнього впливу автори так само спостерігали одне локалізоване і два рішення з протилежно спрямованими швидкостями.



Мал. 3. Зміна у часі швидкості для окремої броунівської частки. Вгорі – при максимумі дифузії (f=6), знизу – при мінімумі дифузії (f=10). Q=0.2, частота w=1.5916.

Зараз можна спостерігати існування не 2 симетричних, а кількох рішень, що біжать. На мал. 3 угорі наведена тимчасова залежність швидкості для окремої броунівської частки при $f = 6$. Видно, що в процесі руху частка через вплив випадкової сили здійснює "перескоки" між локалізованим і різними рішеннями, що біжать. Таким чином, броунівські частки при посиленій дифузії змінюють у часі стани, що характеризуються різними значенням $\bar{v}$. Фактично рух частки схожий на режим переривчастий при детермінованому хаосі. І тут відбувається “перемикання” руху частки між двома атракторами. У цьому випадку відбувається індуковане зовнішнім шумом “перемикання” між кількома атракторами.

У роботах [41] було показано, що у разі потенціалу пральної дошки

таке перемикання між локалізованим і біжучими рішеннями спричиняє прискорену дифузію. Шпеєр та ін [40] показали, що такий самий механізм призводить до зростання дифузії і при періодичному впливі. Таким чином, загальний механізм посилення дифузії в різних системах за рахунок індукованого переходу частинок між атракторами з різною середньою швидкістю.

Однак, тільки наявності безлічі рішень, що біжать, не достатньо для посилення дифузії або виникнення ТАД. Раніше було показано, що у разі постійної сили, незважаючи на наявність кількох рішень, існує лише вузька підобласть зовнішніх сил, область, у якій реалізується суттєве посилення дифузії. Така ситуація реалізується у цьому дослідженні. Як видно із мал. 1 при значенні амплітуди поля $f = 10$ коефіцієнт дифузії мінімальний. Якщо поглянути на нижню частину мал. 3, то завдяки вигляду графіка для f =10, природно припустити що рішення, що біжать, у цьому випадку відсутні, а існують тільки локалізовані рішення. Однак це не так. Розрахунки показують, що в детермінованому випадку для $f = 10$ існує ряд рішень, що біжать (обертальних), з k = 0,±1,±2,±3,±4. Для того, щоб зрозуміти, чому на графіку $n(v)$ не спостерігаються піки, пов'язані з теперішніми рішеннями, потрібно звернутися до мал. 4 та 5.

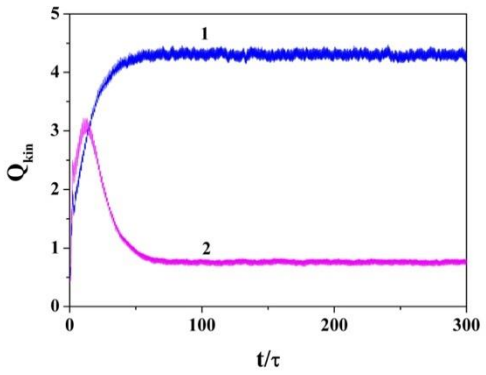
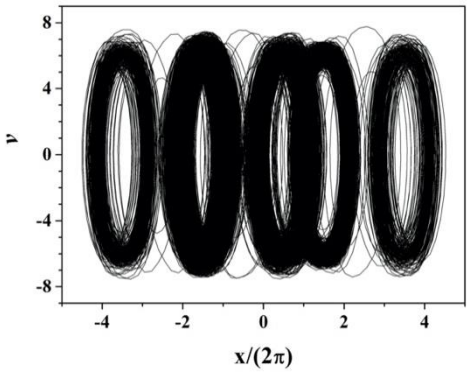


Рис. 4. Залежність кінетичної температури від часу для різних амплітуд періодичного впливу. 1 – $f = 6.0$ *(відповідає першому максимуму коефіцієнта дифузії), 2 –* $f = 10.0$ *(відповідає першому мінімуму коефіцієнта дифузії).* $Q = 0.1$ *частота* $\omega = 1.5916$.

На мал. 4 показано зміну кінетичної температури Q'_{kin}, яка пропорційна дисперсії швидкостей. Видно, що для $f = 6$ Q'_{kin} у початковий час рівномірно зростає, досягаючи максимуму при $t \approx 50\tau$. Надалі величина Q'_{kin} залишається приблизно незмінною, що відповідає розподілу за різними рішеннями, що біжать. У разі $f = 10$ картина якісно інша.

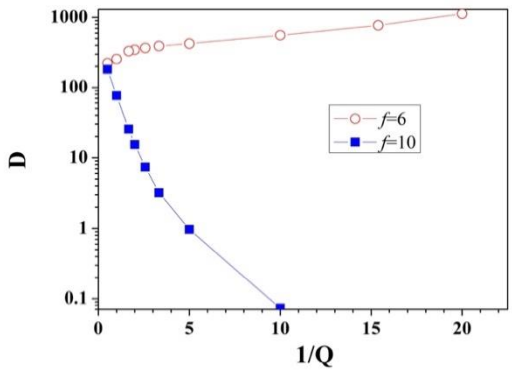


Мал. 5. Траєкторія окремої броунівської частки у фазовому просторі при $f = 10$ *(відповідає першому мінімуму коефіцієнта дифузії). Стадія, що встановилася.* $Q = 0.1$ *частота* $\omega = 1.5916$. *Час руху частки* $50\tau < t < 300\tau$.

До часу $t \approx 25\tau$ дисперсія так само зростає, що відповідає "розмішування" ансамблю частинок за "населенням" різних рішень. Однак потім Q'_{kin} падає. Це означає, що частинки поступово зосереджуються у популяцію з одним рішенням. У результаті відбувається динамічна локалізація та велика частина частинок перетворюється на локалізоване рішення. На мал. 5 представлена типова траєкторія окремої броунівської частки фазовому просторі при виході на стаціонар. Видно, що вся траєкторія руху частинки складається з низки коливальних рухів, локалізованих біля різних вузлів ґрат. Рішення, що біжать, при цьому не порушуються. Таким чином, дифузія часток уповільнюється. Ця картина схожа з рухом броунівської частки у просторово-періодичному потенціалі

без зовнішнього впливу. У цьому випадку ймовірність перескоку частинки в сусідній вузол ґрат визначається правилом Крамерса і залежить від потенціалу ґрат. У наступних за f мінімумах D, коливальний рух частинки біля вузла може торкатися кількох осередків решітки, проте дифузійний стрибок буде відбуватися в наступний вузол, що є центром траєкторії руху частинки.

Тепер потрібно ввести, так званий ефективний потенціал $W(V)$, який потрібен для опису посилення дифузії під зовнішнім впливом, як це було зроблено у роботах [42], він визначає розподіл частинок за швидкостями, і, відповідно, за локалізованими і рішеннями, що біжать. Раніше у статті [42], виходячи з виду $W(V)$, були виведені умови існування температурно-аномальної дифузії, коли $\frac{\partial D}{\partial T} < 0$ і дифузія зростає зі зменшенням температури. Виходячи з аналізу розподілу частинок за біжучими та локалізованими рішеннями, можна припустити, що в максимумах дифузії так само реалізується ТАД.



Мал. 6. Залежність коефіцієнтів дифузії від зворотної температури. Частота w = 1.5916.

На мал. 6 представлені графіки залежності коефіцієнтів дифузії від зворотної температури у точці максимуму та мінімуму дифузії. Для інших максимумів ($f = 14, 22, 30, 38$) та мінімумів ($f = 18, 26, 34$) дифузії криві мають вигляд схожий із графіками на мал. 6.

Як випливає з мал. 6 у максимумі дифузії спостерігається ТАД, тоді як у мінімумах – звичайна температурна поведінка дифузії. Тобто зі збільшенням амплітуди зовнішніх коливань зони ТАД періодично змінюються зонами звичайної температурної залежності.

Для постійної сили було запропоновано аналітичну модель ефективного потенціалу [42], яка дозволяє встановити межі ТАД. У разі періодичної сили співіснування безлічі транспортних атракторів робить це завдання значно складнішим, і його вирішення вимагає додаткових зусиль.

Висновки

Таким чином, підбиваючи підсумки можна сказати, що було розглянуто поведінку дифузії частинок у просторово-періодичній решітці при дії на них зовнішньої високочастотної сили. Встановлено, що на відміну від випадку постійної сили високочастотна періодична сила істотно впливає на дифузію при амплітудах, які в десятки разів перевищують величину критичної сили. При цьому коефіцієнт дифузії осцилює зі зростанням зовнішньої сили. Зі збільшенням амплітуди зовнішнього впливу виникають області температурно-аномальної і нормальної дифузії, що періодично чергуються. Особливості поведінки коефіцієнта дифузії, що спостерігаються, пов'язані зі зміною характеру розподілу ансамблю частинок по локалізованим і багатьом біжучим рішенням залежно від амплітуди зовнішнього впливу.

Використовуючи встановлені у цій роботі закономірності, можна вибірково впливати на коефіцієнт дифузії частинок певного сорту та контролювати швидкість різних дифузійно-лімітованих фізичних, хімічних та біохімічних процесів. Встановлено, що фізичним механізмом відповідальним за прискорення дифузії у випадку високочастотного зовнішнього впливу є існування багатьох біжучих рішень стабільних під температурним впливом. Отримані дані можуть бути важливими при створенні пристроїв, що використовують хвилі зарядової і спинової щільності, а також у ВЧ контактах Джозефсона.

Список літературних джерел

1. B. Wang, J. Kuo, S. C. Bae, and S. Granick, Nat. Mater. 11, 481 (2012);
2. A. V. Chechkin, F. Seno, R. Metzler, and I. M. Sokolov, Phys. Rev. X 7, 021002 (2017);
3. 26K. Bialas, J. Luczka, P. H¨anggi, and J. Spiechowicz, Phys. Rev. E 102, 042121 (2020);
4. R. Metzler, J. H. Jeon, A. G. Cherstvy and E. Barkai, Phys. Chem. Chem. Phys. 16, 24128 (2014);
5. J.H. Weaver, G.D. Waddill, Cluster Assembly of Interfaces: Nanoscale Engineering// Science 251, 1444-1451 (1991);
6. Einstein A., Ann. Phys. (Leipzig), 17 (1905) 549;
7. H. Mehrer, Diffusion in Solids (Springer, Berlin, 2007); J.R. Manning Diffusion kinetics for atoms in crystals, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton (1968); G. Antczak , G. Ehrlich, Surface Diffusion (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2010);
8. Tierno P. et al., Phys. Rev. Lett., 105 (2010) 230602;
9. Dynamics at Solid State Surfaces and Interfaces, edited by U. Bovensiepen, H. Petek, and M. Wolf (Wiley-VCH, Weinheim, 2010), Vol. 1; The Chemical Physics of Solid Surfaces: Surface Dynamics, edited by D. Woodruff (Elsevier, Amsterdam, 2003);
10. P. Hänggi and F. Marchesoni, Rev. Mod. Phys. 81, 387 (2009);
11. D. Speer, R. Eichhorn, and P. Reimann, Europhys. Lett. 97, 60004 (2012);
12. J. M. Sancho and A. M. Lacasta, Eur. Phys. J.: Spec. Top. 187, 49 (2010);
13. I. G. Marchenko and I. I. Marchenko, JETP Lett. 95, 137 (2012);
14. J. Spiechowicz and J. Łuczka, Phys. Rev. E 91, 062104 (2015);

15. H. D. Vollmer and H. Risken, Z. Phys. B: Condens. Matter 34, 313 (1979); H. Risken and H. D. Vollmer, *ibid.* 33, 297 (1979);

16. P. Eshuis, K. van der Weele, D. Lohse, and D. van der Meer, Phys. Rev. Lett. 104, 248001 (2010);

17. G. Costantini and F. Marchesoni, Europhys. Lett. 48, 491 (1999);

18. H. Gang, A. Daffertshofer, and H. Haken, Phys. Rev. Lett. 76, 4874 (1996); M. Borromeo, G. Costantini, and F. Marchesoni, *ibid.* 82, 2820 (1999);

19. K. Lindenberg, J. M. Sancho, A. M. Lacasta, and I. M. Sokolov, Phys. Rev. Lett. 98, 020602 (2007);

20. K. Lindenberg, A. M. Lacasta, J. M. Sancho, and A. H. Romero, New J. Phys. 7, 29 (2005);

21. P. Reimann, C. Van den Broeck, H. Linke, P. Hänggi, J. M. Rubi, and A. Pérez-Madrid, Phys. Rev. Lett. 87, 010602 (2001); Phys. Rev. E 65, 031104 (2002);

22. M. Evstigneev, O. Zvyagolskaya, S. Bleil, R. Eichhorn, C. Bechinger, and P. Reimann, Phys. Rev. E 77, 041107 (2008);

23. B. Lindner, M. Kostur, and L. Schimansky-Geier, Fluctuation Noise Lett. 1, R25 (2001);

24. M. Evstigneev, O. Zvyagolskaya, S. Bleil, R. Eichhorn, C. Bechinger, and P. Reimann, Phys. Rev. E 77, 041107 (2008);

25. I. G. Marchenko, I. I. Marchenko, and A. V. Zhiglo, Eur. Phys. J. B 87, 10 (2014);

26. I. G. Marchenko and I. I. Marchenko, Europhys. Lett. 100, 50005 (2012);

27. P. E. Kloeden and E. Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer, 1999;

28. H. Risken, The Fokker-Planck Equation, Springer-Verlag, 1989;

29. U. Nowak, Thermally activated reversal in magnetic nanostructures,

Annual Reviews of Computational Physics, Vol. 9 (2001), ed. D. Stauffer, World Scientific, 105–151;

30. W. Ru¨melin, Numerical Treatment of Stochastic Differential Equations, SIAM J. Numer. Anal. 19 (1982), 604–613;
31. Marchenko I.G., Marchenko I.I., Zhiglo A.V. Enhanced diffusion with abnormal temperature dependence in underdamped space-periodic systems subject to time-periodic driving// Phys. Rev.- 2018.- Vol. E 97.- P. 012121;
32. Marchenko I.G., Marchenko I.I. Anomalous Temperature Dependence of Diffusion in Crystals in Time- Periodic External Fields// JETP Letters.- 2012.- Vol. 95, No. 3.- P. 137–142;
33. Marchenko I.G., Marchenko I.I., Tkachenko V.I. Temperature-Abnormal Diffusivity in Underdamped Spatially Periodic Systems// JETP Letters.- 2017.- Vol. 106, No. 4.- P. 242–246;
34. Risken H. The Fokker-Planck Equation and Methods of Solution and Applications. – Springer, 1989. – 472p;
35. M. Gitterman, The noisy pendulum// World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore , 2008, 120 p;
36. M.J. Feigenbaum , Universality in complex discrete dynamics// Los Alamos Theoretical Division Annual Report 1975- 1976, p. 98-102;
37. M. Octavio, Bifurcating, chaotic, and intermittent solutions in the rf-biased Josephson junction// Phys. Rev.- 1984.- Vol. B29, p. 1231;
38. D. D'Humueres, M. R. Beasley, B. A. Huberman, and A. Libchaber, Chaotic states and routes to chaos in the forced pendulum// Phys. Rev. A 26, 3483 (1982); R. Harish,S. Rajasekar, K. P. N. Murthy Diffusion in a periodically driven damped and undamped pendulum// Phys. Rev. E65, 046214 (2002);
39. R. L. Kautz, Noise, chaos, and the Josephson voltage standard// Rep. Prog. Phys. 59 (1996) 935–992. R. L. Kautz, J. C. Macfarlane, Onset of chaos in

the rf-biased Josephson junction// Phys. Rev. A 33, 498 (1986);

40. David Speer, Ralf Eichhorn, Peter Reimann, Anisotropic diffusion in square lattice potentials: giant enhancement and control// 2012 EPL 97 60004;

41. J Spiechowicz , P Talkner , P Hänggi , J Luczka Non-monotonic temperature dependence of chaos-assisted diffusion in driven periodic systems// New J. Phys. 18 (2016) 123029, 11 pp;

42. B. Lindner, I. M. Sokolov, Giant diffusion of underdamped particles in a biased periodic potential// Physical Review E 93, 042106 (2016);

43. Marchenko I.G., Marchenko I.I., Tkachenko V.I. Temperature-Abnormal Diffusivity in Tilted Periodic Potentials // Jetp Letters.-- 2019.- Vol. 109, No. 10.- P. 671–675.