другому коливанні праворуч – n_3, при другому коливанні ліворуч – n_4 і т.д. (непарні індекси у n відповідають відхиленню праворуч, а парні – ліворуч). Зрозуміло, що значення поділки, яке відповідає точці рівноваги для трьох відхилень визначається за формулою:

$$n_0 = \left((n_1 + n_3)/2 + n_2\right)/2, \tag{2.71}$$

для п’яти відхилень слід застосовувати таку формулу:
$n_0 = [(n_1 + n_3 + n_5)/3 + (n_2 + n_4)/2]/2$, і так далі.

Що більше доданків взято у формулі (2.71), то точніше може бути знайдено положення точки рівноваги. Визначати смугу застою у цьому випадку немає сенсу, бо терези при зважуванні практично не зупиняються, виконуючи

і коливання.

Відзначимо, що при достатньо високій чутливості терезів коливання можуть практично не загасати, бо вони безперервно виводяться зі стану спокою конвекційними повітряними потоками, тряскою підлоги тощо. У цьому випадку величина чисел максимального відхилення n_1, n_2, n_3 не зменшується поступово, однак, усе сказане відносно визначення нульової точки з формули (2.71) залишається правильним.

Теорія терезів

Однією з найважливіших характеристик терезів є їхня чутливість δ. Чутливістю терезів можна назвати відношення кута відхилення стрілки $\Delta\alpha$ до величини перевантаження на шальках терезів ΔP: $\delta = \Delta\alpha / \Delta P$ (при цьому відхилення та перевантаження вважаються малими). Чутливість правильно сконструйованих терезів не залежить ні від загального навантаження на шальках терезів, ні від їхнього початкового кута відхилення і є сталою величиною для даних терезів. Для обчислення δ звернемося до рис. 2.17. На ньому AOB схематично зображає початкове положення коромисла терезів (їх положення при тягарцях P на чашках), а лінія A_1OB_1 – положення, яке займає коромисло під дією перевантаження ΔP на лівій шальці терезів. Нехай центр тяжіння коромисла знаходиться у точці C.

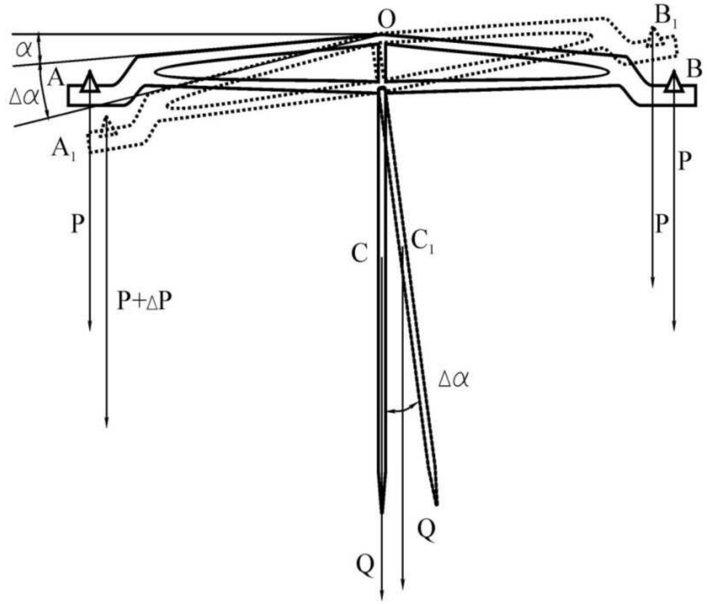

Рис. 2.17. Схематичне зображення механічних терезів

Введемо наступні позначення: $AO=L$ – це довжина плеча коромисла, $OC=l$ (O – точка опори коромисла, Q – вага коромисла.

У цих позначеннях початкова умова рівноваги коромисла в положенні A_1OB_1 (фізично це умова рівності моментів сил, що діють на коромисло) має вигляд:

$$(P + \Delta P)L \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha) = PL \cdot \cos(\alpha - \Delta\alpha) + Ql \cdot \sin\Delta\alpha. \tag{2.72}$$

Після алгебраїчних перетворень отримуємо:

$$tg\Delta\alpha = \frac{\Delta PL \cdot \cos\alpha}{L(2P + \Delta P) \cdot \sin\alpha + Ql}. \tag{2.73}$$

При малих кутах $tg\Delta\alpha \approx \Delta\alpha$, тому поділивши (2.73) на ΔP, знайдемо:

$$\delta = \frac{L\cos\alpha}{L(2P + \Delta P)\sin\alpha + Ql} \quad . \qquad (2.74)$$

З формули (2.74) випливає, що чутливість залежить від навантаження P. Формула (2.74) сильно спрощується, якщо $\alpha = 0$, бо тоді можна записати:

$$\delta = L/(Ql). \qquad (2.75)$$

Ця умова (стосовно кута відхилення стрілки терезів) виконується у стані, що є гранично близьким до стану рівноваги. Таким чином, з формули (2.75) можна зробити висновок про те, що чутливість правильно сконструйованих терезів не залежить від навантаження P та від значення перевантаження ΔP. Але оскільки коромисла терезів є за своєю суттю фізичним маятником, то зменшувати $l \to 0$ немає сенсу як із фізичних, так і з технічних міркувань.

Методи точного зважування

Зважування неможливо провести абсолютно точно, обов'язково будуть похибки. Відзначимо наступні систематичні похибки:

1. Похибка, яка виникає через неточну установку терезів.
2. Похибка внаслідок неточності зразкових тягарців.
3. Похибка внаслідок зміни температури.
4. Похибка, яка виникає внаслідок неоднакової втрати ваги тіла та тягарців при зважуванні у повітрі.
5. Похибка через нерівність плечей у коромисла терезів.

Дві перші похибки усуваються утворенням певних умов при роботі. Третя та четверта похибки можуть бути усунені введенням поправок. Для усунення впливу нерівноплічності коромисла служать методи точного зважування.

I. Метод подвійного зважування (Метод Гауса)

Тіло зважують двічі: спочатку на одній, а потім на другій шальці терезів. Нехай L_1 та L_2 – довжини плечей коромисла, P – вага тіла, яке зважується, P_1 та P_2 – вага тягарців, які врівноважують тіло у першому та у другому випадках. Тоді

умова рівноваги набуває вигляду:

$$P_1 L_1 = P L_2,\ P_2 L_2 = P L_1. \qquad (2.76)$$

Звідси $P = \sqrt{P_1 P_2}$. Зважаючи на те, що $P_1 \approx P_2$, знаходимо:

$$P \approx (P_1 + P_2)/2. \qquad (2.77)$$

Похибка, яка виникає при такому способі знаходження ваги тіла є тим меншою, чим краще виконується нерівність $(P_2 - P_1) << P_1$. Метод подвійного зважування усуває похибки, пов'язані з нерівноплічністю терезів, тому його необхідно застосовувати при перевірці.

II. Метод тарування (Метод Борда)

Тіло, вага якого визначається, кладуть на одну шальку терезів і врівноважують тягарцями або вантажем, який кладуть на іншу шальку. Якщо тепер зняти тіло, а на його місце покласти інші високоточні тягарці до відновлення рівноваги терезів, то очевидно, що їхня вага буде дорівнювати вазі тіла.

При цьому методі зважування вплив нерівності плечей коромисла на результат зважування буде усунено, а точність зважування буде в межах чутливості терезів.

III. Метод сталого навантаження (Метод Менделєєва)

На одну шальку терезів кладуть певну стандартну, вибрану раз і назавжди гирю, вага якої є більшою за вагу тіла, яке зважується. На іншу шальку кладуть тягарці, намагаючись встановити найточнішу рівновагу терезів. Після цього на ту шальку, де знаходяться тягарці, кладуть тіло, яке слід зважити, а тягарці знімають до тих пір, доки рівновагу терезів не буде відновлено. Вага знятих тягарців, очевидно, дорівнює вазі тіла. Останній метод дозволяє не тільки виключити помилки, пов'язані з неоднаковістю плечей, але й вплив навантаження на чутливість терезів (вимірювання завжди виконується при однаковому навантаженні). Окрім цього, скорочується час зважування та зменшується похибка, що виникає через багаторазове зважування.

Увага! Перед початком роботи слід ознайомитися, а при роботі дотримуватися наступних вимог.

Дверці терезів треба залишити відкритими не менш ніж на 30 хвилин перед початком роботи. Але при зважуванні скляні дверцята терезів мають бути обов'язково зачинено. Під час роботи навантаження на шальки терезів не повинно перебільшувати максимально допустиму величину. Тіло, яке зважують, та тягарці дозволяється розміщувати на шальках та знімати з них тільки при закритому аретирі (не можна навіть торкатися шальок). Відкривати і закривати аретир треба обережно, шляхом плавного обертання маховичка. В неробочому стані коромисло терезів повинно бути ізольовано, без навантаження на шальках. Зважування тіл треба виконувати тільки тоді, коли їхня температура дорівнює температурі зовнішнього середовища. Тягарці ставити на шальки слід так, щоб загальний центр тяжіння тягарців припадав на центр шальок.

Зважування тягарців на терезах можна здійснювати як прямими, звичайними методами, так і точними методами. Звичайним абсолютним методом зважування є такий, коли в результат зважування не вводяться поправки. Цей метод слід застосовувати тоді, коли точність визначення маси тіла не повинна перебільшувати 5 мг. У всіх інших випадках, коли точність зважування визначається долями міліграма, треба застосовувати методи точного зважування. Особа, яка працює з терезами, має знати, що похибка через нерівноплічності не є стабільною в часі, тому похибку слід визначати кожного разу перед зважуванням залежно від діючих навантажень. Для виключення похибки, що обумовлена нерівноплічністю, слід використовувати методи точного зважування.

Категорично забороняється брати тягарці пальцями. Для цього служить пінцет. Знімаючи тягарці з терезів, слід їх класти неодмінно до скриньки, кожен на призначене йому місце. Не слід звільняти повністю коромисло, доки шальки ще недостатньо врівноважені, звільнення виконувати лише настільки, щоб можна було бачити, яка з шальок є легшою, помічаючи, куди відхиляється стрілка; після цього зараз же аретують коромисло та, відповідно, або збільшують кількість

тягарців, або зменшують його. Якщо терези розхитуються, то аретирувати їх треба дуже обережно, у той час, коли стрілка проходить через положення рівноваги; інакше коромисло отримує небажані поштовхи. Якщо шальки коливаються подібно до маятника, то їх слід спочатку заспокоїти торканням аркуша паперу до їхнього краю і тільки після цього звільняти коромисло. Не слід залишати надовго тягарці на шальках, особливо, коли терези не аретовано. Коли зважування завершено, терези слід поставити на аретир, тягарці зняти та зачинити дверцята терезів.

У випадку виявлення несправності терезів слід негайно попередити викладача. Категорично забороняється самостійно виправляти несправність.

<u>Порядок виконання роботи</u>

1. Провести перевірку терезів.
2. Провести зважування трьох тіл, які видає викладач або його асистент, усіма методами точного зважування.

<u>Контрольні питання</u>

1. Подивіться на коромисла терезів. Чому їм надано таку складну форму?
2. Як видно з формули (2.75), чутливість терезів можна необмежено збільшувати, зменшуючи величину l. Доки має сенс зменшувати l? Які фактори перешкоджають необмеженому збільшенню чутливості (при $l \to 0$)?
3. Що таке смуга застою терезів, з чим пов'язана її поява? Чи можна необмежено збільшувати точність терезів, необмежено збільшуючи довжину вказівної стрілки?
4. Чи залежить точність зважування від положення тягарців на шальках терезів?
5. Назвіть переваги та недоліки кожного точного метода зважування?
6. Чи вносить повітряний демпфер похибку при зважуванні?
7. Які можуть існувати систематичні похибки зважування та які є способи їхнього усунення?

2.9. Лабораторна робота «Вивчення основного закону динаміки обертального руху на хрестовому маятнику Обербека»

Мета роботи: вивчити основний закон динаміки обертального руху.

Обладнання: маятник Обербека, набір тягарців.

Завдання 1. Вивчення експериментальної установки

На вертикальній колонці 1 (див. рис. 2.18), яку встановлено на підставці 2, закріплено кронштейни: нижній 3 нерухомий та верхній 4 рухомий, а також дві нерухомі втулки – нижня 5 та верхня 6. На верхній втулці 6 закріплено підшипниковий вузол диска 7. Через диск перекинуто нитку 8. На одному кінці нитки закріплено тягарці 9, а другий кінець фіксується на диску 10 з двома уступами. На нижній втулці 5 знаходиться підставка 11, до якої прикріплено гальмуючий електромагніт, що може утримати за допомогою фрикційної муфти хрестовину з тягарцями у стані спокою. Рухомий кронштейн 4 переміщується вздовж колони і його можна фіксувати в будь-якому положенні, змінюючи таким чином довжину шляху, який проходять тягарці 9.

На колону нанесено міліметрову шкалу 12. На рухомому 4 та нерухомому 3 кронштейнах закріплено фотоелектричні датчики, які подають сигнал для вимірювання часу і які вмикають гальмуючий електромагніт, коли тягарці досягають гумового амортизатора 13, який обмежує їхній рух та зберігає пристрій від механічних пошкоджень. На підставці приладу розміщено мілісекундомір, який фіксує час проходження тягарцями визначеної відстані.

Робота з приладом

1. Закріпити (або зняти) тягарці на хрестовині при відключеному живленні приладу. Перевірити правильність намотування нитки на обертовий диск із двома уступами.

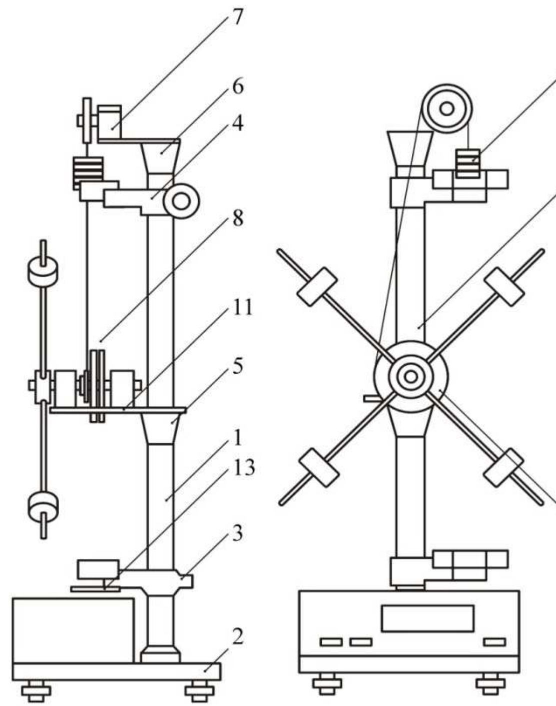

Рис. 2.18. Хрестовий маятник Обербека

2. Підняти тягарець 9 масою m (див. рис. 2.18), обертаючи хрестовину, на визначену висоту так, щоб нижня площина тягарців співпадала з рискою на верхньому фотоелектричному датчику.
3. Увімкнути клавішу «Мережа». Відтиснути клавішу «Пуск». При цьому вмикається блокуючий пристрій і тягарці фіксуються у вихідному положенні.
4. Увімкнути клавішу «Пуск». При цьому вимикається електромагніт, який фіксує систему тягарців, і вмикається мілісекундомір. Тягарці падають і коли вони перетинають промінь другого фотодатчика, вимикається мілісекундомір та вмикається електромагніт, що гальмує рух тягарців. Показання мілісекундоміра потрібно занести до таблиці.

5. Натиснути клавішу «Скидання». При цьому нуляться показання мілісекундоміра і вимикається блокуючий пристрій, що дозволяє підняти тягарці у вихідне положення.
6. Підняти тягарці на визначену висоту відповідно до п. 2, відтиснути клавішу «Пуск». Тоді положення тягарців знову буде зафіксованим.
7. Натиснути клавішу «Пуск». Повторити вимірювання часу руху тягарців між верхнім і нижнім датчиками.

Завдання 2. Визначення моменту інерції хрестовини

1. Зняти тягарці з хрестовини маятника. Виміряти час руху тягарця масою m_{01}. Повторити дослід тричі. Знайти середнє значення часу падіння тягарця. Повторити експеримент, змінюючи масу рухомих тягарців (для цього слід використовувати додаткові тягарці).
2. Визначити прискорення, з яким падав рухомий тягарець за формулою:

$$a = 2h / t^2 . \qquad (2.78)$$

3. Висоту падіння тягарців заміряти по шкалі, яку закріплено на колонці; час руху вимірюється секундоміром.
4. Знайти кутове прискорення диска з двома уступами:

$$\varepsilon = a / r , \qquad (2.79)$$

де r = 4,3 см та 2,4 см – це величина радіусу великого та малого уступу диска.
5. Вирахувати моменти сил діючих на диск для трьох значень маси рухомого тягарця та двох значень радіуса диска:

$$M = m_0(g - a)r . \qquad (2.80)$$

6. Всі дані дослідів та розрахунків занести до таблиці.
7. Побудувати залежність $M = m_0(g - r\varepsilon)r$ від ε із отриманих даних. По графіку визначити момент інерції I_0 хрестовини без тягарців на ній.

Завдання 3. Визначення моментів інерції тягарців

1. Виставити чотири додаткові тягарці на найближчій відстані від осі обертання хрестовини.
2. Визначити момент інерції системи I_c шляхом вимірювання часу падіння тягарців m_0. Повторити дослід тричі, визначити середнє значення часу падіння, розрахунок I_c виконувати за формулою:

$$I_c = m_0 \left(gt^2 / 2h - 1 \right) \cdot r^2 . \qquad (2.81)$$

3. Враховуючи, що $I_c = I_0 + 4I_{тяг}$, знайти $I_{тяг}$ для даного значення m_0.
4. Пересунути додаткові тягарці на 1 см від їхнього попереднього положення R на хрестовині (відстань між насічками на хрестовині 1 см). Повторити дослід із вимірювання I_c. Вирахувати $I_{тяг}$ для нового значення R.
5. Повторити досліди, описані в п. 2-4, змінюючи відстань R. Вирахувати для кожного значення R момент інерції $I_{тяг}$.
6. Повторити досліди, описані в п. 2-4, змінивши шків. Вирахувати для кожного значення R момент інерції $I_{тяг}$.
7. Дані занести до таблиці 2.
8. Накреслити графік $I_{тяг} = f(R^2)$ для випадків двох шківів.
9. Пояснити здобуті результати.
10. Вирахувати відносну похибку визначення моменту інерції маятника Обербека.

Контрольні питання

1. Що є мірою інертності тіла при поступальному та обертальному рухах?
2. Що називається моментом інерції тіла відносно точки?
3. Вивести формулу (2.81).
4. Як пов’язано між собою моменти інерції абсолютно твердого тіла відносно точки та відносно головних осей інерції?
5. Як співвідносяться момент інерції циліндра відносно його осі симетрії та момент інерції труби, відносно її осі симетрії, якщо трубу зроблено з такого ж матеріалу, що і циліндр, якщо

зовнішній радіус труби співпадає з радіусом циліндра, а внутрішній радіус становить половину зовнішнього?

6. Доведіть абсолютність характеру кутової швидкості обертання.

7. Чи змінюються величини кутового прискорення блоку маятника Обербека та лінійного прискорення руху тягарця при зміні радіуса шківа?

2.10. Лабораторна робота «Визначення роботи деформації, коефіцієнта відновлення, часу та сили взаємодії тіл при ударі»

Мета роботи:

1. Дослідити закони збереження енергії та імпульсу.
2. Експериментально визначити величини роботи деформації, коефіцієнта відновлення, часу та сили взаємодії тіл при ударі.

Обладнання: прилад для дослідження зіткнення кульок, комплект кульок.

Короткі теоретичні відомості.

Термін «удар» описує сукупність явищ, які виникають при зіткненні рухомих твердих тіл, а також при деяких взаємодіях твердих тіл з рідинами та газами (гідравлічний удар, вибух, тощо). Характерною особливістю цих фізичних явищ є те, що час взаємодії є малим (10^{-4}…10^{-6} с), а тиск, що виникає при ударі в точках контакту тіл або середовищ, сягає великих значень, приблизно 10^7 або 10^8 Н/м^2.

Завдання 1. Вивчення експериментальної установки

Загальний вигляд приладу для дослідження зіткнення кульок показано на рис. 2.19. На платформі 1 закріплено колонку 2, до якої прикріплено нижній 3 та верхній 4 кронштейни. До верхнього кронштейну підведено дроти 5 від кульок 6. Спеціальним гвинтом, який змонтовано на верхньому кронштейні 4, можна змінювати відстань між кульками. На

нижньому кронштейні за допомогою гвинтів укріплено вимірювальні шкали 8 та електромагніт 7. Після вигвинчування гвинтів електромагніт 7 можна рухати вздовж першої шкали та фіксувати висоту його розташування. Магнітна сила притягнення кульок до електромагніту регулюється допоміжним гвинтом, який рухає осердя електромагніта 7 вздовж осі котушки електромагніта.

При вмиканні приладу в електромережу та натисканні кнопки «Мережа» загоряється цифровий індикатор. Для установки нульових показань необхідно привести до робочого стану вимірювальну схему натисканням кнопки «Скидання». Керування електромагнітом здійснюється клавішею «Пуск». При відтиснутій клавіші «Пуск» вмикається електромагніт, а кулька, що відведена до магніта, утримується у відхиленому положенні. В цьому положенні за шкалою вимірюється початковий кут β відхилення нитки від вертикалі. При натисканні клавіші «Пуск» електромагніт вимикається, кулька під дією сили тяжіння починає рух, і зіткнувшись із нерухомою кулькою, зміщує її з початкового положення. При цьому нитка другої кульки відхиляється на кут γ_2, а першої – на кут γ_1, величини яких залежать від пружних властивостей матеріалів кульок. При зіткненні кульки з нерухомою стінкою, яку встановлюють у прилад замість нерухомої кульки, нитка правої кульки відхиляється на кут γ_1.

Завдання 2. Вимірювання часу взаємодії кульок та кутів, що визначають їхнє відхилення від вертикалі

1. Виміряти відстань R від точки підвісу до центрів кульок та за необхідності відрегулювати їх; ці відстані мають дорівнювати одна одній. Маси кульок вказані на установці.
2. Увімкнути джерело живлення натисканням клавіші «Мережа».
3. Відтиснути клавішу «Пуск» та відвести праву кульку до електромагніта, виміряти кут β початкового відхилення нитки від вертикального положення.
4. Натиснути клавішу «Скидання».

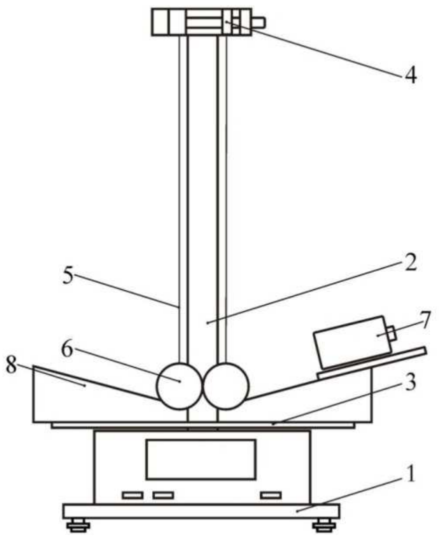

Рис. 2.19. Зображення експериментального приладу для дослідження механічного удару

5. Натиснути клавішу «Пуск». Виміряти кути максимальних відхилень від вертикального положення ниток лівої кульки γ_2 та правої кульки γ_1 після їх взаємодії. Мікросекундомір визначає час взаємодії кульок. Вимірювання повторити 3–5 разів, отриманні дані занести до таблиці.
6. Користуючись кульками з різними пружними властивостями, виконати дослідження відповідно до п. 1–5.
7. Замінити ліву кульку нерухомою стінкою та відповідно до п. 3–6 визначити максимальний кут відхилення нитки γ_1 правої кульки від вертикального положення після її взаємодії зі стінкою. Дані занести до таблиці.

Завдання 3. Визначення швидкостей кульок

При абсолютно пружному зіткненні кульки масою m_1, що має швидкість v_1, з кулькою масою m_2, що має швидкість v_2 ($v_1>v_2$, рис. 2.20), їхні поверхні деформуються. Цей процес не є незворотним, бо форма кульок миттєво відновлюється, а енергія деформації без втрат перетворюється на кінетичну

енергію руху кульок. Після удару кульки будуть рухатися з невідомими зміненими швидкостями u_1 та u_2, для знаходження величин яких потрібно використати закон збереження кінетичної енергії, тоді маємо:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \,. \tag{2.82}$$

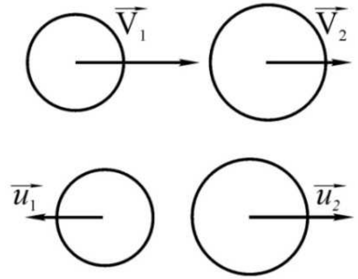

Рис. 2.20. Схема взаємодії кульок при абсолютно пружному ударі

Оскільки зіткнення, що відбувається, є центральним, запишемо також закон збереження імпульсу (кількості руху) в скалярній формі:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \,. \tag{2.83}$$

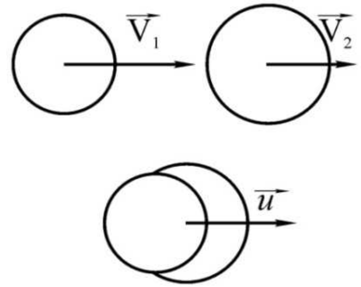

Рис. 2.21. Схема взаємодії кульок при абсолютно непружному ударі

Після нескладних алгебраїчних перетворювань знайдемо швидкості кульок після удару:

$$u_1 = [\,2m_2 v_2 + v_1(\,m_1 - m_2\,)]\,/(\,m_1 + m_2\,)\,, \tag{2.84}$$

$$u_2 = [\,2m_1 v_1 + v_2(\,m_2 - m_1\,)]\,/(\,m_1 + m_2\,)\,. \tag{2.85}$$

Якщо відбувається зустрічний (швидкості кульок до удару мають протилежні знаки) центральний абсолютно пружний удар, то потрібно враховувати знак швидкості при обчисленні відповідних величин у виразах (2.84) та (2.85).

При рівності мас кульок (m_1=m_2=m) з (2.85) та (2.84) випливає

$$u_1 = v_2\,,\; u_2 = v_1\,, \tag{2.86}$$

тобто перша кулька отримала після удару швидкість, що дорівнює швидкості другої кульки, та навпаки. Якщо перед зіткненням одна з кульок (наприклад, друга) була нерухомою (v_2=0), то u_1=0; u_2=v_1.

Після абсолютно непружного удару тіла здійснюють спільний рух (рис. 2.21), кінетична енергія тіл частково переходить в інші типи енергії, а тіла набувають залишкову деформацію. При цьому закон збереження механічною енергії системи не виконується. Після непружного удару швидкість новоствореного механічного тіла u', як відомо з теорії, можна визначити, використовуючи закон збереження імпульсу, вважаючи, що зовнішні сили відсутні, а маса системи після удару дорівнює (m_1+m_2):

$$u' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{2.87}$$

Якщо спочатку тіло було піднято на висоту h_1, то в момент удару його кінетична енергія дорівнює початковій потенціальній енергії (рис. 2.22): $mgh_1 = mv_1^2/2$. Швидкості кульок після взаємодії можна визначити з закону збереження повної механічної енергії: $mgh_{3,2} = mu_{1,2}^2/2$, де h_2 та h_3 – висоти підйомів другої та першої кульки після взаємодії. З цих співвідношень випливає, що

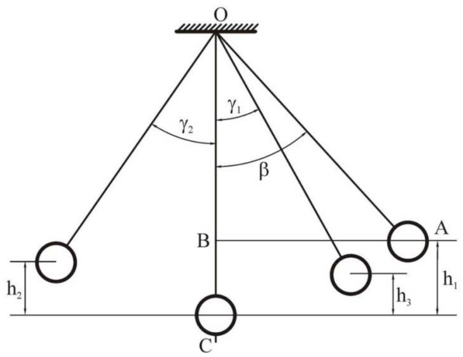

Рис. 2.22. Схема визначення роботи деформації кульок унаслідок їхнього зіткнення

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}, \tag{2.88}$$

$$u_2 = \sqrt{2gh_2}, \qquad u_1 = \sqrt{2gh_3}, \tag{2.89}$$

де

$$h_1 = R(1 - \cos\beta), \; h_2 = R(1 - \cos\gamma_2), \; h_3 = R(1 - \cos\gamma_1). \tag{2.90}$$

<u>Завдання 4. Визначення роботи деформації при ударі кульок</u>

При непружному ударі частина механічної енергії тіл переходить в інші форми енергії (зокрема, теплову) та витрачається на роботу залишкової деформації поверхні кульок. У цьому випадку повна енергія системи не змінюється, але кінетична енергія кульок після удару є меншою, ніж до удару.

Зменшення механічної енергії системи ΔW з достатнім ступенем точності можна вважати таким, що дорівнює роботі сил, які призводять до залишкової деформації. При зіткненні реальних тіл в законі збереження енергії слід врахувати роботу деформації тіл A, тобто ту частину загальної енергії, яка витрачається на здійснення невідновлюваної деформації та перетворюється на енергію теплового руху молекул речовини:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + 2A. \tag{2.91}$$

Це рівняння дозволяє визначити роботу деформації кульок рівних мас (m_1=m_2=m), закріплених на нерозтяжних нитках довжини R. Якщо друга кулька є нерухомою (v_2=0), а першу спочатку відхилили на кут α від вертикального положення (рис. 2.22), то рівняння (2.91) можна привести до вигляду:

$$A = \Delta W = mg(h_1 - h_2 - h_3), \tag{2.92}$$

де h_2 та h_3 – висота підйому другої та першої кульок після удару. З урахуванням (2.90) для роботи деформації маємо наступне рівняння:

$$A = mgR(\cos\gamma_1 + \cos\gamma_2 - \cos\beta - 1). \tag{2.93}$$

Завдання 5. Визначення коефіцієнта відновлення тіл при ударі

Ступінь «непружності» удару визначається відношенням нормальних складових швидкостей тіла після його удару об нерухому стінку u_n (після удару) та v_1 (до удару). Це відношення називається коефіцієнтом відновлення: $\varepsilon = u_n / v_1$. Замість нерухомої стінки можна використовувати кульку достатньо великої маси або будь-яке пласке масивне тіло. З урахуванням того, що

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}\ ,\ \ u_n = \sqrt{2gh_3'}\ , \qquad (2.94)$$

де h_3' – висота підйому кульки після її удару об масивну нерухому стінку, коефіцієнт відновлення має вигляд: $\varepsilon = \sqrt{h_3' / h_1}$.

Використовуючи зв'язок висоти підйому кульки з кутом відхилення нитки від положення рівноваги, остаточно отримуємо:

$$\varepsilon = \sqrt{(1 - \cos\gamma_1)/(1 - \cos\beta)}. \qquad (2.95)$$

За виміряними значеннями β та γ_1 розрахувати коефіцієнт відновлення ε та результати занести до таблиці.

Завдання 6. Визначення сили взаємодії тіл

Силу взаємодії двох тіл можна визначити, виходячи з визначення сили:

$$F \cdot \Delta t = \Delta(mv) = m \cdot \Delta v\ , \qquad (2.96)$$

де F – середня сила удару; Δt – час взаємодії тіл; Δv – зміни швидкості тіла, що виникають внаслідок удару. Оскільки швидкість першої кульки після її зіткнення з нерухомою кулькою спрямована в той же бік, що й швидкість до удару, то $\Delta(mv) = m(v_1 - u_1)$. Отже, сила взаємодії кульок:

$$F = m(v_1 - u_1)/\Delta t. \qquad (2.97)$$

З урахуванням виразів (2.88), (2.89) та (2.90) результат (2.97) зводиться до вигляду:

$$F = 2m\sqrt{gR}\,[\sin(\beta/2) - \sin(\gamma_1/2)]/\Delta t. \qquad (2.98)$$

Порядок виконання роботи

1. За виміряним значенням кута β початкового відхилення правої кульки розрахувати за формулами (2.88) та (2.90) його швидкість v_1 при проходженні ним положення рівноваги.
2. Визначити теоретичні значення швидкостей кульок після взаємодії для випадків абсолютно пружного удару (формули (2.84), (2.85)) та абсолютно непружного удару (формула (2.87)).
3. За виміряними значеннями кутів відхилення кульок після їх взаємодії (γ_1 та γ_2) розрахувати за формулами (2.89), (2.90) дійсні значення швидкостей кульок.
4. Порівняти теоретичні та експериментальні значення швидкостей, дати пояснення отриманим результатам.
5. Розрахувати кінетичну енергію кульки в момент удару за виміряним значенням кута β початкового відхилення першої кульки.
6. За виміряними значеннями кутів $\beta, \gamma_1, \gamma_2$ та довжини підвісу кульок R розрахувати за формулою (2.93) зміни механічної енергії системи – роботу деформації.
7. За виміряними значеннями довжини підвісу R, кутів β та γ_1 (початкового та кінцевого відхилень першої кульки) та часу взаємодії кульок Δt розрахувати за формулою (2.98) силу взаємодії кульок. Результати занести до таблиці.
8. Припускаючи, що площа контакту взаємодіючих кульок складає S = 0,1 мм^2, знайти величину тиску, який при цьому діє на стінку кульки.

Контрольні питання

1. Що називають ударом?
2. Який удар є абсолютно пружним? Наведіть приклад.

3. Який удар є абсолютно непружним? Наведіть приклад.
4. Запишіть закон збереження енергії при ударі.
5. Виведіть формули для визначення швидкості кульок після абсолютно пружного та абсолютно непружного ударів.
6. Запишіть закон збереження імпульсу при центральному ударі кульок.
7. Чи виконується закон збереження механічної енергії при непружному ударі?

2.11. Лабораторна робота «Вивчення вимушених механічних коливань»

Мета роботи: дослідити явище резонансу механічних коливань та утворення режиму биття у коливальних механічних системах.

Обладнання: прилад для вивчення коливань у зв'язаних механічних системах.

Завдання1. Вивчення експериментальної установки

На підставці 1 (див. рис. 2.23) змонтовано блок керування та вимірювання 2, у середині корпусу 2 знаходиться електродвигун. На валу електродвигуна закріплено ведучий стрижень 3, рух якого збуджує коливання механічної системи. На колонці 4 закріплено кронштейн із фотоелектричним датчиком 5 і вимірювальною шкалою 6. Зв'язана система являє собою маятник 8 з вантажем 7 та стрижнем 9, який жорстко скріплено скобою 10 зі стрижнем 3. Зв'язок між маятником 8 та стрижнем 9 здійснюється П-подібною скобою 11, яку оснащено пружинами 12.

Коливання збуджуються за рахунок роботи зовнішніх сил, а саме: обертанням шківу електродвигуна. Останній, переміщаючи стрижень 3, зв'язаний скобою 10 і пружинами 12 з маятником 8, приводить маятник до коливального стану. Усі стрижні закріплено на підвісках 13, що встановлені на нерухомій спільній осі 14.

Завдання 2. Визначення власної частоти коливань маятника

Власною частотою називають те значення частоти коливань, з якою вони відбуваються за умов відсутності дії зовнішніх сил, що з абсолютною точністю виконуються тільки для теоретичної моделі автономних консервативних осциляторів. Тому на практиці, окрім терміна власна частота

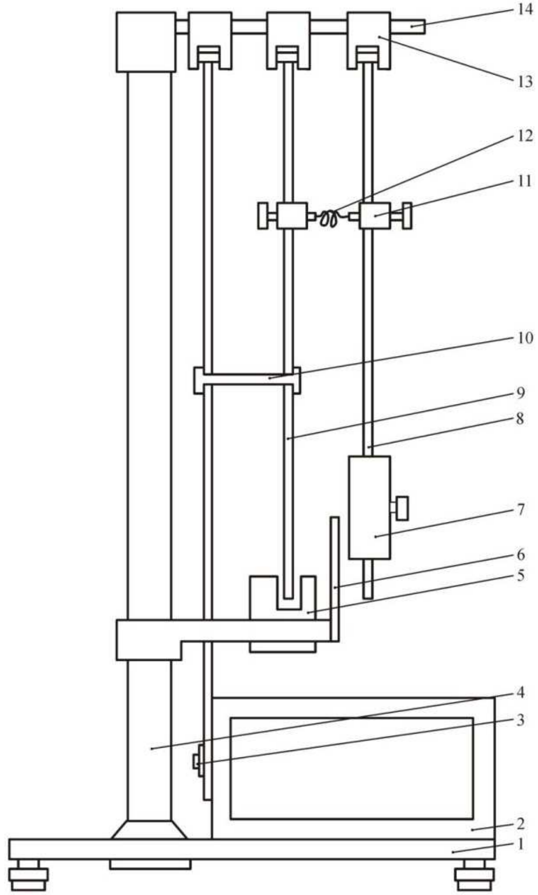

Рис. 2.23. Зображення експериментального приладу для дослідження зв’язаних механічних коливань

періодичних коливань, користуються терміном власна частота слабко загасаючих коливань, нехтуючи малою поправкою на декремент загасання. Власна частота коливань маятника залежить від параметрів (довжини, маси та форми закріпленого вантажу, жорсткості та місця закріплення пружин) і мало залежить від амплітуди коливань, якщо вона, звичайно, є невеликою.

Порядок виконання завдання

1. Увімкнути прилад шляхом натискання клавіші «Мережа» та переконатися у його працездатності, перевіривши, чи горять відповідні індикатори.
2. Відхилити маятник на 5 градусів відносно положення рівноваги і відпустити його.
3. Натиснути клавішу «Скидання».
4. Після здійснення 10–12 коливань натиснути клавішу «Стоп». Вимірювальним блоком при цьому фіксується кількість повних коливань та час, який потрібен на їхнє виконання.
5. Визначити частоту f^* власних коливань маятника за формулою:

$$f^* = n/t, \qquad (2.99)$$

де n – кількість коливань, t – час, упродовж якого вони відбулися.

Завдання 3. Дослідження загасаючих та вимушених коливань маятника

Усі реальні коливальні системи є дисипативними. Енергія їхніх механічних коливань поступово витрачається на роботу проти сил тертя, тому вільні коливання завжди загасають. У випадку невеликих швидкостей руху коливальних систем сили, що викликають загасання механічних коливань, є пропорційними величині цієї швидкості.

Таким чином, при відсутності зовнішньої, змінної у часі сили, на маятник будуть діяти дві сили: пружна сила, яка пропорційна величині зсуву маятника відносно положення

рівноваги, та сила тертя, що пропорційна швидкості руху маятника. Рівняння руху маятника у цьому випадку має вигляд:

$$I\,\frac{d^2x}{dt^2} + r\,\frac{dx}{dt} + kx = 0, \qquad (2.100)$$

де x – це координата, що характеризує відхилення маятника від рівноважного положення (в нашому випадку це кутова координата); I – момент інерції маятника; r – коефіцієнт опору; k – коефіцієнт пружності.

Розв’язок рівняння (2.100) показує, що власні коливання маятника у цьому випадку є загасаючими:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\,sin(\,\omega^* t + \varphi_0\,), \qquad (2.101)$$

де $\beta = r/(2m)$ – це коефіцієнт загасання; $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – це власна циклічна частота коливань дисипативної системи; $\omega_0 = \sqrt{k\,/\,m}$ – це частота власних коливань маятника за умов відсутності сил тертя в системі.

Якщо коефіцієнт загасання є малим ($\beta \ll \omega_0$), тоді

$$\omega^* = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\omega_0^2}\right). \qquad (2.102)$$

Таким чином, коливання, що слабко загасає можна розглядати як коливання з постійними частотою ω^* і періодом:

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \qquad (2.103)$$

але амплітуда яких зменшується з часом за експоненціальним законом (див. рис. 2.24):

$$A(t) = A_0\,exp(-\beta t). \qquad (2.104)$$

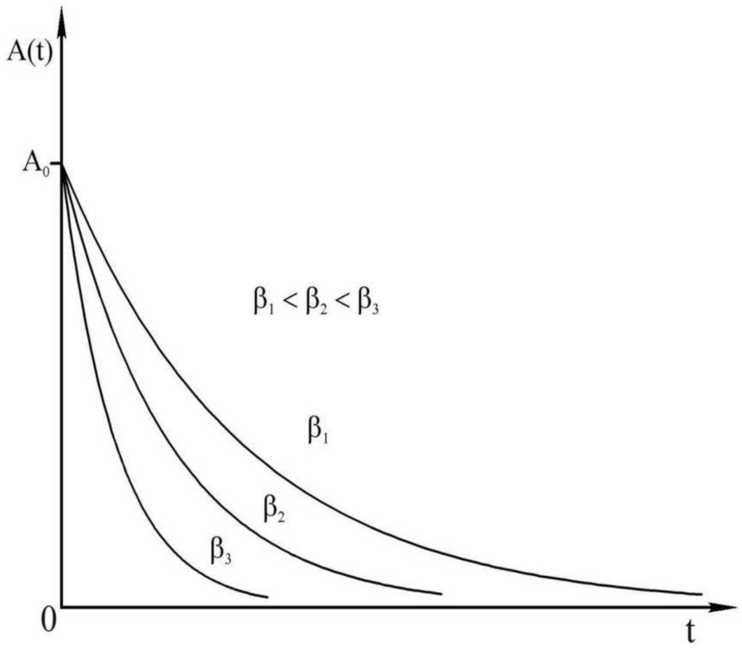

Рис. 2.24. Зменшення амплітуди слабко загасаючих коливань

Як випливає з формули (2.104) та рис. 2.24, загасання коливань збільшується при зростанні величини β. Для характеристики загасаючих коливань уводиться, крім коефіцієнта загасання β, логарифмічний декремент загасання δ, який дорівнює натуральному логарифму частки двох амплітуд коливань, що відстоять у часі одна від одної на період коливань:

$$\delta = ln[A(t)/A(t+T)] = \beta T^*. \qquad (2.105)$$

Якщо на маятник, крім пружної сили та сили тертя, діє також ще й зовнішня періодична сила, то рівняння його руху має вигляд:

$$I\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega t), \qquad (2.106)$$

де ω – частота, з якою діє зовнішня сила; F_0 – амплітудне значення моменту зовнішньої сили, яка періодично діє на маятник.

Розв'язання цього рівняння дозволяє здобути наступні вирази для величини відхилення x досліджуваного маятника від положення рівноваги, початкової фази φ коливань та амплітуди коливань A_0:

$$x = A_0 \sin(\omega t + \varphi), \qquad (2.107)$$

$$tg(\varphi) = -2\beta\omega_0/(\omega_0^2 - \omega^2), \qquad (2.108)$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \qquad (2.109)$$

Якщо коефіцієнт загасання є малим порівняно з частотою коливань, то при наближенні частоти зовнішньої сили до власної частоти амплітуда коливань різко зростає. Це явище називають лінійним резонансом. За умови, що величини частоти зовнішньої періодичної сили та власної частоти є близькими, амплітуда вимушених коливань має найбільше значення. Запишемо це резонансне значення частоти зовнішньої сили:

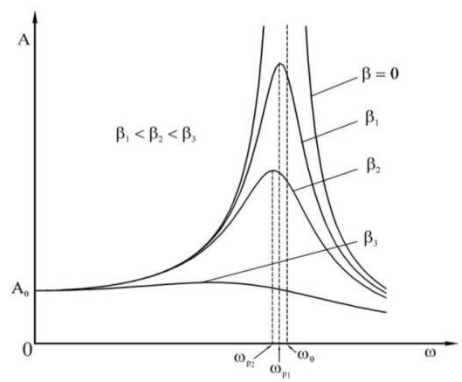

Рис. 2.25. Амплітудно-частотна характеристика вимушених коливань при дослідженні явища лінійного резонансу

$$\omega_{рез} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\beta^2}{\omega_0^2}}\,. \qquad (2.110)$$

Що менший коефіцієнт загасання, то більш різко виражено явище резонансу (рис. 2.25). В міру зростання коефіцієнта загасання β явище резонансу виявляється усе слабкіше і, нарешті, зникає при $\beta \geq \omega_0/\sqrt{2}$. Якщо загасання невелике ($\beta << \omega_0$), то резонансна частота:

$$\omega_{рез} = \omega_0\sqrt{1-2\beta^2/\omega_0^2} \approx \omega_0(1-\beta^2/\omega_0^2)\,. \qquad (2.111)$$

Порівнюючи рівняння (2.102) та (2.111), відзначимо, що $\omega_{рез} < \omega^*$, де ω^* – це власна частота коливань дисипативної системи. Збільшення коефіцієнта загасання зменшує величину $\omega_{рез}$. Відзначимо, що при цьому має місце співвідношення:

$$\omega^* - \omega_{рез} = \frac{\beta^2}{2\omega_0}\,. \qquad (2.112)$$

Отже, за відмінністю резонансної частоти $\omega_{рез}$ відносно власної частоти ω^* дисипативної коливальної системи можна визначити коефіцієнт загасання досліджуваних коливань:

$$\beta = \sqrt{2\omega_0(\omega^* - \omega_{рез})} \cong \sqrt{2\omega^*(\omega^* - \omega_{рез})}\,. \qquad (2.113)$$

З огляду на те, що замість циклічних частот (ω) в техніці часто використовуються частоти, які є величинами, зворотними до періоду коливань та вимірюються у герцах, то для них можна записати:

$$\omega^* = 2\pi f^*, \quad \omega_{рез} = 2\pi f_{рез}, \qquad (2.114)$$

де f^* та $f_{рез}$ – лінійні частоти коливань. Остаточно одержуємо наступне співвідношення:

$$\beta = 2\pi\sqrt{2f^*(f^* - f_{рез})}\,. \qquad (2.115)$$

Порядок виконання завдання

1. Увімкнути прилад натисканням клавіші «Мережа».
2. Вивести в крайнє ліве положення потенціометр «Частота коливань».
3. Увімкнути двигуни тумблером «Включення двигуна».
4. Установити мінімальну частоту коливань стрижня 3 потенціометром «Частота коливань».
5. Натиснути клавішу «Скидання», після підрахунку приладом часу 10 коливань стрижня 4 натиснути клавішу «Стоп».
6. Обчислити частоту коливань f_1 стрижня, що змушує коливатися усю систему:

$$f_1 = n/t, \qquad (2.116)$$

де n – кількість коливань, t – час, упродовж якого вони відбулися.

7. Визначити та записати амплітуду коливань маятника.
8. Зробити вимірювання відповідно до п. 5–7, збільшуючи частоту оборотів двигуна потенціометром «Частота коливань». Побудувати залежність амплітуди коливань маятника 8 від частоти зовнішньої сили, що змушує коливатися систему (тобто від частоти коливань стрижнів 3 і 4). Відзначити на осі частот значення власної частоти коливань маятника, яке було отримано при виконанні завдання 2.
9. Визначити значення резонансної частоти $f_{рез}$ за даними графіка. За знайденим значенням резонансної частоти $f_{рез}$ та власної частоти коливань маятника f^* розрахувати за формулою (2.115) коефіцієнт загасання β та логарифмічний декремент загасання $\delta = \beta/f^*$.

Завдання 4. Дослідження явища биття

Биття – це результат суперпозиції двох близьких за частотою коливань, якщо ці коливання відбуваються в одному напрямку. Явище биття проявляється у періодичній зміні амплітуди результуючого коливання.