**Приклад білету:**

Навчальна дисципліна: «Аналітична геометрія»

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № **1**

1. Теорема про інваріанти кривої другого порядку***.*** (5 балів).

2. Задача (6 балів)

Із загального рівняння площини 3x – 2у + 6 = 0 вивести рівняння всіх видів і перевірити результат.

3. Задача (6 балів). Виконати завдання.

а) Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо осі дорівнюють 4 і 6.

б) Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо дійсна вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами 16.

в) Скласти канонічне рівняння параболи, якщо відстань між фокусом і директрисою дорівнює 8.

г) Скласти рівняння кола з центром (1,2), до якого належить точка (3,3).

4. Задача (9 балів)

За допомогою паралельного перенесення системи координат визначити тип лінії другого порядку та знайти координати фокусів, координати центру, рівняння директрис, піввісі, ексцентриситет, параметр:



5. Задача (14 балів)

Встановити, дана пара прямих: схрещуються, паралельні, перетинаються або збігаються; якщо прямі паралельні, то написати рівняння площини, через них проходить; якщо прямі перетинаються, то написати рівняння містить їх площині і знайти їх спільну точку.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1)  |  |  |

**Розв’зязки завдань з білету:**

1. ***Теорема про інваріанти кривої другого порядку.*** Під час поворотів і (або) паралельних перенесеннях не змінюється значення таких функцій коефіцієнтів загального рівняння заданої кривої другого порядку.

, де ;

, де ;

, де ,3.

*Доведення* \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Для доведення цієї теореми досить виписати формули, що пов'язують коефіцієнти рівняння кривої в старій і новій системі координат після повороту на кут :

,

,

,

, , 

або паралельного перенесення на вектор :

, , , , ,

.

Далі, прямою підстановкою можна переконатися, що значення величин ,  і  як функцій коефіцієнтів рівняння заданої кривої в різних системах відліку не змінюється. Тобто

, де ;

, де ;

, де ,

а отже, ,  та  є інваріантами.

1. Дано рівняння площини 3*х* – 2*у* + 6 = 0, із якого *А* = 3, *В* = –2, *С* = 0, D = 6. Тоді нормаль до цієї площини **N** = (3; –2; 0).

Знайдемо точки, що належать цієї площини: *М*0 = (0; 3; 0),
*М*1 = (–2; 0; 0), *М*2 = (2; 6; 0). Радіус-вектори до цих точок відповідно **r0**(0; 3; 0), **r1**(–2; 0; 0), **r2**(2; 6; 0).

Звідси можемо знайти напрямлюючі вектори даної площини:

**q** = (**r1** – **r0**) = (–2 – 0; 0 – 3; 0 – 0) = (–2; –3; 0)
**p** = (**r2** – **r0**) = (2 – 0; 6 – 3; 0 – 0) = (2; 3; 0).

Тепер випишемо інші рівняння площини:

* **r** = **r0** + λ**q** + µ**p**

(*x*; *y*; *z*) = (0; 3; 0) + λ(–2; –3; 0) + µ(2; 3; 0) – векторне параметричне рівняння площини;

* **r** = **r0** + λ(**r1** – **r0**) + µ(**r2** – **r0**)

(*x*; *y*; *z*) = (0; 3; 0) + λ(–2 – 0; 0 – 3; 0 – 0) + µ(2 – 0; 6 – 3; 0 – 0) – векторне параметричне рівняння площини через дві точки;

* – параметричне рівняння площини в координатному вигляді;

 – параметричне рівняння площини в координатному вигляді через дві точки;

* (**r** – **r0, q, p**) = 0

((*x*; *y*; *z*) – (0; 3; 0), (–2; –3; 0), (2; 3; 0)) = 0 – векторне рівняння площини через мішаний добуток;

 – рівняння площини через три точки;

 – рівняння площини у відрізках;

* (**N,**(**r** – **r0**)) = 0, ((3; –2; 0)**,**(*x*; *y*; *z*) – (0; 3; 0)) = 0 – векторне рівняння площини через нормаль;
* – нормоване рівняння площини.
1. 2*а* = 4, 2*b* = 6. Звідси, *а* = 2, *b* = 3.

Канонічне рівняння еліпсу: .

1. 2*a* = 10, 2*c* = 16. Звідси, *а* = 5, *с* = 8.

*b*2 = *с*2 – *а*2 = 64 – 25 = 39.

Канонічні рівняння гіперболи: .

1. *р* = 8. Звідси, канонічне рівняння параболи *у*2 = 2*рх* = 16*х*.
2. т.*О*(1; 2) – центр кола, т.*М*(3; 3) – належить до кола.

R2 = (3 – 1)2 + (3 – 2)2 = 4 + 1 = 5.

Рівняння кола: (*х* – 1)2 + (*у* – 2)2 = 5.

1. Дано загальне рівняння лінії другого порядку:

4*х*2 – 16*х* + *у*2 – 12 = 0;

За допомогою паралельного перенесення знайдемо канонічний вигляд:

4*х*2 – 16*х* + *у*2 – 12 + 16 – 16= 0;

4(*х*2 – 4*х* + 4) + *у*2 – 28 = 0;

4(*х* – 2)2 + *у*2 – 28 = 0;

Звідси *а*2 = 28, *b*2 = 7, *c*2 = *а*2 – *b*2 = 21.

лінія центрального еліптичного типу.

Звідси І1 · І3 < 0 – лінія другого порядку є еліпсом.

1. Дано дві прямі:

Звідси нормалі площин, які утворюють ці прямі:

**N**1(1; 0; 1), **N**2(3; 1; –1), **N**3(1; –2; 0), **N**4(0; 1; 2).

Знайдемо напрямлюючі вектори до прямих:

**q**1 = **N**1**×N**2 = = **i**(–1) –**j**(–4) + **k**, **q**1(–1; 4; 1)

**q**2 = **N**3**×N**4 = = **i**(–4) – 2 ∙ **j** + **k**, **q**2(–4; –2; 1)

**q**1×**q**2 **= =** 10 ∙ **i** – 2 ∙ **j** + 18**k**, тобто **q**1 не э паралельним до **q**2, прямі не є паралельними.

 – прямі не перетинаються.

Отже, прямі схрещуються.