Фізика суцільних середовищ

Практичні заняття

Збірник задач для практичних занять -

Сборник задач по электродинамике, Батыгин В. В., Топтыгин И. Н., изд. 2-е, перераб., учебное пособие. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1970.

Перелік аудиторних задач та задач для самостійної підготовки

17 березня 2020 року, аудиторні – 153, 155, самостіні – 154, 156.

24 березня 2020 року, аудиторні – 175, 177, самостійні – 161, 162.

31 березня 2020 року, аудиторні – 226, 229, самостійні – 135.

7 квітня 2020 року, аудиторні – 231, 232, 235, самостійні – 240.

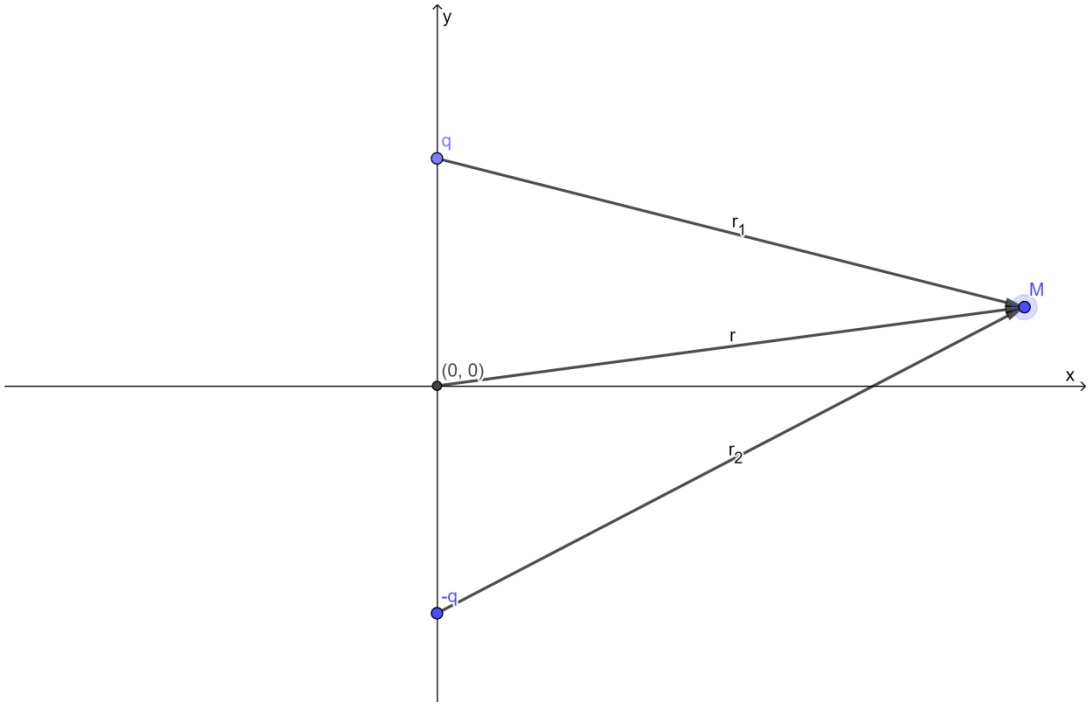
Практичне заняття 17 березня 2020 року

Тема: метод зображень для розв’язання задач електростатики

Основна ідея методу зображень полягає у підборі таких додаткових фіктивних точкових зарядів, які разом із заданими зарядами створювали би таке поле, для якого поверхня заданого провідника була би еквіпотенціальною поверхнею. Розглянемо два простих приклади.

Задача 1. Знайти поверхневу густину електричного заряду, який створює на нескінченній площині, що проводить заряд, точковий заряд q, розташований на відстані a від площини.

Спочатку треба підібрати еквівалентну систему зарядів, що створює постійний потенціал на площині. Як було показано раніше, взаємодію заряду із площиною можна замінити взаємодією заряду із іншим фіктивним зарядом протилежного знака, розташованого всередині площини.



Дійсно, потенціал, створений двома точковими зарядами, обчислюється наступним чином:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}$$

$$r_1^2 = x^2 + (a - y)^2$$

$$r_2^2 = x^2 + (a + y)^2$$

На площині $y = 0$ потенціал буде дорівнювати нулю.

Як нам відомо, поверхнева густина заряду пропорційна різниці нормальних компонент вектора напруженості електричного поля при переході із середовища в середовище:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$$

Площина є провідником, тому усередині неї напруженість дорівнює нулю. Тоді поверхневу густину можна обчислити наступним чином:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{y=0}$$

Вектор нормалі до поверхні площини $\vec{n} = (1,0)$, тоді нормальна похідна обчислюється $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{y=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{y=0}$.

$$\sigma(x) = -\frac{q}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r_2}\right)\bigg|_{y=0} = -\frac{q}{4\pi}\left(-\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{1}{r_2^2}\frac{\partial r_2}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0}$$

$$= -\frac{q}{4\pi}\left(\frac{a}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-a}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{qa}{4\pi(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Задача 2. Провідник, що має форму кулі радіуса R, знаходиться в полі точкового заряда q, що знаходиться на відстані $a > R$ від центра кулі. Система знаходиться в діелектрику з діелектричною проникністю ε. Знайти потенціал φ та розподіл індуційованих зарядів на кулі, якщо а) потенціал кулі V, б) заряд кулі Q.

Як було доведено, сфера є еквіпотенціальною поверхнею для двох точкових зарядів у випадку

$$\begin{cases} ab = R^2 \\ \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{q_1}{q_2}\right)^2 \end{cases}$$

Тому можна замінити взаємодію сфери із зарядом на взаємодію двох зарядів. Фіктивний заряд знаходиться усередині сфери на відстані $b = \frac{R^2}{a}$ від її центра із величиною $q' = -q\sqrt{\frac{b}{a}} = -q\frac{R}{a}$.

Потенціал, створений такою системою, буде мати вигляд

$$\varphi(r,\theta) = \frac{q}{\varepsilon r_1} - \frac{qR}{a\varepsilon r_2} = \frac{q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}} - \frac{R}{a}\frac{1}{\sqrt{\frac{R^4}{a^2} + r^2 - \frac{2rR^2}{a}\cos\theta}}\right)$$

Однак утворена система має нульовий потенціал на поверхні сфери. Для того, щоб її потенціал дорівнював V на поверхні сфери, необхідно додати ще один фіктивний заряд величиною εVR в центр сфери:

$$\varphi(r,\theta) = \frac{q}{\varepsilon r_1} - \frac{qR}{a\varepsilon r_2}$$

$$= \frac{q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}} - \frac{R}{a}\frac{1}{\sqrt{\frac{R^4}{a^2} + r^2 - \frac{2rR^2}{a}\cos\theta}}\right) + \frac{VR}{r}$$

Поверхневу густину обчислимо тим же чином, що і у минулій задачі:

$$\sigma(\theta) = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R}$$

$$= -\frac{q}{4\pi}\left(-\frac{R - a\cos\theta}{(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{R}{a}\frac{R - \frac{R^2}{a}\cos\theta}{\left(\frac{R^4}{a^2} + R^2 - \frac{2R^3}{a}\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$-\frac{V}{R}$$

$$= -\frac{q}{4\pi}\left(-\frac{R - a\cos\theta}{(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{R}{a}\frac{a^3}{R^3}\frac{R - \frac{R^2}{a}\cos\theta}{(R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$-\frac{V}{R} = -\frac{q}{4\pi}\left(\frac{\frac{a^2}{R} - a\cos\theta - R + a\cos\theta}{(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{V}{R}$$

$$= -\frac{q}{4\pi R}\frac{a^2 - R^2}{(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{V}{R}$$

Тобто відповідь на перше питання наступна

$$\sigma(\theta) = -\frac{q}{4\pi R}\frac{a^2 - R^2}{(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{V}{R}$$

Щоб відповісти на другу частину, необхідно виразити потенціал на поверхні сфери через повний заряд кулі:

$$Q = \varepsilon VR - \frac{qR^2}{a} \Rightarrow V = \frac{Q + \frac{qR^2}{a}}{\varepsilon R} = \frac{Q}{\varepsilon R} + \frac{qR}{\varepsilon a}$$

Отриману величину необхідно підставити в рівняння для потенціалу.