МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ
Кафедра комп`ютерної фізики

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр

«Вплив нормальних мод надплинних розчинів ^{3}He –^{4}He на дисипацію енергії тіла, яке коливається»

Виконала: студентка 2 курсу, групи НФ-64
Геращенко Н. О.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: комп`ютерна фізика
Керівник: доктор фізико-математичних наук, професор Нємченко К.Е.

Рецензент:

Харків – 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра комп'ютерної фізики
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магістр
Спеціальність: 105 Прикладна фізика та наноматеріали
Освітня програма: Комп'ютерна фізика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Костянтин НЄМЧЕНКО
підпис

"_____" _____ 2021 року

З А В Д А Н Н Я
НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ МАГІСТРА

Геращенко Надії Олексіївні

1. Тема роботи «Вплив нормальних мод надплинних розчинів ^{3}He–^{4}He на дисипацію енергії тіла, яке коливається»
керівник роботи Нємченко Костянтин Едуардович, доктор фізико-математичних наук, професор
затверджені наказом по університету від 10 лютого 2021 № 0210 – 05/374
2. Строк подання студентом роботи 12 травня 2021 р.
3. Перелік питань, які потрібно розглянути:

Розв'язати задачу про визначення повного набору нормальних мод надплинних розчинів ^{3}He–^{4}He. Розробити фізичну модель резонансних коливань камертону в квантовій рідині, яка є справедливою в великих інтервалах температур, тиску та концентрацій. За допомогою розробленої моделі дослідити умови резонансного збудження звукових хвиль у критичному гелії та першого і другого звуків в надплинному гелії. Провести порівняний аналіз результатів теоретичних розрахунків з експериментальними даними.

4.План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Ознайомитись с властивостями надплинного гелію та надплинних розчинів ізотопів гелію
2	Дослідити методи використання кварцових камертонів для досліджень надплинного гелію
3	Вивчити результати експериментальних досліджень резонансів коливань камертонів в гелії
4	Розв’язати теоретичні задачу про резонанси звукових коливань в системі «камертон-надплинний гелій»
5	Провести порівняння з експериментальними даними
6	Визначити та сформулювати висновки дипломної роботи

5. Дата видачі завдання « »_____2021 р

Студентка _____ Надія ГЕРАЩЕНКО
підпис

Керівник роботи _____ Костянтин НЄМЧЕНКО
підпис

РЕФЕРАТ

Геращенко Надія «Вплив нормальних мод надплинних розчинів ^{3}He–^{4}He на дисипацію енергії тіла, яке коливається»

Кваліфікаційна робота магістра з прикладної фізики.

У роботі проведено дослідження резонансного збудження звукових хвиль у надкритичному гелії та першого й другого звуків в надплинному гелії. Основною метою даної роботи є вивчення коливань густини, тиску, температури та концентрації, щоб визначити умови, за яких коливання твердої стінки збуджують перший та другий звуки у надплинному гелії та звук у надкритичному гелії,а також розрахувати внесок цих процесів у формування резонансів під час коливань закритих камертонів.

Для вирішення цієї проблеми було розглянуто об’єднану систему – рідкий гелій та осцилятор, який імітує камертон, що розташований у закритій колбі, заповненій гелієм.

Розглянуто збудження стоячих хвиль коливань тиску замкнутим камертоном, яке спостерігається на експерименті. Зовнішній вигляд та властивості резонансів розглядаються як функції температури та тиску гелію. Таким чином, у роботі запропоновано модель для опису фізичних особливостей експериментально спостережуваних резонансних явищ.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: НАДПЛИННІ РОЗЧИНИ ^{3}НЕ–^{4}НЕ, НАДКРИТИЧНИЙ ГЕЛІЙ, ПЕРШИЙ ЗВУК, ДРУГИЙ ЗВУК, ПЕРЕКРИТТЯ РЕЗОНАНСІВ

РЕФЕРАТ

Геращенко Надежда «Влияние нормальных мод сверхтекучих растворов ^{3}He–^{4}He на диссипацию энергии колеблющегося тела»

Квалификационная работа магистра по прикладной физике.

В работе проведено исследование резонансного возбуждения звуковых волн в сверхкритическом гелии и первого и второго звуков в сверхтекучем гелии. Основной целью данной работы является изучение колебаний плотности, давления, температуры и концентрации для определения условий, при которых колебания твердой стенки возбуждают первый и второй звуки в сверхтекучем гелии и звук в сверхкритическом гелии, а также рассчитать вклад этих процессов в формирование резонансов во время колебания закрытых камертонов.

Для решения этой проблемы было рассмотрено объединенную систему – жидкий гелий и осциллятор, который имитирует камертон, расположенный в закрытой колбе заполненной гелием.

Рассмотрено возбуждение стоячих волн колебаний давления закрытым камертоном, наблюдаемое в эксперименте. Внешний вид и свойства резонансов рассматриваются как функции температуры и давления гелия. Таким образом, в работе предложено модель для описания физических свойств экспериментально наблюдаемых резонансных явлений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: СВЕРХТЕКУЧИЕ РАСТВОРЫ ^{3}НЕ–^{4}НЕ, СВЕРХКРИТИЧЕСКИЙ ГЕЛИЙ, ПЕРВЫЙ ЗВУК, ВТОРОЙ ЗВУК, ПЕРЕКРЫТИЕ РЕЗОНАНСОВ

ABSTRACT

Herashchenko Nadiia «Influence of normal modes of superfluid ^{3}He – ^{4}He mixtures on energy dissipation of an oscillating body»

Master's Degree in Applied Physics.

The study of resonant excitation of sound waves in supercritical helium and first and second sound waves in superfluid ^{3}He – ^{4}He mixtures is carried out.

The main aim of this work is to study temperature and temperature oscillations to determine the conditions under which oscillations of a solid wall excite the first and second sound in superfluid helium and sound in supercritical helium and to calculate the contributions of these processes to the formation of resonances during oscillations of closed tuning forks.

To solve this problem, a coupled system was considered – liquid helium and an oscillator, which is simulated by a tuning fork located in a closed tube filled with helium.

The experimentally observed excitation of standing waves of pressure oscillations by an oscillating closed tuning fork, the appearance and properties of resonances depending on the temperature and pressure of helium are considered. As a result of the work, a model was built that described the physical features of the experimentally observed resonance phenomena.

KEYWORDS: SUPERFLUID ^{3}HE–^{4}HE MIXTURES, SUPERCRITICAL HELIUM, FIRST SOUND, SECOND SOUND, RESONANCE OVERLAP

ЗМІСТ

ВСТУП 8

1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ 10

1.1. Рідкий гелій, надплинність 10

1.2. Використання кварцових камертонів 17

2 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЗОНАНСІВ 20

3 РЕЗОНАНСИ ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО ЗВУКУ 25

3.1. Початкова система рівнянь 25

3.2. Випромінювання другого звуку 34

ВИСНОВКИ 46

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 47

ВСТУП

Актуальність теми. За останні роки кварцові камертони стали популярними як універсальні зонди для рідкого гелію за низьких температур. Ці камертони мають кілька корисних властивостей, таких як легка доступність за низької вартості, надійність, прості схеми вимірювання, низька внутрішня характеристика демпфування, нечутливість до магнітного поля тощо. Завдяки цим властивостям камертони навіть замінюють вібруючі дроти в якості стандартного резонатору для вимірювання властивостей рідкого гелію. Однак, значно вища резонансна частота, приблизно 30 кГц, як основна частота для більшості камертонів, та більш складна геометрія, створюють певні ускладнення при використанні камертонів як фізичних приборів для вимірювання. Наприклад, акустичні явища, які не створюють проблем у випадку з вібруючими дротами, спричиняють значні ефекти при вимірах з камертонами.

Таким чином, в даний час для використання переваг кварцових камертонів при дослідженнях фундаментальних властивостей рідкого гелію, потрібно теоретичне і експериментальне дослідження резонансних властивостей камертонів, які знаходяться в рідкому гелії.

Основна **мета** роботи – розглянути фізичні механізми, що забезпечують виникнення і перекриття резонансів, зумовлених коливаннями камертонів і гідродинамічними модами в рідкому гелії. Зокрема, дослідити резонанси звуку в критичному гелії, а також резонанси першого і другого звуків в надплинному гелії і розчинах ізотопів гелію.

Для досягнення поставленої мети визначені **задачі**:

– розв’язати задачу про визначення повного набору нормальних мод надплинних розчинів ^{3}He –^{4}He;

– розробити фізичну модель резонансних коливань камертону в квантовій рідині, яка є справедливою в великих інтервалах температур, тиску та концентрацій;

– за допомогою розробленої моделі дослідити умови резонансного збудження звукових хвиль у критичному гелії та першого і другого звуків в надплинному гелії;

– провести порівняльний аналіз результатів теоретичних розрахунків з експериментальними даними.

Об’єкт дослідження – гідродинамічні властивості надплинного та критичного гелію та надплинних розчинів ^{3}He –^{4}He.

Предмет дослідження – нормальні моди рідкого гелію та надплинних розчинів ^{3}He –^{4}He: перший та другий звуки. Резонанси, які зумовлені цими модами при коливаннях кварцового камертоні в гелії.

Методи дослідження. Теоретичні положення роботи базуються на математичних методах гідродинаміки надплинних рідин, які застосовуються для опису виникнення резонансних коливань в системі камертон – гелій.

Наукова новизна одержаних результатів.

– запропоновано модель системи камертон – гелій, яка відображає основні фізичні властивості коливань закритого реального кварцового камертона в гелії;

– проведено порівняння з існуючими експериментальними даними і дано пояснення фізичним механізмам, які забезпечують явища, які спостерігаються.

Структура і обсяг роботи. Магістерська робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку джерел. Загальний обсяг роботи становить 51 сторінку, із них основного тексту 36 сторінок, 12 рисунків за текстом, список використаних джерел із 37 найменувань на 5 сторінках.

1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. Рідкий гелій, надплинність

Під час проведення чисельних експериментів часом трапляється так, що отримані результати частково або навіть повністю суперечать очікуванням вчених та існуючим теоріям. В обох випадках необхідно переконатися, що експеримент було проведено без істотних помилок та за необхідності починати пошук пояснень для наявних відхилень у рамках загальноприйнятної теорії або, якщо її виявляється недостатньо, спробувати віднайти нову.

Так, починаючи з 18 сторіччя вчені з різних кінців світу намагаються отримати температуру якомога ближчу до абсолютного нуля. Як один із наслідків, під час цих експериментів та теоретичних розрахунків були знайдені нові властивості деяких речовин, серед яких особливе місце займає гелій (He), для опису поведінки якого за досить низьких температур наявних на той час знань виявилося недостатньо.

За нормальних умов гелій – це одноатомний нетоксичний безбарвний газ, який не має запаху чи смаку. Експеримент, завдяки якому вперше звернули увагу саме на властивості гелію за низьких температур, провів Гейке Камерлінг-Оннес. Так, він створив апарат, завдяки якому зміг визначити критичну температуру гелію, близько 5 К, та температуру кипіння, яка при нормальному атмосферному тиску складає приблизно 4,2 К [1]. Пізніше продовжили експериментальне дослідження гелію такі вчені як П. Л. Капиця та Д. Ален, в результаті чого з’явилося поняття надплинності. Надплинністю назвали властивість, якої набуває рідкий гелій (He II) за температур нижче від 2,17 К. На відміну від інших речовин, за цієї температури у рідкому гелії можна спостерігати фазовий перехід II роду, а не звичний перехід до твердого агрегатного стану.

Для отримання дуже низьких температур пари ^{4}He над поверхнею рідини відкачують, тому ^{4}He весь час знаходиться на лінії насиченого пару, а отже кипить з утворенням бульбашок. Після проходження температури 2,17 К кипіння припиняється, поверхня ^{4}He стає нерухомою і припиняється утворення бульбашок. На основі даного дослідження було вирішено, що існують дві принципово різні форми рідкого ^{4}He: He I вище за температури переходу та He II нижче за неї відповідно. Ця температура має назву лямбда-точки через подібність графіка питомої теплоємності як функції температури при постійному тиску до літери грецької абетки “**λ**”.(Рис. 1.1). Також варто зазначити, що температура лямбда переходу зменшується зі зростанням тиску.

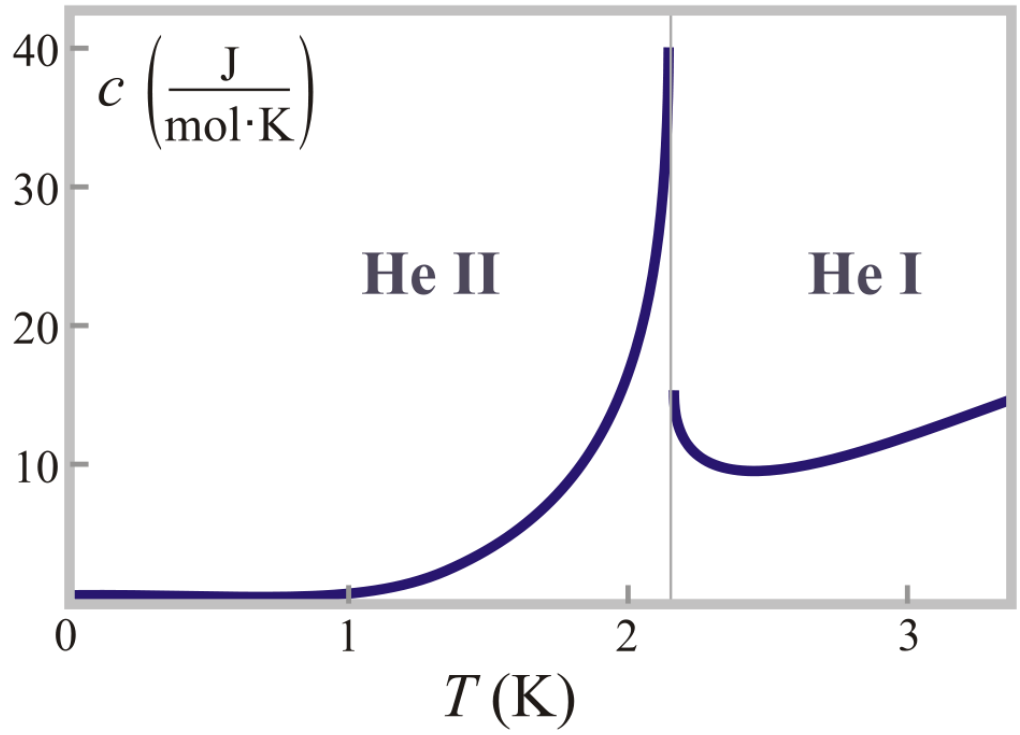


Рис. 1.1. Лямбда-перехід в рідкому гелії: поведінка питомої теплоємності за низьких температурах

Надплинністю називають здатність рідкого гелію II протікати без тертя крізь вузькі капіляри. Згідно з класичною механікою при абсолютному нулі температури атоми речовини повинні бути нерухомими, тобто за низьких температур атоми можуть здійснювати лише малі коливання відносно деякого положення рівноваги. За температур близько 1–2 К дебройлівська довжина хвилі атомів гелію стає порівняною з міжатомною відстанню, тож гелій II є квантовою рідиною.

Рідкий гелій є єдиною рідиною, в якої квантові ефекти з'являються раніше, ніж рідина набуває твердого стану, бо взаємодія між атомами гелію достатньо слабка, в той час коли для інших середовищ значення такої взаємодії достатньо для того, щоб тіла ставали твердими до появи квантових ефектів. Рідкий гелій здатен перейти до твердого агрегатного стану лише при тиску більш ніж у 25 атм.

Для зручності опису надплинного гелію використовують поняття фононів, які представляють собою довгохвильові звукові кванти. За допомогою цих частинок також можна пояснити усі властивості твердих тіл, яких вони набувають за низьких температур.

Енергія фононів являє собою величину, яка лінійно пов'язана з імпульсом. Таким чином, систему частинок, які довільно взаємодіють у слабозбудженому стані розглядають як сукупність окремих елементарних збуджень, тобто фононів, кожне з яких веде себе подібно до деякої квазічастинки яка має здатність рухатися крізь тіло. Енергетичним спектром тіла у цьому випадку буде функція залежності енергії елементарного збудження від його імпульсу. Хоча енергія фононів є лінійною функцією від імпульсу, та зі зростанням імпульсу значення кривої відхиляються від цього співвідношення.

Задля пояснення температурної залежності та деяких термодинамічних величин, таких як теплоємність, було запропоновано використання поняття

ротонів. Виникнення таких квазічастинок має особливий вплив на поведінку надплинної рідини в області температур близько одного Кельвіна. Фізичний сенс появи ротонів в енергетичному спектрі відповідає появі вихрового руху в надплинній рідині. Назву цього елементарного збудження запропонував І.Е.Тамм. І хоча сам вихор існує без дисипації, його утворення потребує енергії, котра втрачається системою. Таким чином, виникає тертя. Умовою невиникнення таких квазічастинок є критерій надплинності Ландау. Сутність цього критерію полягає в тому, що квантова рідина може перебувати у надплинному стані тільки за випадку, коли для енергетичного спектра її елементарних збуджень $\varepsilon(p)$ мінімальне значення відношення енергії квазічастинки до її імпульсу $\varepsilon(p)/p$ більше за нуль.

На початку досліджень взагалі вважалося, що спектр складається з двох частин – фононної та ротонної, та Ландау Л. Д. зробив припущення щодо безперервного переходу між цими двома типами квазічастинок. Він вважав більш вірним не розглядати фонони і ротони як виключно різні типи елементарних збуджень, а говорити саме про довгохвильові (за малих значень p) і короткохвильові збудження. Незважаючи на безперервність кривої спектру, вчені продовжують користуватися поняттями фононів та ротонів через те, що ці типи елементарних збуджень певним чином відрізняються одне від одного. Згідно з характером збуджень, основна частина фононів відповідає малим імпульсам на початку координат, в той час як основна частина ротонів розташовані поблизу мінімуму кривої спектру.(Рис. 1.2.)

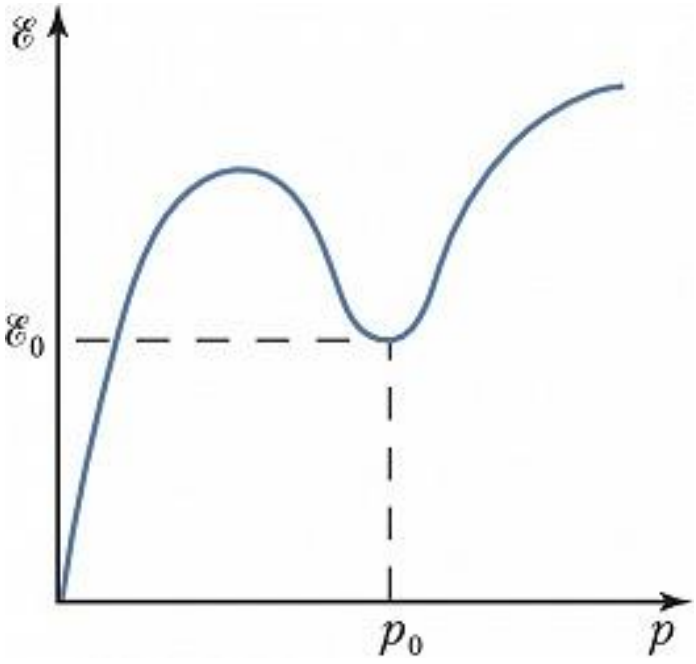


Рис. 1.2. Спектр елементарних збуджень у He II

При користуванні моделлю елементарних збуджень вважається, що енергія взаємодії цих збуджень між собою більша, ніж їх власна енергія, що зумовлено їх малою кількістю. Кількість фононів та ротонів зменшується з наближенням до абсолютного нулю, та за температур нижчих за 1,7 К – 1,8 К газ елементарних збуджень можна розглядати немов ідеальний газ, частинки якого підпорядковуються статистиці Бозе[1].

У He II можливе одночасне існування двох видів руху, кожному з яких відповідає своя ефективна маса. Частина рідини, котра пересувається разом із рухом збуджень схожа за поведінкою на нормальну рідину, решта – є надплинною та не відчуває тертя, рухається незалежно від нормальної частини, допоки швидкість не набуває критичного значення. Нормальний рух рідини вважається пов’язаним із поступальним рухом газу збуджень, який відбувається зі швидкістю v_n, швидкість надплинної частини – v_s відповідно. Рух надплинної частини не супроводжується переносом тепла та завжди є потенціальним. Між цими частками мас рідини, що рухаються немов би “одна через одну” не відбувається передача імпульсу від однієї частини до іншої.

Саме завдяки наявності двох типів руху у надплинній рідині можливе існування незгасаючих температурних хвиль. Як можна побачити на Рис. 1.3, за температур нижчих ніж 1 К, більшу частину He II становить надплинна рідина.

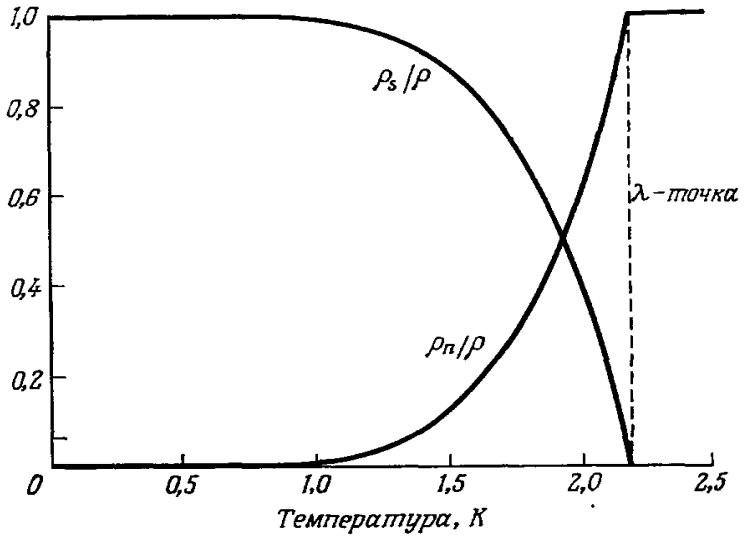


Рис. 1.3. Залежність щільності нормальної та надплинної компонент відносно загальної щільності ^{4}He в залежності від температури

На відміну від звичайної рідини, у рідкому гелії можуть поширюватися два різні типи звуку. Вперше наявність другого звуку передбачив в своїй теоретичній роботі Л. Д. Ландау [2]. Якщо перший звук являє собою коливання густини та тиску, то у хвилях другого звуку коливання температури викликають коливання густини збуджень, тож він представляє собою хвилі стиснення і розрідження в газі збуджень.

Другий звук також можна розглядати не як коливання температури та ентропії, а в якості коливань відносної кількості теплових збуджень у He II. Вперше другий звук зміг зафіксувати під час експерименту В. П. Пєшков: задля того, щоб збуджувались коливання тепла, на занурений в гелій нагрівач

надходив змінний струм від звукового генератора. Коливання температури у звичайній рідині швидко згасали, в той час як коливання температури, викликані у рідкому гелії, розповсюджувалися зі швидкістю приблизно 20 м/с. Більш детально результати експерименту описані в роботі [3].

На сьогодні також існують теоретичні роботи, метою яких був розрахунок основних параметрів другого звуку – його швидкості і поглинання, або визначення можливості існування другого звуку [5, 6] в залежності, наприклад, від співвідношення між частотою звуку і часу взаємодії квазічастинок гелію між собою [7 – 21] .

У рідкому гелії використовується резонансна методика, яка полягає в тому, що в експериментальній комірці збуджується стояча хвиля другого звуку [25]. Швидкість звуку при цьому визначається зі значень резонансних частот, а коефіцієнт поглинання – з ширини резонансних піків. Така методика дозволила провести до теперішнього часу вичерпне вивчення другої звуку в надплинному гелії і в надплинних розчинах ізотопів гелію в усій області існування надплинності, досліджувати область в безпосередній близькості від надплинного переходу, розглянути випадок різних тисків і концентрацій [26 – 28, 5, 6].

Ізотопи гелію відрізняються за статистикою, якій вони підпорядковуються. Так, атоми ^{4}He описуються статистикою Бозе-Ейнштейна, в той час як атоми ^{3}He мають напівцілий спін та описуються, відповідно, за допомогою статистики Фермі-Дірака. Через велику різницю у властивостях, рідини, які були утворених з них мають різну назву – квантова бозе-рідина та фермі-рідина відповідно. Для ізотопу ^{3}He перехід у іншу, надплинну фазу, може відбутися лише за наднизьких температур.

Вже не перший рік теоретики та експериментатори з різних країн світу намагаються зрозуміти та пояснити явища, що притаманні He II. Вивченню розчинів приділяється досить велика частка уваги, зокрема спостереженню за

ефектами отриманими у рідині, що складається лише з ^{4}He та їх зміною у розчині ^{3}He – ^{4}He. Одна з областей дослідження теплових процесів в розчинах ізотопів гелію – це вивчення теплових властивостей гелію в обмеженій геометрії. Через те, що існують суттєві залежності довжин вільного пробігу квазічастинок і їх кількості від температури і концентрації, під час експериментів у вчених є можливість досліджувати найрізноманітніші режими в газі квазічастинок – від балістичного режиму до гідродинамічної межі. Це дозволило з'ясувати, що перехідні режими виявляються можливими. Наприклад, в підсистемі домішок реалізується гідродинамічний режим, а в газі фононів – кінетичний. Так, за наявності досить низьких температур в розчинах можлива ситуація, коли теплові збудження «вимерзають» та всі властивості розчину визначаються тільки домішками. В той час як у разі обмеженої геометрії можливі ситуації, в яких один вид квазічастинок знаходиться в гідродинамічному режимі, а інший переносить тепло від одної межі до іншої суто балістичним чином.

В експериментальних роботах [22 – 24] було також досліджено процеси тепло і масопереносу в квантових рідинах. В цих дослідженнях основна увага приділялась не параметрам які характеризують ці процеси, а часовій та просторовій еволюції термодинамічних величин – температурі, концентрації і гідродинамічній швидкості.

1.2. Використання кварцових камертонів

Для більш чіткого розуміння процесів, котрі відбуваються у надплинному гелії та його розчинах, наприклад властивостей розповсюдження звуку, у деяких експериментах використовуються кварцові камертони [36]. Передбачалося, що ці компоненти будуть використовуватися як складові для годинників, та згодом, завдяки своїм характеристикам [33, 35, 37], вони почали також відігравати значну роль у фізичних дослідженнях. Кварцовий камертон – це п'єзоелектричний механічний генератор з резонансними частотами найчастіше в діапазоні кілогерц. Зазвичай вони випускаються серійно і

призначені для використання в якості стандартів частоти в цифрових годинниках. У чистих ^{3}He, ^{4}He і в слабких розчинах ^{3}He – ^{4}He їх використовують в якості швидких і точних детекторів температури та тиску. Головною перевагою кварцових камертонів в порівнянні з термометрами опору є їх нечутливість до електромагнітних наведень. У звичайному стані вони майже готові для використання за низьких температур: потрібно лише тільки розкрити вакуумну металеву оболонку або повністю видалити її (Рис. 1.4).

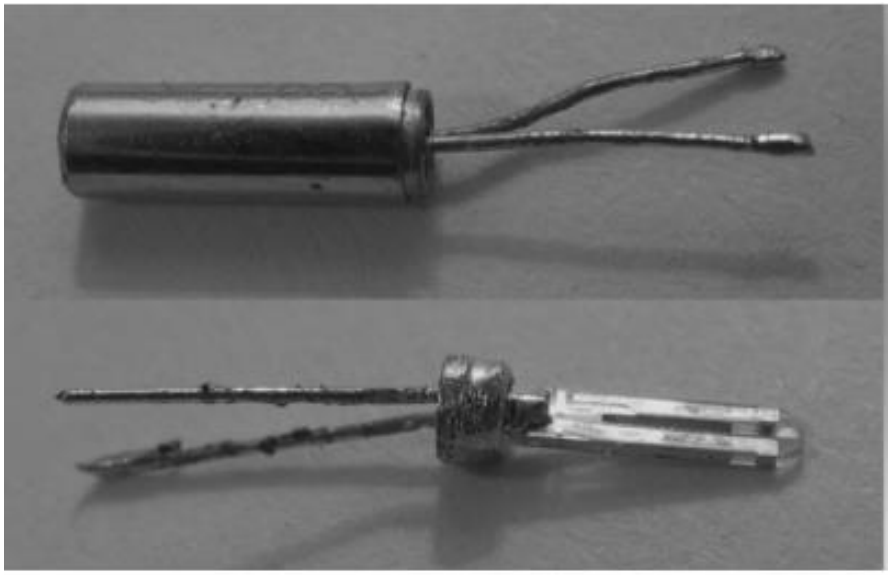


Рис. 1.4 Кварцовий камертон в металевій оболонці та без неї

В роботі [29] було досліджено акустичні резонанси у надплинному ^{4}He, нормальному та надплинному ^{4}He, в ізотопних сумішах гелію, та запропоновано використання явищ, пов’язаних з акустичним резонансом у рідкому гелії у якості еталону для вимірювання температури. Дослідження властивостей промислових кварцових генераторів камертоном типу з резонансною частотою ~ 32 кГц в режимі лінійного в'язкого гідродинамічного

відгуку в нормальних і надплинних ^{3}He і ^{4}He та порівняння отриманих результатів із гідродинамічної моделлю датчика відбулося у роботі[30].



Рис. 1.5. Приклад ескізу кварцового камертона

Через те, що камертони загалом мають досить складну геометричну форму, в деяких дослідженнях пропонуються моделі (Рис. 1.5), які можуть з певною точністю можуть допомогти описати фізичні особливості, що виникають під час експериментів [30, 31, 33, 34].

2 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЗОНАНСІВ

Одне з досліджень з приводу дисипації енергії описане у роботі [31], у якій за мету було експериментальне дослідження основних механізмів дисипації кварцового камертона, а саме явища які виникають під час його коливань у розчинах ізотопів He II різних концентрацій за різних температур. Основна частка уваги була спрямована на еволюцію дисипативних процесів з ростом концентрації розчинів і з'ясування фізичних механізмів спостережуваних ефектів. Внесок частини акустичної енергії, яка відбивається назад до камертону від стінок експериментальної камери і призводить до зменшення ширини резонансу, в розгляді цієї роботи не враховувався, через відносно невелику величину.

Експеримент, на якому ґрунтувалося наше теоретичне дослідження, описано в роботі [29], в якій спостерігалися залежності резонансів від температури та тиску, а також перекриття резонансів. Ці явища мають цілком очевидне пояснення, але досі не отримали кількісного пояснення.

Акустичні резонанси вивчалися у рідкому гелії та його ізотопних розчинах ^{3}He–^{4}He протягом трьох експериментів, у кожному із яких до комірки заповненою рідиною занурювалися кварцові камертони, основна резонансна частота котрих у вакуумі становить близько 32,768 Гц. Ці п’єзоелектричні камертони збуджувалися змінною напругою на електродах, що розташовані на кристалі кварцу.

Під час першого експерименту вивчалися резонанси першого звуку, які виникають у надкритичному стані ^{4}He при температурах близько 5 К та за умови, що тиск набуває значень більше ніж 0,2 МПа. Шукані резонансні явища можна було спостерігати за частоти приблизно у 30 кГц, яка є подібною до власної резонансної частоти камертонів, що використовувалися під час експерименту. Циліндрична оболонка, у якій камертони виготовляються, залишалася майже неушкодженою, знімався лише її верхня

частина. У цьому експерименті для вимірювань використовували камертони Fox Electronics NC38, у яких діаметр оболонки становить 3 мм.

Під час другого експерименту вивчалися резонансні явища, котрі виникають у нормальному та надплинному ^{4}He та його розчинах, а саме ті, що пов'язані з випромінюванням першого та другого звуку. Оскільки швидкість першого звуку досить велика, то у цьому випадку результат виявився помітним за частот близько 200 кГц, тоді як для другого, як і під час першого експерименту, близько 30 кГц.

Для експерименту використовувався скляна посудина Дьюара, у якій розташовувався камертон виробництва ECS 1x5x, діаметр оболонки якого 1,5 мм. Для зміни концентрації ^{3}He у розчині, на дні посудини розташовувався мідний капіляр, через який можливо було додавати домішку уникаючи зміни температури у колбі.

Що стосовно останнього експерименту, то в ньому відбувалося вивчення резонансів другого звуку у ізотопних розчинах гелію за дуже низьких температур. Для цього знову використовувався камертон Fox Electronics NC38, працюючий з частотою близько 30 кГц, який охолоджувався до температур, порядок яких становить мілікельвін.

Оскільки розміри камертонів вказані у міліметрах, а швидкості для акустичних мод становлять порядку 10 м/с (2-й звук) та 100 м/с (1-й звук), то очікувалося, що стоячі хвилі повинні з'являтися на значеннях частоти приблизно у 10 кГц и 100 кГц відповідно. Що і можна було спостерігати під час експериментів.

Через досить складну геометрію експериментальної установки, резонансний спектр можна визначити з певними припущеннями. Тобто властивості камертонів та їх акустичні моди не забезпечують точного кількісного визначення швидкості звуку. Тож як результат у роботі [29] наведено лише приблизні та якісні висновки.

Отже щодо першого експерименту, то у вимірюваннях із надкритичним гелієм на Рис. 2.1. можна побачити ілюстрацію динаміки акустичних мод, що пов’язані з кварцовим осцилятором.

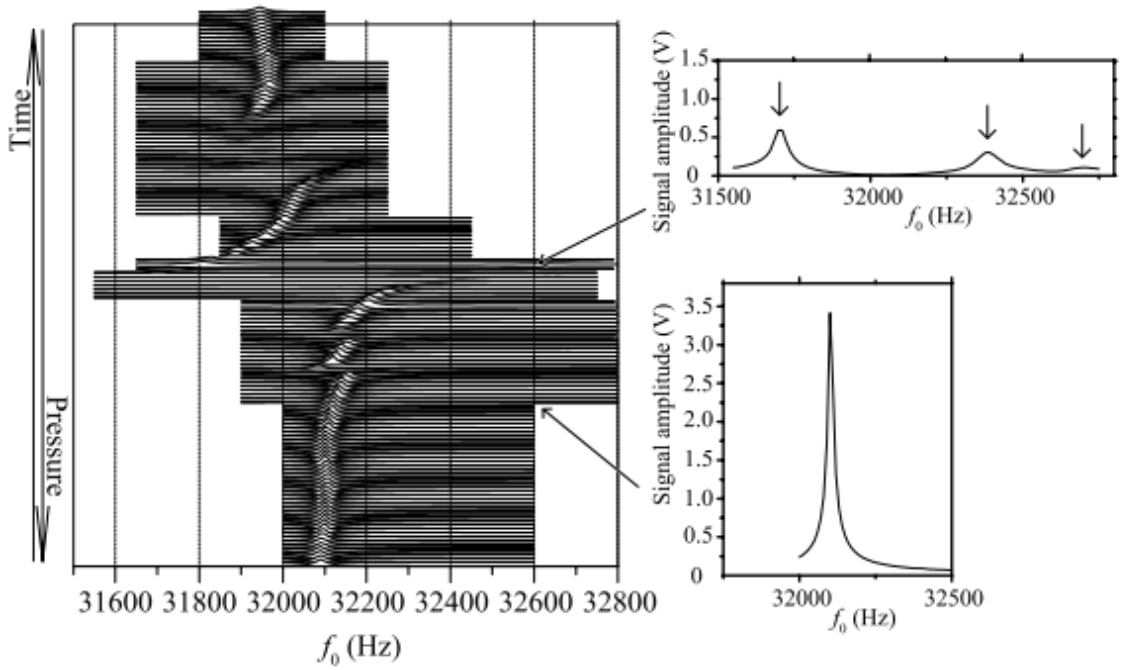


Рис. 2.1. Резонансні виміри поблизу критичної точки у ^{4}He

Із рисунку видно, що декілька акустичних мод рухалися зліва направо, відповідно до зростання швидкості звуку. Також зображено більш детально випадки, коли в об’ємі відсутні акустичні резонанси, та коли два таких резонанси певним чином пов’язані з кварцовим камертоном, який використовувався в експерименті. В незалежності від того, яким чином енергія розподілялася за резонансами, загальна площа під ними залишається постійною.

Приклади резонансів другого звуку зображено на Рис. 2.2. Резонанси спостерігалися при підвищенні температури від 1,35 К до 1,8 К. Задля більшої наочності у області з найбільшою інтенсивністю контури постійної амплітуди не зображаються, а просто позначені білим кольором. Суцільною лінією позначено частоти, які були отримані за допомогою точкового алгоритму.

Можна побачити, що основні дві особливості з’являються за температур біля 1,40 К і 1,45 К.

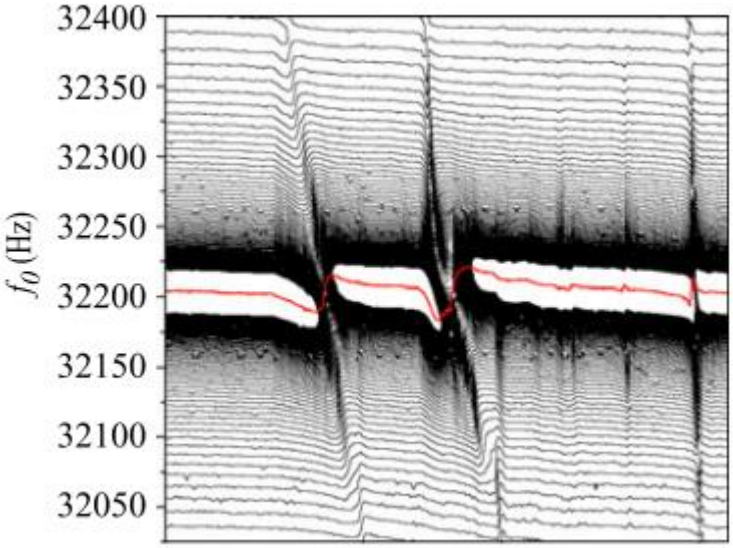


Рис. 2.2. Приклади резонансів другого звуку у 10% розчині ^{3}He–^{4}He

Резонанси першого звуку за температур від 1,4 до 4,2 К зображено на Рис. 2.3.

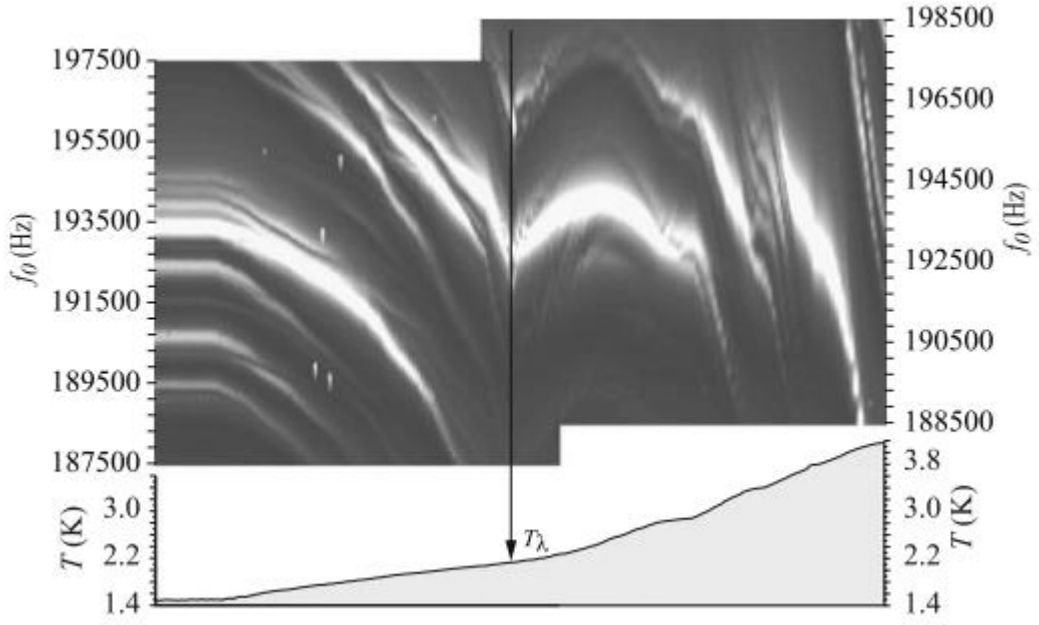


Рис. 2.3. Резонанси першого звуку у 10% розчині ^{3}He–^{4}He

Зовнішній вигляд отриманих резонансних траєкторій дуже схожий на температурну залежність швидкості першого звуку для ^{4}He (Рис. 2.4.).

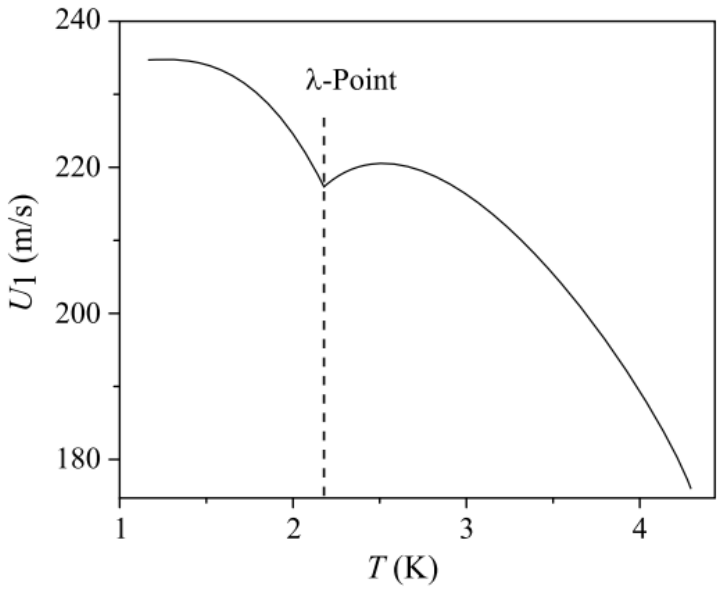


Рис. 2.4. Швидкість першого звуку у ^{4}He за низьких температур

В роботі [29] показано, що стоячі хвилі першого та другого звуків у гелії певним чином взаємодіють з кварцовими камертонами, що працюють за частот у 30 та 200 кГц відповідно. Але через складну форму посудини, у якій розташована рідина, точна геометрія цих режимів не визначена. Пропонується використання особливостей, які спостерігалися в експериментах, у якості еталону для виміру температури.

3 РЕЗОНАНСИ ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО ЗВУКУ

3.1. Початкова система рівнянь

Задля опису деяких явищ, котрі проявили себе під час експериментів із кварцовим камертоном що коливається у надплинних розчинах ^{3}He – ^{4}He різної концентрації, у цій роботі пропонується використання певної моделі, яка може з деякою точністю допомогти описати отримані результати.

Тож для того, щоб розглянути за яких умов можна спостерігати резонанси першого та другого звуків, розглянемо одновимірну модель обмеженої посудини, у якої з одного боку – нерухома стінка, а з протилежного – осцилююча. Завдяки такій моделі можна приділити основну увагу вивченню одночасного збурення колективних мод, залежності розподілу інтенсивностей між цими модами в залежності від температури та концентрації розчинів, але використання такої моделі не передбачає урахування особливостей специфічної форми кварцового камертона та циліндричної форми колби, у якій він знаходиться.

Розглянемо повну систему гідродинамічних рівнянь для розчинів ізотопів гелію у лінійному наближенні:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial P}{\partial x} = \nu_{eff}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} + S_0 \dfrac{\partial v_{\text{n}}}{\partial x} + \dfrac{1}{T_0}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(q - \dfrac{z_0}{\rho_0} g\right) = 0, \\ \dfrac{\partial v_{\text{s}}}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu - \dfrac{z}{\rho} c\right) = 0, \\ \rho_0 \dfrac{\partial c}{\partial t} + c_0 \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 c_0 \dfrac{\partial v_{\text{n}}}{\partial x} = -\rho_0 \dfrac{\partial g}{\partial x}, \end{cases} \tag{3.1}$$

де для малих відхилень від стану рівноваги: ρ – густина, P – тиск, S – ентропія, c – масова концентрація, μ – хімічний потенціал розчину, z – хімічний потенціал розчину, який зумовлений наявністю розчиненого ізотопу ^{3}He. Величини у стані рівноваги позначені індексом відповідно: ρ_0 – густина, S_0 – ентропія, c_0 – масова концентрація. Швидкості нормальної та надплинної компонент позначені як v_n, v_s, швидкість розчину $V = j / \rho_0$. Густина розчину представлена як сума нормальної та надплинної частини: $\rho = \rho_n + \rho_s$, відповідно густина потоку маси дорівнює $j = \rho_n v_n + \rho_s v_s$.

Потік тепла q має вигляд:

$$q = -T^2\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{z}{\rho_0 T} - \frac{k_T}{T_0}\frac{\partial}{\partial c}\frac{z}{\rho_0 T}\right)g - \kappa\frac{\partial T}{\partial x}$$

та потік домішок g:

$$g = -\rho_0 D\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T_0}\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

де D – це коефіцієнт дифузії, k_T – коефіцієнт термодифузії.

3.2. Резонанси звуку у надплинному та надкритичному гелії

Спочатку розглянемо задачу про збурення резонансів звуку у гелії, який знаходиться у надкритичному стані, близько 4 К, та збурення резонансів першого звуку у рідкому гелії за температури переходу до надплинного стану.

Для вирішення поставленої задачі в системі (3.1) обмежимося дослідженням коливань тиску, густини та швидкості, а збурення ентропії, температури та концентрації не враховуватимемо. Тоді залишається два рівняння, які описують зв’язок між тиском та густиною, коли ентропія та концентрація постійні.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c_1^{\,2}}\dfrac{\partial P}{\partial t}+\rho_0\dfrac{\partial V}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial P}{\partial x}=\nu_{eff}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \end{cases} \tag{3.2}$$

де

$$c_1=\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\sigma,c}}$$

– швидкість звуку у надкритичному гелії, або швидкість першого звуку у надплинному гелії.

Для дослідження якісних особливостей виникнення та перекриття резонансів розглянемо модельну систему вузької посудини з гелієм, у якої одна стінка є нерухомою, а замість іншої розташовано осцилятор із заданою масою, жорсткістю, власною частотою та добротністю. Така модель, що зображено на Рис. 3.1., не враховує геометричних особливостей коливань камертонів у замкнутій колбі, але може використовуватися для вивчення фізичних особливостей виникнення та взаємодії резонансів.

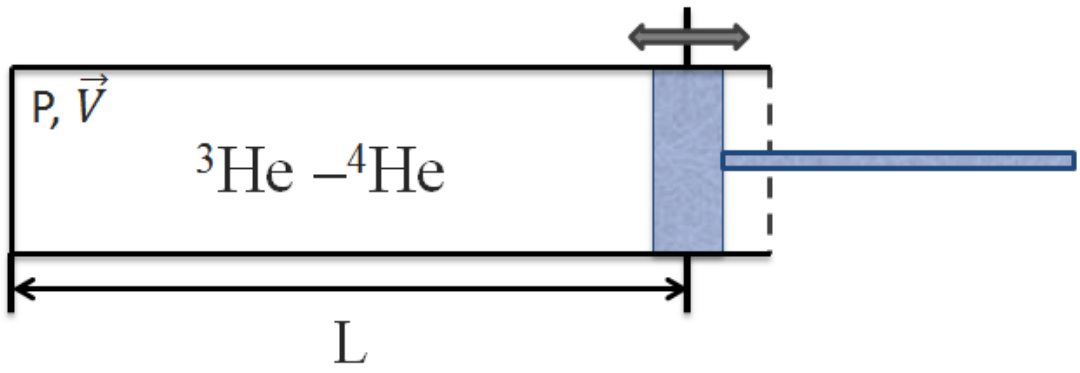


Рис. 3.1. Об’єднана система – рідкий гелій та осцилятор, який імітує камертон, що розташований у закритій колбі, заповненій гелієм

За припущення, що на цей осцилятор діє зовнішня періодична сила $F=F_0\exp(-i\omega_0 t)$ із заданою частотою ω_0 із системи (3.2) отримаємо вираз, який описує зв'язок між тиском та швидкістю.

Шукаємо розв'язок у вигляді $P = P_0 e^{-i\omega t}$, $V = V_0 e^{-i\omega t}$. Рівняння для тиску:

$$\frac{\partial P_0 e^{-i\omega t}}{\partial t} = -c_1^{\,2}\rho_0 \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$-i\omega P_0 e^{-i\omega t} = -c_1^{\,2}\rho_0 \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$P = -i\frac{\rho_0 c_1^{\,2}}{\omega}\frac{\partial V}{\partial x} \tag{3.3}$$

Рівняння для швидкості відповідно:

$$\frac{1}{c_1^{\,2}}(-i\omega)P + \rho_0 \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{-i\omega}{c_1^{\,2}}\frac{\partial P}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{c_1^{\,2}}{i\omega}$$

$$-i\omega V + \frac{1}{\rho_0}\rho_0 \frac{c_1^{\,2}}{i\omega}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \nu_{eff}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$\omega^2 V + c_1^{\,2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - i\omega\nu_{eff}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

$$\omega^2 V + u_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{u_1^2}V = 0 \tag{3.4}$$

де

$$u_1^2 = c_1{}^2 - i\omega\nu_{eff} \tag{3.5}$$

Розв'язок рівняння (3.4) в точці $x = 0$ з урахуванням нерухомості лівої стінки шукаємо у вигляді:

$$V = V_0 \sin\left(\frac{\omega x}{u_1}\right) \tag{3.6}$$

Із виразу (3.6) у рівнянні (3.3) знаходимо тиск:

$$P = -i\frac{\rho_0 s^2}{u_1} V_0 \cos(\omega x / u_1) \tag{3.7}$$

Вважаючи, що права стінка посудини представляє собою осцилятор, на який впливає зовнішня сила та тиск із боку гелію, розглянемо рівняння, яке визначає зміщення цієї стінки відносно стану рівноваги:

$$M\ddot{x} = -k(x-L) - \tilde{\gamma}\dot{x}\frac{\omega_0}{\omega_0} + AP_0(x=L)e^{-i\omega t} + F_0 e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2(x-L) - \gamma\omega_0\dot{x} + \frac{A}{M}P_0(x=L)e^{-i\omega t} + \frac{F_0}{M}e^{-i\omega t} \tag{3.8}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M},\ \gamma = \frac{\tilde{\gamma}}{M\omega_0}$$

де ω і F_0 – частота і амплітуда зовнішньої сили, ω_0 – власна частота осцилятора, k, M і γ – відповідно жорсткість, маса та коефіцієнт згасання осцилятора, а L і A – довжина та площа поперечного перерізу посудини. Зауважимо, що тиск із боку гелію обчислюється в точці розташування осцилятора $x = L$.

Для даної частоти коливань зовнішнього поля із (3.8) отримуємо рівняння для величини зміщення осцилятора відносно його стану рівноваги $\varsigma = \varsigma_0 e^{-i\omega t}$,

$x = L + \varsigma$:

$$-\omega^2\varsigma = -\omega_0^2\varsigma + i\omega\omega_0\gamma\varsigma + \alpha P(L+\varsigma) + a_0 \tag{3.9}$$

де $a_0 = F_0/M$, а α – це коефіцієнт, який описує взаємодію коливань осцилятора та звукових коливань у гелії. Зауважимо, що рівняння (3.9) записано у лінійному наближенні за змінними ς та P.

Враховуючи граничні умови для швидкості гелію біля правої стінки:

$$V(x=L) = \dot{\varsigma} = -i\omega\varsigma$$

Із (3.7) отримуємо розв'язок для швидкості гелію біля осцилятора, який є правою стінкою:

$$-\omega^2\frac{V}{-i\omega}(L) = -\omega_0^2\frac{V(L)}{-i\omega} + i\omega\omega_0\gamma\frac{V(L)}{-i\omega} + \alpha P(L) + a_0$$

$$-\omega^2 V(L) = -\omega_0^2 V(L) + i\omega\omega_0\gamma V(L) - i\omega\alpha P(L) - i\omega a_0$$

$$\omega^2 V(L) - \omega_0^2 V(L) + i\omega\omega_0\gamma V(L) = i\omega\alpha P(L) + i\omega a_0$$

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0\gamma\right)V(L) = i\omega\alpha P(L) + i\omega a_0 \tag{3.10}$$

Використовуючи розв'язки для швидкості та тиску (3.6, 3.7) із (3.10) отримуємо розв'язок для амплітуди коливань швидкості всередині гелію:

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0\gamma\right)V_0\sin\left(\frac{\omega L}{u_1}\right) = i\omega\alpha(-i)\frac{\rho_0 s^2}{u_1}V_0\cos\left(\frac{\omega L}{u_1}\right) + i\omega a_0$$

$$\left[\left(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0\gamma\right)\sin\left(\frac{\omega L}{u_1}\right) - \omega\alpha\frac{\rho_0 s^2}{u_1}\cos\left(\frac{\omega L}{u_1}\right)\right]V_0 = i\omega a_0$$

$$\left[\left(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0\gamma\right)\sin\left(\frac{\omega L}{u_1}\right) - \lambda\omega\omega_0\cos\left(\frac{\omega L}{u_1}\right)\right]V_0 = i\omega a_0$$

Тут введемо позначення для безрозмірного коефіцієнту «взаємодії» мод:

$$\lambda = \alpha \frac{\rho_0 s^2}{\omega_0 u_1}$$

Тоді вираз набуває вигляду:

$$V_0 = \frac{i\omega a_0}{\left(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0\gamma\right)\sin\left(\frac{\omega L}{u_1}\right) - \lambda\omega\omega_0 \cos\left(\frac{\omega L}{u_1}\right)}$$

Отримане співвідношення одночасно містить резонанси осцилятора та резонанси звукових коливань для закритої з одного боку труби.

Розглянемо наближений вигляд:

$$\sin\left(\frac{\omega L}{u_1}\right) = \sin\left(\frac{\omega L}{\sqrt{s^2 - i\omega\nu_{eff}}}\right) = \sin\left(\frac{\omega L / s}{\sqrt{1 - \frac{i\omega\nu_{eff}}{s^2}}}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\omega L / s}{\sqrt{1 - \frac{i\omega\nu_{eff}}{s^2}}}\right) \approx \sin\left(\frac{\omega L}{s}\left[1 + \frac{i\omega\nu_{eff}}{2s^2}\right]\right) = \sin(x + iy)$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \approx \sin x + iy$$

де введемо позначення:

$$y = \frac{\omega L}{s}\frac{\omega\nu_{eff}}{2s^2},\ x = \frac{\omega L}{s}$$

$$V_0 = \frac{i\omega a_0}{\left(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0\gamma\right)\left(\sin\left(\frac{\omega L}{s}\right) + iy\right) - \lambda\omega\omega_0}$$

$$V_0 = \frac{i\omega a_0}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\sin\left(\frac{\omega L}{s}\right) - \lambda\omega\omega_0 + i\omega\omega_0\gamma\sin\left(\frac{\omega L}{s}\right) + iy\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}$$

Тоді розв'язок набуває вигляду:

$$|V_0|^2 = \frac{\omega^2 |a_0|^2}{\left(\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\sin\left(\frac{\omega L}{s}\right) - \lambda\omega\omega_0\right)^2 + \left(\omega\omega_0\gamma\sin\left(\frac{\omega L}{s}\right) + y\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\right)^2}$$

Із властивостей синусів отримуємо:

$$\omega L / s = \pi n$$

$$\frac{\omega L}{s} = \pi n + \varepsilon = \frac{(\omega_n + \delta)L}{s} = \frac{\omega_n L}{s} + \frac{\delta L}{s} = \pi n + \frac{\delta L}{s}$$

$$\frac{\omega_n L}{s} = \pi n, \quad \omega_n = \frac{\pi n s}{L}, \quad \omega_1 = \frac{\pi s}{L}, \quad \frac{L}{s} = \frac{\pi}{\omega_1}$$

$$\sin\left(\frac{\omega L}{s}\right) = \sin\left(\pi n + \frac{\delta L}{s}\right) = \sin(\pi n)\cos\left(\frac{\delta L}{s}\right) + \cos(\pi n)\sin\left(\frac{\delta L}{s}\right) =$$
$$= (-1)^n \sin\left(\frac{\delta L}{s}\right) \approx (-1)^n \frac{\delta L}{s} \approx -\frac{\omega L}{s} + \pi = -\frac{L}{s}\left(\omega - \frac{\pi s}{L}\right) =$$
$$= -\frac{L}{s}(\omega - \omega_1) = \frac{\pi L}{\pi s}(\omega_1 - \omega) = \pi\frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1}$$

Остаточно наближений вираз для амплітуди коливань швидкості всередині гелію набуває вигляду:

$$|V_0|^2 = \frac{\omega^2 |a_0|^2}{\left(\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\pi\frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1} - \lambda\omega\omega_0\right)^2 + \left(\omega\omega_0\gamma\pi\frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1} + y\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\right)^2}$$

$$|V_0|^2 = \frac{\omega^2 \omega_1^2 |a_0|^2 / \pi^2}{\left((\omega^2 - \omega_0^2)(\omega_1 - \omega) - \tilde{\lambda}\omega\omega_0\omega_1\right)^2 + \left(\omega\omega_0\gamma(\omega_1 - \omega) + \tilde{y}(\omega^2 - \omega_0^2)\omega_1\right)^2}$$

Таким чином, відповідний графік для амплітуди коливань швидкості у надкритичному гелії відображено на Рис. 3.2. в залежності від різних частот:

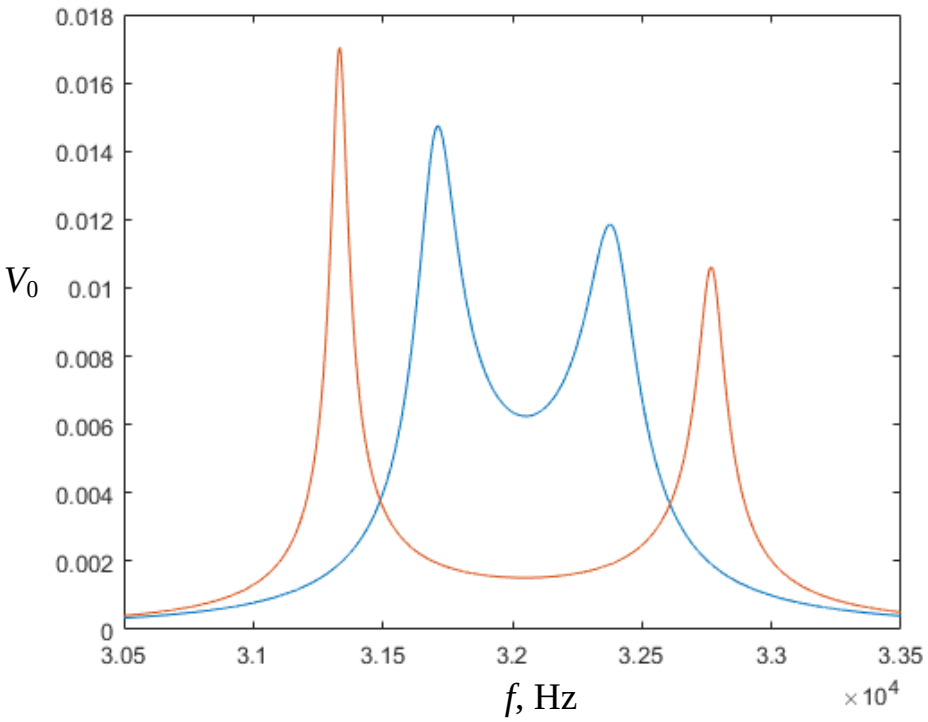


Рис. 3.2. Резонансні криві звуку у надкритичному гелії. Блакитною лінією позначено результат з урахуванням коефіцієнту «перекриття» резонансів, а помаранчевою – значення цього коефіцієнту дорівнює нулю

Для випадку випромінювання першого звуку у надплинному гелії відповідні значення зображені на Рис. 3.3.:

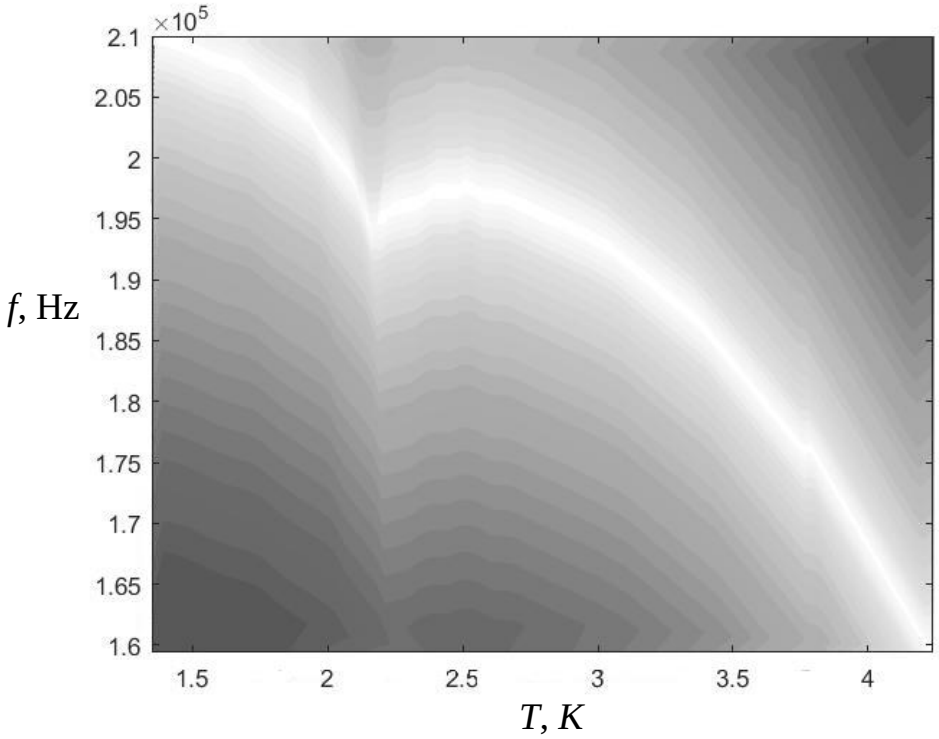


Рис. 3.3. Резонанси першого звуку у надплинному гелії в залежності від температури. Наявність резонансних частот позначено світлим кольором

3.2. Випромінювання другого звуку

Другим етапом вирішення поставленої задачі буде дослідження умов появи резонансів другого звуку у надплинному гелії. Розглянемо другий звук у He II за умови відсутності домішок. Тоді із початкової системи рівнянь (3.1) отримуємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \nu_{eff} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} + S_0 \dfrac{\partial v_n}{\partial x} = \dfrac{\kappa}{T_0} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial v_s}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} \mu_4 = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

де κ – коефіцієнт теплопровідності, μ_4 – хімічний потенціал ізотопу ^{4}He.

Запишемо перше рівняння системи (3.10) у вигляді

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_\sigma \frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma}\right)_P \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{3.12}$$

Враховуючи співвідношення для густини потоку маси $j = \rho_n v_n + \rho_s v_s = \rho_0 V$, запишемо швидкості надплинної та нормальної компонент надплинного гелію як:

$$v_s = V - \frac{\rho_n}{\rho_0} w, \qquad v_n = V + \frac{\rho_s}{\rho_0} w \tag{3.13}$$

де відносна швидкість $w = v_n - v_s$.

Із співвідношення Гіббза – Дюгема

$$d\mu_4 = \frac{1}{\rho_0} dP - \sigma dT = \frac{1}{\rho_0} dP - \sigma_0 \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_\sigma dP - \sigma_0 \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right)_P d\sigma$$

та з урахуванням співвідношення для швидкості надплинної компоненти (3.13) для останнього рівняння системи (3.11) отримуємо:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(V - \frac{\rho_n}{\rho_0} w\right) = -\frac{\partial}{\partial x} \mu_4 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} P + \sigma \frac{\partial}{\partial x} T$$

де

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla P = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S \nabla \rho$$

$$-\frac{1}{\rho_0}\nabla P - \frac{\rho_n}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial t} w = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x} P + \sigma_0 \frac{\partial}{\partial x} T$$

$$-\frac{\rho_n}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t} w = \sigma_0 \frac{\partial}{\partial x} T = \sigma_0 \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_\sigma \frac{\partial}{\partial x} P + \sigma_0 \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right)_P \frac{\partial}{\partial x} \sigma \qquad (3.14)$$

Розглянемо рівняння переносу тепла із системи (3.11). Враховуючи співвідношення (3.13) та зв'язок $S = \rho\sigma$, маємо:

$$\frac{\partial \rho\sigma}{\partial t} + S_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(V + \frac{\rho_s}{\rho_0} w\right) + \frac{1}{T_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\kappa \frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0\sigma_0 \frac{\partial}{\partial x} V + \rho_0\sigma_0 \frac{\rho_s}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x} w = \frac{1}{T_0}\frac{\partial}{\partial x}\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$$

Зауважимо, що питома теплоємність при постійному тиску C_P:

$$C_P = \rho_0 T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_P \qquad (3.15)$$

Тоді останній вираз набуває вигляду:

$$\rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0\sigma_0 \frac{\rho_s}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x} w + \rho_0\sigma_0 \frac{\partial}{\partial x} V = \frac{\rho_0 \kappa}{C_P}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma$$

$$\rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho_0\sigma_0 \frac{\rho_s}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x} w + \sigma_0\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} V\right) = \frac{\rho_0 \kappa}{C_P}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma$$

Згідно з першим рівнянням системи (3.11) вираз у дужках дорівнює нулю, тоді:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma_0 \frac{\rho_s}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} w = \chi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma \tag{3.16}$$

де $\chi = \kappa / C_P$.

Виключимо із рівнянь (3.14) та (3.16) відносну швидкість w. Вираз (3.14) представимо як:

$$-\frac{\rho_n}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} w = \sigma_0 \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_\sigma \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} P + \sigma_0 \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_P \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \sigma \tag{3.17}$$

З рівняння (3.16) знайдемо похідну відносної швидкості за координатою:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \left(\chi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \cdot \frac{\rho_0}{\sigma_0 \rho_s} \tag{3.18}$$

Підставляючи знайдене значення (3.18) у (3.17), отримуємо:

$$-\frac{\rho_n}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\sigma_0 \rho_s} \frac{\partial}{\partial t} \left[\chi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right] = \sigma_0 \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_\sigma \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} P + \sigma_0 \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_P \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \sigma$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[-\chi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right] = \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma_0^2 \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_\sigma \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma_0^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_P \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \sigma$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sigma - \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma_0^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_P \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma = \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma_0^2 \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_\sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} P + \chi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} \sigma$$

Згідно з (3.15):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sigma - \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho_0 T \sigma_0^2}{C_P} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma = \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma_0^2 \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_\sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} P + \chi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} \sigma$$

Зауважимо, що

$$c_{2\varepsilon}^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma_0^2 \frac{\rho_0 T}{C_P}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{\sigma} = \frac{(T,\sigma)}{(P,\sigma)} = \frac{(T,\sigma)}{(\rho,\sigma)}\frac{(\rho,\sigma)}{(P,\sigma)} = \frac{T}{\rho_0}\frac{1}{c_1^2\beta} \tag{3.19}$$

$$c_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\sigma}} \tag{3.20}$$

Тоді отримуємо

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sigma - c_{2\varepsilon}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma = \frac{\rho_s}{\rho_n}\sigma_0^2\frac{T}{\rho_0}\frac{1}{c_1^2\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P + \chi\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\sigma$$

де β – коефіцієнт теплового розширення.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sigma - c_{2\varepsilon}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma = \frac{\rho_s}{\rho_n}\sigma_0^2\frac{T}{\rho_0}\frac{1}{c_1^2\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P + \chi\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\sigma$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sigma - c_{2\varepsilon}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma = \frac{c_{2\varepsilon}^2}{c_1^2}\frac{C_P}{\rho_0^2\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P + \chi\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\sigma \tag{3.21}$$

Відокремимо швидкість V. Для цього розглянемо вираз (3.12) та друге рівняння системи (3.11) і з урахуванням (3.20) складемо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c_1^2}\dfrac{\partial P}{\partial t} + \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial \sigma}\right)_P\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho_0\dfrac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \rho_0\dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\partial P}{\partial x} = \rho_0\nu_{eff}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \end{cases} \tag{3.22}$$

Із першого рівняння системи (3.22):

$$\rho_0\frac{\partial V}{\partial x} = -\left(\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma}\right)_P\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)$$

Тоді отримуємо:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial P}{\partial t}+\left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma}\right)_P\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right]+\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=\rho_0 \nu_{eff}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}$$

$$\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}+\left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma}\right)_P\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=-\rho_0 \nu_{eff}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-c_1^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=-\rho_0 c_1^2 \nu_{eff}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}-c_1^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma}\right)_P\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}$$

$$c_1^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma}\right)_P=c_1^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right)_P=c_1^2\beta\frac{\rho_0}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right)_P=c_1^2\beta\frac{\rho_0^2}{C_P}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-c_1^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=-\rho_0 c_1^2 \nu_{eff}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}-c_1^2\beta\frac{\rho_0^2}{C_P}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}$$

Беручи до уваги вирази (3.12) і (3.20), маємо:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{1}{\rho_0 c_1^2}\frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-c_1^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=-\rho_0 c_1^2\beta\frac{\rho_0^2}{C_P}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}+\nu_{eff}\frac{\partial^2}{\partial x^3}\frac{\partial P}{\partial t} \qquad (3.23)$$

Для спрощення подальших розрахунків перейдемо до безрозмірних величин $P \to P / (\rho_0\, c_1{}^2)$ і $\sigma \to \sigma / (C_P \rho_0)$. З урахуванням (3.5):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2}-u_1^2\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}=-\beta\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}\\ \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}-u_2^2\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}=\dfrac{c_{2\varepsilon}^2}{\beta}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}\end{cases} \qquad (3.24)$$

Шукаємо розв’язок у вигляді $P = P_0 \cos(kx - \omega t)$. Відповідно отримуємо:

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - u_1^2 k^2\right) P = -\omega^2 \beta \sigma \\ P = \dfrac{\left(\omega^2 - u_2^2 k^2\right) \sigma \beta}{c_{2\varepsilon}^2 k^2} \end{cases}$$

$$\left(\omega^2 - u_1^2 k^2\right)\left(\omega^2 - u_2^2 k^2\right) = -\omega^2 c_{2\varepsilon}^2 k^2 \qquad (3.25)$$

Вирішуючи отримане біквадратне рівняння (3.25), отримуємо для першого звуку:

$$\left(s_1^2 - u_1^2\right)\left(u_1^2 - u_2^2\right) = -u_1^2 c_{2\varepsilon}^2$$

$$s_1^2 = u_1^2 - \frac{c_1^2}{c_1^2 - c_{2\varepsilon}^2} c_{2\varepsilon}^2$$

Відповідно для другого звуку:

$$\left(s_2^2 - u_1^2\right)\left(s_2^2 - u_2^2\right) = -s_2^2 c_{2\varepsilon}^2$$

$$s_2^2 = u_2^2 + \frac{c_{2\varepsilon}^2}{c_1^2 - c_{2\varepsilon}^2} c_{2\varepsilon}^2$$

Наступним етапом буде дослідження коливань тиску біля правої стінки. Із системи (3.24) маємо рівняння для тиску *P*:

$$-\omega^2\left(-\omega^2 P - u_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P\right) - u_2^2\left(-\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P - u_1^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} P\right) = \frac{c_{2\varepsilon}^2}{\beta} \omega^2 \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} P$$

У другому рівнянні системи (3.11) нехтуємо поглинанням, вважаючи відносно малим:

$$-i\omega V + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = i\omega\rho_0 V \tag{3.26}$$

Тоді отримуємо рівняння відносно швидкості *V*:

$$-\omega^2\left(-\omega^2\frac{\partial}{\partial x}V - u_1^2\frac{\partial^3}{\partial x^3}V\right) - u_2^2\left(-\omega^2\frac{\partial^3}{\partial x^3}V - u_1^2\frac{\partial^5}{\partial x^5}V\right) = \frac{c_{2\varepsilon}^2}{\beta}\omega^2\beta\frac{\partial^3}{\partial x^3}V \tag{3.27}$$

Розв'язок рівняння (3.27) за умови нерухомості лівої стінки у точці $x = 0$ шукатимемо у вигляді

$$V = V_1\sin(k_1 x) + V_2\sin(k_2 x) + V_{12}\left(\cos(k_1 x) - \cos(k_2 x)\right) \tag{3.28}$$

З виразу (3.28) у рівнянні (3.26) знаходимо тиск:

$$\frac{\partial}{\partial x}P = i\omega\rho_0 V = i\omega\rho_0\left[V_1\sin(k_1 x) + V_2\sin(k_2 x) + V_{12}\left(\cos(k_1 x) - \cos(k_2 x)\right)\right]$$

$$P = i\omega\rho_0\left[-\frac{V_1}{k_1}\cos(k_1 x) - \frac{V_2}{k_2}\cos(k_2 x) + V_{12}\left(\frac{1}{k_1}\sin(k_1 x) - \frac{1}{k_2}\sin(k_2 x)\right)\right] \tag{3.29}$$

З системи (3.24) маємо вираз для безрозмірної ентропії:

$$\sigma = -\frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{u_1^2 k^2}{\omega^2}\right)P \tag{3.30}$$

Відповідно з урахуванням отриманого виразу для тиску (3.29) у рівнянні (3.30) маємо:

$$\sigma = -\frac{i\omega\rho_0}{\beta}\left[-\frac{V_1}{k_1}\left(1 - \frac{u_1^2 k_1^{\,2}}{\omega^2}\right)\cos(k_1 x) - \frac{V_2}{k_2}\left(1 - \frac{u_1^2 k_2^{\,2}}{\omega^2}\right)\cos(k_2 x) + \right.$$
$$\left. + V_{12}\left(\frac{1}{k_1}\left(1 - \frac{u_1^2 k_1^{\,2}}{\omega^2}\right)\sin(k_1 x) - \frac{1}{k_2}\left(1 - \frac{u_1^2 k_2^{\,2}}{\omega^2}\right)\sin(k_2 x)\right)\right]$$

$$\sigma = -\frac{i\omega\rho_0}{\beta}\left[\left(1-\frac{u_1^2 {k_1}^2}{\omega^2}\right)\left\{-\frac{V_1}{k_1}\cos(k_1 x)+\frac{V_{12}}{k_1}\sin(k_1 x)\right\}+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{u_1^2 {k_2}^2}{\omega^2}\right)\left\{-\frac{V_2}{k_2}\cos(k_2 x)-\frac{V_{12}}{k_2}\sin(k_2 x)\right\}\right]$$

$$\sigma = -\frac{i\omega\rho_0}{\beta}\left[\left(1-\frac{u_1^2}{s_1^2}\right)\left\{-\frac{V_1}{k_1}\cos(k_1 x)+\frac{V_{12}}{k_1}\sin(k_1 x)\right\}+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{u_1^2}{s_2^2}\right)\left\{-\frac{V_2}{k_2}\cos(k_2 x)-\frac{V_{12}}{k_2}\sin(k_2 x)\right\}\right] \qquad (3.31)$$

Відповідно до граничних умов для відносної швидкості $w = v_n - v_s = 0$ на обох стінках, тобто у точках $x = 0$ та $x = L$:

$$w = w_1\cos(k_1 x) + w_2\sin(k_1 x) + w_3\cos(k_2 x) + w_4\sin(k_2 x)$$

$$w_1 + w_3 = 0$$

$$w_1\cos(k_1 L) + w_2\sin(k_1 L) - w_1\cos(k_2 L) + w_4\sin(k_2 L) = 0$$

Тоді із рівняння (3.14) та виразу (3.26):

$$-\frac{\rho_n}{\rho_0}(-i\omega)w = \sigma_0\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_\sigma (i\omega)\rho_0 V + \sigma_0\left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right)_P \frac{\partial}{\partial x}\sigma$$

Враховуючи (3.19) та співвідношення

$$\sigma\left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right)_P = \sigma_0\frac{\rho_0 T}{C_P} = \frac{ST}{C_P}$$

маємо:

$$\frac{\rho_n}{\rho_0}(i\omega)w = \sigma_0 T\frac{1}{c_1^2\beta}(i\omega)V + \sigma_0\frac{\rho_0 T}{C_P}\frac{\partial}{\partial x}\sigma = \sigma_0 T\frac{i\omega}{c_1^2\beta}\left[V + \frac{\rho_0 c_1^2\beta}{i\omega C_P}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right]$$

Тоді для відносної швидкості отримуємо вираз:

$$w = \frac{\rho_0}{\rho_n}\frac{\sigma_0 T}{c_1^2 \beta}\left[V + \frac{\rho_0 c_1^2 \beta}{i\omega C_P}\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right]$$

Відповідно до (3.31) значення похідної ентропії за координатою має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{i\omega}\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\rho_0\left[\left(1-\frac{u_1^2}{s_1^2}\right)\left\{V_1 \sin(k_1 x) + V_{12}\cos(k_1 x)\right\} + \right.\\ \left. + \left(1-\frac{u_1^2}{s_2^2}\right)\left\{V_2 \sin(k_2 x) - V_{12}\cos(k_2 x)\right\}\right]\end{aligned} \tag{3.32}$$

Таким чином, відповідно до граничних умов біля лівої стінки $w = 0$, $x = 0$:

$$0 = \left(1-\frac{u_1^2}{s_1^2}\right)V_{12}\cos(k_1 x) - \left(1-\frac{u_1^2}{s_2^2}\right)V_{12}\cos(k_2 x)$$

Звідки $V_{12} = 0$. Тоді швидкість (3.28) та вираз (3.32) відповідно:

$$V = V_1 \sin(k_1 x) + V_2 \sin(k_2 x)$$

$$\frac{\beta}{i\omega}\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\rho_0\left[\left(1-\frac{u_1^2}{s_1^2}\right)V_1 \sin(k_1 x) + \left(1-\frac{u_1^2}{s_2^2}\right)V_2 \sin(k_2 x)\right]$$

Подібним чином отримуємо вираз з урахуванням граничних умов біля правої стінки $w = 0$, $x = L$:

$$0 = V_1 \sin(k_1 L) + V_2 \sin(k_2 L) + \frac{\rho_0 c_1^2}{C_P}\left\{(-\rho_0)\left[\left(1-\frac{u_1^2}{s_1^2}\right)V_1 \sin(k_1 L) + \left(1-\frac{u_1^2}{s_2^2}\right)V_2 \sin(k_2 L)\right]\right\}$$

Повертаючи розмірність параметрів P та σ отримуємо:

$$0 = V_1 \sin(k_1 L) + V_2 \sin(k_2 L) + \frac{C_P}{\rho_0^2 c_1^2}\frac{\rho_0 c_1^2}{C_P}\left\{(-\rho_0)\left[\left(1-\frac{u_1^2}{s_1^2}\right)V_1 \sin(k_1 L) + \left(1-\frac{u_1^2}{s_2^2}\right)V_2 \sin(k_2 L)\right]\right\}$$

$$0 = V_1 \sin(k_1 L) + V_2 \sin(k_2 L) - \left[\left(1 - \frac{u_1^2}{s_1^2} \right) V_1 \sin(k_1 L) + \left(1 - \frac{u_1^2}{s_2^2} \right) V_2 \sin(k_2 L) \right]$$

$$0 = \frac{u_1^2}{s_1^2} V_1 \sin(k_1 L) + \frac{u_1^2}{s_2^2} V_2 \sin(k_2 L)$$

Звідки знаходимо значення коефіцієнта V_2:

$$V_2 = -\frac{s_2^2}{s_1^2} V_1 \frac{\sin(k_1 L)}{\sin(k_2 L)} = -\frac{s_2^2}{s_1^2} V_1 \frac{\sin(\omega L / s_1)}{\sin(\omega L / s_2)}$$

Тоді швидкість (3.28) набуває вигляду:

$$V = V_1 \left(\sin(\omega x / s_1) - \frac{s_2^2}{s_1^2} \frac{\sin(\omega L / s_1)}{\sin(\omega L / s_2)} \sin(\omega x / s_2) \right) \qquad (3.33)$$

Знаючи швидкість, ми можемо знайти значення тиску P із (3.26):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = i \omega \rho_0 V_1 \left(\sin(\omega x / s_1) - \frac{s_2^2}{s_1^2} \frac{\sin(\omega L / s_1)}{\sin(\omega L / s_2)} \sin(\omega x / s_2) \right)$$

$$P = i \omega \rho_0 V_1 \left(-\frac{s_1}{\omega} \cos(\omega x / s_1) - \frac{s_2^2}{s_1^2} \frac{\sin(\omega L / s_1)}{\sin(\omega L / s_2)} \left(-\frac{s_2}{\omega} \right) \cos(\omega x / s_2) \right)$$

$$P = -i \rho_0 V_1 \left(s_1 \cos(\omega x / s_1) - s_2 \frac{s_2^2}{s_1^2} \frac{\sin(\omega L / s_1)}{\sin(\omega L / s_2)} \cos(\omega x / s_2) \right)$$

Біля правої стінки у точці $x = L$ вираз (3.33) має вигляд:

$$V(L) = V_1 \left(\sin(\omega L / s_1) - \frac{s_2^2}{s_1^2} \frac{\sin(\omega L / s_1)}{\sin(\omega L / s_2)} \sin(\omega L / s_2) \right) = V_1 \left(1 - \frac{s_2^2}{s_1^2} \right) \sin(\omega L / s_1)$$

Відповідно тиск:

$$P(L) = -i \rho_0 V_1 \left(s_1 \cos(\omega L / s_1) - s_2 \frac{s_2^2}{s_1^2} \frac{\sin(\omega L / s_1)}{\sin(\omega L / s_2)} \cos(\omega L / s_2) \right)$$

$$P(L) = -i\rho_0 V_1 s_1 \cos(\omega L / s_1)\left[1 - \frac{s_2^3}{s_1^3}\frac{tg(\omega L / s_1)}{tg(\omega L / s_2)}\right]$$

Подібно до результату першої частини поставленої задачі, відповідно до (3.10) отримуємо вираз для амплітуди коливань швидкості всередині гелію в області температур надплинного переходу:

$$V_1 = \frac{i\omega a_0}{\left(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0\gamma\right)\left(1 - \frac{s_2^2}{s_1^2}\right)\sin(\omega L / s_1) - \lambda\omega\omega_0 \cos(\omega L / s_1)\left[1 - \frac{s_2^3}{s_1^3}\frac{tg(\omega L / s_1)}{tg(\omega L / s_2)}\right]}$$

Таким чином, розглянуто за яких умов можна спостерігати резонанси звуку у надкритичному гелії та резонанси першого та другого звуків у He II. В отриманих виразах на зміщення появи резонансу впливає коефіцієнт перекриття мод λ. Коефіцієнти згасання та в’язкості впливають на ширину отриманих піків.

ВИСНОВКИ

В роботі було проведено теоретичне дослідження щодо дисипації енергії тіла, яке коливається у надкритичному та надплинному гелії та його розчинах. Протягом роботи розглянуто фізичні засади, які зумовлюють появу та перекриття резонансів, що спричинені коливаннями кварцових камертонів а також гідродинамічними модами у гелії.

Розроблено модель, яка може пояснити фізичні властивості резонансних явищ, що спостерігаються експериментально.

Отримано прості аналітичні формули для резонансних кривих, які зумовлені першим звуком в надплинному гелії, та другим звуком в надплинних розчинах ізотопів гелію та побудовано відповідні графіки.

Порівняння з експериментом виявило, що отримані результати з певною точністю співпадають з експериментально отриманими даними.

Запропоновано методику розрахунку параметрів резонансних кривих, яка дозволяє розробити алгоритми для подальшого дослідження різних типів взаємодії камертонів з гелієм.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Халатников И.М. Теория сверхтекучести / И. М. Халатников // – М. Наука, 1970. – 160 с.

2. Ландау Л. Д. Теория сверхтекучести гелия II / Л. Д. Ландау // Журн. эксперимен. и теорет. физики – 1941. – Т.11, № 5. – С. 592 – 614.

3. Пешков В. П. Второй звук в гелии II / В. П. Пешков // Докл. АН СССР. – 1944. – № 45. – С. 385 – 389

4. Peshkov V. P. Report of the Cambridge low temperature conference / V.P. Peshkov // London, – 1947. – P. 19.

5. Atkins K.R. The attenuation of second sound in liquid helium II above 1 K / K.R. Atkins, K.H. Hart // Canad. J. Phys. – 1954. – V.32. – P.381 – 382.

6. Hanson W.B. Second sound attenuation in liquid helium II / W.B. Hanson, J.R. Pellam // Phys.Rev. – 1954. – V. 95, N 2. – P. 321 – 327.

7. Fairbank H.A. Second sound in ^{3}He – ^{4}He mixtures / H.A. Fairbank // Nuovo Cim. Suppl. – 1958. – V.9.P.325 – 333.

8. Voogt W.S.D de, Kramers H.C. Experimetnal results on the velocity and absorption of second sound in dilute ^{3}He-^{4}He / W.S.D Voogt, H.C. Kramers // Physica B. – 1976. – V. 84. – P.328 – 333.

9. Brubaker N.R. The velocity of second sound in dilute ^{3}He-^{4}He solutions below 0.6 K / N.R. Brubaker, D.O. Edwards, R.E. Sarwinski, P. Seligmann, R.A. Sherlok // J. Low Temp. Phys. – 1970. – V. 3, N 6. – P. 619 – 635.

10. Дикина Л.С. Поглощение второго звука в сверхтекучих растворах ^{3}He-^{4}He / Л.С. Дикина, Г.Я. Котенев, Э.Я. Рудавский // Физика низких температур. – 1978. – Т. 4, № 7. – С. 936 – 938.

11. Дикина Л.С. Скорость второго звука в сверхтекучих растворах ^{3}He-^{4}He / Л.С. Дикина, Г.Я. Котенев, Э.Я. Рудавский // Физика низких температур. – 1978. – Т. 4, № 12. – С. 1501 – 1508.

12. Дикина Л.С. Поглощение второго звука и сверхтекучие процессы в сверхтекучих растворах ^{3}He-^{4}He/ Л.С. Дикина, Г.Я. Котенев, Э.Я. Рудавский // Физика низких температур. – 1979. – Т. 5, № 1. – С. 5 – 15.

13. Greywall D.C. Measurements of the second sound damping in dilute ^{3}He-^{4}He solutions / D.C. Greywall // Phys.Rev.Lett. – 1979. – V. 42, N 26. P.1758 – 1761.

14. Church R.J. Second sound damping in ^{3}He-^{4}He mixtures / R.J. Church, J.R. Owers – Bradley, P.C. Main // Japanese Journal of Applied Phys. – 1987. – V.26, N 1. – P.21 – 23.

15. Халатников И.М. Звук в растворах посторонних частиц в гелии II и диссипативные функции растворов/ И.М. Халатников // Журн. эксперимен. и теоретич. физики. – 1952. – Т.23,вып.3. – С. 265 – 274.

16. Mc Hale J. Theory of the phonon contribution to the damping of second sound in ^{3}He-^{4}He mixtures / J. Mc Hale, M.A. Jones, R.M. Bowley // Journ. Phys. C. – 1988. – V.21. – P.5757 – 5772.

17. Adamenko I. N. Sound and dissipation coefficients in the phonon-impurity system of 3He-4He solutions/ I. N. Adamenko, V. K. Chagovets, E. Ya. Rudavskii, V. I. Tsyganok // J. Low Temp. Phys. – 1988. V. 71, №3/4. – P. 261 – 293.

18. Adamenko I. N. Dissipative processes and second sound in ^{3}He-^{4}He superfluid mixtures / I. N. Adamenko, K. E. Nemchenko, V. I. Tsyganok // Journ. Low Temp. Phys. – 1990. – V. 81, № 5/6. – P. 233 – 262

19. Адаменко И. Н. Второй звук в сверхтекучих растворах ^{3}He-^{4}He / И. Н. Адаменко, К. Э. Немченко, В. И. Цыганок // Физика низких температур. – 1990. – Т. 16, № 6. – С. 689 – 709.

20. Адаменко И.Н. Кинетика фонон - примесонной системы сверхтекучих растворов ^{3}He - ^{4}He / И.Н. Адаменко, Э.Я. Рудавский // Физика низких температур. – 1987. – Т.13, № 1. – С. 3 – 32.

21. Халатников И.М. Дисперсия первого и второго звуков в в сверхтекучем гелии / И.М. Халатников, Д.М. Черникова // Журн. эксперимен. и теорет. физики. – 1966.– Т.50, вып. 50. – С. 411 – 430.

22. Adamenko I. N. Nucleation and growth of the new phase in the supersaturated ^{3}He-^{4}He superfluid solutions./ I.N.Adamenko, A.I.Chervanev, K.E.Nemchenko, V.A.Mikheev, E.Ya.Rudavskii, V.K.Chagovets and G.A.Sheshin // Journ. Low Temp. Phys., –1994. –V.95, N5/6. –P.492-498.

23. Задорожко А.А. Релаксация температуры и концентрации в сверхтекучих растворах ^{3}He-^{4}He. Эффективная теплопроводность/ А.А.Задорожко, Т.В.Калько, К.Э.Немченко, Э.Я.Рудавский, В.К.Чаговец, Г.А.Шешин// Физика низких температур. – 2004 – Т. 30 – вып.2 –С.169-176

24. Sheshin G. Temperature and Concentration Relaxation in Phase-separated Superfluid ^{3}He–^{4}He Mixtures / G. Sheshin, T. Kalko, K. Nemchenko, E. Rudavskii, V. Chagovets, A. Zadorozhko // J. Low Temp. Phys. – 2007. – V.146, N 3/4 . – p.403-416.

25. Пешков В.П. Определение скорости распространения второго звука в гелии II / В.П. Пешков // Журн. эксперимен. и теоретич. физики – 1946. – Т.16,вып. 8. – С. 1001 – 1010 .

26. Husson L.P.J. On the velocity and absorption of second sound in dilute ^{3}He-^{4}He mixtures under pressure / L.P.J. Husson, G.E. Ouwerker, A.I. Reesink, Ouboter R. de Bruyn // Physica B. – 1983. – V. 122, N 2. – P. 183 – 200.

27. Померанчук И. Я. Влияние примесей на термодинамические свойства и скорость второго звука в HeII / И.Я. Померанчук // Журн. эксперимен. и теоретич. физики. – 1952. – Т.19, вып 1. – С. 42 – 43.

28. Lynton E.A. Second sound in ^{3}He-^{4}He mixtures / E.A. Lynton, H.A. Fairbank // Phys.Rev.-1950. – V.50. N 6. – P.1043 – 1046.

29. Salmela A. Acoustic Resonances in Helium Fluids Excited by Quartz Tuning Forks / A. Salmela, J. Tuoriniemi, J. Rysti // J. Low Temp. Phys. – 2011. – V.162. – P.678 – 685

30. Blaauwgeers R. Quartz Tuning Fork: Thermometer, Pressure- and Viscometer for Helium Liquids / R. Blaauwgeers, M. Blazkova M. Clovecko,V.B. Eltsov,R. de Graaf,J. Hosio,M. Krusius,D. Schmoranzer,W. Schoepe,L. Skrbek,P. Skyba,R.E. Solntsev, D.E.Zmeev // J. Low Temp. Phys. – 2007. – V.146, N.5/6.

31. Рудавский Э.Я. Механизмы диссипации колебаний камертона в сверхтекучих растворах ^{3}He–^{4}He/ Рудавский Э.Я., Чаговец В.В.2, Шешин Г.А., Вракина В.А.// Физика низких температур. – 2020. – Т.46 – С. 49-56

32. Vikhtinskaya T.G. Generation of temperature and concentration oscillations by vibrating bodies in superfluid ^{3}He–^{4}He solutions of medium concentration / Vikhtinskaya T.G., Nemchenko K.E., Rogova S.V. // Физика низких температур. – 2018. – T.44 – C.1358.

33. Friedt J.-M. Introduction to the quartz tuning fork / J.-M. Friedt and É. Carry // American Journal of Physics. – 2007. – V.75 – P.415

34. Schmoranzer D. Experiments relating to the flow induced by a vibrating quartz tuning fork and similar structures in a classical fluid / D. Schmoranzer, M. Král'ová, V. Pilcová, W. F. Vinen, and L. Skrbek // Physical Review E. – 2010. – V.81 – 066316

35. EerNisse E.P. Survey of Quartz Bulk Resonator Sensor Technologies / E.P. EerNisse, R.W. Ward, R.B. Wiggins // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. – 1988. – V.35 – P. 323 - 330

36. Clubb D. O. Quartz Tuning Fork Viscometers for Helium Liquids / D. O. Clubb, O. V. L. Buu, R. M. Bowley, R. Nyman, and J. R. Owers-Bradley // Journal of Low Temperature Physics. – 2004. – V. 136, N. 1/2

37. Rychen J. Operation characteristics of piezoelectric quartz tuning forks in high magnetic fields at liquid helium temperatures / J. Rychen, T. Ihn, P. Studerus, A. Herrmann, K. Ensslin, H. J. Hug, P. J. A. van Schendel, H. J. Gu¨ntherodt // Review Of Scientific Instruments. – 2000. – V. 71, N. 4