МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ
Кафедра комп'ютерної фізики

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА
до кваліфікаційної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр

«Коливання рідини в паливних баках з вертикальними та горизонтальними перегородками»

Виконав: студент 2 курсу, групи НФ-64
Куценко М. С.
Спеціальність: 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали»
Освітньо-наукова програма: «Комп'ютерна фізика»
Керівник: д. т. н., професор Стрельнікова О. О.
Рецензент:

Харків – 2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут комп’ютерної фізики та енергетики

Кафедра комп’ютерної фізики

Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магістр

Спеціальність 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Костянтин НЄМЧЕНКО
(підпис)

«____» _____ 2024 р.

ЗАВДАННЯ

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

Куценку Михайлу Сергійовичу

1. Тема роботи «Коливання рідини в паливних баках з вертикальними та горизонтальними перегородками», керівник роботи: Стрельнікова Олена Олександрівна, доктор технічних наук, професор, затверджені наказом по університету від 23 січня 2024 року № 4201- 5/144.
2. Строк подання студентом роботи 20 травня 2024.
3. Перелік питань, які потрібно розробити:

- провести аналіз динаміки коливань рідини в циліндричних резервуарах без додаткових пристроїв.
- дослідити вплив вертикальних перегородок на зменшення амплітуди коливань рідини.
- провести аналіз ефективності горизонтальних перегородок у зниженні хвилювання.
- впровадити метод підобластей для більш точного моделювання взаємодії рідини з перегородками та стінками бака.

- провести числові експерименти для перевірки ефективності запропонованих методів.

4. План роботи:

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми, узгодження, а також затвердження її на кафедрі
2	Робота над літературою та іншими джерелами
3	Затвердження теми на кафедрі
4	Написання вступу до роботи та проведення аналізу сучасного стану питання міцності та коливань оболонкових конструкцій
5	Здійснення огляду публікацій, присвячених дослідженню коливань рідини в циліндричних резервуарах та формулювання задачі визначення вільних коливань рідини в циліндричних резервуарах за умови рівномірного обертання
6	Проведення аналізу граничних умов на поверхнях оболонки та рідини
8	Будування форми вільної поверхні в випадку обертання циліндричного резервуару із заданою частотою
9	Завершення написання дипломної роботи (висновки та література)
10	Подача науковому керівнику
11	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
12	Попередній захист
13	Захист

5. Дата видачі завдання 23 лютого 2024 року

Студент _____ Михайло КУЦЕНКО
(підпис)

Керівник роботи _____ Олена СТРЕЛЬНІКОВА
(підпис)

РЕФЕРАТ. Михайло Куценко. Коливання рідини в паливних баках з вертикальними та горизонтальними перегородками. Кваліфікаційна робота магістра з прикладної фізики. - Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2024. - 60 с.

Основною метою цієї роботи є розробка ефективних чисельних методів для аналізу впливу встановлення різних пристроїв на пом'якшення коливань рідини в частково заповнених жорстких резервуарах. Моделі паливних баків представлені циліндричними оболонками з горизонтальними та вертикальними загороджувачами. Загороджувачі встановлюються для пом'якшення хвилювання, що особливо актуально для забезпечення стабільності ракетних блоків. Також аналізується плаваюча кришка як демпфер для пом'якшення хвилювання. До чисельного моделювання залучено метод граничних елементів зі зменшеним числом граничних елементів, а також техніку суперпозиції мод. Вібраційні моди, отримані під час розв'язання спектральних задач, використовуються надалі як базові функції в ряді для невідомого потенціалу і висоти вільної поверхні. Застосовується ефективний новий метод розрахунку одновимірних сингулярних інтегралів. Новизна запропонованого підходу полягає в аналізі ефективності різних пристроїв для пом'якшення хвилювання під гармонійними навантаженнями. Наступним етапом дослідження буде вивчення ефективності демпфірування під імпульсними та сейсмічними навантаженнями.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ІДЕАЛЬНА РІДИНА, ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ, ПЕРЕГОРОДКИ, ПЛЕСКАННЯ.

ABSTRACT MICHAILO KUTSENKO Liquid vibrations in fuel tanks with vertical and horizontal partitions Qualification work of the magister of applied physics. – Kharkiv. – V.N. Karazin KhNU, 2024. – 60 p

The primary aim of this study is to develop efficient numerical techniques for assessing the impact of various installations on dampening liquid oscillations in partially filled rigid containers. The models used for fuel tanks are cylindrical shells equipped with both horizontal and vertical baffles. These baffles are installed to dampen oscillations, particularly crucial for maintaining the stability of rocket launches. The numerical simulation employs a reduced boundary element method and mode superposition technique. Vibration modes derived from solving spectral problems serve as fundamental functions in a series representing the unknown potential and free surface elevation. A novel method for computing one-dimensional singular integrals is employed. The novelty of this approach lies in evaluating the efficacy of various devices in mitigating oscillations under harmonic loads.

KEY WORDS: IDEAL FLUID, SHELLS OF ROTATION, PARTITIONS, SLOSHING

ЗМІСТ

ЗМІСТ 6
ВСТУП 7
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ 8
РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ 14
2.1 Постановка задачі 14
2.2 Паливний бак без перегородок 16
2.3 Паливний бак із вертикальними перегородками 18
2.4 Паливний бак із горизонтальними перегородками 18
2.5 Метод підобластей 28
2.6 Числові дослідження 33
РОЗДІЛ 3. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ В РЕЗЕРВУАРІ. 40
3.1 Циліндричні оболонки в умовах бічних гармонічних збуджень 40
3.2 Циліндричні оболонки при поздовжніх гармонічних збудженнях. 42
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 49

ВСТУП

Проблеми стабільності ракетоносіїв під час маневрів за умови мінливої гравітації та рівнів заповнення паливних баків гостро постали перед інженерами і конструкторами космічної техніки з середини минулого століття. Перші польоти до Юпітера завершилися невдало через втрату стабільності і сходження ракети з розрахованої траєкторії. Як виявилося пізніше, невдачі були пов'язані зі збігом частоти подачі палива регулювальним апаратом із фундаментальними частотами коливань рідини. Слід зазначити, що частоти коливань значно залежать від рівня заповнення рідини і гравітації. Ефекти плескання рідини також критичні в нафтових резервуарах та інших ємностях для токсичних і легкозаймистих рідин під впливом різких навантажень. Тому було розроблено безліч пристроїв для пом'якшення коливань. Серед них - перегородки і плаваючі кришки. Слід зазначити, що адекватна перевірка ефективності демпфера можлива тільки після його встановлення. Але дуже часто це дорога і не завжди безпечна процедура. Тому комп'ютерне моделювання динамічних процесів у резервуарах у присутності демпферних пристроїв актуальне для вибору найбільш підходящих параметрів перегородок і плаваючих кришок. Таке моделювання вимагає розроблення ефективних методів чисельного аналізу коливань рідини в резервуарах і паливних баках. У цій роботі пропонуються й аналізуються методи на основі методу граничних елементів. Метою є оцінка впливу різних демпферів на процес гасіння коливань.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Із середини минулого століття зусилля вчених та інженерів спрямовані на створення та випробування різних демпфувальних пристроїв для гасіння коливань у резервуарах, частково заповнених рідиною. Оскільки аналітичні рішення не можна отримати для резервуарів зі складними геометричними формами, було запропоновано безліч чисельних методів для розв'язання спектральних крайових задач (СКЗ) коливань рідини. Розв'язання СКЗ є важливим для отримання базисних функцій в аналізі вимушених коливань [1]. Для резервуарів із горизонтальними перегородками метод граничних елементів (МГЕ) було застосовано в [2], у [3] використовували ізогеометричний МГЕ для вивчення хвилювання в резервуарах із пористими загороджувачами. Основною метою досліджень, присвячених перегородкам у резервуарах, є визначення оптимальних параметрів структури [4], у [5] було запропоновано оптимальне конструктивне виконання кільцевої перегородки для оптимізації міцності конструкції баків, що піддаються резонансному землетрусу. Крім технік на основі МГЕ, варто згадати деякі передові чисельні методи, засновані на методі занурення і пов'язані з міцністю і стабільністю ракет-носіїв [6]. Метод скінченних елементів і метод скінченних об'ємів також набули подальшого розвитку, стимулом до якого стала потреба в правильних розрахунках міцності та коливань нових потужних ракетних блоків. Метод скінченних об'ємів отримав подальший розвиток у [7]. Ефективний варіант суміщених методів скінченних (МСЕ) і граничних елементів (МГЕ) було запропоновано в [8] для вивчення коливань рідини в баку з перегородками. Докладний огляд досліджень коливань рідини подано в [9]. Для придушення коливань використовують різні демпферні пристрої, такі як горизонтальні [10] і вертикальні [11] перегородки, покриття вільної поверхні [12], а також мембранні кришки [13]. Різні пружні перегородки були вивчені в [14]. Інноваційні матеріали для посилення паливних баків розглядалися в [15]. Далі проводиться оцінка установки вертикальних перегородок, після чого метод

граничних елементів [16, 17] застосовується до спектральної проблеми для циліндричної оболонки з горизонтальними перегородками. Слід зазначити також низку досліджень застосування методів скінченних і граничних елементів [18-23] до проблем демпфірування коливань рідини. У роботах [24-31] розроблено методи чисельного розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь, до яких зводяться розглядувані задачі.

Зазначимо, що числові методи вивчення руху рідини з вільною поверхнею знаходять широке застосування в багатьох інженерних додатках [32, 33]. У повністю (або практично повністю) заповнених баках вільна поверхня не може здійснювати сильних осциляцій. Це відповідає початку польоту ракети-носія. Однак, на подальших стадіях польоту, коли рівень рідкого заповнювача падає, ефект плескання стає домінуючим. Неодноразово зазначалося, що потужні плескання можуть призвести до порушення польотної траєкторії, як це сталося, наприклад, під час запусків ракети-носія Фалькон 1 (Falcon 1) у 2006, 2007 і 2008 роках [34]. Наступною важливою проблемою при вивченні коливань паливних баків є вивчення пов'язаних гідропружних коливань рідини, що взаємодіє з пружними стінками бака [35-40].

Незважаючи на наявні теоретичні досягнення, проблема коливань пружних контейнерів і баків з рідиною залишається в центрі уваги багатьох наукових шкіл.

Феномен плескань може бути описаний як рух вільної поверхні рідини, що міститься в резервуарі, під дією раптово прикладеного навантаження. У [41] зроблено класифікацію коливань вільної поверхні рідини в резервуарах, виділивши такі основні форми плескань: поздовжні плескання, вертикальні плескання, обертальні плескання. Саме частково заповнені резервуари схильні до дії особливо сильних плескань, оскільки потужний рух рідини зазвичай створює високий локалізований тиск на стінки резервуару, що, своєю чергою, може призвести до часткового або повного руйнування конструкції, або викликати втрату стійкості. Проектування таких резервуарів вимагає

ретельного дослідження поведінки рідини в них за різних умов експлуатації. Плескання є наслідком впливу зовнішніх сил, викликаних прискоренням (раптовим сповільненням або зупинкою) рухомого об'єкта, що містить рідину. На особливу увагу заслуговує вивчення локальних максимумів розподілу тиску на стінках резервуара, які можуть щонайменше вдвічі перевищувати значення відповідних величин у незаповненому резервуарі в результаті лише дії прикладеного зовнішнього навантаження [42]. У вантажних танкерах проблема плескань стоїть особливо гостро: навіть малі рухи контейнера можуть призвести до значних коливань поверхні рідини, що вимагає вивчення стійкості.

Низка досліджень, присвячених проблемам плескань рідини в резервуарах, знайшла своє відображення в ґрунтовних оглядах [43, 44]. Перші роботи в цій галузі з'явилися в 1960-х роках і були пов'язані з вивченням плескань рідкого палива в баках ракетоносіїв.

Оскільки ракетна техніка використовує рідке паливо, стало очевидним, що характер поведінки рідини в паливному баку має істотний вплив на динаміку польоту. Це призвело до сплеску інтересу до проблем коливань рідини в резервуарі. Слід відзначити роботи Г. Абрамсона [45 - 46]. У [46] застосували нелінійну теорію для визначення сили тиску на стінки кругових і призматичних резервуарів, що рухаються з прискоренням. Встановлено, що на початковій стадії руху під дією імпульсного навантаження хвилі на вільній поверхні не виникають, а вся маса рідини переходить на один бік контейнера. Далі, в роботах [47, 48] у двомірному формулюванні вивчено вплив прискорення і кривизни вільної поверхні під час руху рідини в прямокутних контейнерах, і доведено, що динамічні характеристики резервуара суттєво залежать від відношення рівня заповнення рідиною до ширини контейнера. У цих роботах показано, що максимальна висота підйому спостерігається у квадратних контейнерах з рівнем заповнення 30-60%, а максимальні зусилля виникають за рівня заповнення в межах 75-93%. Аналіз робіт, присвячених розрахунку

оболонок, у тому числі тих, що моделюють посудини і резервуари з небезпечними заповнювачами, які працюють в умовах підвищених технологічних навантажень, дозволяє на теперішній час виділити в якості основних і найефективніших методів розрахунку на міцність методи числового інтегрування, метод скінченних різниць, метод скінченних елементів (СКЕ) і метод граничних елементів (МГЕ).

Порівняння найефективніших числових методів механіки деформованого твердого тіла показує, що МСЕ є найуніверсальнішим і найпоширенішим.

Одна з найважливіших проблем, що виникають під час застосування МСЕ до розрахунку оболонок, стосується вибору типу скінченних елементів, від якого багато в чому залежать точність, стійкість і ефективність числового алгоритму.

У роботах [49-54] з розрахунку оболонок обертання з використанням МСЕ поверхню оболонки описували ансамблем найпростіших плоских трикутних і чотирикутних скінченних елементів з лінійною апроксимацією поля переміщень. Але застосування цих елементів забезпечило прийнятну точність розрахунку лише при дослідженні вузького класу оболонок з невеликими градієнтами напружень.

Створення ефективних методів скінчених елементів для розрахунку оболонок на основі теорії Кірхгофа-Лява відбувалося одночасно, як за рахунок збільшення порядку апроксимуючих шуканих функцій, так і завдяки більш точній апроксимації геометрії оболонки, у зв'язку з чим стали застосовуватися спочатку плоскі, а потім і неплоскі криволінійні елементи з досить великим числом ступенів свободи [55-57].

Одночасно з ускладненням геометрії скінченних елементів відбувалося і підвищення порядку апроксимуючих поліномів, як за рахунок збільшення числа ступенів свободи у вузлах, так і шляхом введення додаткових вузлових точок [58-63], що давало змогу забезпечити кращу збіжність і точність методу.

Аналіз літературних джерел довів, що в останнє десятиліття отримано аналітичні результати і побудовано на основі методу скінчених елементів програмні комплекси, що дало змогу формулювати і розв'язувати задачі гідропружної взаємодії елементів конструкцій, оцінювати їхню граничну рівновагу, визначати руйнівні навантаження на елементи конструкцій. Але й дотепер не знайшли належного відображення питання міцності та визначення критичних навантажень на оболонкові конструкції з урахуванням впливу пластичних деформацій, залишкових напружень, наявності дефектів, що особливо важливо для тих елементів конструкцій, які працюють в умовах підвищених технологічних навантажень. Також ще не повною мірою вивчені закономірності вибухового руйнування. Пропоновані різними авторами гіпотези не пояснюють усієї складності процесів, що протікають; відсутні теоретичні моделі, які адекватно і повною мірою описують короткочасні динамічні процеси. Тому низка питань як з динаміки рідини, коливань паливних баків, ще далека від свого повного вирішення. Розв'язанню деяких з цих питань і присвячено цю роботу.

Аналіз літературних джерел показав, що вивчення задач коливань паливних баків ракетоносіїв проводиться за трьома основними напрямками. Перший із них стосується коливань рідини з рухомою вільною поверхнею в жорстких баках. Другий напрям пов'язаний з вивченням впливу рівня гравітації (числа Бонда) на вільні коливання. Третій напрям застосовується до вивчення коливань рідини в пружних баках без урахування впливу сили тяжіння. У деяких літературних джерелах стверджується, що зазначені задачі можна вивчати окремо, оскільки спектри частот коливань, наприклад, оболонки і рідини, що міститься в ній, відокремлені. Однак ці припущення не доводяться теоретично або шляхом числового експерименту.

Надано аналіз досліджень, що характеризують негативний вплив плескань заповнювача на стійкість і цілісність резервуарів. Проведено аналіз експериментальних даних щодо міцності оболонок, частково заповнених

рідиною, при статичних і динамічних навантаженнях. Здійснено аналіз методів граничних елементів при розв'язанні осесиметричних задач теорії потенціалу. З'ясовано, що на теперішній час відсутні комп'ютерні технології, які дозволяли б проводити комплексний аналіз вільних і вимушених коливань складених паливних баків ракетоносіїв на різних стадіях польоту: при перевантаженнях, та в умовах мікрогравітації, з урахуванням плескань рідини та пружності стінок баків. Метод, розроблений під час виконання роботи, дасть змогу здійснити більш точний і кваліфікований аналіз коливань паливних баків, врахувати вплив пружних деформацій стінок баків, зміну протягом польоту рівня заповнення баків і форми вільної поверхні, наявність пружних і жорстких внутрішніх перегородок, зміну прискорення сили тяжіння.

РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

2.1 Постановка задачі

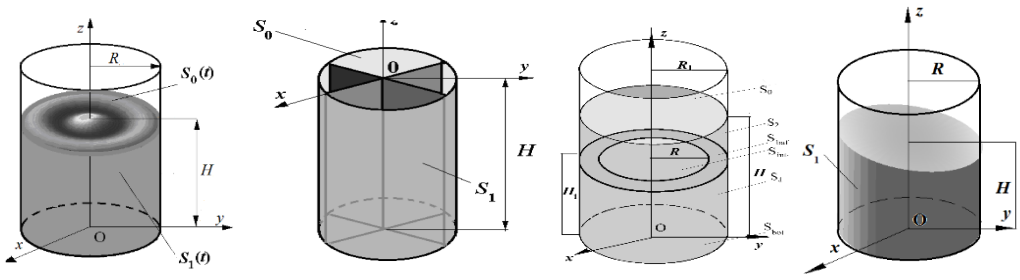
Розглянуто процеси демпфірування коливань рідини в паливних баках за наявності різних демпфуючих пристроїв. Моделями паливних баків обрано циліндричні оболонки з перегородками і без них. Рідина припускається нестисливою і нев'язкою, а її потік, спричинений коливаннями стінок бака, є потенційним. Таким чином, існує потенціал Ф, що задовольняє таку крайову задачу:

$$\nabla^2\Phi = 0,\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_1(t)} = 0,\ p - p_0 = 0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = \left.\frac{\partial\zeta/\partial t}{\sqrt{1+|\nabla\zeta|^2}}\right|_{S_0(t)}$$

(2.1)

для рівняння Лапласа в залежній від часу області Q(t) з граничними поверхнями ∂Q(t)=S1 (t) S∪0 (t) (Рис.2.1). Тут S1 (t)- це змочена поверхня бака, S0 (t)∪) - вільна поверхня рідини, n - зовнішній одиничний нормальний вектор до поверхні, невідома функція ζ=ζ(x,y,t) описує положення та рівень вільної поверхні, p - тиск рідини, а p0 - атмосферний тиск.

На рис. 2.1 зображено оболонки з перегородками, що виступають як демпфери.



a) b) c) d)

Рис. 2.1. Циліндричні оболонки з різними демпферами

Для оцінки тиску p використовується рівняння Бернуллі

$$p - p_0 = -\rho_l \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + a_x(t)x + \left(g + a_z(t)\right)\zeta + \frac{1}{2}(\nabla\Phi, \nabla\Phi)\right] \quad ,$$

(2.2)

, де ρl - густина рідини, g - прискорення вільного падіння, а x(t) та az(t) - прискорення примусової сили в горизонтальному та вертикальному напрямках. Для отримання єдиного розв'язку системи (2.1)-(2.2) додано умову Неймана [1]. Для оболонок обертання невідомі функції ζ і Ф можуть бути виражені в циліндричній системі координат (r,θ,z) таким чином [18]:

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_{kj}(t) \cos(j\theta) \zeta_{kj}(r), \qquad (2.3)$$

$$\varphi(r, \theta, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \dot{d}_{kj}(t) \cos(j\theta)\, \varphi_{kj}(r, z). \qquad (2.4)$$

Тут dkj (t) - невідомі коефіцієнти, що залежать від часу, для кожного хвильового числа j, базисні функції ζkj (r) і ϕkj (r,z) є розв'язками спектральної лінійної крайової задачі [13].

$$\nabla^2 \varphi_{kj} = 0, \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial \boldsymbol{n}} = 0\Big|_{S_1}, \quad \frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial \mathrm{n}} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}\Big|_{S_0}, \quad \zeta_{kJ}(r) = \frac{\partial \varphi_{kJ}(r,z)}{\partial z}\Big|_{S_0} = \frac{\chi_{kj}^2}{g} \varphi_{kj}(r, H),$$

(2.5)

Таке співвідношення вірне на вільній поверхні

$$\zeta_{kJ}(r) = \frac{\partial \varphi_{kj}(r,z)}{\partial z}\Big|_{S_0} = \frac{\chi_{kj}^2}{g} \varphi_{kj}(r, H).$$

(2.6)

Тут z=H - це висота вільної поверхні в стані спокою (Рис. 1а). Таким чином, функція ζ(r,θ,t) представляється таким рядом:

$$\zeta(r, \theta, \mathrm{t}) = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \cos(j\theta)\, \chi_{kj}^2 \varphi_{kj}(r, H) d_{kj}\,(t).$$

(2.7)

де χ_{kj}^2 фундаментальні частоти [20].

Припускаючи, що спектральну задачу (2.5) розв'язано, отримані базисні функції $\varphi_{kj}(r,z)$підставляються в лінеаризоване динамічне рівняння.

$$\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=0}^{m}\ddot{d}_{kj}(t)\cos(j\theta)\,\varphi_{kj}(r,H)+a_x(t)r+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=0}^{m}d_{kj}(\mathrm{t})\cos(j\theta)\,\chi_{kj}^{2}(1+a_z(t)/g)\varphi_{kj}(r,H)=0.$$

(2.8)

Як зазначено в [1], [21], для дослідження розглядаються тільки 0-та і 1-та гармоніки. Виконуючи скалярний добуток співвідношень (2.8) за функціями $\varphi_{lm}(r,H)\cos m\,\theta$, m =0,1,,1, завдяки ортогональності базисних функцій [1], можна одержати систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно $d_{0k}(t), d_{1k}(t)$для k=1,...,M.

$$\ddot{d}_{k0}(t)+\chi_{k0}^{2}(1+a_z(t)/g)d_{k0}(t)=0,$$

(2.9)

$$\ddot{d}_{k1}(t)+\chi_{k1}^{2}\left(1+\frac{a_z(t)}{g}\right)d_{k1}(t)+a_x(t)F_{k1}=0,\qquad F_k=\frac{(r,\varphi_{k1})}{(\varphi_{k1},\varphi_{k1})}.$$

Припустимо, що резервуар, який розглядається, перебував у стані спокою в початковий момент часу.

2.2 Паливний бак без перегородок

Невідомий потенціал Φ(r,θ,z,t) представлено з використанням третьої формули Гріна таким чином:

$$2\pi\Phi(P_0)=\iint_S\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}\frac{1}{|P-P_0|}dS-\iint_S\Phi\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\frac{1}{|P-P_0|}dS.$$

(2.10)

Тут S=S1 ∪S0 , обидві точки P і P0 знаходяться на поверхні S, і |P-P0| позначає декартову відстань між точками P і P0.

Підставляючи граничні умови (5) і (6) у рівність (10) і опускаючи індекси kj, отримуємо таку систему сингулярних інтегральних рівнянь.

$$2\pi\varphi + \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{r}\right) dS_1 - \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \varphi \frac{1}{r} dS_0 + \iint_{S_0} \varphi \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dS_0 = 0,$$

(2. 11)

$$-2\pi\varphi - \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{r}\right) dS_1 + \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \varphi \frac{1}{r} dS_0 = 0,\ r = |P - P_0|.$$

Такі системи розв'язуються чисельно для кожного режиму коливання kj. Для оболонки обертання система (2. 11) зводиться до одновимірних рівнянь.

$$2\pi\varphi(z_0) + \int_\Gamma \varphi(z)\Theta(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho)\Xi(P, P_0)\rho d\rho = 0, \qquad P_0 \in S_1,$$

(2.12)

$$2\pi\varphi(z_0) + \int_\Gamma \varphi(z)\Theta(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho)\,\Xi(P, P_0)\rho d\rho = 0,\ P_0 \in S_0.$$

Тут Г є твірною оболонки, $q(\rho) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}$, та вирази для ядер сингулярних інтегральних рівнянь мають вигляд

$$\Theta(z, z_0) = 4/\sqrt{a+b}\left\{\frac{1}{2r}\left[\frac{\rho^2 - \rho_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_l(k) - F_l(k)\right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_l(k) n_z\right\},$$

(2.13)

$$\Xi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_l(k),\ a = \rho^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2,\ b = 2\rho\rho_0.$$

У (2.13) введено такі узагальнені еліптичні інтеграли

$$E_l(k) = (-1)^l (1 - 4l^2) \int_0^{\pi/2} \cos 2l\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\, d\theta,$$

(2. 14)

$$F_l(k) = (-1)^l \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2l\theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} d\theta, \quad k^2 = 2b/(a+b),\ l = 1.$$

Для числового обчислення застосовується метод, розроблений у [30-31]. Після розв'язання (2.11) базисні функції $\varphi_{kj}(r, z)$ підставляємо в (2.9) та отримуємо диференціальні рівняння для опису руху рідини

2.3 Паливний бак із вертикальними перегородками

Розглянуто вільні коливання рідини в жорсткому циліндричному резервуарі радіуса R з двома вертикальними перегородками (рис. 2.1б). Для цього резервуара зволожена поверхня S1 наступна:

$$S_1 = \{z = 0 \cup \mathrm{r} = \mathrm{R} \cup \theta = 0 \cup \theta = 0 \;\; = 0 \;\; = 0 \;\; = 0 \frac{\pi}{2}\}.$$

Для такого резервуара маємо:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \; \frac{\partial \Phi}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0,\theta=\frac{\pi}{2}} = 0, \; p - p_0 = 0, \; \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}\Big|_{S_0} \quad (2.15)$$

При інтегральному поданні (2.10) розв'язувальна система сингулярних інтегральних рівнянь набуває вигляду (2.12)-(2.13), але у виразах для узагальнених еліптичних інтегралів (2.14) приймається l =2. Після розв'язання спектральної задачі (2.15) отримано частоти і форми коливань рідини в резервуарі з вертикальними перегородками. Ці форми використовуються як базові функції для розв'язання системи (2.9) для оцінки зміни рівня наповнення.

2.4 Паливний бак із горизонтальними перегородками

Для визначення коливань рідини в резервуарі з горизонтальними перегородками використовується метод граничних елементів з підобластями [2], [23]. Тут вводиться штучна поверхня розділу Sint [2], яка ділить область рідини на дві частини Ω1 і Ω2 , обмежені поверхнями S , Sbot1 , Sbaf , Sint та S2 , Sbaf , S , Sint0 відповідно, рис. 2.1c).Ω1 таΩ2 є $\sum_1 = S_{\mathrm{baf}} \cup S_1 \cup S_{\mathrm{bot}} \cup S_{\mathrm{int}}$, $\sum_2 = S_{\mathrm{baf}} \cup S_2 \cup S_{\mathrm{bot}} \cup S_0$.

Позначимо значення потенціалів у вузлах у S1 , S2 та S0 як ,φ1φ2 , andφ0 відповідно. Потоки $\boldsymbol{q_1} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\boldsymbol{S}_{\mathbf{int}}}$, $\boldsymbol{q_2} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\boldsymbol{S}_{\mathbf{int}}}$, $\boldsymbol{S}_{\mathbf{int}} \in \Sigma_{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2}$ відомі на жорстких частинах $\boldsymbol{S_1} \cup \boldsymbol{S_{\mathbf{bot}}}$ та $\boldsymbol{S_2} \cup \boldsymbol{S_{\mathbf{bot}}}$ з граничних умов непроникнення; на

вільній поверхні невідомий потік позначається як q0 . Значення потоку і потенціалу на поверхні розділу Sint є невідомими функціями

Слід зазначити, що на поверхні інтерфейсу діють такі умови сумісності [2]:

$\varphi_1=\varphi_2$, $q_1=q_2$. (2. 16)

Позначимо

$$\widetilde{S_1}=S_{baf}\cup S_1\cup S_{bot},\ \widetilde{S_2}=S_{int},\ \widetilde{S_3}=S_{baf}\cup S_2,\ \widetilde{S_4}=S_0$$

та введемо оператори

$$A(S,\sigma)\psi=\iint_S \psi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|}dS,\quad B(S,\sigma)\psi=\iint_S \psi\frac{1}{|P-P_0|}dS,\ \ P_0\in\sigma.$$

(2.17)

У формулах (2.17) поверхні S і σ можуть бути різними або збігатися. Якщо поверхня S збігається з σ, то інтеграли в (2.17) є сингулярними, і при їх чисельній реалізації необхідно враховувати наявність цих особливостей. Ядра тут значно неоднорідні, і стандартна квадратура втрачає свою точність. Тому для обчислення таких інтегралів задіяні спеціальні алгоритми [30,31].

Для обчислення еліптичних інтегралів другого роду застосовано підхід, що ґрунтується на характерній властивості середнього арифметичного геометричного значення AGM (a, b), яка описана в роботі [31]:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}=\frac{\pi}{2AGM(a,b)}.$$

Для визначення AGM (a, b) використано алгоритм Гауса

$$a_0=a,\quad b_0=b,\quad a_1=\frac{a_0+b_0}{2},\quad b_1=\sqrt{a_0b_0},\ldots.a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\ldots$$

$$AGM(a,b)=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Це високоточна обчислювальна процедура для знаходження внутрішніх інтегралів у системі (2.13).

Точність $\varepsilon = |a_n - b_n| < 10^{-8}$ було досягнуто за $n = 6$ ітерацій.

Але ж виявилося, що й зовнішні інтеграли мають особливість - логарифмічну.

Це доводиться таким чином.

Обчислимо $|\ P - P0\ |$ для оболонки обертання S1 . У циліндричних координатах маємо

$$x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta; \quad z = z; \quad x^2 + y^2 = r^2;$$
$$x_0 = r_0\cos\theta_0; \quad y_0 = r_0\sin\theta_0; \quad z_0 = z_0; \quad x_0^2 + y_0^2 = r_0^2. \qquad (2.18)$$

Зі співвідношень (2.18) отримуємо

$$|\ P - P0\ | = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} =$$

$$= \sqrt{r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2 - 2rr_0\,cos(\theta - \theta_0)}.$$

Надалі будемо користуватися стандартними позначеннями[15]

$$a = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2; \quad b = 2rr_0.$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|} = -\frac{\left(\overrightarrow{P-P_0}\cdot\vec{n}\right)}{|P-P_0|^3}, \quad \vec{n} = \vec{i}n_r\cos\theta + \vec{j}n_r\sin\theta + \vec{k}n_z,$$

маємо

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|} = -\frac{n_r[r - r_0\,cos(\theta-\theta_0)] + n_z(z-z_0)}{\left(\sqrt{a - b\,cos(\theta-\theta_0)}\right)^3}. \qquad (2.19)$$

Вираз (2.19) перетворимо з метою зведення ядер до стандартних еліптичних інтегралів. Отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|} = -\frac{n_r[r-a/(2r)]+n_z(z-z_0)}{\left(\sqrt{a-b\,cos(\theta-\theta_0)}\right)^3} - \frac{n_r}{2r\sqrt{a-b\,cos(\theta-\theta_0)}} =$$

$$= -\frac{n_r[r^2-r_0^2-(z-z_0)^2]}{2r\left(\sqrt{a-b\,cos(\theta-\theta_0)}\right)^3} - \frac{n_z(z-z_0)}{\left(\sqrt{a-b\,cos(\theta-\theta_0)}\right)^3} - \frac{n_r}{2r\sqrt{a-b\,cos(\theta-\theta_0)}}.$$

Або

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|} = \frac{n_r[r_0^2-r^2+(z_0-z)^2]}{2r\left(\sqrt{a-b\,cos(\theta-\theta_0)}\right)^3} + \frac{n_z(z_0-z)}{\left(\sqrt{a-b\,cos(\theta-\theta_0)}\right)^3} - \frac{n_r}{2r\sqrt{a-b\,cos(\theta-\theta_0)}}.$$

З отриманих співвідношень установлюємо, що в розглядуваному інтегральному рівнянні будуть такі внутрішні інтеграли

$$I_3(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{cos\,\alpha\,\theta d\theta}{\left(\sqrt{a-b\,cos(\theta-\theta_0)}\right)^3}; \quad I_1(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{cos\,\alpha\,\theta d\theta}{\sqrt{a-b\,cos(\theta-\theta_0)}}.$$

Розглянемо I (1α). Зробимо в ньому заміну змінної

$$\psi = \theta - \theta_0; \quad \theta = \psi + \theta_0; \quad d\psi = d\theta.$$

Оскільки під знаком інтеграла перебуває періодична функція, яка інтегрується за періодом, то межі інтегрування не зміняться. Зокрема, ми можемо брати не(0,2π) , а (–π, π) . Отримаємо

$$I_1(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{cos\,\alpha(\psi+\theta_0)d\psi}{\sqrt{a-b\,cos\,\psi}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{cos\,\alpha\psi\,cos\,\alpha\theta_0 d\psi}{\sqrt{a-b\,cos\,\psi}} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{sin\,\alpha\psi\,sin\,\alpha\theta_0 d\psi}{\sqrt{a-b\,cos\,\psi}}.$$

Зауважимо, що другий доданок тут представляє інтеграл від непарної функції по симетричному проміжку, і, отже, дорівнює 0, а перший доданок - це інтеграл від парної функції по симетричному проміжку, тому отримаємо

$$I_1(\alpha) = 2\,cos\,\alpha\,\theta_0 \int_0^{\pi} \frac{cos\,\alpha\psi d\psi}{\sqrt{a-b\,cos\,\psi}}. \qquad (2.20)$$

Абсолютно аналогічно встановимо, що

$$I_3(\alpha) = 2\cos\alpha\,\theta_0 \int_0^{\pi} \frac{\cos\alpha\psi d\psi}{\left(\sqrt{a-b\cos\psi}\right)^3}. \qquad (2.21)$$

Формули (2.18), (2.21) показують, що розкладання в ряди Фур'є припустиме.

Наведемо інтеграли до вигляду, який використовується в[15] .

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\alpha\psi d\psi}{\sqrt{a-b\cos\psi}} = \int_0^{\pi} \frac{\cos\alpha\psi d\psi}{\sqrt{a+b-2b\cos^2(\psi/2)}} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha\psi d\psi}{\sqrt{a+b-2b\cos^2\psi}}.$$

Зробимо в отриманому останньому інтегралі заміну змінної

$$\psi_1 = \pi/2 - \psi; \quad d\psi_1 = -d\psi.$$

Будемо мати

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\alpha\psi d\psi}{\sqrt{a-b\cos\psi}} = 2(-1)^{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha\psi d\psi}{\sqrt{a+b-2b\sin^2\psi}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}} F_{\alpha}(k); \quad k^2 = \frac{2b}{a+b}.$$

Тут введено позначення

$$F_{\alpha}(k) = (-1)^{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha\psi d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

При α= 0 маємо стандартний еліптичний інтеграл другого роду.

Аналогічно отримуємо

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\alpha\psi d\psi}{\left(\sqrt{a-b\cos\psi}\right)^3} = \frac{2(-1)^{\alpha}}{\left(\sqrt{a+b}\right)^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha\psi d\psi}{\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\right)^3}.$$

після перетворень знаходимо

$$(-1)^{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha\psi d\psi}{\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\right)^3}$$

$$= \frac{1}{k'^2} E_{\alpha}(k) - 2\alpha(-1)^{\alpha} \frac{k^2}{k'^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\alpha\psi \sin\psi \cos\psi\, d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

$$= \frac{1}{k'^2} E_{\alpha}(k)$$

Тут введено позначення

$$E_\alpha(k) = (-1)^\alpha(1-4\alpha^2)\int_0^{\pi/2} cos\,2\,\alpha\psi\sqrt{1-k^2\,sin^2\,\psi}\,d\psi.$$

При α= 0 маємо стандартний еліптичний інтеграл першого роду.

Уведемо позначення. Нехай Г - твірна поверхні S1 . На поверхні S1 буде $r = r(z)$.

З урахуванням отриманих формул встановлюємо, що система (12) набуває вигляду

$$2\pi\phi(z_0) + \int_\Gamma \phi(z)Q\,(z,z_0)r(z)d\Gamma - \int_0^R q(\rho)\Psi(P,P_0)\rho d\rho = \int_\Gamma w\,(z)\Psi(P,P_0)r(z)d\Gamma_1; P_0 \in S_1$$

$$\int_\Gamma \phi(z)Q\,(z,z_0)r(z)d\Gamma - \int_0^R q(\rho)\Psi(P,P_0)\rho d\rho =$$

$\int_\Gamma w\,(z)\Psi(P,P_0)r(z)d\Gamma_1; P_0 \in S_0.$

Тут

$$Q(z,z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}}\left\{\frac{1}{2r}\left[\frac{r^2-r_0^2+(z_0-z)^2}{a-b}E_\alpha(k) - F_\alpha(k)\right]n_r + \frac{z_0-z}{a-b}E_\alpha(k)n_z\right\},$$

$$\Psi(P,P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}}F_\alpha(k).$$

Зазначимо, що величини a і b обчислюються на відповідних поверхнях. При обчисленні за S0 матимемо (тут ми вводимо полярні координати)

$$a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z^* - z_0)^2; \quad b = 2\rho\rho_0.$$

У цих співвідношеннях z* - координата вільної поверхні.

Отже, для кожного $w = w(r,z)\cos\alpha\theta$ маємо систему інтегральних рівнянь.

Установимо, який характер мають особливості в ядрах цієї системи

З подання функції $F_0(k)$ для k , близьких до 1, маємо

$$F_0(k) = ln\frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(ln\frac{4}{k'} - \frac{2}{1\cdot 2}\right)k'^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(ln\frac{4}{k'} - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{2}{3\cdot 4}\right)k'^4 + \ldots,$$

$k'^2 = 1 - k^2$.

Звідси випливає, що $F_0(k)$ має логарифмічну особливість при $z \to z_0$, що відповідає k, близьким до одиниці.

Для довільних цілихα будемо користуватися такими формулами

$$F_\alpha(k) = (-1)^\alpha F_0(k) + N_\alpha(k),$$

де

$$N_\alpha(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{f_\alpha(\theta)d\theta}{\sqrt{1-k^2\,sin^2\,\theta}}, \qquad f_\alpha(\theta) = \begin{cases} -2\,sin^2\,\alpha\,\theta; & \alpha = 2m+1; \\ 2\,cos^2\,\alpha\,\theta; & \alpha = 2m. \end{cases}$$

З наведених співвідношень видно, що функція $F_\alpha(k)$ також має логарифмічну особливість. Функція $E_\alpha(k)$ не має особливості при $z \to z_0$.

Розглянемо вираз

$$Q(z, z_0) = \frac{n_r}{2r}\frac{r_0^2 - r^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} + \frac{z_0 - z}{a-b}n_z,$$

що являє собою множник при функції $E_\alpha(k)$ у ядрі. Покажемо, що $Q(z, z_0)$ також не має особливості при $z \to z_0$.

Оскільки розглядається мала особлива область, то можна вважати, що виконано наближені рівності, які випливають із розкладень у ряд Тейлора

$$r^2 - r_0^2 \approx 2r_0 r_0'(z - z_0); \quad a - b = (r - r_0)^2 + (z - z_0)^2 \approx \left(1 + (r_0')^2\right)(z - z_0)^2.$$

Звідси

$$Q(z, z_0) \approx \frac{n_r\left[-(z_0 - z)2r_0 r_0' + (z_0 - z)^2\right]}{2r_0(z_0 - z)^2\left(1 + (r_0')^2\right)} + \frac{z_0 - z}{(z_0 - z)^2\left(1 + (r_0')^2\right)}n_z =$$

$$= \frac{1}{(z_0 - z)\left(1 + (r_0')^2\right)}\left[\frac{n_r\left[-2r_0 r_0' + (z_0 - z)\right]}{2r_0} + n_z\right] =$$

$$= \frac{n_r}{2r_0\left(1 + (r_0')^2\right)} + -\frac{1}{(z_0 - z)\left(1 + (r_0')^2\right)}\left(n_r r_0' + n_z\right).$$

За визначенням нормалі до поверхні маємо

$$\boldsymbol{n}|\boldsymbol{n}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ r'\cos\theta & r'\sin\theta & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}r\cos\theta + \boldsymbol{j}r\sin\theta + \boldsymbol{k}\left(-r'r\right);$$

$$|\boldsymbol{n}|^2 = r^2 + r^2 r'^2 = r^2\left(1 + r'^2\right); \quad n_r = \frac{1}{\sqrt{1 + r'^2}}; \quad n_z = \frac{-r'}{\sqrt{1 + r'^2}}.$$

Звідси отримуємо, що $n_r r_0' + n_z = 0$. А, отже, при $z \to z_0$ маємо

$$Q(z, z_0) \to \frac{n_r}{2r_0\left(1 + (r_0')^2\right)} = \frac{1}{2r_0\left(\sqrt{1 + (r_0')^2}\right)^3},$$

тобто функція $Q(z, z_0)$ є обмеженою при $z \to z_0$.

Таким чином, обидва ядра мають логарифмічну особливість.

Для обчислення інтегралів з логарифмічними особливостями будемо використовувати ортогональні многочлени $\{P_n(x)\}_{x=0}^n$ з логарифмічною вагою наступні

$$\int_0^1 P_i(x)P_k(x)\ln\frac{1}{x}dx = \begin{cases} \|P_i(x)\|^2, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}.$$

Розглянемо визначник

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{1}{n}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \left(\frac{1}{5}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+3}\right)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{1}{n}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{1}{2n-1}\right)^2 & \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix} \quad)$$

Маємо

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = \begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x - \frac{1}{4} \\ P_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = \frac{7}{144}x^2 - \frac{5}{144}x + \frac{17}{5184} \end{cases}$$

У таблиці 2.1. наведено коефіцієнти ваги і корені цих многочленів, що дає змогу побудувати квадратурні формули для обчислення інтегралів з логарифмічними особливостями [31].

Таблиця 2.1. - Вагові коефіцієнти та корені ортогональних многочленів із логарифмічною вагою

n	w_i (Вагові коефіцієнти)	x_i (Коріння многочленів)
2	0.71853931	0.11200880
	0.28146068	0.60227691

3	0.51340455	0.063890792
	0.39198004	0.36899706
	0.094615406	0.76688030
4	0.38346406	0.041448480
	0.38687532	0.24527491
	0.19043513	0.55616545
	0.039225487	0.84898239
5	0.29789346	0.029134472
	0.34977622	0.17397721
	0.23448829	0.41170251
	0.098930460	0.67731417
	0.018911552	0.89477136
6	0.23876366	0.021634005
	0.30828657	0.12958339
	0.24531742	0.31402045
	0.14200875	0.53865721
	0.055454622	0.75691533
	0.010168958	0.92266884

Використовуючи (2.17), вводяться матриці $A_{ij} = A(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j)$ та$B_{ij} = B(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j)$ Застосовуючи метод граничних елементів [23], систему (2.12) отримуємо таким чином

$$A_{11}\varphi_1 + A_{12}\varphi_{1i} = B_{12}q_1,\ P_0 \in \widetilde{S_1}, \qquad A_{21}\varphi_1 + A_{22}\varphi_{1i} = B_{22}q_1,\ P_0 \in \widetilde{S_2},$$

(2.18)

$$A_{32}\varphi_{1i} + A_{33}\varphi_2 + A_{34}\varphi_0 - \omega^2 B_{34}\varphi_0 = -B_{32}q_1,\ P_0 \in \widetilde{S_3},$$

$$A_{22}\varphi_{1i} + A_{23}\varphi_2 + A_{24}\varphi_0 - \omega^2 B_{24}\varphi_0 = -B_{22}q_1; \quad P_0 \in \widetilde{S_2}$$

$$A_{42}\varphi_{1i} + A_{43}\varphi_2 + A_{44}\varphi_0 - \omega^2 B_{44}\varphi_0 = -B_{42}q_1; \quad P_0 \in S_0, \qquad \omega^2 = \chi^2/g.$$

Після виключення невідомихφ_1, φ_{1i}, φ_2, та q_1 система (2. 18) перетворюється на задачу на власні значення $\mathbf{A}\varphi_0 - \omega^2\mathbf{B}\varphi_0 = 0$, де вирази для матриць A і B наведено в [2]. Розв'язки цієї задачі є базисними функціями для оцінки рівня і положення вільної поверхні.

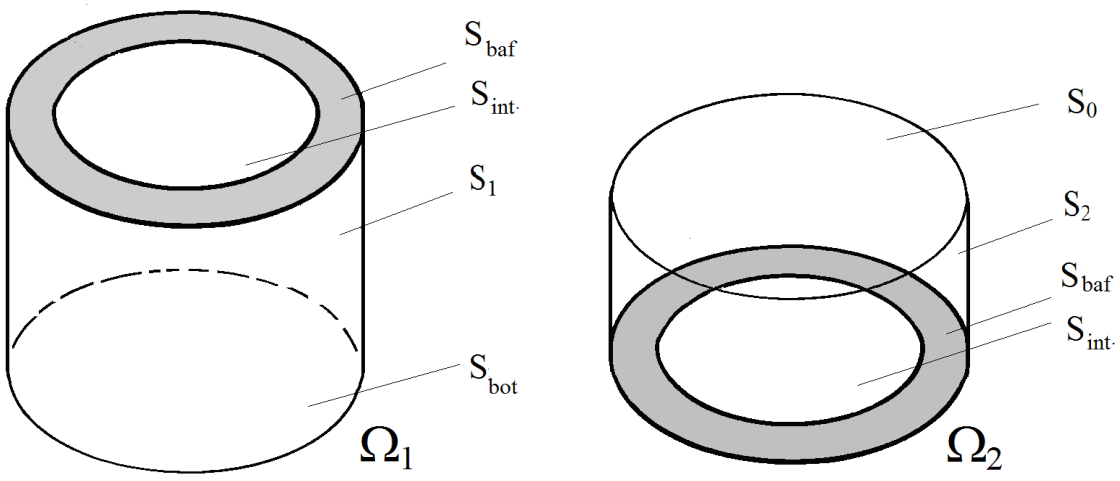
2.5 Метод підобластей

Щоб застосувати багатодоменний підхід, розділимо рідинний домен на два піддомени Ω1 іΩ2 , як показано на рисунку (2). Вводимо інтерфейсну поверхню Sint. Межі цих піддоменів позначаються $\Sigma_1 = S_{bot} \cup S_1 \cup S_{baf} \cup S_{int}$ і $\Sigma_2 = S_{baf} \cup S_{int} \cup S_1 \cup S_0$.

Введемо наступні позначення:φ1 іφ2 - значення потенціалу у вузлах на зовнішніх границях цистерни в піддоменах Ω1 іΩ2 відповідно. Потоки на цих жорстких поверхнях дорівнюють нулю.

Значення потенціалу та потоку на поверхні межі розділу становитимутьφ1і та $q_1 = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_{\text{int}}}$, якщо $S_{\text{int}} \subset \Sigma_1;$, таφ2і та $q_2 = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_{\text{int}}}$, якщо $S_{\text{int}} \subset \Sigma_2$, відповідно.

На вільній поверхні позначимо значення потенціалу у вузлах якφ0 , а значення потоку - як $q_0 = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{S_0}$.



a) b)

Рисунок 2: Піддомени рідини

Представляємо тут наступні деномінації $\sigma_1 = S_1 \cup S_{bot} \cup S_{baf}$ і $\sigma_2 = S_2 \cup S_{baf}$. Тут ми маємо

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\sigma_1} = 0; \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\sigma_2} = 0.$$

На поверхні інтерфейсу Sint діють такі рівності [12]:

$$\varphi_{2i} = \varphi_{1i}; \quad q_1 = -q_2.$$

Розглянемо тепер крайову задачу для визначення невідомих функцій. Як і в роботі [11], використовуючи співвідношення $q_0 = \frac{\chi^2}{g}\varphi_0$ на вільній поверхні та вводячи приведену частоту $\omega^2 = \frac{\chi^2}{g}$, отримаємо таку систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$2\pi\varphi_1(P_0) + \iint_{\sigma_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} d\sigma_1 + \iint_{S_{int}} \varphi_{1i} \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS_{int} - \iint_{S_{int}} q_1 \frac{1}{|P-P_0|} dS_{int} = 0; \quad P_0 \in \sigma_1;$$

(13)

$$2\pi\varphi_{1i}(P_0) + \iint_{\sigma_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} d\sigma_1 - \iint_{S_{int}} q_1 \frac{1}{|P-P_0|} dS_{int} = 0; \quad P_0 \in S_{int};$$

$$2\pi\varphi_2(P_0)+\iint\limits_{\sigma_2}\varphi_2\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\frac{1}{|P-P_0|}d\sigma_2+\iint\limits_{S_{\text{int}}}\varphi_{1i}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\frac{1}{|P-P_0|}dS_{\text{int}}+\iint\limits_{S_{\text{int}}}q_1\frac{1}{|P-P_0|}dS_{\text{int}}+$$
$$+\iint\limits_{S_0}\varphi_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\frac{1}{|P-P_0|}dS_0-\omega^2\iint\limits_{S_0}\varphi_0\frac{1}{|P-P_0|}dS_0=0;\quad P_0\in\sigma_2;$$

$$2\pi\varphi_{1i}(P_0)+\iint\limits_{\sigma_2}\varphi_2\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\frac{1}{|P-P_0|}d\sigma_2+\iint\limits_{S_{\text{int}}}q_1\frac{1}{|P-P_0|}dS_{\text{int}}+$$
$$+\iint\limits_{S_0}\varphi_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\frac{1}{|P-P_0|}dS_0-\omega^2\iint\limits_{S_0}\varphi_0\frac{1}{|P-P_0|}dS_0=0;\quad P_0\in S_{\text{int}};$$

$$\iint\limits_{\sigma_2}\varphi_2\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\frac{1}{|P-P_0|}d\sigma_2+\iint\limits_{S_{\text{int}}}\varphi_{1i}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\frac{1}{|P-P_0|}dS_{\text{int}}+\iint\limits_{S_{\text{int}}}q_1\frac{1}{|P-P_0|}dS_{\text{int}}+$$
$$2\pi\varphi_0(P_0)-\omega^2\iint\limits_{S_0}\varphi_0\frac{1}{|P-P_0|}dS_0=0;\quad P_0\in S_0$$

Припустимо, що є n1 точок коллокації, розподілених на поверхніσ1 ; n12 - розподілених на інтерфейсній поверхні Sint ; n2 точок, розподілених на поверхніσ2 , і n0 точок, розподілених на вільній поверхні S0 . На кожній поверхні, крім Sint , кількість невідомих збігається з кількістю точок колокації. На поверхні інтерфейсу кількість невідомих дорівнює вдвічі більшій кількості точок колокації. Отже, загальна кількість невідомих дорівнює

n1 + 2n12 + n2 + n0 .

Це число збігається з кількістю рівнянь у (13).

Зауважимо, що $\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\frac{1}{|P-P_0|}=0$ якщо обидві точки P і P0 належать Sint . Отже, систему інтегральних рівнянь (13) можна переписати в такому вигляді

Введемо наступні наступні інтегральні оператори:

$$A_{11}\phi_1=2\pi\phi_1(P_0)+\iint_{\sigma_1}\phi_1\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}\frac{1}{|P-P_0|}d\sigma_1;\quad A_{12}\phi_{1i}=\iint_{S_{int}}^{\int\int\frac{1}{|P-P_0|}_{int}}\phi_{1i}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}$$

(14)

$$B_{12}q_1 = \iint_{S_{int}}^{\int\int \frac{1}{|P-P_0|}0_1}{}_{int}\, q_1$$

$$A_{21}\varphi_1 = \iint_{\sigma_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} d\sigma_1; \quad A_{22}\varphi_{1i} = 2\pi E; \quad B_{22}q_1 = \iint_{S_{\text{int}}} q_1 \frac{1}{|P-P_0|} dS_{\text{int}}; \quad P_0 \in S_{\text{int}};$$

$$A_{32}\varphi_{1i} = \iint_{S_{\text{int}}} \varphi_{1i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS_{\text{int}}; \quad A_{33}\varphi_2 = 2\pi\varphi_2(P_0) + \iint_{\sigma_2} \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} d\sigma_2;$$

$$B_{32}q_1 = \iint_{S_{\text{int}}} q_1 \frac{1}{|P-P_0|} dS_{\text{int}}; \quad B_{34}q_0 = \iint_{S_0} q_0 \frac{1}{|P-P_0|} dS_0; \quad P_0 \in \sigma_2;$$

$$A_{22}\varphi_{1i} = 2\pi E; \quad A_{23}\varphi_2 = \iint_{\sigma_2} \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} d\sigma_2;$$

$$B_{22}q_1 = \iint_{S_{\text{int}}} q_1 \frac{1}{|P-P_0|} dS_{\text{int}}; \quad B_{24}q_0 = \iint_{S_0} q_0 \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 \quad P_0 \in S_{\text{int}};$$

$$A_{24}\varphi_0 = \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS_0; \; P_0 \in \sigma_2; \; A_{44}\varphi_0 = 2\pi\varphi_0 E; \; P_0 \in S_{\text{int}};$$

$$A_{42}\varphi_{1i} = \iint_{S_{\text{int}}} \varphi_{1i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS_{\text{int}}; \quad A_{43}\varphi_2 = \iint_{\sigma_2} \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} d\sigma_2;$$

$$B_{42}q_1 = \iint_{S_{\text{int}}} q_1 \frac{1}{|P-P_0|} dS_{\text{int}}; \quad B_{44}q_0 = \iint_{S_0} q_0 \frac{1}{|P-P_0|} dS_0; \quad P_0 \in S_0.$$

Використовуючи інтегральні оператори (14), представимо (13) так

$$A_{11}\phi_1 + A_{12}\phi_{1i} = B_{12}q_1; \quad P_0 \in \sigma_1;$$

$$A_{21}\phi_1 + A_{22}\phi_{1i} = B_{22}q_1; \quad P_0 \in S_{int} \qquad (15)$$

$$A_{32}\phi_{1i} + A_{33}\phi_2 + A_{34}\phi_0 - \omega^2 B_{34}\phi_0 = -B_{32}q_1; \quad P_0 \in \sigma_2;$$

$$A_{22}\phi_{1i} + A_{23}\phi_2 + A_{24}\phi_0 - \omega^2 B_{24}\phi_0 = -B_{22}q_1; \quad P_0 \in S_{int}$$

$$A_{42}\phi_{1i} + A_{43}\phi_2 + A_{44}\phi_0 - \omega^2 B_{44}\phi_0 = -B_{42}q_1; \quad P_0 \in S_0.$$

З перших двох рівнянь у (15) можна отримати вирази дляφ1 іφ1i наступним чином

$$\phi_1 = F_{\ 2}q_1; \quad \phi_{1i} = F_{2i}q_1. \qquad (16)$$

Тут

$$F_2 = A_\phi^{-1} B_{q_1}; \quad A_\phi = A_{11} - \frac{1}{2\pi} A_{12} A_{21}; \quad B_{q_1} = B_{12} - \frac{1}{2\pi} A_{12} B_{22;}; \qquad F_{2i} = \frac{1}{2\pi}(B_{22} - A_{21} F_2).$$

Четверте рівняння в (15) набуває вигляду

$$\phi_{1i} = \frac{1}{2\pi}(-A_{23}\phi_2 - A_{24}\phi_0 - B_{22} q_1 + \omega^2 B_{24}\phi_0); \quad P_0 \in S_{int}$$

Підстановка цього співвідношення в третє рівняння в (15) дає

$$\left(A_{33} - \frac{1}{2\pi} A_{32} A_{23}\right)\phi_2 = -\left(A_{34} - \frac{1}{2\pi} A_{32} A_{24}\right)\phi_0 - \left(B_{32} - \frac{1}{2\pi} A_{32} B_{22}\right) q_1 +$$
$$+\omega^2 \left(B_{34} - \frac{1}{2\pi} A_{32} B_{24}\right)\phi_0; \quad P_0 \in \sigma_2.$$

Отже, з третього та четвертого двох рівнянь у (15) можна отримати вирази дляφ2 та у такому виглядіφ1i

$$\phi_2 = G_{\ 2} q_1 + \omega^2 G_{\ 3}\phi_0 + G_4\phi_0; \quad \phi_{1i} = G_{2i} q_1 + \omega^2 G_{3i}\phi_0 + G_{4i}\phi_0. \qquad (17)$$

Тут

$$A_\phi = A_{33} - \frac{1}{2\pi} A_{32} A_{23}; \quad G_4 = -A_\phi^{-1}\left(A_{34} - \frac{1}{2\pi} A_{32} A_{24}\right); \quad G_2 = -A_\phi^{-1}\left(B_{32} - \frac{1}{2\pi} A_{32} B_{22}\right);$$

$$G_3 = A_\phi^{-1}\left(B_{34} - \frac{1}{2\pi} A_{32} B_{24}\right); \quad P_0 \in \sigma_2.$$

$$A_{32}\phi_{1i} + A_{33}\phi_2 + A_{34}\phi_0 - \omega^2 B_{34}\phi_0 = -B_{32} q_1; \quad P_0 \in \sigma_2;$$
$$A_{22}\phi_{1i} + A_{23}\phi_2 + A_{24}\phi_0 - \omega^2 B_{24}\phi_0 = -B_{22} q_1; \quad P_0 \in S_{int}$$
$$A_{42}\phi_{1i} + A_{43}\phi_2 + A_{44}\phi_0 - \omega^2 B_{44}\phi_0 = -B_{42} q_1; \quad P_0 \in S_0.$$

$$G_{2i} = -\frac{1}{2\pi}(A_{23} G_2 + B_{22}); \quad G_{3i} = -\frac{1}{2\pi}(A_{23} G_3 - B_{24}); \quad G_{4i} = -\frac{1}{2\pi}(A_{23} G_4 + A_{24}).$$

Прирівнявши два вирази для φ_{1I} з рівнянь (16) і (17), можна визначити q1 наступним чином

$$q_1 = \omega^2 D_3 \varphi_0 + D_4 \varphi_0; \qquad (18)$$

$$D_3 = \left(F_{2i} - G_{2i}\right)^{-1} G_{3i}; \quad D_4 = \left(F_{2i} - G_{2i}\right)^{-1} G_{4i}$$

Тож

$$\varphi_2 = \Phi_\varphi \varphi_0 + \omega^2 \Phi_\omega \varphi_0; \quad \varphi_{1i} = \Phi_{\varphi i} \varphi_0 + \omega^2 \Phi_{\omega i} \varphi_0;$$

$$\Phi_\varphi = G_2 D_4 + G_4; \quad \Phi_\omega = G_2 D_3 + G_3; \quad \Phi_{\varphi i} = G_{2i} D_4 + G_{4i}; \quad \Phi_{\omega i} = G_{2i} D_3 + G_{3i}.$$

Розглядаючи п'яте рівняння в (15), маємо

$$A_{42}\left(\Phi_{\varphi i}\varphi_0 + \omega^2 \Phi_{\omega i}\varphi_0\right) + A_{43}\left(\Phi_\varphi \varphi_0 + \omega^2 \Phi_\omega \varphi_0\right) + A_{44}\varphi_0 - \omega^2 B_{44}\varphi_0 = -B_{42}\left(\omega^2 D_3 + D_4\right)\varphi_0; \quad P_0 \in S_0.$$

Зрештою отримаємо наступну власну задачу з власними значеннями

$$A\varphi_0 - \omega^2 B\varphi_0 = 0,$$

де

$$A = A_{42}\Phi_{\varphi i} + A_{43}\Phi_\varphi + A_{44} + B_{42}D_4; \quad B = -A_{42}\Phi_{\omega i} - A_{43}\Phi_\omega + B_{44} - B_{42}D_3.$$

Зазначимо, що запропонований підхід можна розглядати як варіант багатодоменного BEM (MBEM), в якому весь домен розбито на кілька піддоменів, що дає змогу досягти кращої обчислювальної продуктивності, ніж у випадку з однодоменним BEM (SBEM).

2.6 Числові дослідження

Далі розглянуто задачі про вільні та вимушені коливання рідини в жорстких циліндричних резервуарах без перегородок і перегородками. Вважається, що зовнішнє навантаження може діяти в горизонтальному або вертикальному напрямку. Схеми резервуарів наведено на рис. 1.

Спочатку проведемо тестування методу.

Вільні коливання рідини в резервуарах

Для циліндричних резервуарів без перегородки форми коливань, отримані за допомогою методу інтегральних рівнянь [4]. Це дало змогу провести дослідження коливань рідини в циліндричному резервуарі за наявності внутрішніх горизонтальних і конічних перегородок [3]. У роботі [13] доведено, що розв'язком крайової задачі для резервуара з вертикальними перегородками є потенціал φ, який у циліндричній системі координат має вигляд

$$\phi(r,z,t,\theta) =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\cos 2m\theta \sin(\omega_{mn}t)\frac{\cosh[\xi_{mn}(z+h)/R]}{\cosh(\xi_{mn}h)}J_{2m}\left(\frac{\xi_{mn}r}{R}\right)$$

Частоти вільних коливань рідини обчислюються за формулою

$$\omega_{mn}^2 = \frac{g}{R}\xi_{mn}\tanh\left(\frac{\xi_{mn}h}{R}\right), \quad m = 0,1\ldots; \quad n = 1,2,\ldots \qquad (2.19)$$

Функціяζ для опису змінного рівня вільної поверхні подається в такій формі:

$$\zeta(r,z,t,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty\sum(\omega_{mn}t)\,J_{2m}\left(\frac{\xi_{mn}r}{R}\right)}\sum_{n=1}^{\infty\sum} A_{mn}\omega_{mn}\cos 2m\theta cos.$$

У наведених виразах J_{2n} це функції Бесселя першого роду, ξ_{mn} є корені трансцендентного рівняння

$$\left.\frac{d\,\mathrm{J}_{2m}\left(\xi_{mn}r/R\right)}{dr}\right|_{r=R} = 0.$$

Числові результати отримано за допомогою методу граничних елементів [31]. Використано по 100 граничних елементів уздовж радіуса днища (Nbot), змоченої циліндричної частини та уздовж радіуса вільної поверхні (N0). На поверхнях інтерфейсу та перегородки використано різну кількість елементів залежно від їхніх розмірів. Розглянуто різні значення для Rint та H1 . Застосовано аналітичний розв'язок (1.19) для дослідження достовірності числового розрахунку.

Для тестування суперелементного підходу розраховано власні частоти коливань рідини в резервуарі при встановленні перегородки на рівнях H1 =0.5 м, H1 =0.9 м, з Rint =0.7 м, H =1.0 м. Порівняння результатів з обчислення частотного параметра $\omega^2 = \chi^2 / g$, отриманих запропонованим методом граничних елементів, і даних з [60] наведено в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2. Порівняння даних для $\omega^2 = \chi^2 / g$,.

Рівень перегородки	метод	n=1	n=2	n=3	n=4
H1 =0.5	МГЕ	3.756	7.012	10.176	13.328
	[60]	3.759	7.010	10.173	13.324
H1 =0.9	МГЕ	2.278	6.200	9.609	12.810
	[60]	2.286	6.197	9.608	12.808

Результати, отримані двома методами, добре узгоджені, що свідчить про вірогідність підходу.

Три перші форми коливань рідини в циліндричному резервуарі з горизонтальними перегородками та без них для нульової гармоніки наведено на рисунку 2.2.

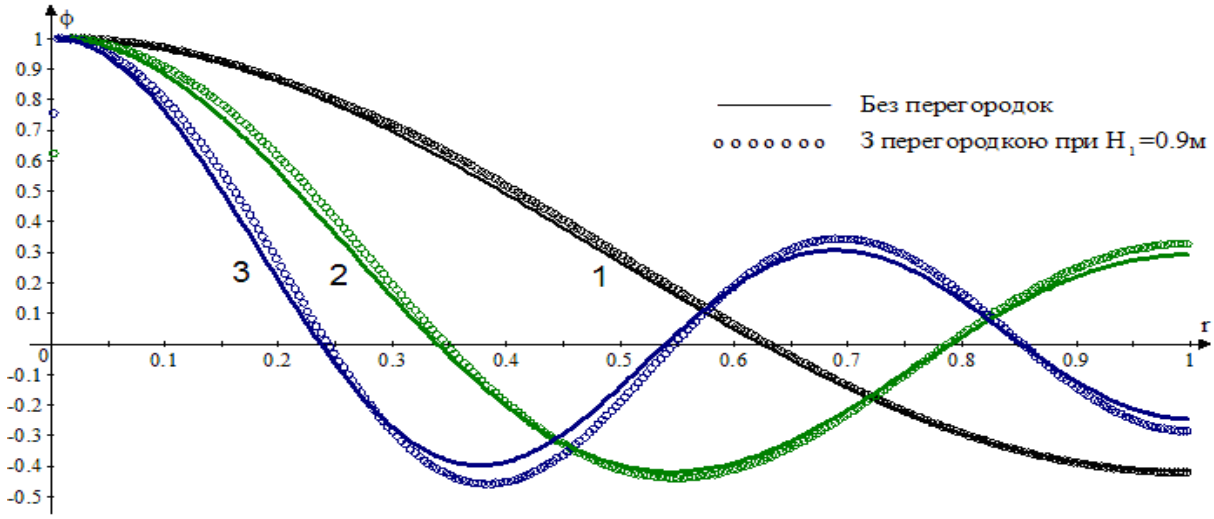


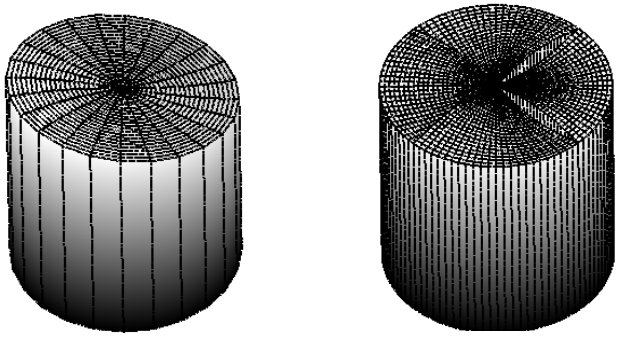
Рис. 2.2. Форми коливань рідини в циліндричному резервуарі.

Криві на рисунку 2.2 відповідають таким параметрам: радіусу Rint =0.2м і висоті H1 =0.9м. Номери кривих 1,2,3 на рис. 2.2 відносяться до першої, другої та третьої форм коливань.

Перегородка з параметрами Rint =0.2м, H1 =0.9м призводить до суттєвого зменшення частот. Форми коливань вільної поверхні рідини в резервуарах з перегородками схожі з формами коливань для аналогічних резервуарів без перегородок.

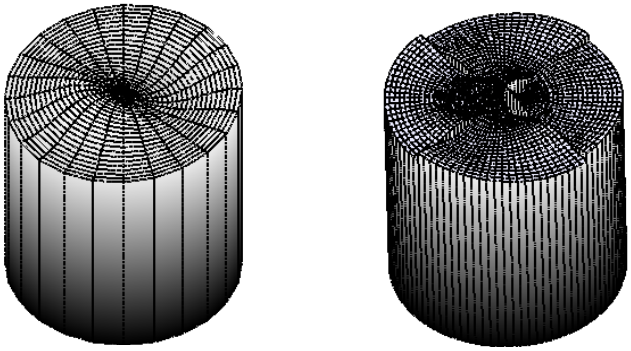
На відміну від коливань рідини в резервуарах із вертикальними перегородками спостерігається інша картина коливань. Тут коливання відбуваються в кожному секторі окремо. Частоти коливань у таких резервуарах вищі, ніж у резервуарах без перегородок.

Форми коливань вільної поверхні рідини в циліндричних резервуарах із вертикальними перегородками та без них зображено на рисунку 2.3.



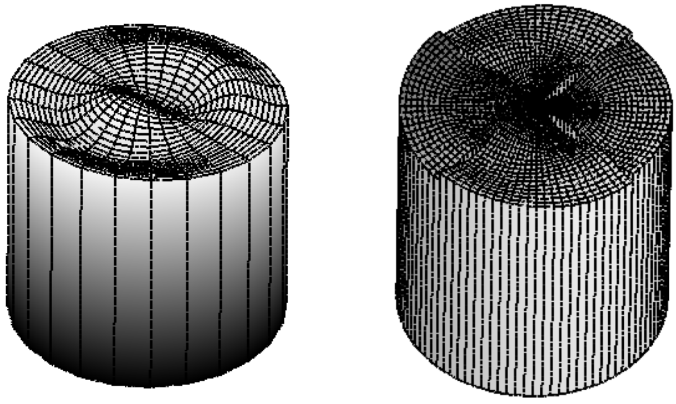
а) б)

перша форма коливань вільної поверхні рідини в циліндричних оболонках



а) б)

друга форма коливань вільної поверхні рідини в циліндричних оболонках



третя форма коливань вільної поверхні рідини в циліндричних оболонках.

Рис. 2.3. Форми коливань вільної поверхні в циліндричних резервуарах.

Підставивши вирази для потенціалу швидкостей у граничну умову на вільній поверхні та виконавши скалярне множення на власні форми коливань, доходимо до таких диференціальних співвідношень Підставивши цей вираз у граничну умову на вільній поверхні та виконавши скалярне множення на власні форми коливань, доходимо до таких диференціальних співвідношень у випадку дії збуджувальної сили.

$$\ddot{d}_k + \omega_{1k}^2 d_k + a_s(t) F_k = 0; \quad F_k = \frac{(r,\phi_k)}{(\phi_k,\phi_k)}; \quad k = \overline{1,M}$$

(2.20)

Якщо збуджувальна сила діє у вертикальному напрямку, то маємо

$$\ddot{d}_k + \omega_{1k}^2 \left[d_k + \frac{a_s(t)}{g} \right] = 0; \qquad k = \overline{1,M}$$

$$\ddot{d}_k + \omega_{1k}^2 d_k + a_s(t) F_k = 0; \quad F_k = \frac{(r,\phi_k)}{(\phi_k,\phi_k)}; \quad k = \overline{1,M}$$

(2.30)

До системи (2.30) додаємо початкові умови. Якщо в початковий момент система перебувала у стані спокою, то ці початкові умови будуть нульовими.

Для порівняння наведено частоти та форми коливань у циліндричному резервуарі без перегородок

Таблиця 2.1 Частота і частотний параметр для циліндричної оболонки без перегородки

n		1	2	3	4	5
Параметр частоти	BEM	1.750	5.332	8.538	11.709	14.870
	Аналітичне рішення (26)	1.750	5.331	8.536	11.706	14.864
Частота		4.141	7.227	9.1429	10.707	12.071

Перші 4 режими розбризкування рідини в неперегородковому циліндричному резервуарі без перегородки показано на рис. 3.

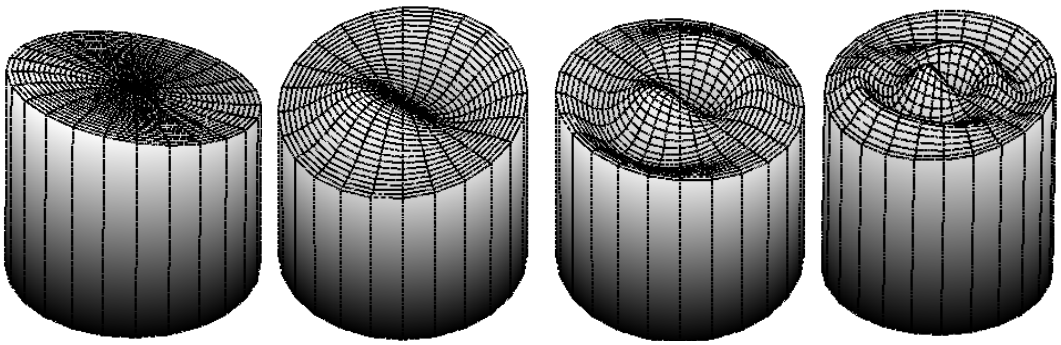


Рис. 3. Режими вільних поверхневих коливань у циліндричному резервуарі без перегородки

Обговорено вплив перегородок. Розраховано частоти природного розбризкування дляα =1 при H1 =0,5 м, H1 =0,9 м та при R2 =0,7 м. Проведено порівняння результатів, отриманих за допомогою запропонованого BEM та аналітично орієнтованого підходу, представленого I. Гаврилюком та ін. Гаврилюком та ін. у роботі [21], продемонстровано в табл. 3.

Таблиця 4. Порівняння аналітичних і чисельних результатів,α =1

Посада	метод	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
	MBEM	1.3663	5.2941	8.5359	11.7097	14.870

H1 =0.5	[21]	1.3662	5.2940	8.5357	11.7092	14.864
H1 =0.9	MBEM	0.7078	4.5066	8.1947	11.5556	14.850
	[21]	0.7079	4.5068	8.1945	11.5550	14.832

Чотири перші моди коливань рідини в перегородчастих і неперегородчастих резервуарах показано на рис. 4. Розглянемо перегородку з R2 =0,2 м і H1 =0,9 м (див. рис. 1).

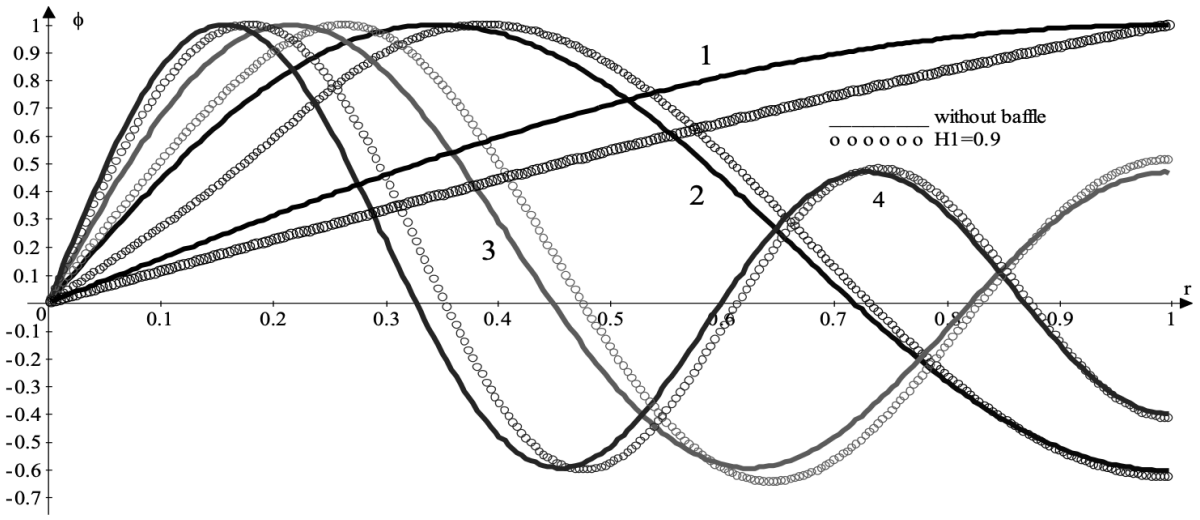


Рисунок 4. Режими вільних поверхневих коливань без перегородки та з перегородкою, =1α

Тут цифри 1,2,3,4 відповідають першій, другій, третій і четвертій модам. Вплив перегородки більш значний, коли перегородка розташована біля вільної поверхні.

Наведені результати можуть слугувати основою для проектування рідинних ємностей, що піддаються зовнішнім збудженням, частоти яких можуть бути близькими до найнижчої природної частоти коливань рідини.

РОЗДІЛ 3. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ В РЕЗЕРВУАРІ.

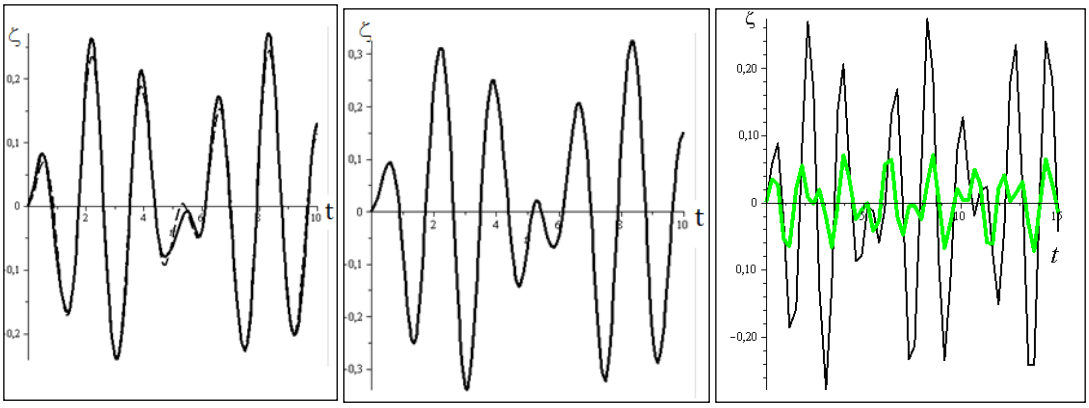
3.1 Циліндричні оболонки в умовах бічних гармонічних збуджень

Розглянуто циліндричні оболонки з перегородками та без них. Тут і далі для всіх оболонок припускаємо, що радіус R = 1м, а рівень заповнення H = 1м. Резервуар піддається періодичному навантаженню $a_x(t) = a_1 \cos \omega t$, що діє в горизонтальному напрямку. Отже, розглядаються тільки неосесиметричні режими зα = 1. Припустимо, що до застосування горизонтального навантаження резервуар перебував у стані спокою. Отже, потрібно розв'язати систему (2.30) за нульових початкових умов. З рівнянь (2.30) випливає, що за цих початкових умов отримаємо

$$d_{1k}(t) = \frac{a_1 F_{1k}}{\chi_{1k}^2 - \omega^2}\left(\cos \omega t - \cos \chi_{1k} t\right), \quad F_{1k} = \frac{(r, \varphi_{1k})}{(\varphi_{1k}, \varphi_{1k})}, \quad k = \overline{1, M}.$$

(3.1)

Для отримання висоти вільної поверхні використовуємо рівняння (3.7). На рис. 3.1а) і 3.1б) показано часові історії висоти вільної поверхні в точках $\rho = 0.5R, z = \zeta$ і$\rho = R, z = \zeta$, відповідно, заθ = 0,ω = 3Гц, $a_1 = 1$ протягом 10 сек.



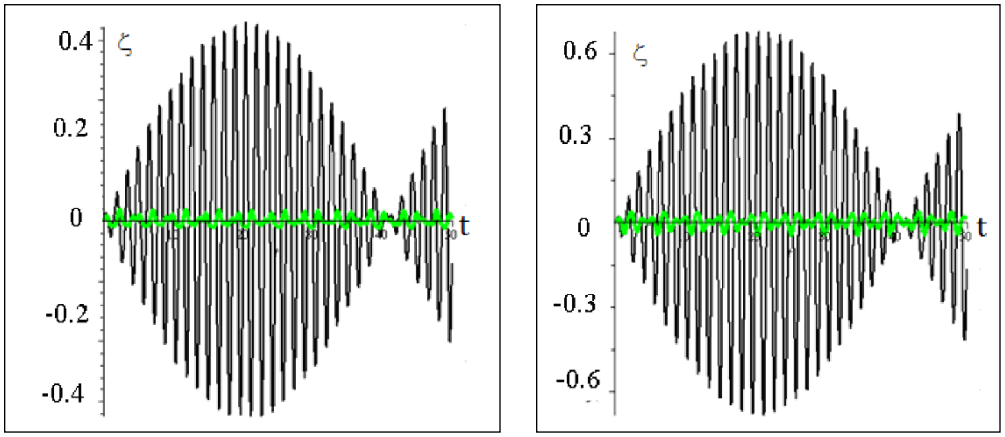
a b c

Рис. 3.1. Часові історії піднесення вільної поверхні.

Зауважимо, що збіжність досягається при M = 4, рівняння (3.7). Рисунок 2а демонструє відмінності в ζ при M = 2 (пунктирна лінія) і M = 4 (суцільна

лінія). Результати для M = 4 і M = 5 практично збіглися. Розглянемо збудження $a_x(t) = \cos 3t$. Його частота відрізняється від власних частот як оболонки без перегородки, так і оболонки з вертикальними перегородками. Рис. 2в демонструє суттєве зменшення амплітуди сплескування рідини за наявності вертикальних перегородок. Чорна лінія тут відповідає циліндричній оболонці без перегородок, а зелена - піднесенню вільної поверхні за наявності вертикальних перегородок у точціθ = 0, $\rho = R, z = \zeta$ протягом 15 сек.

На рис. 3а і 3б показано часові історії піднесення вільної поверхні в точках θ = 0, $\rho = 0.5R, z = \zeta$ іθ = 0, $\rho = R, z = \zeta$, відповідно, на частотіω = 4 Гц впродовж 50 сек.



a b

Рис. 3. Часові історії висоти вільної поверхні, приω = 4 Гц.

Зелені лінії тут відповідають висоті вільної поверхні за наявності горизонтальної перегородки (H2 = 0,9 м, R1 = 0,7 м). З отриманих результатів можна зробити висновок, що у випадку, коли частота збудженняω = 4 Гц наближається до першої природної частоти сльоскоструминної діяльностіω = 4,14 Гц, виникає ефект явища биття. Після встановлення перегородки амплітуди коливань різко зменшуються. Зазначимо, що амплітуди підйому вільної поверхні в неперегородженому резервуарі під час биття є дуже великими, тож необхідно враховувати проблеми нелінійного формулювання. Зауважимо, що для циліндричного чверть-бака, рис. 1г, явище биття з більш

малими амплітудами настає тоді, коли частота збудження наближається до ω = 5,5 Гц.

3.2 Циліндричні оболонки при поздовжніх гармонічних збудженнях.

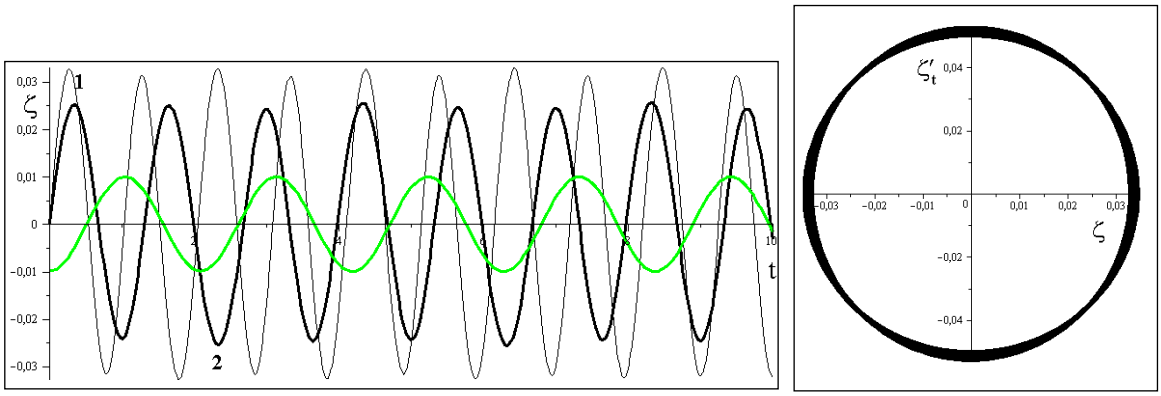
Розглянемо оболонки, зображені на рис. 1, які перебувають під поздовжнім гармонічним збудженням $a_z(t) = -a_2 \cos \omega t$. Тоді система (2.30) перетворюється на незв'язані рівняння Матьє

$$\ddot{d}_{0k} + \chi_{0k}^2 \left(1 - \frac{a_2 \cos \omega t}{g} \right) d_{0k} = 0, \ k = \overline{1, M}. \tag{3.2}$$

Досліджено параметричні коливання циліндричних оболонок з перегородкою та без перегородки, спричинені поздовжніми збудженнями $a_z(t) = -a_2 \cos \omega t$ за різних частот збудженняω . На рис. 3.4а, 3.4в, 3.4е наведені часові історії піднесення вільної поверхні, а на рис. 4б, 4г, 4ф - фазові портрети неперегородкових оболонок у координатах ζ, ζ_t' у точці $\rho = 0, \ z = \zeta$ у $\dot{d}_{01}(0) = 0.05, \ \dot{d}_{0k}(0) = 0.0, k = \overline{2, M}, \ d_{0k}(0) = 0, \ k = \overline{1, M}$. Тут і далі зеленими лініями позначені графіки вертикальних збуджень, цифрами 1 і 2 відмічені залежні від часу графіки піднесень вільних поверхонь не загороджених циліндричних циліндричних баків (рис. 1а) і баків із горизонтальними перегородками (рис. 1б). Параметри перегородки - H2 = 0,9 м, R1 = 0,7 м. З'ясовано, що вплив вертикальних перегородок (рис. 1д) недостатній у разі поздовжніх збуджень.

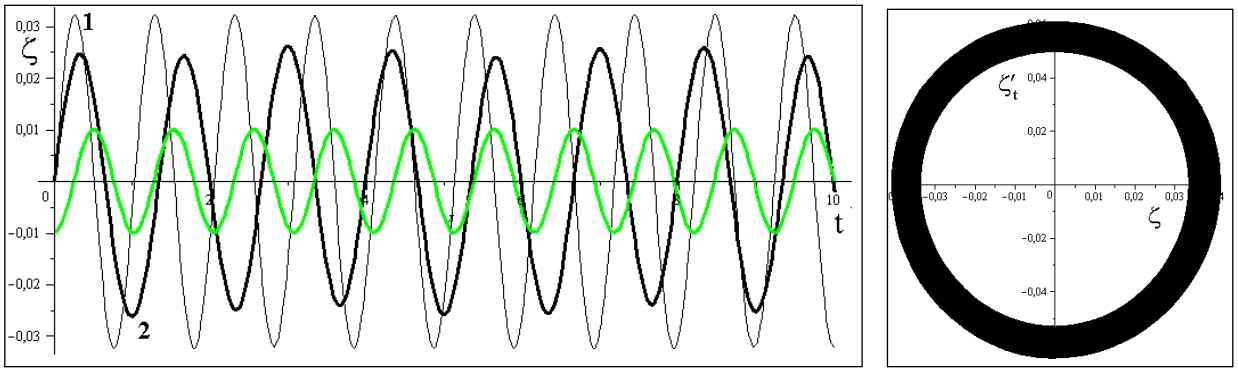
Рівняння (3.2) добре відомі, а їхні розв'язки були предметом багатьох досліджень. У цій роботі використано алгебраїчний метод їхнього розв'язання [22].

Зауважимо, що, на відміну від вимушених бічних збуджень із нульовими початковими умовами для всіх невідомих, у випадку параметричних коливань для отримання ненульових розв'язків рівнянь (3.2) потрібно задати хоча б одне ненульове початкове значення.



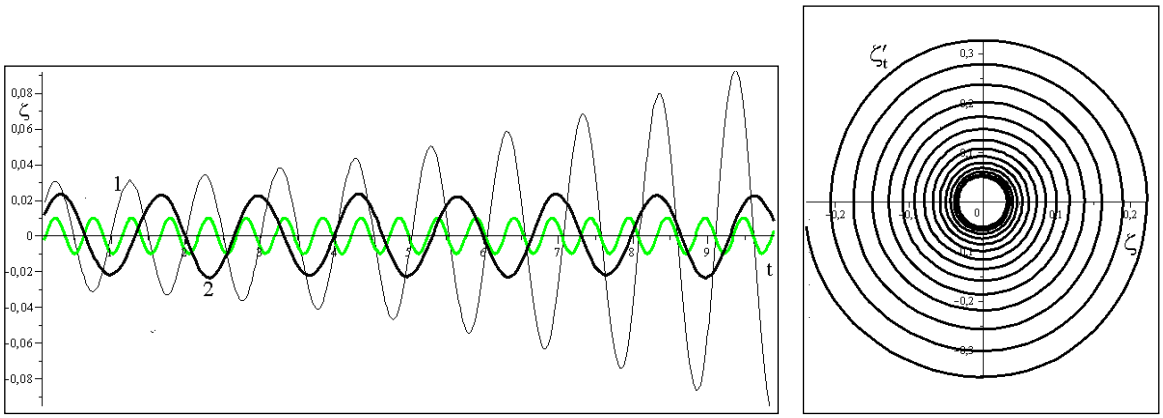
a b

ω = 3 Гц, $a_2 = 1$



c d

ω = 6,125 Гц, $a_2 = 1$



e f

ω = 12,25 Гц, $a_2 = 1$

Рис. 5.4. Часові історії та фазові портрети висоти вільної поверхні.

Коливання вільної поверхні при вертикальному гармонічному збудженні є параметричним сльошуванням. Тому в залежності від значень параметрів можуть виникати нестабільні коливання. Субгармонійний (або принциповий) параметричний резонанс виникає, коли ємність із рідиною вертикально збуджується на частоті, близькій до подвоєної частоти природного сльошування. Це призводить до нескінченно зростаючої висоти вільної поверхні (рис. 5.4e, 5.4f).

Зауважимо, щоω = 6,125 Гц є першою природною частотою неперегородженого резервуара. Аналізуючи фазовий портрет, що відповідає цій частоті, можна дійти висновку, що система близька до втрати стійкості, але часова історія демонструє періодичну поведінку (рис. 4в). Для майже вдвічі нижчої частоти природної частоти вільної поверхні коливання, спричинені періодичним збудженням, набувають зростаючого характеру (рис. 4e,4f).

Для більш детальної оцінки областей стійкості використовуємо діаграму Інса-Струтта у вигляді, представленому в роботі [23]. Для цього трансформуємо рівняння (2.30) наступним чином:

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + \kappa(1 - \mu\, cos\, \tau)u = 0, \quad \tau = \omega t, \quad \kappa = \frac{\chi_k^2}{\omega^2}, \quad \mu = \frac{a_2}{g}, \quad u = d_{0k}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (3.3)$$

Діаграма Інса-Струтта зображена на рис. 3.5. Тут отримано такі аналітичні вирази для кривих 1-5, які наведено в [23]:

$$\mu_1(\kappa) = 2\sqrt{\kappa(\kappa - 1)(\kappa - 4)/(3\kappa - 8)}, \quad \kappa < 0,$$

$$\mu_2(\kappa) = \frac{1}{4}\sqrt{(9 - 4\kappa)(13 - 29\kappa)} - (9 - 4\kappa), \quad 0 < \kappa < 1/4,$$

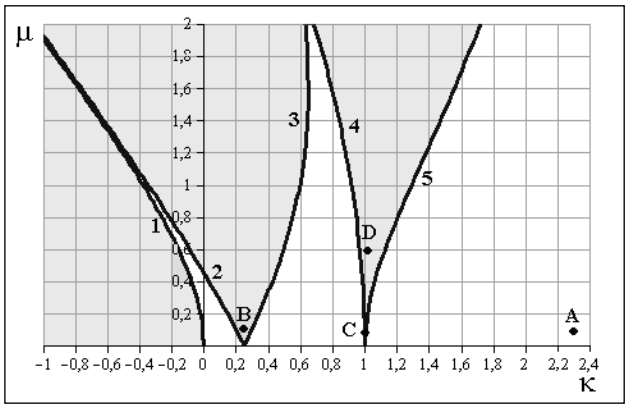
$$\mu_3(\kappa) = \frac{1}{4}\left(9 - 4\kappa \mp \sqrt{(9 - 4\kappa)(13 - 29\kappa)}\right), \quad 1/4 < \kappa < 13/20,$$

$$\mu_4(\kappa) = \sqrt{2(\kappa-1)(\kappa-4)(\kappa-9)/(\kappa-5)}, \quad 13/20 < \kappa < 1,$$

$$\mu_5(\kappa) = 2\sqrt{\kappa(\kappa-1)(\kappa-4)/(3\kappa-8)}, \quad \kappa > 1. \qquad (3.4)$$

Ці криві розділяють площину (,κμ) на області, що відповідають нестабільним рухам (заштриховані ділянки) і стабільним рухам, які залишаються обмеженими в часі (білі ділянки).

Тоді для результатів, зображених на рис. 4, отримано такі координати (,κμ) точок (A, B, C) на діаграмі Інса-Струтта для розглянутих випадків: A(2,34; 0,102); B(0,25; 0,102); C(1,00; 0,102). Точки (A, B, C) відповідають результатам, представленим на рис. 4a,4b; рис. 4c,4d; рис. 4e,4f відповідно. Точка C знаходиться на межі областей стійкості, тож якщо розглядати, наприклад,μ = 0,6, то в області нестабільності опиняється точка D з координатами D(1,00; 0,6). На графіках, зображених на рис. 6, показано висоту вільної поверхні в цій точці в неперегородженому (тонка лінія 1) і перегородженому (товста лінія 2) водосховищах.



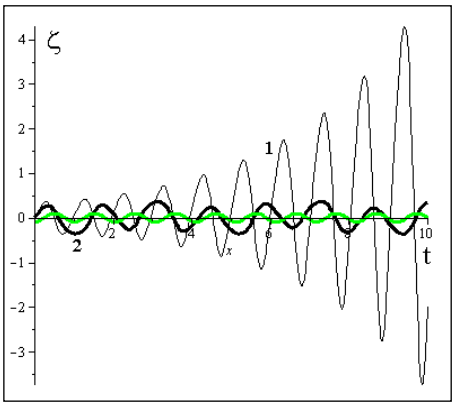


Рис. 3.5. Діаграма Інса-Струтта Рис. 3.6. Нестабільний рух у точці D

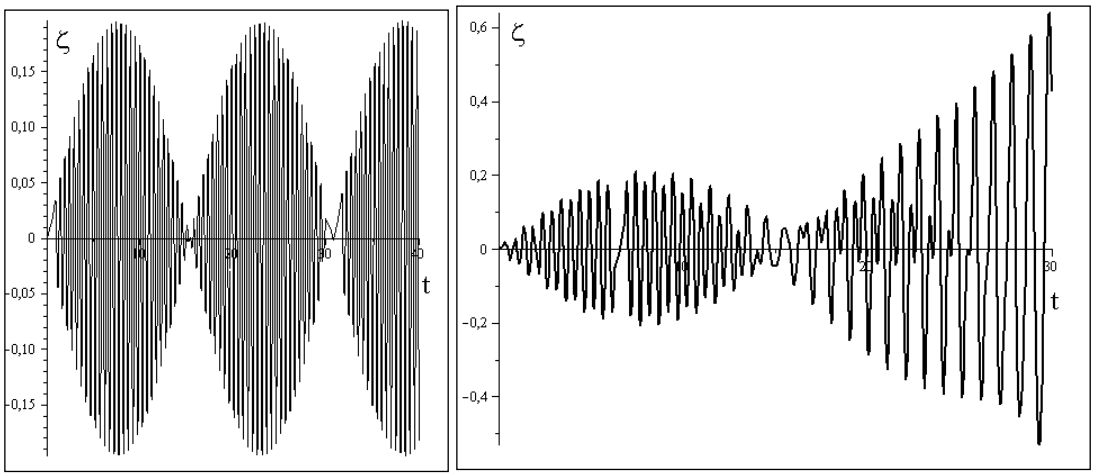
Розглянемо одночасну дію бічних і поздовжніх збуджень. Наявність внутрішнього параметричного резонансу призводить до того, що в цих випадках спостерігається значне збудження неосесиметричних високочастотних мод. Нехайω = 12,25 Гц, і $a_x(t) = a_1 \cos\omega t$, $a_z(t) = -a_2 \cos\omega t, a_1 = a_2 = 1$. У такому разі амплітуда мод k =5 для

неперегородженого бака (табл. 1) і k =4 для чвертьбака (табл. 2) суттєво збуджуються внаслідок резонансного ефекту. Отже, якщо вихідні дані для неперегородженого бака мають вигляд

$$d_{0k}(0) = d_{1k}(0) = \dot{d}_{1k}(0) = 0,\ k = \overline{1, M}, \quad \dot{d}_{1k}(0) = 0,\ k \neq 5,\ \dot{d}_{15}(0) = 0.05, \text{ (3.5)}$$

то режимα = 1, k =5 стає домінуючим.

На рис. 3.7а показано піднесення вільної поверхні неперегородженого бака за відсутності поздовжніх збуджень у точціθ = 0, ,$^{\rho = R,\ z = \zeta}$ ω = 12,25 Гц. Тут з'являється ефект биття. На рисунку 7б показано поведінку вільної поверхні за одночасної дії бічних і поздовжніх збуджень за початкових умов (3.5).



a b

Рис. 3.7: Піднесення вільної поверхні без (а) і з (б) поздовжніми збудженнями

Рух рідинної вільної поверхні стає нестійким за наявності поздовжніх збуджень. Це пов'язано з істотним внеском осесиметричної нормальної моди, особливо коли частоти збудження близькі до подвоєної першої власної частоти.

Встановлення перегородок може бути корисним для зменшення висоти вільної поверхні. Але зміна частоти примусового збудження може призвести до

небажаного ефекту, що полягає в збігу зміненої частоти збудження з деякими природними частотами перегородчастого резервуара.

ВИСНОВКИ

Розроблено методику, що дає змогу оцінити рівень підняття вільної поверхні в циліндричних резервуарах з перегородками та без них за горизонтального та вертикального навантажень . Розглянуто вільні, вимушені та параметричні коливання рідини в циліндричних резервуарах із перегородками та без них однакової висоти та радіусу. Для перевірки отриманих результатів наведено тестові розрахунки. Враховано ефекти установки перегородки та їхній вплив на зміну висоти вільної поверхні. Розроблений підхід дає змогу здійснювати чисельне моделювання вимушеного та параметричного плескання рідини в ємностях із перегородками різного розміру та з різним розташуванням у резервуарі. Це дає можливість керувати радіусом перегородки та її положенням у резервуарі. Це дуже актуально, оскільки на практиці ефекти перегородки часто можна спостерігати лише після її встановлення. Досліджено ефекти параметричних резонансів. Області нестабільних і стабільних рухів рідини отримано за допомогою діаграми Айнса-Стретта. Запропонована методика дає змогу за допомогою чисельного моделювання визначити необхідність встановлення перегородки в резервуарах, а отже, скоротити дорогі натурні експерименти. Запропонований підхід можна легко узагальнити на пружні резервуари з пружними перегородками. Геометрію цистерни також можна легко змінювати, тож результати будуть отримані для конічних, сферичних і складених оболонок з перегородками і без них. Це дасть змогу дати рекомендації щодо встановлення захисних елементів (кришок, перегородок). Що стосується меж застосовності запропонованого підходу, то слід зазначити, що розглядається тільки ідеальна нестислива рідина, а задачі сформульовані в лінійних формулюваннях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Райновський І. А. and Timokha, A. N.: Sloshing in Upright Circular Containers: Theo-ry, Analytical Solutions, and Applications. CRC Press/Taylor and Francis Group, (2020).
2. Гнітко В., Дегтярьов К., Науменко В., Стрельникова Е.: ВЕМ- та МКЕ-аналіз взаємодії рідини і структури в резервуарах з перегородками.International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements; Southampton, 5(3), 317-328 (2017), DOI:10.2495/CMEM-V5-N3-317-328
3. Zang, Q., Liu, J., Lu, L., & Lin, G.: Метод ізогеометричного граничного елемента, що ґрунтується на NURBS, для аналізу сльоскотечіння рідини в осесиметричних резервуарах із різноманітними пористими бафлями. European Journal of Mechanics-B/Fluids, 81, 129-150 (2020).
4. Місюра С., Сметанкина Н., Місюра І.: Оптимальне проектування циклічно симетричної конструкції при статичному навантаженні. В: Нечипорук М., Павліков В., Крицький Д. (ред.) "Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні - 2020". ICTM 2020. Lecture Notes in Networks and Systems, Springer, Cham. 188. 256-266 (2021). https://doi.org/10.1007/978-3-030-66717-7_21.
5. Зульфікар Й., Хайдер М. Дж., Джеханзеб А., Ахмад Х. В., Зульфікар А., Чаудри У. М. та Джун Т. С.: Чисельне дослідження оптимальної конструкції кільцевої перегородки для оптимізації міцності конструкції резервуара, що піддається резонансному сейсмічному розбризкуванню. М., & Jun, T. S.: Чисельне дослідження оптимальної конструкції кільцевої перегородки для оптимізації міцності конструкції резервуару, що піддається резонансному сейсмічному сльошуванню. Structural Engi-neering International, 33(2), 350-360 (2023).

6. Гонтаровський П., Сметанкина Н., Гармаш Н., Мележик І.: Чисельний аналіз напружено-деформованого стану паливних баків ракет-носіїв у 3D-формулюванні. В: Нечипорук М., Павліков В., Крицький Д. (ред.) Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні - 2020. ICTM 2020. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 188. Springer, Cham. 609-619 (2021). https://doi.org/10.1007/978-3-030-66717-7_52.
7. Русанов А., Хорев О., Агібалов Ю., Биков Ю., Коротаєв П.: Чисельне та експериментальне дослідження радіально-осьових насосно-турбінних моделей зі сплітерами в турбінному режимі, In: ICTM 2020, Lecture Notes in Networks and Systems, 188, (2021), DOI: 10.1007/978-3-030-66717-7_36.
8. Стрельникова Є., Кріутченко Д., Гнітко В., Тонконоженко А.: Коливання рідини в циліндричних резервуарах з перегородками та без них за бічних і поздовжніх збуджень. Міжнародний журнал прикладної механіки та інженерії. 25(3), 117-132 (2020), DOI: 10.2478/ijame-2020-0038.
9. Zheng, Jh., Xue, MA., Dou, P. et al.: A review on liquid sloshing hydrodynamics. J Hydrodyn, 33, 1089-1104 (2021), DOI: 10.1007/s42241-022-0111-7.
10. Gao, H., Yin, Z., Liu, J., Zang, Q., Lin, G.: Метод скінченних елементів для аналізу ефектів пористої перегородки на сльозотечу рідини в двовимірних резервуарах. Engineering Compu-tations, 38(5), 2105-2136, (2021), DOI:10.1108/ec-12-2019-0567.
11. Farahmandpey, S., Broumand, P., Amiri, S. M., & Shekari, M. R.: Про нелінійний динамічний аналіз кільцевих перегородчастих сталевих контейнерів, ізольованих підшипниками. In Structures, Elsevier. 56, 105012, (2023), DOI: 10.1016/j.istruc.2023.105012.

12. Kumar, N. Choudhary, N.: Sloshing reduction in three-dimensional rectangular con-tainer using rigid baffles, Vibroengineering PROCEDIA, 42, 39-44 (2022), DOI: 10.21595/vp.2022.22550.
13. Choudhary, N., Kumar, N., Strelnikova, E., Gnitko, V., Kriutchenko, D., Degtyariov, K.: Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes. Journal of King Saud University - Science, 33(8), 101589, (2021), DOI:10.1016/j.jksus.2021.101589
14. Zhang, Z.L., Khalid, M.S.U., Long, T., Chang J.Z., Liu M.B.: Дослідження щодо пом'якшення слашування за допомогою еластичних перегородок за допомогою згладженого методу скінченних елементів та відокремленого методу скінченних частинок, Журнал рідин та конструкцій, 94, (2020), 102942, DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2020.102942.
15. Сєрікова О., Колосков В., Дегтярьов К., Стрельникова О.: Поліпшення деформівних і міцнісних характеристик нанокомпозитів. Форум матеріалознавства. Trans Tech Publications, Ltd, Switzerland, 1038, 144-153 (2021), DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.1038.144.
16. Liu, S., & Yang, Z.: Віртуальна симуляція водних хвиль з декількома хвильовими числами. Virtu-al Reality, 27(2), 1221-1231, (2023), DOI: 10.1007/s10055-022-00729-0.
17. Гнітко В., Караєв А., Дегтярьов К., Стрельникова Е.: Сингулярний граничний метод в аналізі вільних коливань складених рідинно-наповнених оболонок, WIT Transactions on Engineering Sciences, WIT Press, 126, 189-200 (2019), DOI:10.2495/BE420171.
18. Крутченко Д., Стрельникова Е., Шувалова Ю., Метод дискретних сингулярностей у задачах сейсмічно-імпульсних впливів на колектори, Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні

технології. Автоматизовані системи управління, № 35, 2017, с. 31-37.

19. Крютченко Д.В., Вимушені коливання рідини в циліндричних резервуарах під дією вертикального збудження, Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління, №40, 2018 р., с. 23-33.
20. Крютченко Д.В., Комп'ютерне моделювання вимушених коливань рідини в призматичному резервуарі. Прикладні питання математичного моделювання, №1 2018 р., с 107-114.
21. Стрельникова Є., Кріутченко Д., Гнітко В., Коливання рідини в циліндричному четвертному резервуарі, що зазнає гармонійних, імпульсних та сейсмічних бокових збуджень, Журнал математики та статистичних наук, №5, 2019, с. 31-41.
22. Стрельникова Е.А., Крютченко Д.В., Науменко Ю.В., Усатова О.А., Аналіз стійкості коливань рідини в жорстких резерауарах при параметричному збудженні, Прикладні питання математичного моделювання, №3, 2019. с. 68-73.
23. Килинник В.Ю., Тишковець О.В., Крютченко Д.В., Науменко Ю.В., Коливання рідини в циліндрично-конічній оболонці під дією вертикального збудження, Вісник НТУ "ХПІ", 2019. с. 25-32.
24. Шувалова Ю.С., Крютченко Д.В., Гнітько В.І., Вимушені коливання рідини в циліндричному резервуарі з вертикальними перегородками, Прикладні питання математичного моделювання, №3, 2019, с. 72-86.
25. Криутченко Д., Вимушені коливання рідини в призматичних резервуарах при вертикальних і горизонтальних навантаженнях, Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, серія "Математичне моделювання. Інформаційні

технології. Автоматизовані системи управління", №42, 2019, с. 68-76.

26. Стрельникова Є., Кріутченко Д., Гнітко В., Тонконоженко А., Коливання рідини в циліндричних резервуарах з перегородками та без них за латеральних і поздовжніх збуджень, Міжнародний журнал прикладної механіки та інженерії, №25, 2020, с. 117-132.
27. Чудхарі Н., Кумар Н., Стрельникова Е., Гнітко В., Кріутченко Д., Дегтярьов К., Коливання рідини в циліндричних резервуарах з гнучкими мембранами, Журнал університету короля Сауда - Наука, #8, 2021, pp.101589 (Scopus)
28. Шувалова Ю.С., Крютченко Д.В., Стрельникова О.А., Інтегральні рівняння в задачі про вільні та вимушені коливання рідини в жорстких резервуарах, Вісник Херсонського національного технічного університету, Номер 3 (58), 2016.
29. Гнитько В.І., Крютченко Д.В., Науменко Ю.В., Стрельникова О.А., Моделювання вільних і вимушених коливань оболонкових конструкцій з відсіками, що містять рідину, Журнал Херсонського національного технічного університету, Номер 3 (62), том 2, 2017, с. 71-75.
30. Караєв А., Стрельникова Є. (2020). Розбризкування рідини в круглих тороїдальних і коаксіальних циліндричних оболонках, В: Іванов В., Павленко І., Ляпощенко О., Мачадо Ж., Едл М. (ред.) Advances in Design, Simulation and Manufacturing III. DSMIE 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham, https://doi.org/10.1007/978-3-030-50491-5_1.
31. Караєв А., Стрельникова Е. (2021). Апроксимація осесиметричного полігармонічного сплайна в методі подвійної взаємності. Z Angew Math Mech. 101, e201800339, DOI:10.1002/zamm.201800339.

32. Крутченко, Д. В., Стрельникова, Е. А.. Шувалова, Ю. S. (2017). Метод дискретних сингулярностей у задачах сейсмічно-імпульсних впливів на колектори, Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, серія "Математичне моделювання. Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління", 35, 31-37. http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/13113/1/Krutchenko.pdf.
33. Ібрагім, Рауф. Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. Cambridge University Press, 2005, 998 p.
34. Cho, N. H. McClamroch, and M. Reyhanoglu, Динаміка багатотілевих транспортних засобів та їх формулювання як нелінійних систем керування, Proceedings of American Control Conference, 2000, pp. 3908-3912.
35. Н. Ольсен. Що таке слашинг? Семінар з рідинного слашингу. Det Norske Veritas, 1976.
36. Гаврилюк І., Германн М., Луковський І., Солодун О., Тимоха А. Слабконелінійне слайзерне слайзерне пульсаціювання в зрізаному конічному резервуарі з конічною конусоподібною округлою формою. Fluid Dynamics Research, 45, Paper ID 055512, 2013, pp.1-30.
37. Зухал Оздемір, Мхамед Сулі та Ясін М. Фахджан. Чисельна оцінка нелінійного відгуку широких циліндричних сталевих резервуарів під час багатовимірного землетрусу. Earthquake Spectra: February 2012, Vol. 28, No. 1, pp. 217-238.
38. L. Khezzar, A. C. Seibi, A. Goharzadeh. Sloshing of Water in Rectangular Tanks - An Experimental Investigation & Numerical Simulation (Розбризкування води в прямокутних резервуарах - експериментальне дослідження та чисельне моделювання).

International Journal of Engineering (IJE), Vol. 3, No. 2. pp. P. 174-184, 2010.

39. R.A. Ibrahim, V.N. Pilipchuck, and T. Ikeda. Recent Advances in Liquid Sloshing Dynamics. Applied Mechanics Reviews, Vol. 54, No. 2, pp. 133-199, 2001.
40. H.N. Abramson, W.-H. Chu and L.R. Garza; Sloshing of Liquid in spherical tanks; AIAA J. 1, pp. 384-389; 1963
41. H.N. Abramson; Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers; Applied Mechanics Reviews, 16, pp. 501 - 506; 1963.
42. Абрамсон Х.Н., Динамічна поведінка рідин у рухомих контейнерах. NASA SP-106, Вашингтон, округ Колумбія, 1966 р., оновлений Доджем Ф.Т., Південно-Західний науково-дослідний інститут, с. 23-37, 2000.
43. A.T. Chwang, and K.H. Wang. "Нелінійна імпульсна сила на прискорювальному контейнері" J. of Fluids Eng., Vol. 106, pp. 233-240, 1984.
44. G. Popov, S. Sankar, T.S. Sankar, and G.H. Vatitas. "Розбризкування рідини в прямокутних дорожніх контейнерах", Computers Fluids, Vol. 21, No. 4, pp. 551-569, 1992.
45. G. Popov, S. Sankar, T.S. Sankar, and G.H. Vatitas. "Динаміка плескання рідини в горизонтальних циліндричних дорожніх контейнерах", Журнал машинобудівної науки, Vol. 207, 1993.
46. Z. Ye, and A.M. Birk. Тиски рідини в частково заповнених рідиною горизонтальних циліндричних посудинах, що зазнають ударного прискорення, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 116, No. 4, pp. 449- 459, 1994.
47. Zang, Q., Liu, J., Yu, L., & Lin, G. Гранично-елементний аналіз характеристик сльозотечії рідини в осесиметричних резервуарах з різними пористими перегородками. Applied Ocean Research, 93, 101963, (2019).

48. Чжан Ц., Чжан Ц., Чжан Ц., Чжу Ц., Яо Д., Ян П., Цзун Й. та Чень С.: Чисельне моделювання тепло-структурної поведінки резервуару з рідким гелієм під час процесу наповнення. Fusion Engineering and Design, 173, 112798, (2021).
49. Liu, J., Yan, B., Mou, Z., Gao, Y., Niu G., Li, X.: Чисельне дослідження характеристик вібрації еолового середовища та оцінка втоми від зносостійкості передавальних провідників. PLoS One. 2022, 17(1), e0263163, (2022), DOI: 10.1371/journal.pone.0263163.
50. Донг-Лін В., Лі А., Хао Х., Сонг М., Мінг Л., Лян-Бін Ц.: Чисельне моделювання та повномасштабна експериментальна перевірка розбризкування та вібрації паливного бака літака. J. Engineering Mechanics, 39(4): 219-229. (2022), DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2021.02.0130.
51. Ohayon R., Soize C. Вібрація конструкцій, що містять стисливі рідини з поверхневим натягненням і ефектами сльошування. Модель зменшеного порядку. Обчислювальна механіка. 2015. Vol. 55. P. 1071-1078. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s00466-014-1091-4.
52. Василь І. Гнітко, Артем О. Караєв, Марія Л. Мироненко, Олена А. Стрельникова. БЕМ-аналіз гравітаційно-капілярних хвиль на вільних поверхнях складних оболонок обертання. Міжнародний журнал обчислювальних методів та експериментальних вимірювань. 2021/3/4; 9(1): 38-50.
53. Поєднаний BEM- та FEM-аналіз взаємодії рідина-структура в двокамерних резервуарах / В. В. Гнітко та ін. Гнітко та ін. Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. 2018. Vol. 6, no. 6. P. 976-988.
54. Караєв А., Стрельникова Е.: Сингулярні інтеграли в осесиметричних задачах еластостатики / International Journal of

Modeling. Simulation, and Scientific Computing. 11(1), 2050003. (2020), DOI:10.1142/S1793962320500038.

55. Москаленко Роман, Зайденварг. Ольга, Стрельникова Олена та Гнітко Василь, "Розробка програмного забезпечення для обчислювального аналізу поширення тріщин та довговічності конструкцій", 2020 IEEE IEEE KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Харків, Україна, 2020, с. 509-514, doi: 10.1109/KhPIWeek51551.2020.9250089.
56. Faltinsen O.M., Timokha A.N. Аналітично наближені природні режими сльозотечі для сферичної форми резервуара. J. Fluid Mech. 703, с. 391-401, 2012.
57. Kulczycki T., Kwaśnicki M., Siudeja B. Форма фундаментальної моди сльозотечії в осесиметричних контейнерах. Журнал інженерної математики, 99(1), с. 157-193, 2016.
58. Misiura C.Iu. Раціональне моделювання кришки гідротурбіни для аналізу потужності. /C.Iu. Мисюра, Н.В. Сметанкина, Є.І. Мисюра // Вісник. Місюра // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Динаміка і міцність машин, - 2019. - № 1.- S. 34-39.
59. Медведовська Т. Вільні гідропружні коливання кришок оголовків гідротурбін/ Медведовська Т., Стрельникова Е., Медведєва К // Int. J. Eng. and Advanced Research Technology.- 2015.- Vol. 1.- No 1.- C. 45-50.
60. Гнітко В. Аналіз низькочастотного сльозохімічного руху циліндричних ємностей з плоскими та конічними перегородками/ В. Гнітко, Ю. Наумемко, Є. Стрельникова // Міжнародний журнал прикладної механіки та інженерії. - 2017. - Vol. 22. - Вип. 4. - R. 867-881.
61. Кантор Б., Стрельникова О., Медведовська Т., Ржевська І., Єселева О., Линник О., Зеленська О. Розрахунок затишкового ресурсу

елементів проточної частини гідротурбін ГЕС і ГАС. Методичні вказівки: нормативний документ. СОУ-НМЕВ 40.1 -21677681-51:2011: утв. Міністерством енергетики та вугільної промисловості України: введено в дію 07.07.11. - К.: Міністерство енергетики та вугільної промисловості України, 2011.

62. Стрельникова Е., Чудхарі Н., Криутченко Д., Гнітко В., Тонконоженко А.: Коливання рідини в круглих циліндричних резервуарах з перегородками та без них за горизонтальних і вертикальних збуджень. Engineering Analysis with Boundary Elements, 120, 13-27, (2020), DOI: 10.1016/j.enganabound.2020.07.02m.
63. Чундхарі Н., Усатова О., Крютченко Д., Стрельникова Е. (2023). Вплив стисливості в задачах взаємодії флюїд-структура для флюїдозаповнених колекторів. In: Altenbach, H., et al. Advances in Mechanical and Power Engineering . CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_1.