МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ В.Н. КАРАЗІНА

ФІЗИКО-ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фізики нетрадиційних енерготехнологій і екології

Пояснювальна записка

до дипломної роботи

за освітньо-кваліфікаційним рівнем «магістр»

«Комп'ютерне моделювання процесів електропровідності у контактах Джозефсона»

Виконав: студент 2 курсу, групи НФ-61
Орельяна П.Т. _____
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Прикладна фізика
енергетичних систем
Керівник: к. ф.-м. наук,
доцент Семененко В. Є. _____
Рецензент: доктор ф-м. наук,
проф. Пархомено О.О. _____

Харків – 2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Факультет __ФЕФ_____
Кафедра ___КФНЕЕ____
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) __магістр__
Напрям підготовки _105__
Спеціальність _Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ В. І. Ткаченко___
підпис ініціали, прізвище

“____”_____20___року

З А В Д А Н Н Я
НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ (ПРОЕКТ)

Орельяна Павло Трифонович
(прізвище, ім’я, по батькові студента)

1. Тема роботи «Комп’ютерне моделювання процесів електропровідності у контактах Джозефсона»

керівник роботи к. ф-м.н., доцент, Семененко Віктор Єгорович, _____
(прізвище, ім’я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від “___”_____20__року №___

2. Строк подання студентом роботи_____

3. Перелік питань, які потрібно розробити:
Побудувати комп’ютерну модель процесів електропровідності у контактах Джозефсона. Провести розрахунків залежності току від напруги в контактах Джозефсона. Провести аналіз отриманих чисельних результатів.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1.	Проведення літературного аналізу робіт по контактам Джозефсона
2.	Побудова комп'ютерної моделі процесів електропровідності у контактах Джозефсона
3.	Вивчення методів вирішення стохастичних диференціальних рівнянь
4.	Проведення розрахунків залежності току від напруги в контактах Джозефсона
5.	Побудова отриманих залежностей та проведення аналізу чисельних результатів

5. Дата видачі завдання_____

Студент _____ Орельяна П.Т.
підпис — ініціали, прізвище

Керівник роботи _____ Семененко В.Є.
підпис — ініціали, прізвище

Перелік скорочень та абревіатур

ГПВЧ – Генератор псевдовипадкових чисел

ЛКМ – Лінійно конгруентний метод

ГСР – Генератор сдвигового регістру

Реферат

Орельяна Павло Трифонович «Комп'ютерне моделювання процесів електропровідності у контактах Джозефсона» (випускна робота магістра). – Харківський Національний Університет імені В.Н. Каразіна, 2017. –47с.

Робота складається зі вступу, трьох розділів та висновків; містить 11 малюнків та 42 формули, список використаних джерел складається з 26 найменувань.

В роботі досліджуються контакти Джозефсона, розглядається питання змінення вольт-амперних характеристик контактів Джозефсона в залежності від ємності та опору контактів. Представлена математична модель процесів які протікають у контактах Джозефсона, викладена компьтерна модель основана на рівнянні Стюарта-Мак Камбера. Описані методи чисельного вирішення стохастичних диферінцальних рівнянь, викладені результати розрахрахунків залежностей струму від напруги для зовнішніх полів різної частоти. Показано що характеристики петлі гістерезісу, яка виникає під дією поля, істотно залежать від частоти коливань. Отримані дані в магістерській роботі можуть використовуватися для розробки та прогнозування властивостей мемристоров заснованих на ефекті Джозефсона.

Ключові слова: КОНТАКТИ ДЖОЗЕФСОНА, ГЕНЕРАТОР ШУМУ, ПСЕВДОВИПАДКОВІ ЧИСЛА.

Реферат

Орельяна Павло Трифонович «Компьютерное моделирование процессов электропроводности в контактах Джозефсона» (выпускная работа магистра). - Харьковский Национальный Университет имени В.Н. Каразина, 2017. -47с.

Работа состоит из введения, трех глав и выводов; содержит 11 рисунков и 42 формул, список использованных источников состоит из 26 наименований.

В работе исследуются контакты Джозефсона, рассматривается вопрос изменения вольт-амперных характеристик контактов Джозефсона в зависимости от емкости и сопротивления контактов. Представленная математическая модель процессов протекающих в контактах Джозефсона, изложенная компьютерная модель основана на уравнении Стюарта-Мак Камбера. Описаны методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений, изложены результаты расчетов зависимостей тока от напряжения для внешних полей различной частоты. Показано что характеристики петли гистерезиса, которая возникает под действием поля, существенно зависят от частоты колебаний. Полученные данные в магистерской работе могут использоваться для разработки и прогнозирования свойств мемристоров основанных на ефекте Джозефсона.

Ключевые слова: КОНТАКТЫ ДЖОЗЕФСОНА, ГЕНЕРАТОР ШУМА, ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫЕ ЧИСЛА.

Abstract

Orelyana Pavlo Trifonovich "Computer simulation of the processes of electrical conductivity in the contacts of Josephson" (graduate work of the master) - Kharkiv National University named after V.N. Karazina, 2017. -47c.

The work consists of introduction, two chapters and conclusions; contains 11 figures and 42 formulas, a list of references from 26 titles.

In this work, Josephson contacts are investigated, the question of changing the current-voltage characteristics of Josephson contacts depending on the capacitance and contact resistance is considered. The presented mathematical model of the processes occurring in Josephson's contacts, the stated computer model is based on the Stewart-Mc Cumber equation. Methods for the numerical solution of stochastic differential equations are described, and the results of calculations of the voltage versus voltage for external fields of various frequencies are presented. It is shown that the characteristics of the hysteresis loop, which occurs under the action of the field, significantly depend on the oscillation frequency. The data obtained in the master's work can be used to develop and predict the properties of memristors based on the Josephson effect.

Key words: JOSEPHSON CONTACTS, NOISE GENERATOR, NON-ACCIDENT NUMBERS.

Зміст

Вступ 9

Розділ 1. Огляд науково-технічної літератури 12

1.1 Ефект Джозефсона 12

1.2 Застосування ефекту Джозефсона 26

1.3 Постановка задачі 29

Розділ 2. Комп'ютерна модель та методика моделювання 30

2.1 Модель Стюарта-Мак Камбера 30

2.2 Рішення стохастичних рівнянь 34

2.3 Генератор шуму Гауса 36

2.4 Псевдо-випадкові числа 37

Розділ 3. Результати моделювання 40

Висновки 45

Список літератури 46

Вступ

Термін ефект Джозефсона відноситься до сукупності явищ, що мають місце у надпровідних контактах через слабкий зв'язок. Відкриття ефекту Джозефсона сприяло з одного боку кращому розумінню природи надпровідності, а з іншого поклало початок розвитку сучасної надпровідної електроніки. Для ефекту Джозефсона характерні висока чутливість до магнітних та електричних полів, а також високі характерні частоти f_c, обмежені величиною надпровідної щілини.

У 1962 році з'явилася теоретична робота англійського фізика Б.Д. Джозефсона [1], де досліджувався тунельний перехід (контакт надпровідників через малий прошарок діелектрика) та було передбачено два ефекти:

1) через контакт за відсутності прикладеної напруги може текти постійний надпровідний струм

2) при кінцевій напрузі V, через контакт крім звичайного постійного струму буде також текти також змінний надпровідний струм частоти $\omega = 2eV/\hbar$.

Ці твердження викликали серйозні суперечки, в яких деякі ефекти ставилися під сумнів, навіть вже відомі ефекти вчених, зробивших на цих ефектах своє ім’я. Проте незалежні заміри інших науковців, показали достовірність результатів Брайана Девіда Джозефсона, а також потім вони були підтверджені експериментально. У 1973 році Джозефсон отримав Нобелівську премію за відкриття ефекту.

Подальші дослідження Джозефсона продемонстрували, що ефект дуже загальний та проявляється не тільки в тунельних переходах, але і при з'єднанні двох надпровідників через слабкий зв'язок будь-якого виду (наприклад, нормальний метал, феромагнетик, геометричні звуження та ін.).

Однією з мотивацій, що привели Джозефсона до відкриття, було бажання з'ясувати, чи має будь-які спостереження наслідкова фаза параметра

порядку. Відомо що, надпровідник може бути описаним завдяки комплексному параметру порядку $\Delta = |\Delta| e^{i\varphi}$. Модуль параметра порядку $|\Delta|$ визначає «силу» надпровідності, зокрема надпровідну щілину в одночастковому спектрі. Виявилося, що величина надпровідного струму через контакт (Джозефсоновского струму) визначається саме різницею фаз параметрів порядку з двох сторін. Параметр порядку Δ можна розглядати як хвильову функцію надпровідного конденсату (куперівських пар електронів), тому ефект Джозефсона - це квантовий ефект. З іншого боку, конденсат куперівських пар складається з величезної кількості електронів, проте також велика кількість електронів бере участь у струмі Джозефсона, тому ефект Джозефсона - одночасно і макроскопічний ефект. Як виявилося цей ефект став дуже важливим кроком в розумінні природи надпровідного стану. Крім того, він знайшов значне та зростаюче число застосувань для створення унікальних вимірювальних приладів [2, 3, 4, 5].

Таким чином, в даний час є актуальною проблема вивчення цього фізичного ефекту опираючись на резистивну модель Мак Камбера-Стюарта для використання складних багатоелементних структур Джозефсона.

Мета: Побудувати комп’ютерну модель процесу електропровідності у контактах Джозефсона.

Для досягнення мети були вирішені поставлені задачі:

- Проведення літературного аналізу робіт по контактам Джозефсона
- Побудова комп’ютерної моделі процесів електропровідності у контактах Джозефсона
- Вивчення методів вирішення стохастичних диференціальних рівнянь;
- Проведення розрахунків залежності току від напруги в контактах Джозефсона
- Побудова отриманих залежностей та проведення аналізу чисельних результатів

Об'єкт дослідження: Контакти Джозефсона.

Предмет дослідження: Змінення вольт-амперних характеристик контактів Джозефсона в залежності від ємності та опору контактів.

Розділ 1. Огляд науково-технічної літератури

Розділ 1.1 Эффект Джозефсона

При низьких температурах, коли метал стає надпровідним, деякі з вільних електронів утворюють пов'язані пари [2; 6]. Електрон-фононна взаємодія перевищує кулонівське відштовхування між електронами для того, щоб метал став надпровідним. З іншого боку, спарені електрони характеризуються набагато більшим просторовим розміром, близько порядку довжини когерентності ξ (~10^{-5} см для звичайних металів). У сфері з діаметром ξ міститься, 10^6-10^7 пар. Для того щоб пари могли з найбільшою вигодою використовувати притягуючу електрон-фононну взаємодію, усі імпульси їх центрів мас повинні бути однакові, або, якщо хвильова функція, яка описує індивідуальну пару містить фазовий множник, то усі фази таких пар повинні бути однаковими. Якщо ми уявимо собі велике число взаєморозташованих сфер одна в одній, то кожна з пар фаз цих сфер однакова, тоді виходить що ця фазова когерентність поширюється на весь надпровідник. Таким чином, якщо ми зафіксуємо фазу будь-якої довільної точки всередині масивного надпровідника, то у всіх інших точках в просторі та в часі встановиться відповідна фаза. Як це зазвичай робиться в квантовій механіці, а також ми можемо додати довільний однорідний фазовий множник до хвильової функції всього надпровідника, без зміни фізичних ефектів.

Ідея про спарених електронів була вперше висунута Купером [2] і потім розвинена Бардином, Купером та Шріффером [3] в мікроскопічну теорію надпровідності. Подання щодо фазової когерентності є центральним пунктом всієї теорії та в кінцевому рахунку саме вона пояснює відсутність опору електричному струму [4], ефект Мейснера [5], квантування магнітного потоку та ефекти, характерні для надпровідників. Енергія надпровідного стану з спареними електронами, менше енергії відповідного нормального стану на величину, що отримала назву «енергія конденсації». Ця енергія

дуже мала, порядку 10^{-8} ев/атом. Пари утворюють конденсований стан, який можна описати єдиною макроскопічною хвильовою функцією. З цієї причини ми можемо вивчати квантові ефекти на макроскопічному рівні, які зобов'язані своїм походженням мікроскопічним квантовим процесам.

Феноменологічний опис надпровідності було дано Гінзбургом та Ландау [6] ще до появи мікроскопічної теорії. Хвильова функція конденсованого стану в яку зазвичай вводять комплексний параметр порядку $\Psi(r,t) = |\Psi(r,t)| \exp[i\,\varphi(r,t)]$, причому щільність пар в надпровіднику дається величиною $|\Psi(r,t)|^2$, а фаза конденсату є $\varphi(r,t)$. Підкреслимо, що весь конденсат повинен бути описаний цією хвильовою функцією $\Psi(r,t)$; фаза $\varphi(r,t)$ не є фазою одиничного електрона або пари електронів, вона відповідає всім парам в цілому. Внаслідок цього фаза що спостерігається є фізичною величиною.

З іншого боку, фаза у відокремленому надпровіднику визначена всюди, з точністю до довільного фазового множника. Система на «Рис. 1.1.», з двох надпровідників, розділених діелектричним бар'єром.

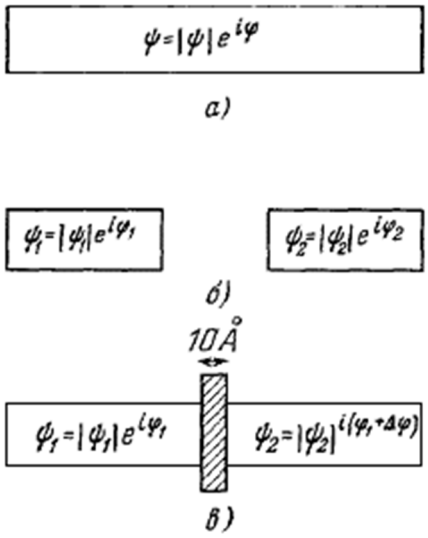


Рис. 1.1. Система, з двох надпровідників, розподілена діелектричним бар'єром:

а) масивний надпровіднику за відсутності зовнішніх полів та струмів фаза хвильової функції φ постійна,

б) для двох ізольованих надпровідників фаза одного з них може довільно змінюватися по відношенню до іншого,

в) для двох слабо пов'язаних надпровідниках фаза одного з них зв’язана з фазою іншого. [1]

У міру зменшення товщини бар'єру властивості системи безперервно змінюються, переходячи від випадку двох ізольованих надпровідників до випадку єдиного надпровідника. Таким чином, енергія зв'язку двох надпровідників зростає (та стає все більш від’ємною) при зменшенні товщини бар'єру, коли ця енергія перевищує енергію теплових флуктуацій системи, фази обох надпровідників виявляються взаємопов'язаними. Коли цей зв'язок кінцевий та дуже слабкий то також можуть виникнути ефекти, які вперше описані Джозефсоном (наприклад, куперівські пари можуть тунелювати через бар'єр з одного надпровідника в інший, утворюючи надпровідний струм).

У межі слабкого зв'язку, енергія зв'язку системи розрахована на одиницю площі бар'єру, E_C (1.1) яка отримана Джозефсоном [8; 9]

$$E_C(\Delta\varphi) = -\left(\hbar/_{2e}\right)J_1\cos\Delta\varphi \qquad (1.1)$$

а надпровідний струм на од.площі (1.2)

$$J_s(\Delta\varphi) = J_1\sin\Delta\varphi \qquad (1.2)$$

де J_1 - максимальний надпровідний струм, який може витримати бар'єр, його величина залежить від властивостей бар'єру.

Різниця фаз двох надпровідників $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ визначається струмом J проходячим через контакт. При збільшенні J от нуля $\Delta\varphi$, а енергія зв’язку E_C зменшується. Для значень $J < J_1$ скрізь бар’єр протікає звичайний надпровідний струм, а також на бар’єрі не виникає падіння напруги

При $J < J_1$ енергія зв'язку зменшується до нуля, контакт більше не здатен пропускати поточний через нього стаціонарний надпровідний струм. Максимальне значення стаціонарного надпровідного струму яке може витримати контакт, називається критичним струмом.

При збільшенні J понад J_1 на контакті з'являється кінцеве падіння напруги, а надпровідний струм починає осцилювати подібно до $J_s = J_1 sin\omega t$. Частина струму при цьому утворює поодинокі електрони, які туннелюють через бар'єр. У разі такого нестаціонарного ефекту змінний надпровідний струм можна вважати обумовленим віртуальним тунелюванням через бар'єр куперівських пар, що супроводжується випромінюванням або поглинанням фотонів [10] «Рис. 1.2.».

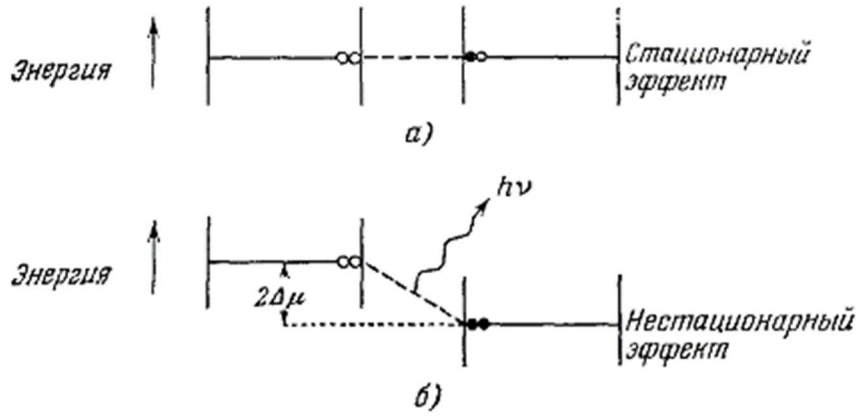


Рис. 1.2. Схематичне зображення стаціонарного та нестаціонарного процесів тунелювання Джозефсона [1]

Далі, якщо між двома надпровідниками є кінцева різниця електрохімічних потенціалів $\Delta\mu$, то енергія куперівських пар на протилежних сторонах бар'єру має відрізнятися на величину $2\Delta\mu = 2eV$. Таким чином, частота фотонів V буде знаходитись співвідношенням (1.3).

$$h\mu = 2\Delta\mu \qquad (1.3)$$

Різниця потенціалів 1 мкв відповідає частоті приблизно 500 МГц. Вимірюючи різницю хімічних потенціалів $\Delta\mu$, відповідну частоті V, та використовуючи рівняння (1.2 та 1.3), ми можемо визначити $^{2e}/_{h}$.

Зпочатку розглянемо два ізольованих надпровідника 1 та 2, не взаємодіючих один з одним [11, 12]. Припустимо, шо в них знаходяться відповідні електронні пари N_1 та N_2. Гамильтоніан основного стану системи H_0 володіє власними функціями виду (1.4)

$$\Psi_0 = \mathrm{A}\,\Psi_0^{(1)}(N_1)\Psi_0^{(2)}(N_2) \qquad (1.4)$$

з відповідною енергією (1.5).

$$\mathrm{E}_0 = \mathrm{E}_0^{(1)}(\mathrm{N}_1) + \mathrm{E}_0^{(2)}(\mathrm{N}_2) \qquad (1.5)$$

Хвильові функції $\Psi_0^{(1)}$ та $\Psi_0^{(2)}$ відповідно описують конденсат у надпровідниках 1 та 2. Зберігаючи надпровідники ізольованими, припустимо що ми перевели n электронних пар з 1 у 2 та отримали нову хвильову функцію

$$\Psi_n = \mathrm{A}\,\Psi_0^{(1)}(N_1 - n)\Psi_0^{(2)}(N_2 + n) \qquad (1.6)$$

та відповідну енергію (1.7)

$$E_n = E_0^{(1)}(N_1 - n) + E_0^{(2)}(N_2 + n) + 2n(\mu_1 - \mu_2) + (2e)^2 n^2/2C \qquad (1.7)$$

де C – ємність між двома надпровідниками.

Вираз (1.7) можна переписати у вигляді (1.8)

$$E_n = E_0^{(1)}(N_1) + E_0^{(2)}(N_2) + 2n(\mu_1 - \mu_2) + (2e)^2 n^2/2C \qquad (1.8)$$

де $E_0^{(1)}(N_1)$ та $E_0^{(2)}(N_2)$ – енергія нейтральних надпровідників, а μ_1 та μ_2 – хімічні потенціали. Якщо знехтувати множником з ємністю та прийняти що $\mu_1 = \mu_2$, так що при переводі пари з 1 в 2 не здійснюється

робота, то ми можемо побачити, що $E_n = E_0$ та Ψ_n істотно вироджені. При зближенні надпровідників між ними в решті решт виникає фазова когерентність. Енергія, зв’язана з цією когерентністю вона виключає виродження та представляє собою енергію зв’язку тунелюючого контакту. Розглянемо два надпровідника з тонким ізолюючим прошарком між ними. Можемо описати цю систему за допомогою електронних пар, які перебувають в потенційних ямах в кожному з надпровідників, із високим потенційним бар'єром між ямами. Цей тунельний процес, який має дуже малу ймовірність що його можна описати за допомогою гамільтоніану, який видаляє пару з 1 та переводить її у пару 2.

Запропонована Коеном, Фаліковим та Філіпсом [13] тунелюючий гамільтоніан має вигляд (1.9).

$$H_T = \sum_{k_1 k_2} T_{k_1 k_2} (C^+_{k_{2\uparrow}} C_{k_{1\uparrow}} + C^+_{k_{1\uparrow}} C_{k_{2\downarrow}}) \qquad (1.9)$$

Оператор [14] $C^+_{k_{2\uparrow}}$ народжує електрон у стані k_2 зі спіном $\uparrow$ в надпровіднику 2, а $C_{k_{1\uparrow}}$ знищує електрон у стані k_1 зі спіном $\uparrow$ в надпровіднику 1; $T_{k_1 k_2}$ - відповідний матричний елемент.

Такий вид тунельного гамільтоніана передбачає, що електрони миттєво переходять з одного надпровідника в інший, а також що електрони не взаємодіють в бар'єрі. Гамільтоніан H_T являє собою одночасткову взаємодію, та для того, щоб отримати тунелювання пар та зняти виродження, нам потрібно перейти до другого порядку теорії збурень та використовувати Гамільтоніан [15].

$$\mathrm{H}^{(2)} = \mathrm{H_T}(\mathrm{E_0} - \mathrm{H_0})^{-1}\mathrm{H_T} \qquad (1.10)$$

Повний гамільтоніан системи, буде мати вигляд (1.11)

$$\mathrm{H} = \mathrm{H_0} + \mathrm{H}^{(2)} \qquad (1.11)$$

Обурення пари переводить пари по одній та пов'язує Ψ_n зі значеннями n, що відрізняються на одиницю. Феррелл і Пранг [16] вказали, що ця задача аналогічна задачі про одновимірну решітку в наближенні сильного зв'язку [17]. В останньому випадку Ψ_n представляє собою хвильову функцію електрона, локалізованого на n-тому атомі. Власні стани H мають вигляд (1.12)

$$\Psi_n = \sum_n e^{in\alpha} \Psi_n \qquad (1.12)$$

де α грає роль хвильових чисел k . Енергія зв'язку тунельного контакту є Ψ_α яке нормовано потрібним чином.

$$\langle \Psi_\alpha | H^{(2)} | \Psi_\alpha \rangle = \sum_n \sum_{n'} \langle e^{in'\alpha} \Psi_{n'} | H^{(2)} | e^{in\alpha} \Psi_n \rangle \qquad (1.13)$$

Ми будемо цікавитися тільки станами зі значеннями n, де вони відрізняються лише на одиницю. Таке наближення в зонної теорії металів еквівалентно розгляду лише між найближчими сусідніми атомами. При цьому вираз (1.13) має вигляд (1.14)

$$\sum_n \left[\langle \Psi_{n+1} | H^{(2)} | \Psi_n \rangle e^{-t\alpha} + \langle \Psi_{n-1} | H^{(2)} | \Psi_n \rangle e^{t\alpha} \right] = -2M \cos \alpha \qquad (1.14)$$

де M - матричний елемент тунелювання пар.

Уточнюємо величину α. Припустимо, що ми змінюємо фазу усіх пар в одному надпровіднику по відношенню к іншій фазі в іншому напівпровіднику на величину α_0 [18]. Тоді Ψ_n перетворюється у $\Psi_n e^{in\alpha}$ та з (1.12) видно, що замість Ψ_α ми отримуємо $\Psi_{\alpha+\alpha_0}$. Отже, α представляє собою різницю фаз на бар'єрі, яку раніше ми звали $\Delta\varphi$. Також можна показати, що при обчисленні (1.2 та 1.14), що $M = J_1 \hbar / 4e$. Таким чином ми показали, що енергія конденсації, що зв'язана з бар'єром це $M = \frac{J_1 \hbar}{4e} cos\ \Delta\varphi$ як це відмічено у (1.1).

Слідуючи за [19], ми також розглядаємо висновок з рівняння Джозефсона (1.2) для струму та співвідношення (1.3) між напругою та частотою. Оператори $\widetilde{n}$, та $\widetilde{\Delta\varphi}$, відповідні величинам n та $\Delta\varphi$, фігуруючим у

(1.12) та (при $\Delta\varphi = \alpha$), кононічно зв'язані [20], а також задовольняють процессам комутації $\left[\tilde{n},\ \widetilde{\Delta\varphi}\right] = -i$. Звідси отримуємо:

$$\tilde{\mathrm{n}} = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial(\widetilde{\Delta\varphi})} \tag{1.15}$$

$$\widetilde{\Delta\varphi} = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathrm{n}}} \tag{1.16}$$

Похідна за часом від ñ та $\widetilde{\Delta\varphi}$ знаходиться з рівнянь руху Гейзенберга [20]:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\tilde{\mathrm{n}}}{\partial\mathrm{t}} = \left[\widetilde{\mathrm{H}},\ \tilde{\mathrm{n}}\right] = \mathrm{i}\frac{\partial\widetilde{\mathrm{H}}}{\partial(\widetilde{\Delta\varphi})} \tag{1.17}$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\widetilde{\Delta\varphi}}{\partial\mathrm{t}} = \left[\widetilde{\mathrm{H}},\ \widetilde{\Delta\varphi}\right] = \mathrm{i}\frac{\partial\widetilde{\mathrm{H}}}{\partial\tilde{\mathrm{n}}} \tag{1.18}$$

де ліві частини цих рівнянь отримані шляхом дії комутаторами на деяку функцію стану. Середнє значення рівнянь (1.17) та (1.18) дають

$$\left\langle\frac{\partial\tilde{\mathrm{n}}}{\partial\mathrm{t}}\right\rangle = \left\langle\frac{1}{\hbar}\frac{\partial\widetilde{\mathrm{H}}}{\partial\Delta\varphi}\right\rangle = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial(\Delta\varphi)} \tag{1.19}$$

$$-\left\langle\frac{\partial(\widetilde{\Delta\varphi})}{\partial\mathrm{t}}\right\rangle = \left\langle\frac{1}{\hbar}\frac{\partial\widetilde{\mathrm{H}}}{\partial\tilde{\mathrm{n}}}\right\rangle = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial\tilde{\mathrm{n}}} = \frac{2}{\hbar}\Delta\mu \tag{1.20}$$

де по визначенню $\frac{\partial E}{\partial n} = 2\Delta\mu$ при переході куперівської пари. Цей результат також міститься в співвідношенні (1.8). Тому якщо підставити (1.1) у (1.19) та урахувати, що струм утворений парами, то ми маємо $J = \frac{2e\partial n}{\partial t}$, та отримаємо вираз (1.2). Більш суттєвим для нас є результуюче рівняння (1.20), з якого випливає, що тимчасова похідна від $\Delta\varphi$ є функція тільки різниці електрохімічних потенціалів $\Delta\mu$ на протилежних сторонах тунельного контакту.

Виникає питання про справедливість співвідношень (1.2) та (1.3). З рівняння (1.19) видно, що співвідношення між струмом та фазою залежить

від енергії зв'язку контакту, отже, критично залежить від форми тунельного гамільтоніана та деталей механізму тунелювання пар.

З іншого боку, рівняння (1.20) абсолютно не залежить від виду тунелюючого гамільтоніану. Воно є наслідком тимчасової залежності когерентних хвильових функцій в надпровідниках, причому конкретний вид хвильової функції несуттєвий. Все добре відомі фундаментальні властивостінадпровідників неявно пов'язані з існуванням фазової когерентності, та є вагомі причини вважати рівняння (1.20) точним.

Підкреслимо значення того факту, що в рівнянні (1.20) з’являється електрохімічний потенціал $\Delta\mu$, а не електростатичний потенціал eV . Взагалі кажучи, в $\Delta\mu$ можуть давати внесок різні ефекти, наприклад, ефект Бернуллі, градієнти температури та тензора напруження, а також може бути добавка, пов'язана з електростатичним потенціалом. Однак будь-який «вольтметр», що знаходиться в електричному контакті з двома сторонами тунельного переходу, вимірює фактично $\Delta\mu$, а не eV. Отже, величина $\Delta\mu$, яка вимірюється, наприклад, потенціалометром, прямо пов'язана з частотою Джозефсона. Оскільки $\Delta\mu$ можна виразити через нормальні вольти, частоту Джозефсона також можна виразити через нормальні вольти. При цьому немає необхідності вводити будь-які поправки (за винятком поправок, пов'язаних з розсіянням ЕДС, яка виникає в самому потенціалометричному ланцюгі).

Відзначимо для повноти, що дія магнітного поля, прикладеного під прямим кутом до напрямку струму, поточного через контакт, змінює значення $\Delta\mu$. Якщо поле визначається векторним потенціалом A, то співвідношення між струмом та фазою набуває вигляду (1.21)[10]

$$\mathrm{J} = \mathrm{J}_1 \sin\left[\Delta\varphi - \left(\frac{2\mathrm{e}}{\hbar\mathrm{c}}\right)\int \mathrm{Ads}\right] \qquad (1.21)$$

де інтеграл береться вздовж кривої, що з'єднує надпровідники.

Цей результат був підтверджений низкою витончених експериментів [19], в яких вимірювався критичний струм як функція магнітного поля. Однак немає ні теоретичних, ні експериментальних підстав вважати, що магнітне поле змінює залежність (1.2 та 1.3) між напругою та частотою.

З теорії зрозуміло що струмові ступені, індуковані щодо вольт-амперних характеристик зовнішніх монохроматичних випромінювань, які повинні мати нульовий опір. Крім того, якщо тунельна структура фіксована на певній самоіндуктованій сходинці, то випромінювання має бути монохроматичним, решті решт повинно знаходитись в межах стабільності напруги. Оскільки, нахил самоіндуктованних точкових ступенів зазвичай не вертикальний, то можна очікувати залежність частоти від дійсного стану ступені.

Припустимо, що струм Джозефсона можна записати у вигляді [20, 21]

$$j = j_1 \sin\left\{\omega_0 t + \left(\frac{2e}{h}\right)\int V_ш(\tau)d\tau\right\} \qquad (1.22)$$

де $V_ш$ - потенціал шумів, наведений на тунельної структурі, а (ω_0=2eV_0/ħ).

Таким чином, $V_ш$ призводить до випадкових флуктуацій фази струму Джозефсона. Існує два типи вкладу в $V_ш$ від струму, поточного через контакт. Перший з них виникає через флуктуації нормального струму та був підрахований Скалапіно [20]. Це є просто шум, який супроводжує проліт одиничних електронів при тунелюванні через бар'єр. Другий добавок зобов'язаний шуму, пов’язаний з прольотом пар, він був розрахований Стівеном [21], описувавший тунельний контакт в загалом, як лазерну порожнину. Кожен раз, коли фотон розпадається в порожнині, відбувається тунелювання пари, відшкодовуючи втрати, так що якщо вважати дисипації фотонів випадковим процесом, то результуючий струм туннелюючих пар також буде випадковим, а також буде супроводжуватись пролітаючим шумом. Таким чином походження вкладу пар в ширину лінії в ефекті Джозефсона нагадує походження ширини лінії лазера. Однак при

тунелюванні пар має місце взаємодія з фотонами, заряд, поточний через ємність, який викликає флуктуації напруги близько середнього значення. Цей ефект призводить до частотної модуляції випромінювання та пояснює, чому ширина лінії випромінювання Джозефсона, набагато перевищує ширину лінії лазерного випромінювання.

Повна ширина лінії в межі $eV_0 \ll kT$ дається виразом (1.23)

$$\Delta v = 4e^2 R_D^2 kTI_П/\pi\hbar^2 V_0 \qquad (1.23)$$

де - R_D динамічний опір ступені $(di/dv)^{-1}$, а $I_П$ - повний струм (сума струмів квазічастинок включаючи пар). Форма лінії приблизно описується лоренціаном. Дам, Дененстейн та ін. [22] порівняли результати своїх експериментів з виразом (1.23) та прийшли до згоди у вимірах. Типове значення ширини лінії біля центральної частоти 10^{10} Гц знаходиться в межах від менш ніж 1 кГц при низьких значеннях температури і динамічного опору до 10 МГц поблизу критичної температури надпровідників. Мабуть, походження ширини лінії випромінювання в даний час добре зрозуміле та не може викликати істотних помилок при визначенні $2eV_0/h$ з використанням центральної частоти лінії.

Під час відсутності зовнішнього випромінювання фаза контакту Джозефсона відчуває випадкові флуктуації, які описує рівняння (1.1). Різність фаз $\Delta\varphi$ містить, малу шумову компоненту $\Delta\varphi_ш$, яка зазнає випадкові зміни так, що її середньоквадратичне значення відмінно від нуля. Саме ці флуктуації призводять до збільшенню ліній, такі фазові флуктуації аналогічні відомому Броунівському русі вільних частинок. Тепер якщо на контакт подати монохроматичне випромінювання, то виникає інша ситуація. Нехай амплітуда зовнішнього сигналу буде більше амплітуди шумових флуктуацій, тоді осцилятор Джозефсона буде захоплений у вимушений резонанс та фаза контакту буде визначатися за допомогою фази на яку подається випромінювання. В цьому випадку ефект флуктуацій буде набагато менший.

Причину цього можна вивести з наступних тверджень. Нехай маленька флуктуація змінить фазу контакту на малу величину $\Delta\varphi_{ш}$. Тоді подаваюче випромінювання буде прагнути повернути різницю фаз на контакті до первісного значення. В разі чималих флуктуацій, що дозволяють контакту збитись на цілий період, механізм захоплення буде порушений та на ступені з'явиться малий опір. Фазові флуктуації тепер аналогічні броунівській частинці в спотвореному періодичному потенціалі, амплітуда якого пропорційна інтенсивності яка подається на випромінювання. Це питання досить детально обговорювалося Стівеном та Кларком [21].

Викладені припущення можна використовувати для обчислення нахилуіндукованих ступенів у присутності шуму. Під впливом шуму ступінь має вигляд, зображений «Рис. 1.3.»

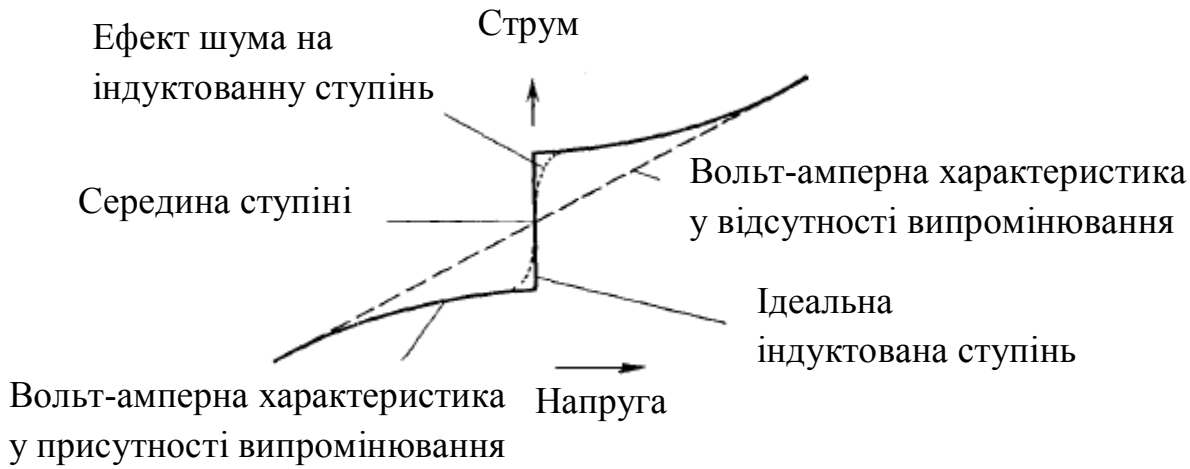
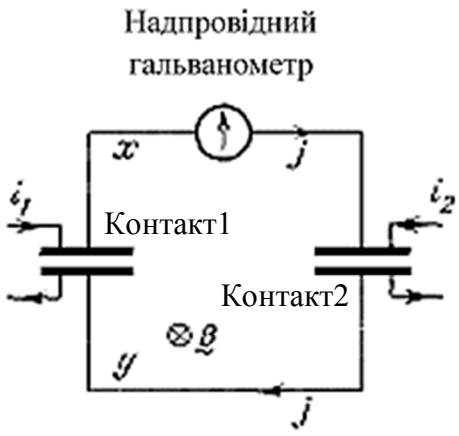


Рис 1.3. Схематичне зображення ступені, індуктованної мікрохвильовим випромінюванням на вольт-амперних характеристиках контакту Джозефсона (пунктирна смуга показує закруглення із-за шумової складової) [1]

Динамічні опори у центрі ступені надзвичайно малі, але вони зростають, грубо кажучи, експоненційно до країв ступені. Спотворення ступені через шум симетричні відносні до середньої точки, так що використання напруги в цій точці при вимірюванні e/h представляється добре

виправданим. В даний час немає твердо встановлене згоди між теорією та



експериментом.

На час проведення експерименту було відомо, що шумові ефекти зростають із зростанням опору контакту, так що у контактів з опором менше 10^{-6} Ом слід було очікувати дуже малого власного шуму. Крім того, дуже малий опір призводить до малої сприйнятливості зовнішніх шумів, просто з причини величезної неузгодженості імпедансів контакту та зовнішнього ланцюга. Основна використана схема зображена на «Рис. 1.4.».Рис 1.4. Контур співвідношення контактів Джозефсона між напругою та частотою на контактах та виміри динамічного опору [1]

Випромінювання з частотою 1 МГц індукційовало ступені на вольт-амперних характеристиках контактів, кожен з яких був фіксований, скажімо, на індукційній ступені першого порядку. Таким чином, між X і У була напруга 2 нв, однак повне динамічний опір контуру дорівнювало просто сумі динамічних опорів двох індукованих ступенів. Контур, в деякому сенсі, був «диференційно надпровідним».

Оцінку диференціального опору ступенів можна отримати, спостерігаючи загасання наведеного струму за допомогою гальванометра. У схожому експерименті, індуктивність (L) контуру була близько 10^{-7} гн, циркулючий струм (j) близько 0,5 мкв, загасання струму (Δj) було менше дозволенного гальванометром, 0,3 мкв, за час Т ~ 30 хв. Тимчасова константа

контуру (τ) визначалася виразом $\tau \approx T_j/\Delta j$ була, таким чином, більше $3*10^6$ сек. Опір контуру (L/τ) було менше $3*10^{-14}$ ом, звідки можна зробити висновок, що диференціальний опір кожної з індукованих ступенів не перевищувало $\sim 10^{-14}$ ом. Це відповідає різниці потенціалів менше 10^{-17} б між верхом і підставою ступені.

На тунельних структурах типу надпровідник - нормальний метал - надпровідник, в принципі, можна отримувати надзвичайно різкі індуковані ступені, але навряд чи вони будуть мати велике значення для вимірювання 2e/h , оскільки ступені можна індукувати лише при малих напругах. Разом з тим, очевидно, не є складним при експериментах на плівкових та точкових контактах здійснити ретельне екранування, щоб ступені на обох типах контактів виходили досить крутими для всіх практичних цілей.

Розділ 1.2. Застосування ефекту Джозефсона

Рішення багатьох задач в області розробки перспективних як аналогових, так і цифрових пристроїв надпровідної електроніки в даний час важко уявити без використання складних багатоелементних структур Джозефсона.

- Надпровідні квантові інтерферометри

З описання квантової інтерференції, надпровідний струм при приміщенні контуру з одним або двома слабкими зв'язками в магнітному полі видно, що це явище аналогічно явищу інтерференції світла. У оптичних інтерферометрах світлову хвилю звичайно розщеплюють на дві рухаючі хвилі по різним шляхам. Для цього використовують або два дзеркала, або напівпрозору пластина. В одну з половин вносять, досліджуваний прозорий об'єкт і по виникненню різноманітності фаз, виявляють його товщину, та показник переломлення, а також інші характеристики. Ця аналогія пояснює сенс терміну " надпровідний квантовий інтерферометр" або скорочено "сквід". У сквіді надпровідний струм також розщеплюється на дві частини, кожна з яких (або тільки одна) проходить свій тунельний зв’язок, а потім вони сходяться разом. Фази при цьому розділяються, це здійснюється за допомогою магнітного поля, завдяки цьому його потік або індукція можуть бути виміряні таким інтерферометром.

В робочому сквіді можна попередньо зібрати невеликий постійний струм відхилення. Тоді вже при зміні потіку на соті або навіть тисячні долі кванта Φ_0 поблизу такої точки на сквіді з'являється досить велика напруга, пропорційна величині магнітного поля. Таким чином, чуттєвість до магнітного потоку доводять до $(10^{-5} - 10^{-6})\ \Phi_0$. Використовуючи перетворювачі різних фізичних величин у потік магнітної поля, отримують дуже чутливі вимірювачі струму, напруги, температури тощо.

У практиці найбільше розповсюдження сквідів отримали в медицині, фізиці та дефектоскопії. Їх великі переваги перед іншими приборами для

вимірювання магнітних полів - надвисока чутливість та можливість безконтактних вимірів, це дозволяє зареєструвати дуже слабкі магнітні поля, пов'язані з слабким електричним струмом, що виникає у живих організмах.

Вдається регіструвати магнітокардіограмми, магнітоэнцефалограмми, магнітограми роботи м'язів, шлунку, очей. Проте при цьому потрібно екранувати кімнату, так як відповідне магнітне поле на кілька порядків менше величини магнітного поля Землі.

В геофізиці з допомогою сквід-магнітометрів можлива геологічна розвідка з літака або з супутника, а також відстеження активни процесів у Землі, як вибухи вулканів, прогнозування землетрусів та ін природніх процесів.

- Надпровідний суперкомп’ютер

Тенденції розвитку сучасних комп'ютерів легко спостерігаються, їх матеріальна база розвивається в основному в бік збільшення швидкості та ступенів інтеграції (числа елементів пам'яті, логіки на одиницю площі чіпу). У більшості комп'ютерів використовується двоїчна система з числом, у якій є всього два числа: нуль та одиниця. Зазвичай це означає відсутність або наявність напруги на виході напівпровідникового транзистора [26].

Впровадження напівпровідної бази елементів в комп'ютерах полягає у технічних обмеженнях, стає все важче підвищити швидкість процессів, зменшити розмір, та відводити велику кількість теплоти. При достатньо великих шільностях розміщення транзисторів навіть при невеликій тепловіддачі кожного з транзисторів, загальна кількість тепла всеодно є надмірною [26].

Ідея використання контактів Джозефсона полягає в якості елементної бази комп'ютерів яка з'явилася у 1960 роках. І якщо задача полягає у мінімізації розмірів переходів, щільності упаковки при малої тепловіддачі то такі задачі досить легко вирішуються завдяки цьому ефекту [26].

Для обробки, а також для збереження інформації використовується

квант магнітного потіку, тобто нуль та одиниця - відсутність або наявність в клітині Джозефсона одного кванта потіку. Логічні елементи в яких проводиться квантування магнітного потіку, називаються квантронами. Експеримент та заміри доводять нам, що квантрони мають дуже високу швидкодію, яка досягає значення у 10^{12} операції у секунду. Однак вони не підкоряються традиційним правилам схемотехніки, а також потрібне забезпечення для застосування схем нового типу. Тут інформація передається від одного елементу до іншго за допомогою кванта магнітного потоку, при цьому необхідними умовами є близьке розташування елементів, характерні відстані розподіляючих елементи, які досягають величини порядку десяти частин мікрона. Такі схеми вигідно застосовувати, при створенні регістрів переміщення - установок з передачею інформації по періодичній структурі елементів логіки, причому інформація змішується на одиничний період при введенні або вилученні одиничного кванта потоку [26].

Розділ 1.3. Постановка задачі

У даній роботі ми будемо використовувати модель Мак Камбера-Стюарта з урахуванням теплових флуктуацій коли флуктуації є білим шумом Гауса з допомогою псевдовипадкових чисел. В рамках резистивної моделі динаміка переходу Джозефсона розглядається з зовнішнім струмом без урахування теплових флуктуацій описується рівнянням Мак Камбера-Стюарта (1.24)

$$\left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C\ddot{\varphi} + \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{1}{R}\dot{\varphi} + E_C \sin\varphi = E_C \frac{I}{I_C} \tag{1.24}$$

де зовнішній струм в загальному вигляді дорівнює (1.25)

$$I = I_d + I_a cos(\omega t) \tag{1.25}$$

Напруга на контактах дорівнює (1.26):

$$V = \frac{\hbar}{2e}\langle\dot{\varphi}\rangle \tag{1.26}$$

Таким чином рівняння (1.24) можна розглядати як рух частинки з масою $m = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C$, при наявності коефіцієнту тертя $\gamma = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{1}{R}$ в періодичному потенціалі $U = E_c(1 - cos\varphi)$, під дією сили $F(t) = \frac{E_C}{I_C}\left(I_d + I_a cos(\omega t)\right)$.

Розділ 2. Комп'ютерна модель та методика моделювання

Розділ 2.1. Модель Стюарта Мак Камбера

Обговорення ефекту Джозефсона дозволяє нам зрозуміти що при $I < I_C$ фаза φ знаходиться в локальному мінімумі вільної енергії, та відповідає стаціонарному ефекту Джозефсона «Рис. 2.1. а». Зі збільшенням струму I середній нахил «пральної дошки» зростає, а глибина локальних мінімумів зменшується. При $I = I_C$ локальні мінімуми зникають, та фаза починає сповзати вниз по "пральній дошці" - це значить, що φ безперервно змінюється в часі, отже, на контакті з'являється напруга - це і є нестаціонарний ефект Джозефсона «Рис. 2.1.»

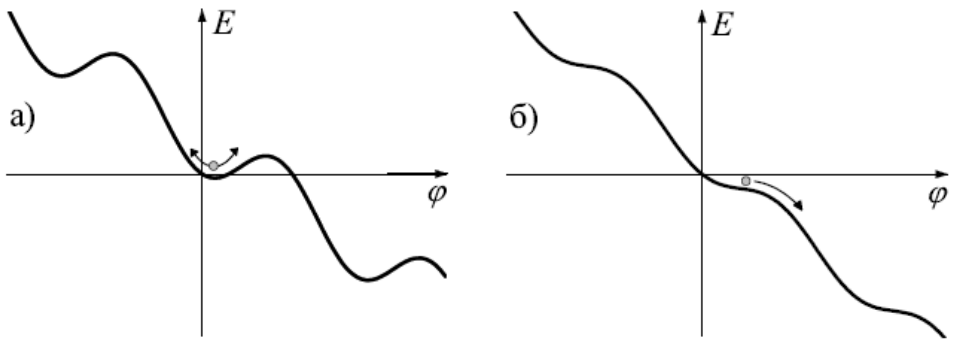


Рис 2.1. Енергія E (φ) переходу Джозефсона: а) $I < I_C$: стаціонарний ефект Джозефсона - фаза φ залишається поблизу однієї з локальних мінімумів, б) $I > I_C$: нестаціонарний ефект Джозефсона - мінімумів немає, фаза φ рухається вниз уздовж так званого потенціалу "пральної дошки" (2.1) [1].

$$E = E_C(1 - cos\varphi) - \frac{\hbar I}{2e}\varphi \qquad (2.1)$$

При складанні еквівалентної схеми контактів Джозефсона, яка зображена на «див Рис. 2.1.а», ми не врахували ще один фактор, який може виявитися важливим: Як видно з самого пристрою контакти Джозефсона, в

яких два надпровідника розділені прошарком діелектрика, така конструкція нагадує конденсатор, та повинна володіти деякою ємністю за моделлю Мак Камбера-Стюарта.

Отже, в загальному випадку в рамках резистивної моделі необхідно доповнити еквівалентну схему паралельно включеної ємністю C. Хоча постійний струм через конденсатор неможливий, а також ще через нього може текти змінний струм зсуву (2.2)

$$\mathrm{I_d} = \mathrm{C}\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}} \tag{2.2}$$

пов'язаний з перезарядженням обкладок конденсатора. Рівняння Мак Камбера-Стюарта (2.3)

$$\left(\frac{\hbar}{2\mathrm{e}}\right)^2 \mathrm{C}\ddot{\varphi} + \left(\frac{\hbar}{2\mathrm{e}}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{R}}\dot{\varphi} + \mathrm{E_C}\sin\varphi = \mathrm{E_C}\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I_C}} \tag{2.3}$$

яке має такий же вигляд, як і рівняння руху маятника під дією змушуючої сили при наявності тертя [17]. Крім того, ототожнюючи φ з лінійної координатою x, ми можемо дивитися на це рівняння як на рівняння руху частки $\left(\frac{\hbar}{2\mathrm{e}}\right)^2 \mathrm{C}$ при наявності тертя з коефіцієнтом тертя $\eta = \left(\frac{\hbar}{2\mathrm{e}}\right)^2 \Big/ R$ в періодичному потенціалі $\mathrm{E_C}(1 - cos\varphi)$ під дією зовнішньої сили $\mathrm{E_C}(\frac{I}{\mathrm{I_C}})$. Власна частота малих коливаннь знаходиться поблизу одного з мінімумів потенціалу та дорівнює (2.4),

$$\omega_p = \sqrt{\frac{2e\mathrm{I_C}}{\hbar\mathrm{C}}} \tag{2.4}$$

а також має назву «Плазмова частота переходу». Плазмова частота може розглядатися також як резонансна частота (2.5)

$$\omega_p = \frac{C}{\sqrt{\mathrm{L}_J C}} \tag{2.5}$$

контуру з ємністю С та «власною індуктивністю» переходу Джозефсона (1.27).

$$\mathrm{L}_J = \frac{\hbar \mathrm{c}^2}{2e\mathrm{I}_C} = \frac{c\Phi_0}{2\pi \mathrm{I}_C} \tag{2.6}$$

«Маса», яка визначає інерційну поведінку переходу при змінені φ, пов'язана з величиною ємності С. Припустимо, що спочатку збільшуємо ми струм I від нуля до нескінченності, а потім зменшуємо назад до нуля. Масивна частинка почне неперервно рухатись при нахилі «пральної дошки», на відміну від безмассової частинки яка при I, злегка перевищує $\mathrm{I_C}$ та рухається дуже повільно, частка з кінцевої масою відразу ж розженеться до деякої кінцевої швидкості (це значить що зі збільшенням струму при $\mathrm{I} = \mathrm{I_C}$ на контакті стрибком виникне кінцева напруга). При подальшому збільшенні нахилу швидкість буде рости. Істотна особливість масивної частинки проявиться при зменшенні струму. Зменшивши струм до $\mathrm{I_C}$, ми знову отримаємо частку, що рухається з кінцевою швидкістю. У зв'язку з інерцією частки зупинити її можна, тільки декілька зменшивши кут нахилу в порівнянні з критичним, тобто при деякому «струмі повернення» $\mathrm{I}_R = \mathrm{I_C}$.

Таким чином, наявність ємності у контактах Джозефсона призводить до гістерезису його вольт-амперної характеристики (залежність $V(I)$ різна для випадків збільшення та зменшення I). Кількісно струм повернення та гістерезисні властивості визначаються величиною параметра Мак Камбера-Стюарта:

$$\beta = \frac{2\mathrm{e}}{\hbar}\mathrm{I_C C R}^2 \tag{2.7}$$

За допомогою параметра β характерна частота Джозефсона $\omega_c = \frac{2e}{\hbar} I_C R$ (2.7) яку ми можемо записати в більш компактному вигляді:

$$\beta \frac{\ddot{\varphi}}{\omega_c^2} + \frac{\dot{\varphi}}{\omega_c} + \sin\varphi = \frac{I}{\beta} \qquad (2.8)$$

При $\beta \ll 1$ ємнісним членом можна знехтувати. Зі збільшенням β виникає гістерезіс з струмом повернення I_R , який зменшується з ростом β і прагне до нуля в межі $\beta \to \infty$. Таким чином в цій межі поворотна частина вольтамперної характеристики стає лінійною.

Розділ 2.2. Рішення стохастичних рівнянь

З урахуванням термічних флуктуацій рівняння Мак Камамбера-Стюарта (1.24) зводиться до рівняння Ланжевена (2.9)

$$\mathrm{m\ddot{x}} = -\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{U(x)} - \gamma\dot{\mathrm{x}} + \mathrm{F(t)} + \sqrt{2\gamma \mathrm{kT}}\xi(\mathrm{t}) \qquad (2.9)$$

де $t-$ час, $x-$ координата частки в одновимірній решітці, m - маса, γ – коефіцієнт тертя. Точка зверху позначає диференціювання за часом. Член $\xi(t)$ описує термічні флуктуації.

При аналізі результатів моделювання зручно перейти до безрозмірних величин при яких рівняння (1) приймає максимально простий вигляд (2.10).

$$\ddot{\mathrm{x}}' = -\sin\mathrm{x}' - \gamma'\dot{\mathrm{x}}' + \mathrm{F}'(\mathrm{t}) + \sqrt{2\gamma'\mathrm{k}'\mathrm{T}}\xi(\mathrm{t}) \qquad (2.10)$$

У найпростішому випадку потенційна енергія частинки U у полі кристалічної решітки може бути переписана наступним чином (2.11)

$$\mathrm{U(x)} = -\frac{\mathrm{U_0}}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{\mathrm{a}}\mathrm{x}\right) \qquad (2.11)$$

де a – постійна решітки, а U_0- висота потенційного барьеру.

На рухому частку діє періодична сила з боку кристалічної решітки F_{lat} (2.12).

$$\mathrm{F_{lat}} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{F_{cr}}\sin\left(\frac{2\pi}{\mathrm{a}}\mathrm{x}\right) \qquad (2.12)$$

Величина $\mathrm{F_{cr}} = \frac{\pi}{\mathrm{a}}\mathrm{U_0}$, яка називається критичною силою [8] та відповідає мінімальній діючій силі, необхідної для подолання в в'язкому середовищі енергетичного бар'єру, що розділяє два сусідніх положення частинки на одновимірної решітці. Параметри використовуваного просторово-періодичного потенціалу були тими ж, що і в роботах [6,7].

У роботі досліджувався зовнішнє періодичне поле такого вигляду:

$$F_t(t) = F_0 \sin(\omega t) \qquad (2.13)$$

де ω - кутова частота зовнішньої сили, а F_0 - її амплітуда. Її вигляд зображений на «див Рис. 2.1.» суцільною лінією.

Стохастичні рівняння (2.9) - (2.10) для кожної частки вирішувалися чисельно методом Ейлера [9] з кроком по часу який становить менше 0.01 періоду власних коливань. Статистичне осереднення проводилося по ансамблю с кількістю частинок не менше $N = 5 * 10^4$. Для перевірки отриманих результатів окремі обчислення проводилися с $N = 5 \cdot 10^6$. Початкові умови задавалися таким чином. Частинку поміщають на початок координат та випадковим чином їй повідомляється швидкість, яка має розподіл Максвелла по температурі. Потім проводилась термалізація системи протягом 10^6 тимчасових кроків. Після чого частка з наявної швидкістю переміщалася в першу елементарну комірку.

Розділ 2.3. Генератор шуму Гауса.

Метод Бокса-Мюллера це метод для перетворення рівномірно-розподіленої величини у нормально-розподілену величину [24].

Нехай x, y - випадкові незалежні величини, розподілені рівномірно на відрізку [-1, 1]. Підрахуемо $s = x^2 + y^2$. Якщо виявиться, що $s > 1$ або $s = 0$, тоді значення x та y слідує «викинути» та згенерувати нові значення заново. Поки не виповниться умова $0 < s \leq 1$. Далі слід розрахувати z_0, z_1 за формулами (2.14, 2.15)

$$z_0 = x * \sqrt{\frac{-2 \ln s}{s}} \tag{2.14}$$

$$z_1 = y * \sqrt{\frac{-2 \ln s}{s}} \tag{2.15}$$

Зазвичай припускають відомими закони взаємодії між частинками в рамках класичної механіки, чисельно інтегруючи рівняння механіки, можна простежити за рухом частинок осереднюючи за часом та по всім часткам, та спробувати вивести мікро і макроскопічні характеристики системи, що вивчається.[23]

Розділ 2.4. Генератор псевдовипадкових чисел.

Псевдовипадковий алгоритм являє собою евристику, яка імітує процес природної еволюції. Комп'ютерний варіант генетичного алгоритму який був запропонований у Голландії у 1975 році. Він був успішно застосований в цілому ряді програм для вирішення задач нелінійної оптимізації.

Алгоритм ГПВЧ - покликаний створювати послідовність чисел, елементи якої практично незалежні та підкоряються заданому розподілу. Найбільш широко використовуються методи псевдовипадкових чисел які можуть бути поділені на два основні класи: лінійно-конгруентний метод, а також метод зсувних регістрів.

Лінійно-конгруентний метод

Лінійно-конгруентний метод (ЛКМ) був впровадженний Лемером у 1951р [24]. Послідовність псевдовипадкових чисел $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ обчислюється після завдання початкового значення x_0 за формулою (2.16)

$$x_{n+1} = (ax_n + c)\ (mod\ M) \qquad (2.16)$$

де a — множник, c — приростання, M — модуль.

Очевидно з рівності, максимально можливий період такої послідовності не може перевершувати модуля M тому щоб правильно підібрати число M треба приймати до уваги декілька умов:

1) число M повинно бути великим, оскільки период не може мати більше M елементів;

2) значення числа M повинно бути таким, щоб рівність (2.16) обчислювалась швидко

Приклад реалізації цього ж методу на мові програмування Pascal:

```
Const x :LongWord = 10;
Function LCM:LongWord;
Begin
x = (1664525*x+1013904223) mod exp(32*ln(2))
LCM = x
End;
Begin
writeln(LCM)
End.
```

Приклад реалізації цього ж методу на мові програмування Python:

```
def  lkm () :
global  x
x  =  (1664525*x+1013904223)  %  math.pow(2,32)
return int(x)
x = l  #  start meaning of  X
for i in range (0,10) :
print lkm()
```

Лінійно-конгруентний метод має два суттєвих недоліки. Перший, це алгоритмічне обмеження на максимальний період, який не може перевищувати машинну довжину цілого числа (при цьому послідовність довжини $2^{32} \approx 4 * 10^9$ вичерпується на сучасних робочих станціях протягом кількох секунд). Другий недолік полягає в тому, що ЛКМ не слід використовувати в додатках, що мають справу з випадковими векторами в багатовимірному пространстве, оскільки відповідні точки, одержувані з псевдослучайной последовательності на виході ЛКМ, будуть лежати в просторі меншої розмірності.

Генератори, засновані на сдвиговому регістрі [24]

Розглянемо послідовність (2.17).

$$x_n = (a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k})(mod\ 2) \quad (2.17)$$

Характеризуючим поліномом цієї послідовності є (2.18).

$$\mathrm{P(z)} = \mathrm{z^k} — \mathrm{a_1 z^{k-1}} — \ldots — \mathrm{a_k} \quad (2.18)$$

Це лінійно-рекурентне співвідношення в поле Z^2, що складається з двох елементів, нуля і одиниці. Таке рекурентне співвідношення називається зсувними регістром і має період довжини $p = 2^k - 1$ тоді і тільки тоді, коли P є примітивним поліномом. Генератором на сдвиговом регістрі називається генератор з вихідною послідовністю (2.19)

$$u_n = \sum_{i=1}^{L} x_{ns+i-1} 2^{-i} \quad (2.19)$$

де розмір кроку s довжина L - цілі позитивні числа.

Звідси видно, що генератори, засновані на сдвиговому регістрі, володіють гігантським періодом за умови правильного вибору примітивних триномів, що лежать в основі таких генераторів.

Розділ 3. Результати моделювання

Було проведено моделювання процесів струмопереносу в контактах Джозефсона під впливом поля різної частоти. Результати цих досліджень наведені на «Рис. 3.1 – 3.3.».

На «Рис. 3.1.» наведені графіки для низьких частот $\omega = 10^{-6}$ та $\omega = 10^{-5}$. Видно що залежність демонструє петлю гістерезису таким чином спостерігається ефект "пам'яті". Тобто зі збільшенням частоти ширина петлі зростає.

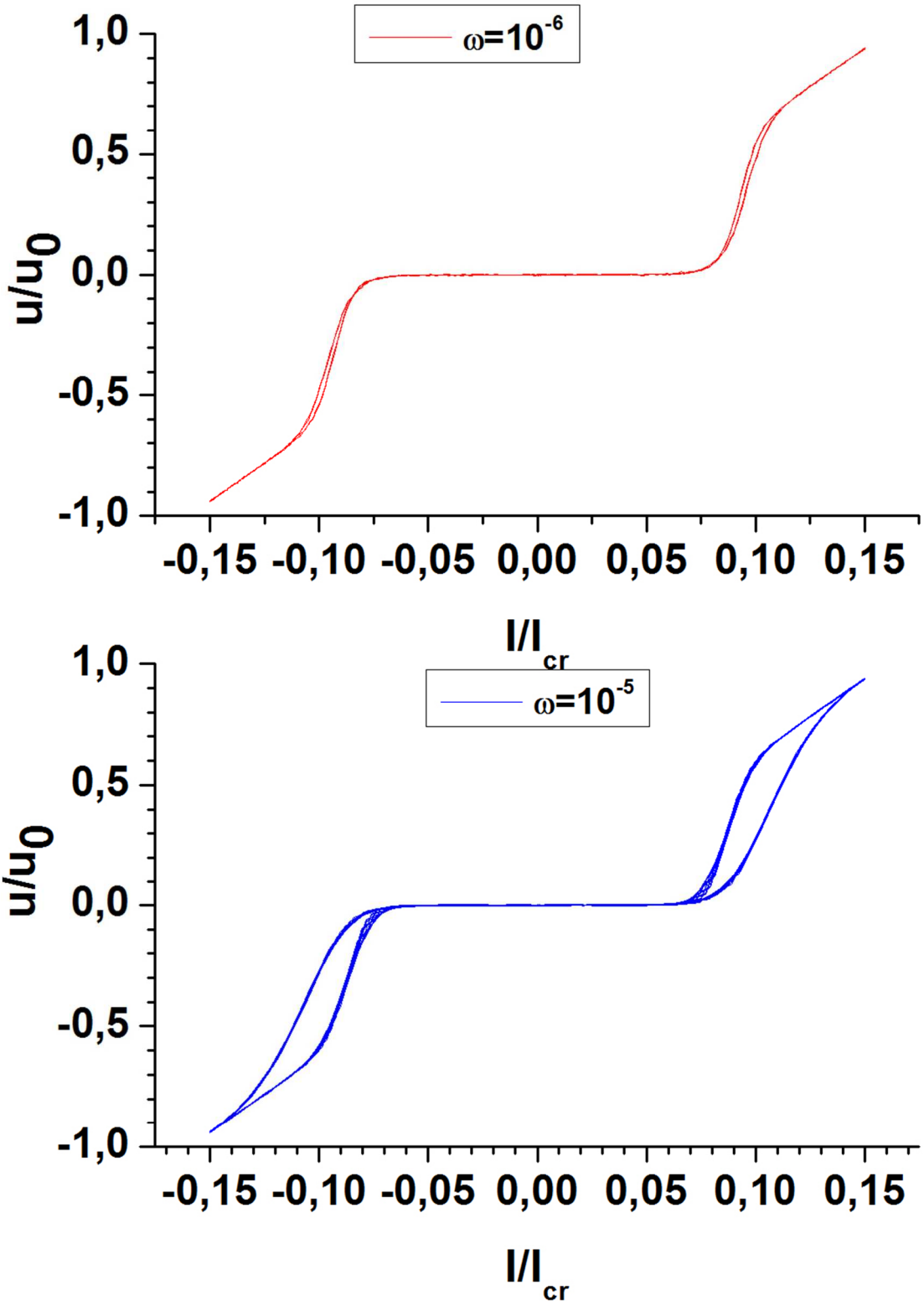


Рис. 3.1. Зміна величини u/u_0 в залежності від струму I/I_{cr}. Наведена зміна величин в часі.

При подальшому збільшенні частоти до $\omega = 4 * 10^{-5}$ петля гістерезису стає ширше. Однак подальше збільшення частоти до $\omega = 10^{-3}$ призводить до зменшенню амплітуди розмаху петлі гістерезису.

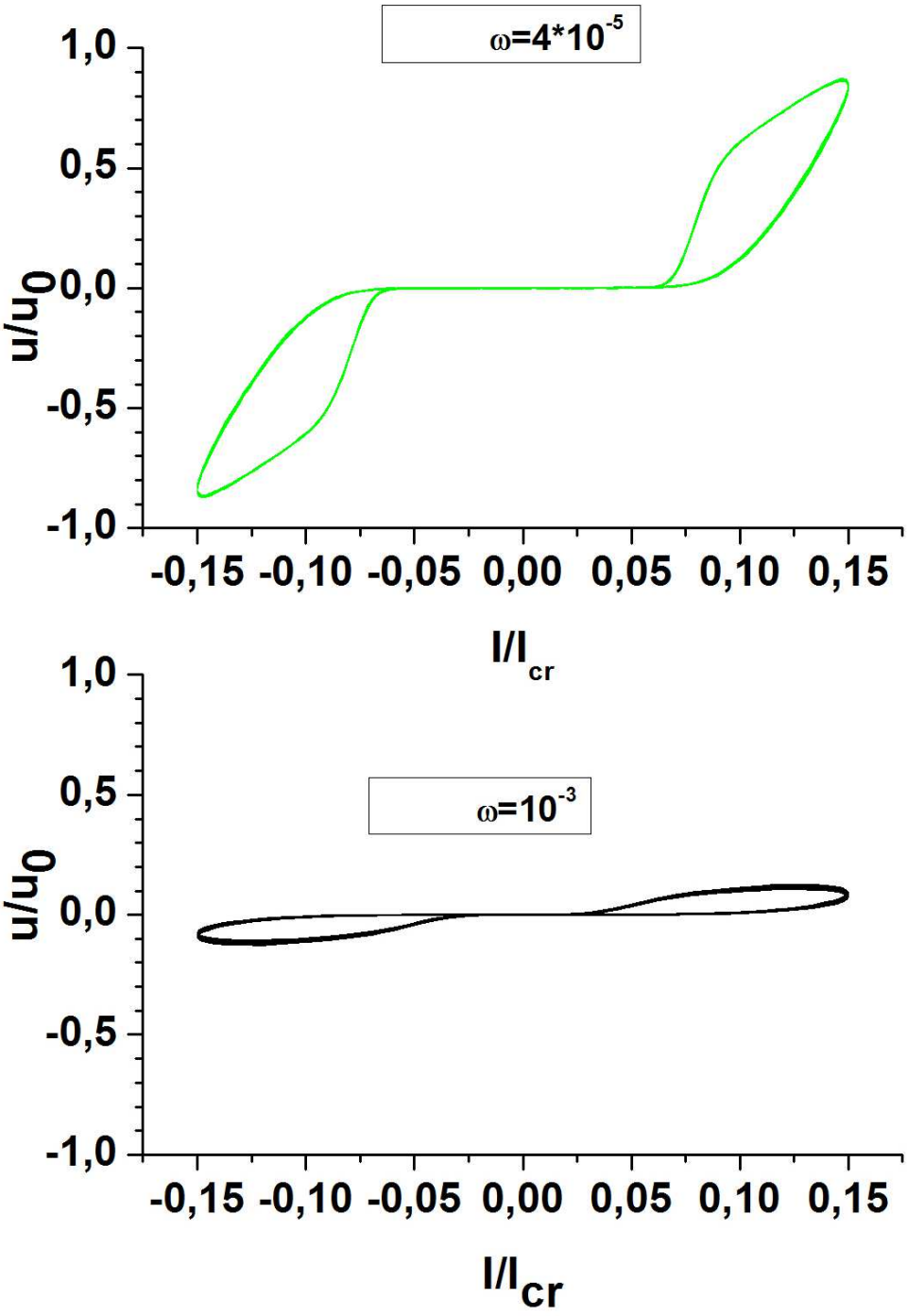


Рис. 3.2. Зміна величини $^{u}/_{u_0}$ в залежності від $^{I}/_{I_{cr}}$. Наведена зміна величин в часі. Частота власних коливань $\omega = 0.1$

При подальшому збільшенні частоти до $\omega = 4 * 10^{-2}$ це призводить до зміненню топології петлі гістерезису. Дві гілки петлі гістерезису деформуються в одну. Подальше збільшення частоти підсилює цей ефект.

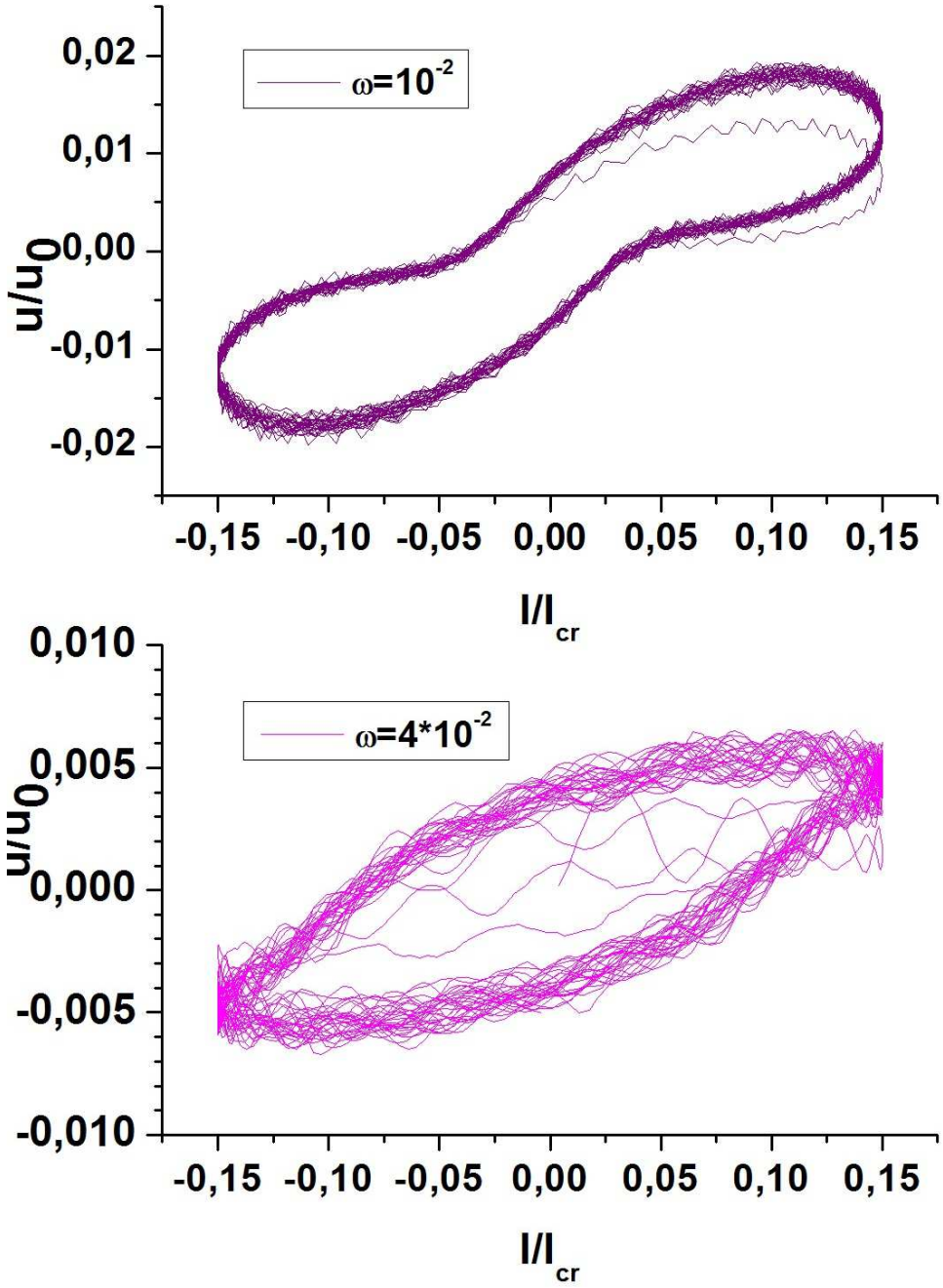


Рис. 3.3. Зміна величини $^{u}/_{u_0}$ в залежності від $^{I}/_{I_{cr}}$.. Наведена зміна величин в часі. Частота власних коливань $\omega = 0.1$

Представлені вольт-амперні характеристики (ВАХ) розподіленого поля Джозефсона з різними частотами змінення поля. Видно, що зміна електричного опору поля призводить до розмиття малюнку залежностей ВАХ.

Отримані моделюванням вольт-ампері залежності якісно відповідають залежностям отриманим експериментально. Дані моделювання можуть використовуватися для прогнозування властивостей мемристорів заснованих на ефекті Джозефсона.

Висновки

В даній роботі наведено теоретичне узагальнення та запропоновано вирішення науково-практичної проблеми шляхом визначення процесів надпровідності з урахуванням генератора шуму Гауса на роботу контактів Джозефсона, що вимагало вдосконалення математичних моделей та методів розрахунку їх параметрів. Комплексний розгляд питань, пов’язаних з дією псевдовипадкових факторів. Для зазначених напрямів досліджень отримані наступні результати:

1) Побудована комп’ютерна модель процесів електропровідності у контактах Джозефсона

2) Було проведено вдосконалення математичних моделей та методів розрахунку їх параметрів

3) Приведено результати розрахунків залежності струму від напруги в контактах Джозефсона

4) Були побудовані отримані залежності та було виконано проведення аналізу чисельних результатів

5) Побудована модель добре відображає процеси що відбуваються в контактах Джозефсона та може бути використана для прогнозування їх вольт-амперних характеристик.

Список використаної літератури

1. Josephson B.D. Possible new effects in superconductive tunnelling // Phys. Lett. - 1962. - V. 1. - P. 251-253.
2. L. N. Cooper, Phys. Rev. 104, 1189 (1956).
3. J. Bardeen, L . N . Cooper, J . R . Schrieffer, Phys. Rev. 108, 1175 (1957).
4. H. K. Ommes, Leiden Commun. 120b, 1226 (1911); Suppl. 34 (1913).
5. W. Meissner, R. Ochsenfeld, Naturwiss. 21, 787 (1933).
6. D. J. Sca1apino, Proceedings of Symposium on the Physics of Superconducting Devices, University of Virginia, April 1967 (edited by B. S. Deaver and W. S. Go- ree).
7. R. Doll, M. Nabauer, Phys. Rev. Lett. 7, 51 (1961).
8. B. D. Josephson, Rev. Mod. Phys. 36, 216 (1964); Ph. D. Thesis, University of Cambridge, England, 1965 (не опубликовано)/Advan. Phys. 14, 419 (1965); in Superconductivity (edited by R. D. Parks), Dekker, New York, 1969.
9. P. W. Anderson, J. M. Rowell, Phys. Rev. Lett. 10, 230 (1963).
10. P. W. Anderson, in Lectures on the Many-Body Problem, Revello 1963 (edited by E. R. Caianiello), Academie, Press, New York, 1964, vol. 2, p. 115.
11. B.D. Josephson, Phys. Lett. 1, 251 (1962).
12. B. S. Deaver, Jr., W. M. Fairbank, Phys. Rev. Lett. 7, 43 (1961).
13. M. H. Cohen, L. M. Falicov, J. C. Phillips, Phys. Rev. Lett. 8, 316 (1962).
14. B. D. Josephson, Fellowship Thesis, Trinity College, Cambridge, England, 1962 (не опубликовано).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика, М., Гостехиздат, 1963.
16. R. A. Ferrell, R. E. Prange, Phys. Rev. Lett. 10 , 479 (1963).C. Kitte , Introduction to Solid State Physics, Wiley, New York, 1966, 3rd ed., Appendix D.
17. J. M. Ziman, Elements of Advanced Quantum Theory, Cambridge U.P., Cambridge, England, 1969.
18. A. J. Dahm, A. Denenstein, D. N. Langenberg, W. H. Parker, D. Rogovin, D. J.

Scalapino, Phys. Rev. Lett. 22, 1416 (1969).J. M. Rowell, Phys. Rev. Lett. 11, 200 (1963).

19. D. J. Scalapino, in Tunneling Phenomena in Solids (edited by E. Burstein and S. Lundqvist), Plenum, Press, New York, 1969.
20. M. J. Stephen**,** Phys. Rev. Lett., 21, 1629 (1968); Phys. Rev. 182, 531 (1969).
21. T. F. Finnegan, A. Denenstein, D. N. Langenherg, I. C. M c- Menamin, D. E. Novoseller, L. Cheng, Phys. Rev. Lett. 23, 229 (1969).
22. Сеньо П.С. Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2-ге вид. — Київ: Знання, 2007. — 556 с.
23. Rouaud, Mathieu.Probability, Statistics and Estmation — 2013. — P. 10.
24. В.И. Долгов. Криптографическая защита информации в АСУ СН. Курс лекций. В.И. Долгов. ХВУ. 1998.
25. Гольцман Г. Н. Эффекты Джозефсона в сверхпроводниках / Г. Н. Гольцман. // Соросовский обозревательный журнал. – 2000. – С. 102