МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Н. КАРАЗІНА
ФІЗИКО-ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фізики нетрадиційних енерготехнологій і екології

Пояснювальна записка

до дипломної роботи

за освітньо-кваліфікаційним рівнем «магістр»

«Конвективні процеси в об’ємі рідини, що обертається і підігрівається знизу»

Виконав: студент 2 курсу, групи НФ-61
Тимошенко А.О.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Прикладна фізика
енергетичних систем
Керівник: доцент Марущенко І.М.

Рецензент: к.ф.-м.н., ст. н. с. Братченко М.І.

Харків – 2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Факультет _____фізико-енергетичний_____
Кафедра фізики нетрадиційних енерготехнологій та екології____
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) «магістр»
Напрям підготовки _____6.040204 прикладна фізика _____
Спеціальність _____прикладна фізика _____

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ ___В.І.Ткаченко__

підпис ініціали, прізвище

“____” _____20___року

З А В Д А Н Н Я
НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ (ПРОЕКТ)

Тимошенко Альона Олександрівна
(прізвище, ім’я, по батькові студента)

1. Тема роботи___Конвективні процеси в об’ємі рідини, що обертається і підігрівається знизу.
керівник роботи_____доцент Марущенко Ілля Миколайович
(прізвище, ім’я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від “___”_____ 20 року № _____
2. Строк подання студентом роботи _____
3. Перелік питань, які потрібно розробити _____
Дослідити виникнення конвекції у в’язкій, нестискуваній рідині, що рівномірно обертається як ціле та підігрівається знизу, в циліндричному осередку з вільними межами. Виконати розрахунки та провести аналіз стійкості циліндричної рідини, що обертається, у випадках з підігрівом знизу та без нього.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Стан вивчення питання (огляд літератури)
2	Методика конкретного дослідження (постановка експерименту, порядок його виконання)
3	Результати дослідження та їх узагальнення (з обов'язковою математико-статистичною обробкою результатів).

5. Дата видачі завдання_____

Студент _____ _А.А.Тимошенко____
підпис
ініціали, прізвище

Керівник роботи _____ ___І.М.Марущенко__
підпис
ініціали, прізвище

РЕФЕРАТ

Дипломная работа выполнена студенткой Тимошенко Алёной Александровной на тему: "Конвективные процессы в объеме жидкости, которая вращается и подогревается снизу".

Данная дипломная работа посвящена изучению возникновения конвекции в объеме жидкости - несжимаемой, вращающейся и подогреваемой снизу. Были выполнены расчеты и проведен анализ устойчивости вращающейся жидкости цилиндрической формы как в случае с подогревом снизу, так и без подогрева снизу. Полученные результаты показывают, что разница температур горизонтальных границ цилиндрического объема вращающейся жидкости увеличивается.

Дипломный проект содержит: 47 страниц, 7 рисунков, - таблиц, - дополнений, 16 источников.

Ключевые слова: КОНВЕКЦИЯ, ПОДОГРЕВ, ЕСТЕСТВЕННАЯ, ЯЧЕЙКИ БЕНАРА, ВЫНУЖДЕННАЯ.

РЕФЕРАТ

Дипломна робота виконана студенткою Тимошенко Альоною Олександрівною на тему: "Конвективні процеси в об'ємі рідини, що обертається і підігрівається знизу".

Дана дипломна робота присвячена вивченню виникнення конвекції в об'ємі рідини, що нестислива, обертається і підігрівається знизу. Були виконані розрахунки і проведено аналіз стійкості рідини циліндричної форми, що обертається, у випадках з підігрівом знизу і без підігріву знизу. З отриманих результатів випливає, що різниця температур горизонтальних кордонів меж циліндричного об'єму рідини, яка обертається, збільшується.

Дипломний проект містить: 47 сторінок, 7 малюнків, - таблиць, - доповнень, 16 джерел.

Ключові слова: КОНВЕКЦІЯ, ПІДІГРІВ, ПРИРОДНА, ОСЕРЕДКИ БЕНАРА, ВИМУШЕНА.

ABSTRACT

A certification work by Alyona Timoshenko Aleksandrovna on a subject: "Convective processes in volume of liquid which rotates and warmed up from below".

This certification work is devoted to studying the emergence of convection in a volume of liquid, which is incompressible, rotating and warmed up from below. Calculations were executed, and the analysis of firmness of liquid of the cylindrical, rotating form in a case with heating from below and without heating from below is carried out. It follows that the temperature difference of horizontal borders of cylindrical volume of rotating liquid increases.

The degree project contains: 47 pages, 7 drawings, - tables, - additions, 16 sources.

Keywords: The CONVECTION, HEATING, NATURAL, BENAR'S CELLS FORCED.

ЗМІСТ

ВСТУП.....8
РОЗДІЛ 1.....10
КОНВЕКЦІЯ.....10
РОЗДІЛ 2.....12
КОНВЕКТИВНІ СТРУКТУРИ В ПРИРОДІ І ТЕХНІЦІ.....12
РОЗДІЛ 3.....14
ПРИРОДНА І ВИМУШЕНА КОНВЕКЦІЯ.....14
РОЗДІЛ 4.....17
КОНВЕКЦІЯ В РІДИНАХ.....17
РОЗДІЛ 5.....18
ОСЕРЕДКИ БЕНАРА.....18
РОЗДІЛ 6.....24
ПОСТАНОВКА ТА ВИРІШЕННЯ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ.....24
ВИСНОВКИ.....45
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....46

ВСТУП

У даній роботі досліджено виникнення конвекції у в’язкій, нестискуваній рідині, що рівномірно обертається як ціле та підігрівається знизу, в циліндричному осередку з вільними межами.

Конвекція та обертання у різних видах присутні на всіх рідких або газоподібних космічних об'єктах (галактиках, зірках), а також на твердих планетах, що мають рідкі чи газоподібні оболонки, або водночас і ті і інші. До відхилення середніх полів швидкості від обертання твердого тіла в радіальному та меридіональному напрямках або до виникнення диференціального обертання може призводити поєднання конвекції та обертання. Диференціальне обертання має величезний вплив на еволюцію космічних об'єктів, формування клімату на планетах, є причиною локальних особливостей течій. Існування диференціального обертання в електропровідних оболонках планет, зірок, галактик відіграє важливу роль у генерації магнітних полів цих космічних тіл [1].

Вихрові атмосфери, циклони, антициклони, тайфуни, мають дуже великий вплив на формування погоди. Зміна інтегральних характеристик атмосфери супроводжується виникненням локальних особливостей структури течії. Тому у прикордонному шарі Землі є спіральний горизонтальний вал, аналогічні структури спостерігаються також у нижньому шарі тайфунів. Таким чином, вивчення як інтегрованих характеристик конвективних потоків в обертових шарах, так і локальних структур струмів, є актуальним [1].

Експериментальні дослідження особливостей конвекції в обертових системах проводяться зазвичай в циліндричних або кільцевих судинах. У такій геометрії можна відтворити елементи глобальної циркуляції, деякі оболонки, характерні для атмосфери, ті ж самі вихрі, та можна вивчити вплив обертання на локальну структуру турбулентного конвективного потоку. У той же час практично немає вимірювань щодо інтегрованих характеристик

конвективних струмів. Очевидно, це пов'язано з тим, що до недавнього часу було дуже проблематично робити польові вимірювання швидкості у великих обсягах.

Також вивчення природної конвекції пов’язане з визначенням параметрів струму або газу. Визначення цих параметрів забезпечує збільшення енергії. Нестаціонарний вільний і конвективний перенос в порожнинах при граничних умовах, які періодично змінюються у часу, є досить докладно вивченим протягом останніх двох десятиліть.

Це пов'язано з тим, що температура на поверхні Землі має виражену щоденну та річну періодичність. Через те, що при повторюванні температури на межі, вплив початкової температури буде меншим, ніж вплив інших факторів, які зазвичай не виконуються, це завдання є характерним та без початкових умов. Вивчення гістерезису пов'язане з різними шляхами еволюції потоку, в залежності від початкових умов і значень зовнішніх параметрів, які мають вирішальний вплив на структуру течії та теплообміну.

РОЗДІЛ 1

КОНВЕКЦІЯ

Конвекція (від лат. Convectio - «принесення» Рис.1.1) – перенесення тепла потоками речовин в газі або рідині. Існує природна (вона ж вільна) конвекція і вимушена конвекція, що виникає під впливом зовнішніх сил (вітер, насос та інше) [2].

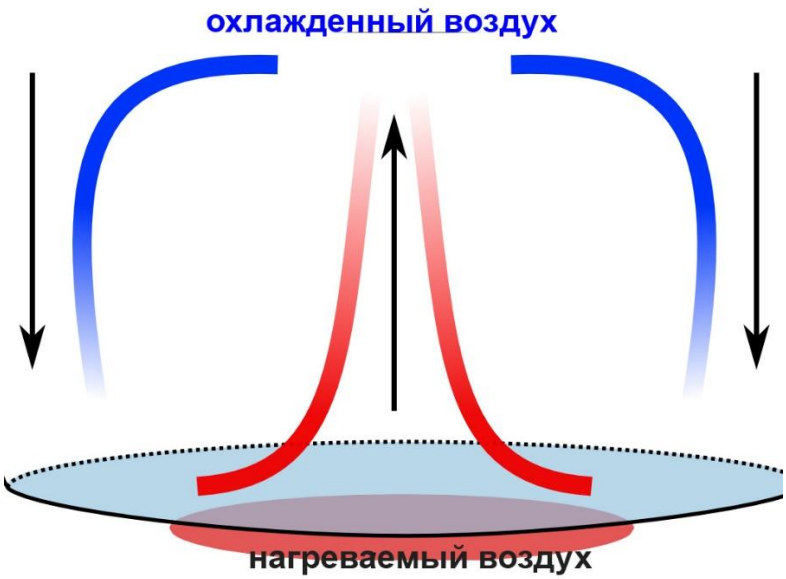


Рис.1.1 Схема конвекції.

Конвекція, що пов’язана з нагріванням знизу, є найбільш відомою. Це найпоширеніший вид течій газів і рідин. Така конвекція визначає погоду в нижньому шарі земної атмосфери, має місце в морях і океанах, в надрах Землі та навіть на Сонці. При цьому виді конвекції нагріта частина середовища, що має меншу щільність, під впливом сил Архімеда починає підніматися вгору, проходячи через більш холодні частини, одночасно з цим нагріваючи їх, і тим самим зменшуючи інтенсивність конвекції. Характерно, що рух речовини (рідини або газу) відбувається в напрямку, протилежному напряму дії сили тяжіння. Такий вид конвекції буде неможливим за умов невагомості [2].

У другій половині минулого століття вчені встановили, що дрейф континентів викликається саме конвекцією. До того теорія про дрейф континентів була лише непідтвердженою і активно оспорюваної гіпотезою, оскільки ніхто не міг назвати сили, яка б цей дрейф викликала. Коли ж концепція підземної конвекції отримала визнання, виявилося, що в ролі рідини в даному випадку виступає тверда мантія, особливо в тих місцях, де вона лежить під скельним матеріалом більшої щільності. Потужна континентальна плита перекриває потік тепла з мантії, під плитою виникає висхідний потік і континенти розходяться в різні боки. Згодом цю концепцію розробляли в багатьох лабораторіях світу, причому великий внесок в неї був внесений в 70-х роках минулого століття академіком Георгієм Голіциним. Розроблена ним методика має додатки до багатьох природних об'єктів - до мантії Землі, до її рідкого ядра, океанів, атмосфери планет і зірок [3].

Конвекція була відкрита в кінці XVIII століття англо-американським вченим і винахідником Бенджаміном Томпсоном, але, незважаючи на активний до неї інтерес, дуже довгий час реальної теорії конвекції (через високу складность розрахунків) не існувало. Існували лише наближення, які з роками стають усе більш точними. Але фактично і сьогодні точної теорії конвекції не існує, за винятком ряду її окремих випадків [3].

РОЗДІЛ 2

КОНВЕКТИВНІ СТРУКТУРИ В ПРИРОДІ І ТЕХНІЦІ

Для конвективних структур, що спостерігаються в природі і виникають в різних технологічних процесах, співвідношення між термокапіллярнимі і термогравітаціонними силами може змінюватися в дуже широких межах. Наприклад, в разі конвекції в океані, коли характерний масштаб становить метри або навіть десятки метрів, капілярними ефектами можна знехтувати. У деяких випадках можна свідомо знехтувати впливом сили тяжіння.

2.1 Вітер

Всі вітри в атмосфері - це конвективні потоки величезного масштабу. Конвекцією пояснюються, наприклад, вітряні бризи, що виникають на берегах морів. У літні дні суша нагрівається сонцем швидше, ніж вода, тому і повітря над сушею нагрівається більше, ніж над водою, його щільність зменшується і тиск стає менше тиску більш холодного повітря над морем. Вночі вода охолоджується повільніше, ніж суша, і повітря над сушею стає холоднішим, ніж над водою. Так і утворюється морський бриз [4].

2.2 Тяга

Без повітря, горіння палива є неможливим. Якщо в топку або в трубу самовара не буде поступати повітря, то горіння палива припиниться. Зазвичай використовують природний приплив повітря - тягу. Для створення тяги над топкою, наприклад в котельних установках фабрик, заводів, електростанцій, поміщають трубу. При горінні палива повітря в ній нагрівається. Як ми вже знаємо, від цього щільність повітря зменшується. Отже, тиск повітря, що знаходиться в топці і трубі, стає менше тиску зовнішнього повітря. Внаслідок різниці тисків холодне повітря надходить в топку, а тепле піднімається вгору - утворюється тяга [4].

Чим вище труба, що споруджена над топкою, тим більша різниця тисків зовнішнього повітря і повітря в трубі. Тому тяга посилюється при збільшенні висоти труби.

2.3 Центральне водяне опалення

У багатьох сучасних великих будівлях встановлюють водяне опалення. У підвальному поверсі будівлі встановлюють котел, в ньому нагрівається вода. Від верхньої частини котла головна труба йде на горище, де вона з'єднується з розширювальним баком. Розширювальним він називається тому, що в нього надходить надлишковий обсяг води, що утворюється при розширенні її від нагрівання. Від розширювального баку по горищі проводять систему розподільних труб, від яких відходять вниз вертикальні труби, що проходять через кімнати будівлі. З цих труб вода надходить в опалювальні батареї, що складені з чавунних труб, і встановлюються вони зазвичай під вікнами [4].

Гаряча вода нагріває труби батарей, віддаючи їм частину своєї енергії. Від труб енергія передається повітрю кімнати. Сама вода стає холоднішою і по системі нижніх відвідних труб, розташованих в підвалі, надходить в котел, де знову нагрівається, піднімається на горище, знову потрапляє в батареї, віддає їм енергію і т.п. Такий рух води в системі центрального опалення, а отже, перенесення енергії від котла до батарей, відбувається весь час, поки нагрівається котел, і здійснюється воно завдяки конвекції [4].

РОЗДІЛ 3

ПРИРОДНА І ВИМУШЕНА КОНВЕКЦІЯ

Існують декілька видів конвекції, в залежності від типу їх походження; найпоширенішими є вільна, вимушена та капілярна конвекція.

Конвективний теплообмін відбувається завдяки контакту рідини, що рухається, і твердої поверхні, якщо вони мають різну температуру. Під час вимушеної конвекції рух викликано не нагріванням рідини, як це спостерігається при природної конвекції, а впливом деякою зовнішньої сили. Енергія, що надходить ззовні, необхідна для підтримки руху рідини; при цьому діють дві сили - тиск рідини, що залежить від швидкості потоку, і сила тертя, що обумовлена в'язкістю рідини. Вплив цих сил на тепловіддачу рідини характеризується безрозмірним параметром конвекції - критерієм Рейнольдса [5].

Перенесення теплоти конвекцією відбувається в результаті переміщення частинок теплоносія і спостерігається тільки в рідких і газоподібних середовищах. Залежно від причини, що спонукає частки рідини переміщатися, розрізняють вільну і вимушену конвекції.

Вільною (природною) конвекцією називається рух рідини (газу), що викликається неоднорідністю густини частинок рідини (газу), що знаходяться в полі тяжіння. Тому вільно конвективний перенос теплоти обумовлений переміщенням частинок рідини лише в силу зміни їх щільності, що, в свою чергу, обумовлено нагріванням або охолодженням її або зміною концентрації (солоності). Наприклад, якщо воду в посудині, що знаходиться при температурі вище 4°С, охолоджувати зверху, то в воді виникне вільна конвекція - активне перенесення частинок води знизу вгору. Одночасно буде відбуватися перенос більш охолоджених часток в зворотному напрямку. У цьому випадку спостерігається нестаціонарна вільна конвекція. Збільшення щільності поверхневих шарів водойми може статися також за рахунок

збільшення каламутності, обумовленої притоками, або осолоненія при випаровуванні [5].

Вимушеною конвекцією називається рух рідини (газу), що викликається впливом зовнішніх сил (вітер, насос та інше). Таким чином, перенесення теплоти вимушеною конвекцією обумовлено турбулентним перемішуванням водних або повітряних мас потоку, а також пов'язано з переносом теплоносія. Під час вимушеної конвекції здійснюється перенесення тепла, пов'язане, наприклад, з водними і повітряними потоками, з вітровим перемішуванням і вітровою течією водних мас. На відміну від вільної конвекції, при вимушеній конвекції відбувається не не молекулярне, а полярне перенесення водних мас, тобто перенесення великих об'ємів рідини [6].

Таким чином, гідравліка рідини (поле швидкостей) при вимушеній конвекції мало залежить від температури і тому може і повинна визначатися до початку теплового розрахунку; вона є заданою умовою рішення теплової задачі, в той час як гідравліка при вільній (природній) конвекції прямо пов'язана з тепловим режимом розглянутого водного об'єкту [6].

Часто має місце вимушена і вільна конвекція одночасно. Третя форма передачі теплоти обумовлена променистим (радіаційним) теплообміном і відбувається шляхом подвійного перетворення енергії: спершу з теплової в електромагнітну в місці випромінювання, а потім, після того як вона пройшла весь шлях в теплопрозорому середовищі, назад в теплову в місці поглинання. Таким чином, ця форма передачі теплоти характеризується тим, що частина енергії тіла, що визначається температурою його поверхні, перетворюється в енергію теплового випромінювання, і вже в такому вигляді передається в навколишній простір. Зустрічаючи на своєму шляху інше тіло, променista енергія частково відбивається від його поверхні і частково поглинається їм, тобто проникає на деяку його глибину, що залежить від прозорості тіла [14].

Швидкості передачі теплоти зазначеними способами є різними. Радіаційним способом відбувається практично миттєва передача теплоти; так, в повітрі швидкість передачі дорівнює 300 000 км / с. При конвективному способі швидкість передачі теплоти повністю залежить від швидкості руху рідини; так, наприклад, в річці вона може становити 1-2 м / с [7].

Вимушена конвекція викликається зовнішнім механічним впливом на середу. Прикладами вимушеної конвекції є рух повітря в приміщенні під дією вентилятора, протягом рідини в трубі під дією гидронасоса та інше.

Фізичні процеси, що відбуваються при вимушеній конвекції, пов'язаної з рухом тіл з великими швидкостями в атмосфері, моделюються в аеродинамічних трубах, де відтворюється обтікання нерухомих моделей потоком повітря [7].

Особлива форма передачі теплоти має місце в разі зміни агрегатного стану речовини, наприклад при кристалізації води і танення льоду, при конденсації водяної пари і випаровуванні води та інше.

Біологічні і хімічні процеси також супроводжуються тепловими процесами. При кристалізації і конденсації вологи і біологічних процесах відбувається виділення теплоти, а при випаровуванні води, танення льоду - її поглинання [8].

РОЗДІЛ 4

КОНВЕКЦІЯ В РІДИНАХ

При нагріванні рідина розширюється і стає менш щільною, тобто легшою, ніж такий же обсяг холодної води. Більш легка тепла вода піднімається вгору, переносячи разом з собою тепло. На місце нагрітої води приходить холодна вода, яка нагрівається і знову піднімається [9].

Щоб потоки нагрітої води було видно, треба помістити на шляху цих потоків ложку з кристалами марганцівки. Марганцівка добре підфарбовує воду і висхідні потоки теплої води стає добре видно.

Підтвердженням того факту, що потоки нагрітої води поширюються тільки вгору, служить забарвлення рідини (Рис.4.1) не на всі боки від полум'я пальника. Відбувається кругообіг теплої і холодної води проти годинникової стрілки (тепла піднімається вгору, а холодна займає її місце Рис.4.1).

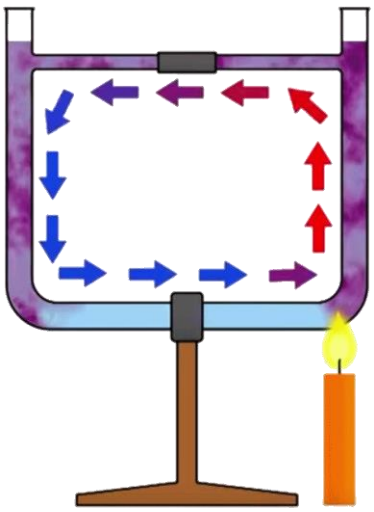


Рис 4.1 Кругообіг гарячої та холодної води в U-подібній трубці.

На явищі конвекції в воді заснований принцип центрального опалення в будинках. Потоки гарячої води переносять тепло в опалювальні батареї радіаторів, де це тепло віддається в житлові кімнати і вже охолоджена вода спускається знову вниз до нагрівального котла [9].

РОЗДІЛ 5

ОСЕРЕДКИ БЕНАРА

Осередки конвекції, отримані Бенаром на рубежі XIX і XX століть (точніше, в 1900 році). Бенар проводив свої досліди з тонкими (товщиною до 0,5 мм) горизонтальними шарами спермацету (кашалотового воску), налитого на сталевий лист і відкритого зверху. Саме після дослідів Бенара осередки конвекції часто називають осередками Бенара. Досліди Бенара справили глибоке враження на сучасників. Так, Релей зробив свої теоретичні дослідження вільної конвекції, ознайомившись з цікавими результатами, отриманими в точних і майстерних експериментах Бенара.

До речі, вперше (в 1939 році) на невідповідність теорії Релея дослідам Бенара звернув увагу В. Волковиський, емігрант, що працював тоді в Парижі. Для пояснення дослідів Бенара була потрібна нова ідея і був запропонований новий механізм збудження. Для цього виявилося необхідним зрозуміти, що в дослідах Бенара використовувався не просто горизонтальний шар, а тонкий горизонтальний шар. Важливим виявилася не горизонтальність, а саме тонкість. Також важливим виявилося і те, що межа рідини зверху була вільна (повітря), адже на вільної межі рідини, як відомо, діє сила поверхневого натягу. Як це часто буває, ідея прийшла зовсім з іншої області - зі спостережень за фарбуванням гарячих поверхонь. Марангоні вперше звернув увагу, що незалежно від розташування, тобто на вертикальній поверхні, так само як і на горизонтальній, на досить гарячої поверхні виникають осередки руху, подібні осередкам Бенара. На вертикальній поверхні сила Архімеда діяти не могла. Такі осередки стали називати осередками Марангоні.

Інтерес до задачі Релея - Бенара для аномальної рідини викликали дослідження останніх років, проведені на озері Байкал. Результати спостережень, отримані з використанням сучасної апаратури, свідчать про

наявність в озері механізму глибокого перемішування, обумовленого перенесенням поверхневих вод Байкалу [1, 2]. Існує кілька гіпотез, що пояснюють це явище. Одна з цих гіпотез заснована на ефекті аномального теплового розширення води. У нехтуванні залежністю щільності від тиску щільність води є немонотонною функцією температури. Ця функція досягає максимуму при температурі, приблизно рівній 4 °C. Немонотонна залежність щільності від температури викликає складну стратифікацію в шарі рідини, температура поверхні яка більше температури інверсії, а температура нижньої межі менше її. Вище точки інверсії градієнт щільності збігається з напрямком сили тяжіння і рідина гравітаційно стійка. Нижче цієї точки щільність зменшується з ростом глибини і стратифікація рідини виявляється нестійкою. Конвективні рухи, що зароджуються в нижній, нестійкій області, поширюються також у верхню, стійко стратифіковану зону. Аналогічні явища мають місце і в інших ситуаціях, коли стійкі шари рідини обмежують нестійку стратифіковану область. Таку конвекцію називають проникаючою. Однак в ряді випадків потрібно враховувати ефекти, зумовлені відхиленнями щільності, викликаними змінами тиску. На важливість врахування таких факторів вперше звернув увагу Г. Ю. Верещагін [3]. Наприклад, температура інверсії води не є постійною, а зменшується з ростом глибини (і, отже, тиску) приблизно на 0,21 °C кожні 100 м [2]. Максимальні значення, які можуть приймати щільність і коефіцієнт теплового розширення, також є функціями тиску. Вже згадана залежність щільності від тиску і температури описує цю аномалію. Якщо глибина рідини невелика, то залежністю щільності від тиску можна знехтувати. Однак на великих глибинах, зокрема в глибоководних озерах (максимальна глибина озера Байкал 1637 м, середня - 730 м), виникають перепади тиску, що можуть чинити істотний вплив на розподіл щільності, а отже відбуваються конвективні процеси [4]. Дослідження стійкості проводиться наступним чином. Спочатку виводяться рівняння руху в безрозмірних змінних. Потім визначається основний стан, в даному випадку -

механічну рівновагу. Далі до функцій, що описують розподіл швидкості, тиску та температури в стані спокою, додаються малі обурення, після чого завдання записується в термінах збурень і лінеарізується. Лінійна задача для збурень допускає рішення спеціального виду, зокрема, коли обурення залежать від часу за експоненціальним законом (нормальні обурення) [5]. Це дозволяє відокремити змінні, в результаті чого виникає спектральна задача, яка досліджується чисельно.

Однією з найбільш добре вивчених моделей конвекції є рівняння в наближенні Обербека - Буссінеска [5]. Ця модель включає рівняння Нав'є - Стокса і рівняння переносу тепла, при цьому щільність вважається лінійною функцією температури. При виведенні рівнянь в цьому наближенні важливим є припущення про те, що відхилення щільності від деякого середнього значення, обумовлені ефектами теплового розширення рідини, настільки малі, що ними можна знехтувати у всіх рівняннях, крім рівняння імпульсу, де ці відхилення істотні тільки в членах, які враховують вплив підйомної сили, яка і є причиною виникнення конвективних рухів.

Для наближення Обербека - Буссінеска доведений принцип монотонності збурень (принцип монотонної зміни стійкості) [5], який полягає в наступному. Рішення, що виникають при аналізі стійкості лінійної задачі для збурень, шукаються у вигляді так званих нормальних збурень (V ', P', T ') (x, y, z, t) ~ (V, P, T) (z) eσt, де σ - декремент, що визначає розвиток збурень в часі. Власні значення σ відповідної спектральної задачі в загальному випадку є комплексними (такі обурення осцилюють з частотою, яка визначається уявною частиною декремента). Загасання або наростання цих коливальних збурень залежить від знака дійсної частини декремента. Якщо Re σ <0, то такі обурення з плином часу загасають і початковий стан рідини стійкий. Наявність збурень з позитивною дійсною частиною декремента означає нестійкість вихідного стану по відношенню до них. Власні числа, які лежать

на уявної осі, називаються критичними (пороговими). У просторі параметрів вони відокремлюють область стійкості від області нестійкості.

У наближенні Обербека - Буссінеска всі власні значення залишаються речовими (в цьому випадку обурення змінюються в часі монотонно), а критичні числа Релея визначаються з умови $\sigma = 0$. Передбачається, що і для даної моделі можна обмежитися дослідженням тільки монотонної нестійкості. Дослідження проникаючої конвекції в горизонтальному шарі рідини при інверсії щільності вперше проведено в роботі [6], де проаналізовано результати експериментів Фурамото і Руса [7], які вивчали конвекцію у горизонтальному шарі води, що підігрівається зверху, нижня межа якого підтримувалася при температурі, яка дорівнює 0 °С.

В експериментах відзначені наступні факти: конвекція спостерігалася не тільки в області нестійкості, але і в зоні, де вода мала стійку стратифікацію; у всій області конвекції, за винятком ділянок поблизу верхньої і нижньої меж, температура води становила близько 4 °С; в разі, коли температура верхньої межі перебувала в діапазоні 12 ÷ 20 °С, виникали додаткові конвективні осередки по вертикалі.

В [6] досліджений шар з вільними ізотермічними межами. Рівняння стану води в околиці температури максимальної щільності описувалося залежністю $\rho = \rho_0 (1 - \gamma \Delta T^2)$, де ΔT - відхилення температури від температури інверсії; ρ_0 - максимальна щільність;

$\gamma = 7{,}68 \cdot 10^{-6}$ °C^{-2}. Для спектральної задачі в разі вільних меж сформульований принцип монотонності збурень. Лінійний аналіз стійкості показав, що при температурі поверхні шару $T = 4$ °С критичне значення числа Релея збігається з його значенням в завданні Релея - Бенара і зменшується при підвищенні температури. В [6] запропоновано наступне пояснення цього цікавого факту: стійкий верхній шар компенсує граничні умови, що дозволяє

збуренням приймати найбільш зручну форму. Мінімум критичного числа Релея досягається при температурі поверхні, що дорівнює 6,7 °С. Помічено також аналогію із завданням про стійкість перебігу Куетта між циліндрами, що обертаються в протилежних напрямках, в разі, коли межі шару вважаються твердими. Це дозволило по вже відомим результатам обчислити критичні значення числа Релея і для даного випадку. Згодом ця аналогія досліджувалася в ряді інших робіт (див., наприклад, [8]. Автор роботи [6] виходив з моделі проникаючої конвекції в наближенні Обербека - Буссінеска). Питання про можливість застосування наближення Обербека - Буссінеска в деяких завданнях, пов'язаних з виникненням конвекції в шарах рідини, розглянуто в роботах [9, 10] с урахуванням додаткових факторів, що характеризують теплове розширення.

Огляд чисельних методів, що застосовуються при вирішенні завдань гідродинамічної стійкості, міститься в роботі [11]. При чисельному дослідженні лінійних крайових задач на власні значення в разі, якщо граничні умови ставляться на обох кінцях проміжку інтегрування, рішення вихідної задачі можна звести до послідовного вирішення низки похідних завдань з граничними умовами, що задаються тільки на одному кінці проміжку. Кожне з цих завдань виходить з вихідної задачі, а рішення вихідної задачі шукається у вигляді лінійної комбінації рішень цих похідних завдань. Коефіцієнти лінійної комбінації визначаються з крайових умов вихідної задачі, а власні значення є нулями деякої тестової функції. Більш детально цей прийом, а також деякі його модифікації і особливості, що виникають при його застосуванні, описані в роботах [12-14].

Найпопулярніший приклад осередків Бенара. На електричну плитку, що розігрівається, поміщається металевий, добре теплопровідний, плоский сосуд, в який налит тонкий шар розплавленого парафіну, змішаного з алюмінієвою пудрою. Цей шар підігрівається знизу електроплиткою, а зверху

охолоджується від атмосферного повітря, при цьому виникають конвективні потоки в рідини. Коли розігрівається плоский шар невеликої товщини, ці конвективні потоки утворюють характерну картину осередків (ті самі Осередки Бенара). По центру є висхідні потоки, а на краях осередків, де вони межують між собою, спостерігається занепад потоків.

Бенар виділив дві фази в розвитку структури осередків. У початковій фазі, яка є досить нетривалою і нерегулярною, осередки стають опуклими багатокутниками з числом сторін від чотирьох до семи. Потім у міру становлення конвекції виникають стійкі шестигранні осередки. Розмір осередків визначається товщиною шару рідини і пропорційний йому. Якщо нахилити посудину, то утворюються нові системи осередків різного розміру. Ситема цих осередків самоорганізується. Структура осередків може бути зруйнована перемішуванням рідин, однак після закінчення перемішування вони швидко відновлюються (Рис.5.1).

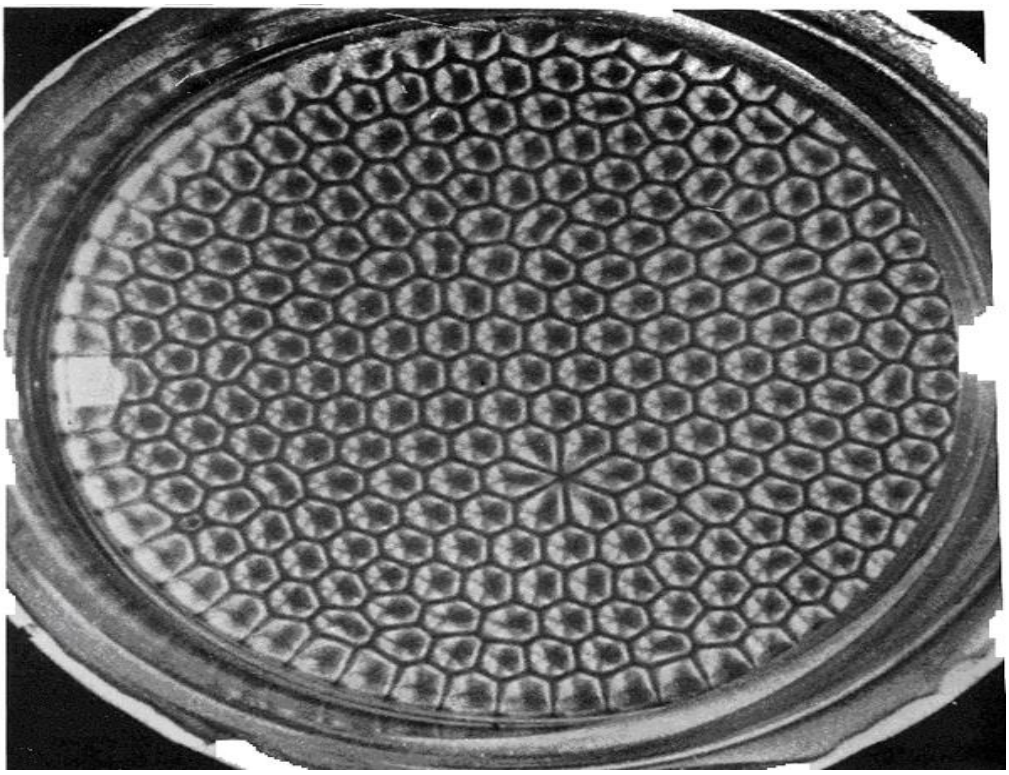


Рис 5.1 Осередки Бенара

РОЗДІЛ 6

ПОСТАНОВКА ТА ВИРІШЕННЯ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ

6.1 Вихідні рівняння конвекції нестисливої рідини, яка обертається як ціле, в'язка, і має циліндричну форму з вільними межами

Розглянемо заповнений в'язкою, нестисливою рідиною циліндричний об'єм радіусом R_0, нижня і верхня межі якого збігаються з площинами $z = 0$ і $z = h$. Рідина рівномірно обертається як ціле з кутовою швидкістю $\vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{e}_z$, де $\vec{e}_z$ - це одиничний вектор, спрямований по вертикалі, яка збігається за напрямком з віссю z.

Розподіл температури всередині циліндра $T_0(z)$ задано таким чином, що температура нижньої межі більше температури верхньої: $T_0(0) = T_{0,2}$, $T_0(h) = T_{0,1}$ ($T_{0,2} > T_{0,1}$). Вважаємо, що в стані рівноваги розподіл температури описується лінійною функцією від координати z:

$$\vec{\nabla} T_0(z) = -\frac{\Theta}{h}\vec{e}_z$$

де $\Theta = T_{0,2} - T_{0,1}$ - різниця температур між нижньою і верхньою площинами.

Запишемо рівняння, що описують конвекцію в циліндричному об’ємі, що підігрівається знизу і обертається як ціле. Ці рівняння складаються з рівняння Нав'є - Стокса з урахуванням сил інерції в обертовій системі координат - коріолісовой і відцентрової [5], рівняння теплопровідності і рівняння безперервності:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \nu\Delta\vec{v} + \vec{g} - 2\vec{\Omega}\times\vec{v} - \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)T = \Delta T, \qquad (2)$$

$$\mathrm{div}(\vec{v}) = 0, \qquad (3)$$

де $\vec{v}$ - малі обурення швидкості рідини в системі координат, $\vec{r}$ - радіус вектор елемента рідини, ρ, p, T - щільність, тиск і температура рідини, $\vec{\nabla}$ - оператор градієнта, Δ - оператор Лапласа, $\vec{g}$ - прискорення вільного падіння, спрямоване проти осі z.

Для стислості ми опустили штрихи у T і ρ. Будемо пам'ятати, однак, що в рівняннях (1), (2) температура відраховується від середнього постійного значення, а тиск є відхиленням від гідростатичного тиску, відповідного постійній температурі T (та щільності).

Повертаючись до припущень, зроблених при виведенні рівнянь (1) - (3), відзначимо, що основним моментом в наближенні Буссінеска є припущення про те, що розглядається в певному сенсі «слабка» конвекція: викликані неоднорідністю температури відхилення щільності від середнього значення передбачаються настільки малими, що ними можна знехтувати у всіх рівняннях, крім рівняння руху, де це відхилення враховується лише в члені з підйомною силою. Звичайно, облік неоднорідності щільності лише в рівнянні руху означає деяку непослідовність наближення Буссінеска. Однак порівняння результатів вирішення рівнянь конвекції з великим експериментальним матеріалом з певністю свідчить про те, що ці рівняння досить добре відображають всі найважливіші особливості теплової конвекції в лабораторних масштабах.

Із системи (1) - (3) можна отримати рівняння, які описують просторово-часову динаміку малих збурень тиску $\tilde{p}$ і температури $\tilde{T}$ щодо їх рівноважних значень $p_0(r,z)$ и $T_0(z) = T_{0,2} - \frac{\Theta}{h} z$:

$$p = p_0 + \tilde{p},\ T = T_0(z) + \tilde{T}. \qquad (4)$$

Малі значення збурень тиску і температури відповідають вимозі: $\left|\tilde{f}\right| << \left|f_0\right|$.

При аналізі рівняння Нав'є - Стокса будемо вважати виконаними припущення Буссінеска щодо визначального впливу температурної стисливості рідини, тобто вважаємо $\rho = \rho_0\left(1-\beta\tilde{T}\right)$ [5],

де β - де коефіцієнт температурної стисливості рідини.

Вважаємо обурення швидкості малими, що дозволяє знехтувати в (1) квадратичними за швидкістю складовими. З урахуванням зроблених припущень і після підстановки (4) в рівняння (1) маємо:

$$\left(1-\beta\tilde{T}\right)\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}\left(p_0+\tilde{p}\right)+\nu\Delta\vec{v}-\left(1-\beta\tilde{T}\right)g\vec{e}_z-2\vec{\Omega}\times\vec{v}-\left(1-\beta\tilde{T}\right)\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right). \quad (5)$$

Вважаємо діаметр циліндричної ємності малим. Ця умова дозволяє не враховувати відцентрову конвективную силу, внаслідок чого останнім додатком в (5) можна знехтувати [5].

Виділимо в (5) рівнянні складові, які є незбурені:

$$\vec{\nabla}p_0 = -\rho_0 g\vec{e}_z. \quad (6)$$

Інші складові дають рівняння балансу сил для обурених величин:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}\tilde{p}+\nu\Delta\vec{v}+\beta\tilde{T}g\vec{e}_z-2\vec{\Omega}\times\vec{v}. \quad (7)$$

В одиницях товщини шару h, часу $\tau = h^2\nu^{-1}$ і температури Θ рівняння (7) перетворюється до безрозмірного вигляду:

$$\frac{\partial\vec{v}'}{\partial t'} = -\vec{\nabla}\tilde{p}'+\Delta\vec{v}'+R\tilde{T}'\vec{e}_z-E^{-1}\vec{e}_z\times\vec{v}'. \quad (8)$$

де значок "штрих" позначає відповідну безрозмірну величину, $R = g\beta h^3\Theta/(\nu\chi)$ - число Релея, ν и χ - коефіцієнти кінематичної в'язкості і

температуропровідності рідини відповідно, $E = \nu/\left(2\Omega h^2\right)$ - число Екмана, яке в більшості експериментів з рідиною яка обертається, є дуже малим [5].

У подальших викладках для спрощення записів позначення "штрих" опускаємо.

Рівняння (8) необхідно доповнити рівнянням теплопровідності (2), яке з урахуванням лінійної залежності температури від висоти в безрозмірною формі набуває вигляду:

$$P\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \vec{v}\vec{e}_z = \Delta \tilde{T}. \qquad (9)$$

де $P = \nu/\chi$ - число Прандтля.

Рівняння безперервності (3) в безрозмірних змінних має той же вигляд.

Для в'язкої, нестисливої рідини циліндричної форми, що обертається як ціле, вважатимемо граничні умови вільними. Вони полягають в рівності нулю на кордонах рідини вертикальних проекцій збурень швидкості:

$$v_z\big|_{\substack{z=0,\\ z=1}} = 0, \qquad (10)$$

і дотичних напружень:

$$\sigma_{rz} = \rho_0 \nu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\Bigg|_{\substack{z=0,\\ z=1}} = 0. \qquad (11)$$

Граничні умови (11) з урахуванням рівняння безперервності (3) можуть бути перетворені увазі:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\Bigg|_{\substack{z=0,\\ z=1}} = 0. \qquad (12)$$

Будемо вважати, що значення температури на кордонах циліндра фіксовані. Звідси випливає, що обурення температури на кордонах

$z = 0, z = 1$ дорівнюють нулю:

$$\tilde{T}\Big|_{\substack{z=0,\\ z=1}} = 0. \qquad (13)$$

До граничних умов (10), (12), (13) слід додати умову для обуреної швидкості на зовнішньому кордоні: $v_r(r,z,t) = v_\varphi(r,z,t) = 0$ при $r = R_0$.

В якості початкової умови вважаємо, що в момент часу $t = 0$ всі обурення або відсутні:

$$\vec{v}, \tilde{T}, \tilde{p}\Big|_{t=0} = 0 \qquad (14)$$

або задані у вигляді:

$$\vec{v}, \tilde{T}, \tilde{p}\Big|_{t=0} = \vec{v}(\vec{r},0), \tilde{T}(\vec{r},0), \tilde{p}(\vec{r},0). \qquad (15)$$

Таким чином, завдання дослідження стійкості нестисливої рідини циліндричної форми, що обертається як ціле, підігрівається знизу, з вільними межами зведена до вирішення завдання на власні значення системи рівнянь (3), (8), (9) з граничними умовами (10), (12), (13) [5] і з заданими початковими умовами (14), (15).

6.2 Рішення вихідної системи рівнянь

Запишемо рівняння (3), (8), (9) в циліндричній системі координат r, φ, z. Вважаємо обурення осесиметричними, тобто такими, що обурення не залежать від кутової координати φ. Це означає, що всі обурені величини задовільняють умові $\partial.../\partial\phi = 0$. Обертання циліндричного об'єму рідини являє собою протяг Куетта з рівноважною азимутальною швидкістю $V(r) = \Omega \cdot r$ [5]. На підставі цього запишемо проекції вектора швидкості в циліндрі: $\vec{v} = (v_r, V(r) + v_\varphi, v_z)$.

Рівняння для обурених проекцій швидкості випливають з (8):

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}\tilde{p} + \Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} + E^{-1} v_\varphi, \qquad (16)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} - E^{-1} v_r, \tag{17}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\tilde{p} + \Delta v_z + R\tilde{T}, \tag{18}$$

де $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

В циліндричних координатах рівняння безперервності (3) перетвориться до виду:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial}{\partial z} v_z = 0 \tag{19}$$

Рівняння (16) - (19) повинні бути доповнені рівнянням теплового балансу (9).

Будемо шукати рішення вихідної задачі у вигляді:

$$v_r(r,z,t) = -A \cdot n\pi k_r^{-1} \cos(n\pi z) J_1(k_r r) \exp(-\lambda t), \quad \text{a)}$$

$$v_\varphi(r,z,t) = D \cdot \cos(n\pi z) J_1(k_r r) \exp(-\lambda t), \quad \text{b)}$$

$$v_z(r,z,t) = A \cdot \sin(n\pi z) J_0(k_r r) \exp(-\lambda t), \quad \text{c)} \tag{20}$$

$$\tilde{p}(r,z,t) = C \cdot \cos(n\pi z) J_0(k_r r) \exp(-\lambda t). \quad \text{d)}$$

$$\tilde{T}(r,z,t) = B \cdot \sin(n\pi z) J_0(k_r r) \exp(-\lambda t), \quad \text{e)}$$

де λ - власні числа, що характеризують загасання ($\lambda > 0$), нарастання ($\lambda < 0$) або стаціонарний стан ($\lambda = 0$) збурень (18); A, B, C, D - амплітуди збурень; $J_0(x)$ - функції Бесселя першого роду нульового порядку від аргументу x;

k_r - радіальне хвильове число, що характеризує залежність збурень від поперечної координати r, $n = 1, 2, 3...$ - модове число.

Ми можемо побачити, що граничні умови на зовнішньому кордоні задовільняються автоматично, якщо покласти $k_r = \sigma_{1,i}/R_0$, где $\sigma_{1,i}$ - i-й нуль функції Бесселя першого роду першого порядку ($J_1(\sigma_{1,i}) = 0$), $i = 1, 2, 3, ...$.

З формули (20) a), c), e) слід, що просторовий розподіл горизонтальної та вертикальної швидкості і температури аналогічні тим, що реалізуються для шару нестисливої рідини без обертання, що є вузькою та підігрівається знизу, і відповідає рішенням задачі Релея в циліндричній системі координат [Бозбей Л.С.].

6.3 Аналіз стійкості рідини циліндричної форми, що обертається, є в'язкою, нестисливою, та підігрівається знизу

Підстановка рішень (20) в рівняння (9), (16) (18) дає кубічне характеристичне рівняння для визначення власних чисел λ:

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \qquad (21)$$

де $a = -k_\perp^2 \dfrac{(2P+1)}{P}, b = k_\perp^4 \dfrac{(P+2)}{P} + \dfrac{P(n\pi)^2 Te - k_r^2 R}{k_\perp^2 P}, c = \dfrac{k_r^2 R - k_\perp^6 - (n\pi)^2 Te}{P},$

$k_\perp^2 = k_r^2 + (n\pi)^2$, $Te = E^{-2} = 4\Omega^2 h^4 / \nu^2$ - число Тейлора.

У стаціонарному стані ($\lambda = 0$) якщо k_r^2 змінити на $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ [5]:

$$k_r^2 R_c = \left(\left(k_\perp^2\right)^3 + (n\pi)^2 Te \right). \qquad (22)$$

де R_c - критичне число Релея монотонної стійкості.

На Рис.6.1 наведено графік ліній рівнів, що характеризують залежність логарифма критичного числа Релея $\ln(R_c)$ від хвильового числа k_r і числа Тейлора Te.

По лініям рівней видно, що відповідне мінімальному критичному числу Рєлея хвильове число зі збільшенням числа Тейлора збільшується і зрушується в короткохвильову область спектру обурень.

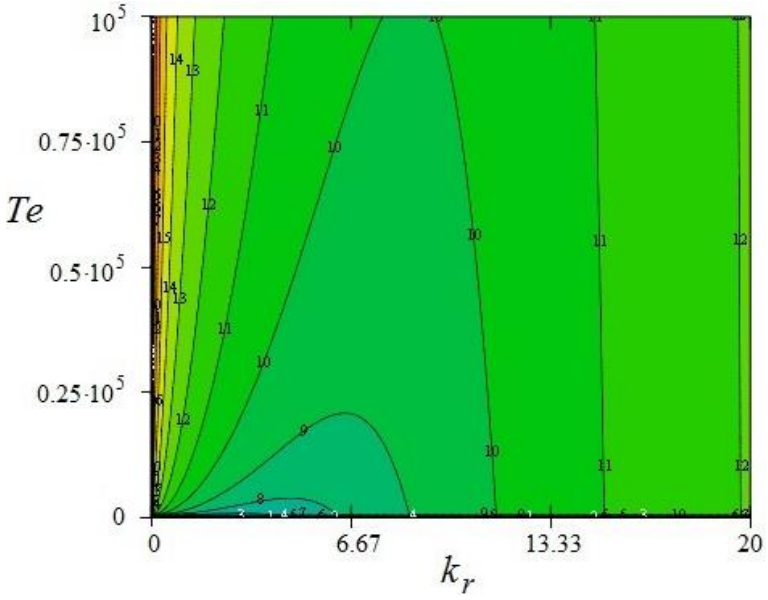


Рис. 6.1. Графік ліній рівнів логарифма критичного числа Релея $\ln(R_c)$ від хвильового числа k_r і числа Тейлора Te.

Переписавши рівняння (22) щодо невідомої, отримаємо неповне кубічне рівняння

$$\left(k_\perp^2\right)^3 + pk_\perp^2 + q = 0, \qquad (23)$$

де $p = -R_c; q = (n\pi)^2 (Te + R_c)$.

Оскільки $k_\perp^2 > 0$, то будемо шукати тільки дійсні позитивні рішення рівняння (23).

Відомо, що вид рішення залежить від знака величини Q:

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left[\frac{(n\pi)^2 (Te + R_c)}{2} + \left(\frac{R_c}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\frac{(n\pi)^2 R_c^*}{2}\left[\frac{Te}{R_c^*} - \frac{R_c}{R_c^*}\left(\sqrt{\frac{R_c}{R_c^*}} - 1\right)\right] =$$
$$= \left(\frac{(n\pi)^2 R_c^*}{2}\right)^2 \left[\frac{Te}{R_c^*} + \frac{R_c}{R_c^*}\left(\sqrt{\frac{R_c}{R_c^*}} + 1\right)\right]\left[\frac{Te}{R_c^*} - \frac{R_c}{R_c^*}\left(\sqrt{\frac{R_c}{R_c^*}} - 1\right)\right], \qquad (24)$$

де $R_c^* = 27(n\pi)^4/4$ - мінімальне значення критичного числа Релея при $\Omega = 0$.

$$
\begin{aligned}
&k_r^2 R_c = \left(\left(k_\perp^2\right)^3 + (n\pi)^2 \, Te\right);\\
&k_\perp^2 R_c - (n\pi)^2 R_c = \left(\left(k_\perp^2\right)^3 + (n\pi)^2 \, Te\right), \quad \text{де} \quad k_\perp^2 = k_r^2 + (n\pi)^2;\\
&\left(k_\perp^2\right)^3 - k_\perp^2 R_c + (n\pi)^2 (Te + R_c) = 0,\\
&p = -R_c; q = (n\pi)^2 (Te + R_c);\\
&Q = -\left(\frac{R_c}{3}\right)^3 + \left(\frac{(n\pi)^2 (Te + R_c)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n\pi)^2 (Te + R_c)}{2}\right)^2 - \left(\frac{R_c}{3}\right)^3 =\\
&= \left[\frac{(n\pi)^2 (Te + R_c)}{2} + \left(\frac{R_c}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\left[\frac{(n\pi)^2 (Te + R_c)}{2} - \left(\frac{R_c}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right] =\\
&= \left[\frac{(n\pi)^2 (Te + R_c)}{2} + \left(\frac{R_c}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\left[\frac{(n\pi)^2 Te}{2} + \frac{(n\pi)^2 R_c}{2} - \left(\frac{R_c}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right] =\\
&= \left[\frac{(n\pi)^2 (Te + R_c)}{2} + \left(\frac{R_c}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\frac{(n\pi)^2}{2}\left[Te + R_c - \frac{2}{(n\pi)^2}\left(\frac{R_c}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right] =\\
&= \left[\frac{(n\pi)^2 (Te + R_c)}{2} + \left(\frac{R_c}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\frac{(n\pi)^2}{2}\left[Te - R_c\left(\frac{2}{(n\pi)^2 3^{\frac{3}{2}}} R_c^{\frac{1}{2}} - 1\right)\right] =\\
&= \left[\frac{(n\pi)^2 (Te + R_c)}{2} + \left(\frac{R_c}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\frac{(n\pi)^2}{2}\left[Te - R_c\left(\left(\frac{R_c}{R_c^*}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)\right] =\\
&= \left[\frac{(n\pi)^2 (Te + R_c)}{2} + \left(\frac{R_c}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\frac{(n\pi)^2 R_c^*}{2}\left[\frac{Te}{R_c^*} - \frac{R_c}{R_c^*}\left(\left(\frac{R_c}{R_c^*}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)\right].
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Для $Te/R_c^* > R_c/R_c^*\left(\sqrt{R_c/R_c^*} - 1\right) > 0$ величина Q позитивна. Рівняння (23) має один дійсний і два комплексно-сполучених кореня.

Дійсний корінь $\left(k_\perp^2\right)_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}}$ є негативним, і, в силу вимоги $k_\perp^2>0$, його не розглядаємо. Комплексно пов'язані коріння описують періодично затухаючі обурення.

Загальне рішення характеристичного рівняння для випадку $Q>0$ нестійке, тому що складається з одного окремого експоненціально наростаючого рішення і двох окремих рішень, які є періодично затухаючими.

Для $Te/R_c^* = R_c/R_c^*\left(\sqrt{R_c/R_c^*}-1\right)$ величина Q дорівнює нулю. Рівняння (23) має один негативний і два співпадаючих позитивних кореня. Позитивні коріння рівні: $\left(k_\perp^2\right)_{2,3} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{Q}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{Q}} = \sqrt[3]{q/2} = \sqrt[3]{\left((n\pi)^2\left(Te+R_c\right)\right)/2}$, і описують аперіодично затухаючі обурення.

Загальне рішення характеристичного рівняння для випадку $Q=0$ не стійке, тому що складається з одного окремого експоненціально наростаючого рішення і двох окремих аперіодично згасаючих рішень виду $\exp\left(-\left(k_\perp^2\right)_2 t\right)$ и $t\cdot\exp\left(-\left(k_\perp^2\right)_2 t\right)$.

Для нерівностей $0<Te/R_c^*<R_c/R_c^*\left(\sqrt{R_c/R_c^*}-1\right)$, які справедливі при $R_c/R_c^*>1$, величина Q негативна. У цьому випадку рівняння (23) має три різних дійсних корені. З них, в силу вимоги $k_\perp^2>0$, вибираємо позитивний у всьому діапазоні зміни Te і R_c корінь:

$$\left(k_\perp^2\right)_3 = -\left(\frac{(n\pi)^2 R_c^*}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\sqrt[3]{i\sqrt{\left[X^3-(Y+X)^2\right]}-(Y+X)}\right]\frac{1+i\sqrt{3}}{2}+\text{к.с.}, \qquad (26)$$

де $Y = Te/R_c^*$, $X = R_c/R_c^*$, к.с. - позначає комплексно сполучену величину.

На (Рис.6.2) показані лінії рівня логарифма радіального хвильового числа $\ln(k_r)$ в залежності від числа Релея $(1 \le R_c/R_c^* \le 10)$ і числа Тейлора $(0 \le Te \le 100)$ для випадку $n = 1$.

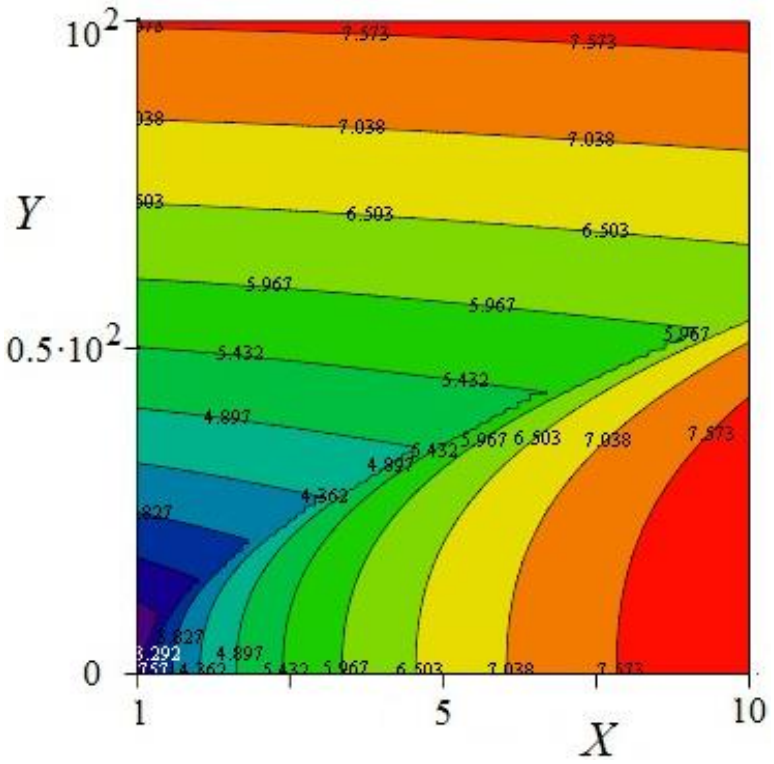


Рис. 6.2. Лінії рівня логарифма радіального хвильового числа $\ln(k_r)$ в залежності від числа Релея $X = R_c/R_c^*$ і числа Тейлора $Y = Te/R_c^*$.

По лініях рівнів (Рис. 6.2) видно, що мінімальне радіальне хвильове число (перегин ліній рівня) збільшується по нелінійному закону із зростанням числа Тейлора і числа Релея.

При великих числах Тейлора $Y >> 1$ мінімальне критичне число Релея змінюється за законом $(R_c)_{min} \sim (R_c^*)^{1/3} Te^{2/3} = (27\pi^4/4)^{1/3} Te^{2/3} = 3(\pi^2/2)^{2/3} Te^{2/3}$ [5], а

відповідне йому радіальне хвильове число - $(k_r)_{min} \sim (\pi^2/2)^{1/3} Te^{1/3}$. Останній вираз відрізняється від наведеного в [5] показником ступеня.

6.4 Аналіз стійкості обертового циліндричного об'єму рідини під час відсутності підігріву знизу

Визначимо характеристичні числа рівняння (21) за відсутності підігріву рідини знизу. Незважаючи на те, що підігріву рідини немає, число Релея не дорівнює нулю, а визначається різницею температур нижніх $T_{2,fl}$ і верхніх $T_{1,fl}$ кордонів на флуктуаційному рівні: $\Theta_{fl} = T_{2,fl} - T_{1,fl}$.

Величина флуктуації температури верхньої межі циліндричного об'єму рідини, радіусом R_V і товщиною кілька молекулярних шарів h_V, визначається кількістю молекул води в ньому і середньою температурою середовища T^* [5] $T_{1,fl} \sim N^{-\frac{1}{2}} T^*$, де N - кількість частинок в обсязі. Для води флуктуаційний рівень температур досить малий, і становить величину порядку $\Theta_{fl} \approx 10^{-8} \div 10^{-7}$ °C.

Тому, якщо рідина не підігрівається знизу, вважаємо число Релея рівним $R = R_{fl}$, де $R_{fl} = g\beta h^3 \Theta_{fl} / (\nu\chi)$ - число Релея для флуктуаційної різниці температур нижньої і верхньої меж ємності. Тут же слід також відзначити, що одиницею температури в (8) є вже не Θ, а Θ_{fl}. Однак ця величина не входить в характеристичне рівняння (21), і, таким чином не впливає на його рішення.

При зазначеному вище флуктуаційному рівні різниці температур, число Тейлора є досить великою величиною: $Te >> R_{fl}, k_\perp^2 >> 1$.

В цьому випадку дискримінант рівняння (21) приймає значення $Q \approx \left(\pi^2 Te / 3k_\perp^2\right)^3 + \left(\pi^2 Te(P-1)/P\right)^2 > 0$, що відповідає одному дійсному $\lambda_1 = \frac{k_\perp^2}{P}$, і двом комплексно зв'язаним $\lambda_{2,3} = k_\perp^2 \pm i\left(\frac{\pi^2 Te}{k_\perp^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ корінням.

Позначимо, що амплітуда обуреної температури рідини, що залежить від часу в вираженні (20), є виразом $B(t) = B\exp(-\lambda t)$. Тоді загальне рішення характеристичного рівняння (21) для амплітуди обуреної температури має вигляд:

$$B(t) = \sum_{m=1}^{3} C'_m \exp(-\lambda_m t) \qquad (27)$$

де C'_m - це довільні константи, які визначаються початковими умовами.

Підставляючи коріння характеристичного рівняння в (28) і вважаючи $C''_2 = -(C'_2 + C'_3)$, $C''_3 = i(C'_3 + C'_2)$, отримаємо:

$$B(t) = C'_1 \exp\left(-\frac{\alpha_1}{P} t\right) - \left(C''_2 \cos(\alpha_2 t) - C''_3 \sin(\alpha_2 t)\right)\exp(-\alpha_1 t) \qquad (28)$$

де $\alpha_1 = k_\perp^2$, $\alpha_2 = \left(\pi^2 Te / k_\perp^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\alpha_2 >> \alpha_1$.

Якщо в (29) покласти, наприклад, $C''_2 = C'_1$ и $C''_3 = 0$, то амплітуда $B(t)$ буде мати вигляд:

$$B(t) = C'_1 \exp\left(-\frac{\alpha_1}{P} t\right)\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{P-1}{P}\right)\alpha_1 t\right)\cos(\alpha_2 t)\right). \qquad (29)$$

Далі скрізь, не порушуючи загальності, можна покласти $C'_1 = 1$.

6.5 Різниця температур горизонтальних меж рідини фіксована і дорівнює нулю

Як зазначено вище, за відсутності підігріву знизу різниця температур горизонтальних меж рідини не дорівнює нулю, а визначається рівнем флуктуацій $\Theta_{fl} = T_{2,fl} - T_{1,fl}$.

З (29) випливає, що амплітуда обуреної температури в результаті дії в'язких сил збільшується від нуля при $t = 0$ до максимального значення при $t = t_{max}$. Після досягнення максимуму вона убуває до нуля, з експоненціально спадною амплітудою осциляцій. Закон спадання середнього значення амплітуди $B(t)$ визначається виразом (28), усередненим по періоду швидких осциляцій.

Швидкість зміни температури рідини (28) в початковий момент часу дорівнює $\left.\frac{dB_T}{dt}\right|_{t=0} = \Theta_{fl} \cdot \left(\frac{P-1}{P}\right)\alpha_1$, де B_T - температура рідини в °С.

На Рис.6.3 показана залежність температури від часу для різних значень α_2.

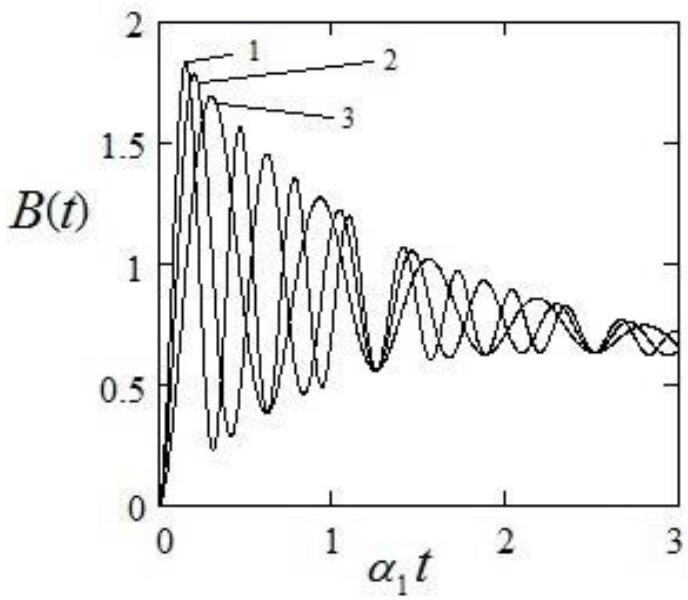


Рис. 6.3 Залежність температури $B(t)$ від часу під час відсутності підігріву води знизу для різних значень α_2: 1 - $\alpha_2 = 10 \cdot \alpha_1$; 2 - $\alpha_2 = 15 \cdot \alpha_1$; 3 - $\alpha_2 = 20 \cdot \alpha_1$.

З малюнку (Рис. 6.3) випливає, що зі збільшенням числа Тейлора, амплітуда першого максимуму температури зростає, а час його досягнення зменшується.

Таким чином, в обертовому циліндричному об'ємі рідини з вільними горизонтальними межами за підтримки різниці температур нижньої і верхньої меж на флуктуаційному рівні спостерігається збільшення температури $B(t)$ з нуля. Потім вона досягає максимуму $B(t) \approx 1.5,...,2.0 = \kappa$, а після, осцилюючи з амплітудою осциляцій, що експоненціально спадає, знову зменшується до нуля. В кінцевому стані, вода буде обертатися як ціле без збурень швидкості, тиску та температури.

Слід зазначити, що величина першого максимуму температури рідини перевищує флуктуаційний рівень в $\kappa \approx 1.5,...,2.0$ раз. Це вказує на те, що в інтервалі часу $0 \le t \le t_{max}$ спостерігається нагрів рідини.

6.6 Різниця температур горизонтальних меж рідини не фіксована, і не підтримується ззовні

Якщо різниця температур горизонтальних меж циліндричного об'єму рідини задана на флуктуаційному рівні, і не підтримується ззовні, то систему можна розглядати як ізольовану. У такій системі, згідно з (29), температура $B(t)$ буде збільшуватися від нуля до максимального значення в інтервалі часу $0 \le t \le t_{max}$.

Згідно (28), в системі настає момент часу $t = t_{max}$, коли з ростом часу температура повинна зменшуватися. Однак це не може здійснитися, оскільки ентропія ізольованої системи $S_{fl}(t)$ є функцією часу, що не убуває [5], тобто має виконуватися умова $dS_{fl}/dt \ge 0$.

Виходячи з принципу зростання ентропії, опишемо динаміку зміни температури в системі за часів $t > t_{max}$.

Закон зміни ентропії системи, використовуючи (29), можна записати у вигляді:

$$\frac{dS_{fl}}{dt} = \frac{\Theta_{fl}}{\kappa T_{2,fl} T_{1,fl}} \left(\kappa - \exp\left(-\frac{\alpha_1}{P} t \right) \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{P-1}{P} \right) \alpha_1 t \right) \cos(\alpha_2 t) \right) \right) \frac{dS_{1,fl}}{dt} > 0 \qquad (30)$$

де $S_{fl} = S_{2,fl} + S_{1,fl} = \text{const}$ - є сума ентропій мікрооб'ємів на нижній і верхній межі рідини, $dS_{1,fl}/dt > 0$ - ентропія верхньої межі зростає з часом.

З (30) випливає, що для інтервалу часу $0 \le t < t_{max}$ ентропія наростає.

За часів $t > t_{max}$ нерівність (30) порушується, тобто ентропія убуває. Тому у системи існує один вихід: в момент часу $t = t_{max}$ вона переходить з першої стадії нестійкості в другу. На цій стадії нестійкості циліндричний об'єм рідини описується вихідною системою рівнянь (8), (15) - (18), але зі збільшеною в κ разів різницею температур на кордонах обсягу в порівнянні з першою стадією: $\Theta_{fl} \to \kappa\Theta_{fl}$. Збільшення різниці температур на кордонах рідини в κ раз призводить до такого ж збільшення числа Релея: $R_{fl} \to \kappa R_{fl}$.

Загальне збільшення температури рідини на другій стадії дорівнюватиме $(1+\kappa)$. Збільшення числа Релея не порушує придатність характеристичного рівняння (19) і вирази (28), тому що все ще виконується умова $Te >> \kappa R_{fl}$.

На третій стадії процес збільшення температури буде повторюватись, а максимальна температура тепер буде дорівнювати κ^2. Загальне збільшення температури дорівнюватиме $\left(1+\kappa+\kappa^2\right)$.

6.7 Аналіз стійкості обертового циліндричного об'єму рідини при підігріві знизу.

Вираз для обуреної температури (30) зміниться, якщо циліндричний об'єм рідини, що обертається, підігрівати знизу з певною швидкістю. Щоб

показати це, поставимо залежність амплітуди обуреної температури від часу при наявності підігріву у вигляді:

$$B_h(t) = B(t)\alpha_T \exp(\lambda_T t) \qquad (31)$$

де α_T, λ_T - константи, що визначають параметри нагріву води.

Таке уявлення аналогічне введенню в характеристичне рівняння (21) замість власного числа λ, числа з зсувом $\lambda - \lambda_T$, де величина сдвигу λ_T обрана так, щоб можна було обнулити вільний член c.

З (31) виходить, що у значеннях параметрів $\alpha_T = 1$ і $\lambda_T = 0$ підігрів відсутній.

Якщо покласти $\lambda_T = \alpha_1 / P$, отримаємо вираження для температури рідини з підігрівом :

$$B_h(t) = C_1''\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{P-1}{P}\right)\alpha_1 t\right)\cos(\alpha_2 t)\right), \qquad (32)$$

де $B_h(t)$ - вимірюється в одиницях температури, що задається в експерименті, Θ_{ex}. Будемо у (32) вважати, як і раніше, $C_1'' = 1$.

На Рис.6.4 показана залежність амплітуди обуреної температури від часу для різних значень α_2.

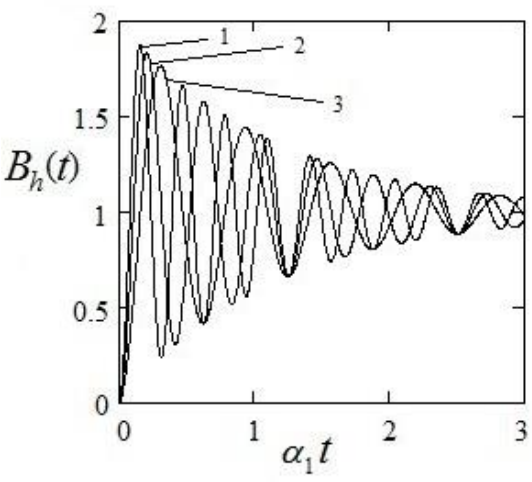


Рис. 6.4. Залежність температури $B_h(t)$ від часу при підігріві.

З Рис. 6.4 слідує, що протягом часу температура рідині зростає від нуля при $t = 0$, досягає першого максимуму $B_h(t) \approx \kappa$, та, осцилюючи з амплітудою осциляцій, що експоненціально убуває, прагне до одиниці.

Звідси можна зробити висновок, що в експериментах з підігрівом циліндричного об'єму рідини, що обертається, величина Θ_{ex} визначає кінцеву температуру нагріву рідини, а також початкову швидкість зміни температури, так як $\left.\frac{dB_{T,h}}{dt}\right|_{t=0} = \Theta_{ex} \cdot \left(\frac{P-1}{P}\right)\alpha_1$, де $B_{T,h}$ - температура рідини у °С. Звідси випливає, що швидкість зміни температури рідини з підігрівом більше, ніж така ж сама без підігріва.

6.8 Стаціонарні обурення температури при великих числах Релєя.

З попереднього викладу слідує, що різниця температур горизонтальних меж циліндричного об'єму рідини, що обертовується, збільшується. Це приводить до зростання числа Релєя, яке зрештою може прийняти значення $R = R_c$. В цьому випадку характеристичне рівняння (21) має рішення у виді стаціонарних обурень, які відрізняються від рішень (32).

Розглянемо ці стаціонарні обурення.

Власні числа характеристичного рівняння при $R = R_c$ мають вигляд :

$$\lambda_1 = 0;\ \lambda_{2,3} = k_\perp^2 \frac{(2P+1)}{2P} \pm i\sqrt{\frac{k_r^2}{k_\perp^2}\frac{(P-1)}{P}(R_c - R_w)},$$

Чому дорівнює R_c:

$$R_c = \frac{\left(\left(k_\perp^2\right)^3 + (\pi)^2 Te\right)}{k_r^2} = \frac{\left(\left(k_r^2 + \pi^2\right)^3 + \pi^2 Te\right)}{k_r^2} =$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{3.83}{1.72}\right)^2 + 3.14^2\right)^3 + 3.14^2 Te}{\left(\frac{3.83}{1.72}\right)^2} = \frac{\left(\left(\frac{3.83}{1.72}\right)^2 + 3.14^2\right)^3 + 3.14^2 Te}{4{,}958389670091942} = \quad (33)$$

$4{,}958389670091942+9{,}8596=14{,}81798967009194;3253{,}627746926194$

$$= \frac{3253{,}627746926194 + 9{,}8596Te}{4{,}958389670091942} =$$

$$= 656{,}1863757122166 + 1{,}988468150894183 \cdot Te;$$

$$R_c = 656{,}19 + 1{,}99 \cdot Te$$

де $n = 1$, $R_w = \frac{k_\perp^6 (2P-1)^2}{k_r^2 4(P-1)P}$, $\omega^2 = \frac{(P-1)}{P}\frac{k_r^2}{k_\perp^2}(R_c - R_w)$.

Для власних чисел (33) залежність температури від часу у (20), е) задамо у вигляді $D(t) = B\exp(-\lambda t)$. Тоді спільне рішення можна уявити у вигляді:

$$D(t) = \sum_{m=1}^{3} C_m \exp(-\lambda_m t) = D_1 - (D_2 \cos(\omega t) - D_3 \sin(\omega t))\exp(-\delta t) \quad (34)$$

де D_m - довільні константи, що визначаються початковими умовами.

Розрахунки стаціонарних обурень.

$$\delta_2^{R_c<R_w} = k_\perp^2\frac{(2P+1)}{2P}+\sqrt{\frac{k_r^2}{k_\perp^2}\frac{(P-1)}{P}(R_w-R_c)}>0; R_w=\frac{k_\perp^6(2P-1)^2}{k_r^2 4(P-1)P};$$

$$\delta_3^{R_c<R_w} = k_\perp^2\frac{(2P+1)}{2P}-\sqrt{\frac{k_r^2}{k_\perp^2}\frac{(P-1)}{P}(R_w-R_c)};\ \text{покажемо, що}\ \delta_3^{R_c<R_w}>0!!!$$

$$(*)\left(k_\perp^2\frac{(2P+1)}{2P}\right)^2>\frac{k_r^2}{k_\perp^2}\frac{(P-1)}{P}(R_w-R_c); k_\perp^4\frac{(2P+1)^2}{(2P)^2}>\frac{k_r^2}{k_\perp^2}\frac{(P-1)}{P}(R_w-R_c);$$

$$\frac{k_\perp^6}{k_r^2}\frac{(2P+1)^2}{(2P)^2}\frac{P}{(P-1)}>(R_w-R_c); R_c>\frac{k_\perp^6(2P-1)^2}{k_r^2 4(P-1)P}-\frac{k_\perp^6}{k_r^2}\frac{(2P+1)^2}{(2P)^2}\frac{P}{(P-1)}=$$

$$=\frac{k_\perp^6}{k_r^2}\left(\frac{(2P-1)^2}{4(P-1)P}-\frac{(2P+1)^2}{(2P)^2}\frac{P}{(P-1)}\right)=\frac{k_\perp^6}{k_r^2 4(P-1)P}\left((2P-1)^2-(2P+1)^2\right)=$$

$$=\frac{k_\perp^6}{k_r^2 4(P-1)P}(-8P);\ \text{нерівність}\ (*)\ \text{виконується завжди.}$$

$$\delta_2^{R_c<R_w} = k_\perp^2\frac{(2P+1)}{2P}+\sqrt{\frac{k_r^2}{k_\perp^2}\frac{(P-1)}{P}(R_w-R_c)};$$

$$k_\perp^2\frac{(2P+1)}{2P}=\left(k_r^2+\pi^2\right)\frac{(2P+1)}{2P}=\left(\left(\frac{3.83}{1.72}\right)^2+\pi^2\right)\frac{(2\cdot 7.5+1)}{2\cdot 7.5}=$$

$$=(4.27224175229854+9.869604401)\cdot 1.066666666666667=$$

$$=14.14184615329854\cdot 1.066666666666667=15.08463589685178;$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k_r^2}{k_\perp^2}\frac{(P-1)}{P}}(R_c-R_w)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{(3.83/1.72)^2}{(3.83/1.72)^2+\pi^2}\frac{6.5}{7.5}}(R_c-R_w)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=0.551243(R_c-R_w)^{\frac{1}{2}};\quad R_w=\frac{4.14184615329854^3\cdot 14^2}{(3.83/1.72)^2\cdot 4\cdot 6.5\cdot 7.5}=573.323;$$

$$\delta_{2,3}^{R_c<R_w}=15.08463589685178\pm 0.551243(R_w-R_c)^{\frac{1}{2}},$$

$$R_w=573.323$$

З (34) виходить, що у стаціонарному стані сумісне рішення для обуреної температури рідини складається з суми трьох частинних рішень. Один доданок з власним числом $\lambda_1=0$ є постійним числом. Два інших доданка з власними числами $\lambda_{2,3}$ описують або експоненціально затухаючі коливання температури з декрементом затухання $\mathrm{Re}(\lambda_{2,3})=\alpha_1^{R_c>R_w}=k_\perp^2\frac{(2P+1)}{2P}$ і

частотой осциляцій $\mathrm{Im}\left(\lambda_{2,3}\right)=\alpha_2^{R_c>R_w}=\pm\sqrt{\frac{(P-1)}{P}\frac{k_r^2}{k_\perp^2}\left(R_c-R_w\right)}$ при $R_c>R_w$, або затухаючі коливання без осциляцій з декрементами $\mathrm{Re}\left(\lambda_{2,3}\right)=\alpha_{1,2}^{R_c<R_w}=k_\perp^2\frac{(2P+1)}{2P}\pm\sqrt{\frac{k_r^2}{k_\perp^2}\frac{(P-1)}{P}\left(R_w-R_c\right)}$ при $R_c<R_w$. В останньому випадку, $\alpha_1^{R_c<R_w}>\delta_2^{R_c<R_w}>0$.

Використовуємо вираз (32), (34) для опису експериментальних даних стійкості циліндричного об’єму води, що підігрівається знизу та обертається. [5].

В одних експериментах, вода розташовувалась у скляних циліндрах з зовнішнім діаметром 29.4 см. До горизонтального дна циліндру був прикріплений електричний елемент, що нагрівається, який забезпечував регульоване змінення температури. Підігрів здійснювався з маленькою швидкістю (потужність нагрівача 1 Вт), середньою швидкістю (потужність нагрівача 3 Вт), і великою швидкістю нагріву (мощность 10 Вт). Циліндр з водою обертався за допомогою спеціальних приладів. В експериментах використовувався шар води глубина якого 3 см, а швидкість обертання рівнялась 10 об/мин.

Для експерименту у (33) виконується відношення $R_c>>R_w$, таким же чином реалізується нестійкість параметру $\alpha_{1,2}^{R_c>R_w}$.

В інших експериментах [5] у шарі води глибиною 18 см, при різниці температур нижньої та верхньої границі 0.7 °C, за швидкості обертання 5 об/мин, візуальними спостереженнями за допомогою ротоскопа встановлено, що в разі, якщо швидкість нагріву перевищує певну величину в циліндричному як ціле об’ємі води, що обертається, виникають конвективні осередки діаметром 4.6 см. Рух всередині осередків стає видимим у результаті розсіювання невеликої кількості алюмінієвої пудри над поверхністю води.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі були розглянуті основні види конвекції та методи її утворення.

Досліджено виникнення конвекції у в’язкій, нестискуваній рідині, що рівномірно обертається як ціле та підігрівається знизу, в циліндричному осередку з вільними межами.

Зроблено аналіз стійкості рідини циліндричної форми, що обертається, є в’язкою, нестисливою, та підігрівається знизу. Також було зроблено аналіз для випадку відсутності підігріву. Звідси випливає, що різниця температур горизонтальних меж циліндричного об’єму рідини, що обертається, збільшується. Це приводить до зростання числа Релєя.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гранін Н. Г., Шімараев М. Н. До питання про стратифікації і механізми конвекції в Байкалі // Докл. АН СРСР. 1991. Т. 321, № 2. С. 381-385.

2. Ravens T. M., Kosis O., Wuest A., et al. Direct evidence of deep water renewal in southe basin of lake Baikal // 5th Intern. symp. on stratified flows, Vancouver, 10-13 July 2000. Vancouver: Dep. of civil engng: Univ. of British Columbia, 2000. V. 1. P. 419-425.

3. Верещагін Г. Ю. Деякі дані про режим глибинних вод Байкалу в районі Марітуя // Тр. Комісії з вивчення оз. Байкалу. 1927. Т. 2. С. 77-138.

4. Овсянніков Л. В. Рівняння динамічної конвекції моря: препр. / СО АН СРСР. Ін-т гідродинаміки. Новосибірськ, 1967.

5. Гершуні Г. З. Конвективная стійкість нестисливої рідини / Г. З. Гершуні, Е. М. Жуховицкий. М .: Наука, 1972.

6. Veronis G. Penetrative convection // Astrophys. J. 1963. V. 137, pt 2. P. 641-663.

7. Furumoto A., Rooth C. Observations on convection in water cooled below // Geophis. Fluid Dynamics. 1961. № 3. P. 1-14.

8. Надолин К. А. конвекція в горизонтальному шарі Рідини при інверсії пітомої ОБСЯГИ // Изв. АН СРСР. Механіка Рідини і газу. 1989. № 1. С. 43-49.9. Надолин К. А. Про наближення Буссінеска в завданні Релея - Бенара // Изв. РАН. Механіка рідини і газу. 1995. № 5. С. 3-10.

10. Надолин К. А. Про проникаючої конвекції в наближенні ізотермічні нестисливої рідини // Изв. РАН. Механіка рідини і газу. 1996. № 2. С. 40-52.

11. Гольдштік М. А. Гідродинамічна стійкість і турбулентність / М. А. Гольдштік, В. Н. Штерн. Новосибірськ: Наука. Сиб. отд-ня, 1977.

12. Годунов С. К. Про чисельному рішенні крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь // Успіхи мат. наук. 1961. Т. 16, вип. 3, № 99. С. 171-174.

13. Андрєєв В. К. Термокапіллярная нестійкість / В. К. Андрєєв, В. Е. Захватаєв, Е. А. Рябіцкій. Новосибірськ: Наука. Сиб. іздат. фірма, 2000.

14. Гапонов С. А. Розвиток збурень у стисливих потоках / С. А. Гапонов, А. А. Маслов. Новосибірськ: Наука. Сиб. отд-ня, 1980.

15. Shimaraev M. N. Physical limnology of lake Baikal: a review / M. N. Shimaraev, V. I. Verbolov, N. G. Granin, P. P. Sherstyankin. Irkutsk; Okayama: S.n., 1994.

16. Бочаров О. Б., Васильєв О. Ф., Овчинникова Т. Е. Наближене рівняння стану прісної води поблизу температури максимальної щільності // Изв. РАН. Фізика атмосфери та океану. 1999. Т. 35, № 4. С. 556-558.