1а.Власний час, довжина, об’єм. Довести інваріантність елементу 4-обєму.(10 балів)

1б. Дія вільної частинки. Лагранжіан, енергія і імпульс вільної частинки. (10 балів)

2а. Сила Лоренца. Виведення в чотиривимірному вигляді. Отримати вираз для еволюції енергії частинки з чотиривимірної формули. (10 балів)

2б. Вивести закон Кулона з рівнянь Максвела. (10 балів)

3. Довести тотожність в координатному вигляді і за допомогою оператора ∇.(10 балів)

а) 

б) 

4а. Нехай для вимірювання часу використовується періодичний процес відображення світлового «зайчика» поперемінно від двох дзеркал, укріплених на кінцях стержня довжиною *l*. Один період – це час руху «зайчика» від одного дзеркала до іншого і назад. Світловий годинник нерухомий в системі *S'* і орієнтований паралельно напрямку руху. Користуючись постулатом про сталість швидкості світла, показати, що інтервал власного часу *dτ* виражається через проміжок часу *dt* в системі *S* формулою . (10 балів)

4б. Частинка з масою *m* має енергію . Знайти швидкість  частинки. Розглянути, зокрема, нерелятивістські і ультра-релятивістські границі. (10 балів)

Питання 1а.Власний час, довжина, об’єм. Довести інваріантність елементу 4-обєму.(10 балів)

**Власний час**

Припустимо, що ми спостерігаємо з деякою системи відліку довільним чином рухомий відносно нас годинник. У кожен окремий момент часу цей рух можна розглядати як рівномірний. Тому в кожен момент часу можна ввести нерухомо пов'язану з рухомими годинами систему координат, яка (разом з годинником) буде теж інерційної системою відліку.

Протягом нескінченно малого проміжку часу *dt* (по нерухомому, тобто пов'язаному з нами годиннику) рухомий годинник проходить відстань

Нас цікавить, який проміжок часу *dt'* покаже при цьому рухомий годинник. В системі координат, що пов'язана з рухомим годинником, останній покоїться, тобто *dx' = dy' = dz' =*0. В силу інваріантності інтервалу

*ds*2*= c2dt*2 – *dx*2 – *dy*2 – *dz*2 = *c2dt'*2

звідки

Але

де *υ* є швидкість рухомого годиннику; тому

Інтегруючи цей вираз, можна знайти проміжок часу, що показується рухомим годинником, якщо по нерухомому годиннику пройде час *t*2*– t*1:

Час, що відраховується по годиннику, який йшов разом з даним об'єктом, називається *власним часом* цього об'єкта. Формули (1) і (2) виражають власний час через час системи відліку, відносно якої розглядається рух.

Як видно з (1) або (2), власний час об’єкту, що рухається, завжди менший за відповідний проміжок часу в нерухомій системі. Інакше кажучи, рухомий годинник йде повільніше ніж нерухомий.

Нехай відповідно інерційної системи відліку *К* рухається прямолінійно і рівномірно інший годинник. Система відліку *К'*, пов'язана з останнім, теж інерційна. Тоді годинник в системі *К'* з точки зору спостерігача в системі *К* відстають в порівнянні з його годинником. І навпаки, з точки зору системи *К'* відстає годинник в системі *К*. Переконатися у відсутності будь-якого протиріччя можна, звернувши увагу на таку обставину. Для того, щоб встановити, що годинник в системі *К'* відстає відносно годинника в системі *К*, треба вчинити так. Нехай в деякий момент часу годинник *К'* пролітає повз годин в *К*, і цей момент свідчення обох годинників збігаються. Для порівняння ходу годинника *К* і *К'*  треба знову порівняти свідчення того ж рухомого годинника *К'* з годинником в *К*. Але тепер ми вже порівнюємо ці годинника з іншим годинником в *К* – з тими, повз якого годинник *К'* пролітає в інший момент. При цьому виявляється, що годинник *К'* буде відставати в порівнянні з годинником *К*, з яким він порівнюється. Ми бачимо, що для порівняння ходу годинника в двох системах відліку необхідні кілька годинників в одній системі і один в іншій. Тому цей процес не симетричний по відношенню до обох систем. Завжди здаються відстаючим той годинник, що порівнюється з різними годинниками в іншій системі відліку.

Якщо ж є два годинники, один з яких описує замкнуту траєкторію, повертаючись у вихідне місце (до нерухомого годинника), то виявиться відстаючим саме рухомий годинник (в порівнянні з нерухомим). Зворотне міркування, в якому рухомий годинник розглядався б як нерухомий, тепер неможливо, так як годинник, що описує замкнуту траєкторію, що не рухається рівномірно і прямолінійно, а тому пов'язана з ними система відліку не є інерційною.

Оскільки закони природи однакові тільки в інерційних системах відліку, то системи відліку, пов'язані з нерухомими годинами (інерційна система) і з рухомими (неінерційній), мають різні властивості, і міркування, що приводить до результату, що покояться годинник повинні виявитися відстаючими, неправильно.

Проміжок часу, що показується годинником, дорівнює інтегралу , взятому уздовж світової лінії цього годинника. Якщо годинник нерухомий, то їх світова лінія є прямою, паралельною осі часу; якщо ж годинник здійснює нерівномірний рух по замкнутому шляху і повертається у вихідне місце, то його світова лінія буде кривою, що проходить через дві точки на прямій світової лінії нерухомого годинника, що відповідають початку і кінцю руху. З іншого боку, ми бачили, що годинник, який покоїться, показує завжди більший проміжок часу, ніж рухомий. Таким чином, ми приходимо до висновку, що інтеграл , взятий між двома заданими світовими точками, має максимальне значення, якщо він береться по прямій світової лінії, що з'єднує ці точки.

**Перетворення Лоренца**

Нехай в системі *К* покоїться лінійка, що паралельна до осі *х*. Довжина її, що виміряна в цій системі, нехай буде ∆*х = х*2 – *х*1 (*х*1 і *х*2 - координати обох кінців лінійки в системі *К*). Знайдемо тепер довжину стрижня, виміряну в системі *К'*. Для цього треба знайти координати обох кінців стрижня ( і ) в цій системі в один і той же момент часу *t'*. З (3) знаходимо:

Довжина стрижня в системі *К'* є ∆*x'* = ; віднімаючи *х*2 з *х*1, знаходимо:

Власною довжиною стержня називається його довжина в тій системі відліку, в якій він покоїться. Позначимо її через *l*0 = ∆*х*, а довжину того ж стрижня в будь-якій системі відліку *К'* – через *l*. тоді

Таким чином, найбільшу довжину стрижень має в тій системі відліку, де він покоїться. Довжина його в системі, в якій він рухається зі швидкістю *V*, зменшується у відношенні . Цей результат теорії відносності називається лоренцевим скороченням.

Оскільки поперечні розміри тіла при його русі не змінюються, то об’єм тіла скорочується за аналогічною формулою:

З перетворення Лоренца можна знайти відомі нам вже результати щодо власного часу. Нехай в системі *К'* покоїться годинник. В якості двох подій візьмемо дві події, що відбулися в одному і тому ж місці *x', y', z'* простору в системі *К'*. Час в системі *К'* між цими подіями є ∆*t' =*. Знайдемо тепер час ∆*t*, який минув між цими ж подіями в системі відліку *К*. З (3) маємо:

або віднімаючи одне з іншого,

в повній згоді з (1).

Елемент 4-обєму

1б. Дія вільної частинки. Лагранжіан, енергія і імпульс вільної частинки. (10 балів)

Принцип найменшої дії полягає в тому що для будь-якої механічної системи існує такий інтервал *S,* що називається дією, який для дійсного руху має мінімум і варіація δ*S* якого, дорівнює нулю.

Визначимо інтеграл дії для вільної матеріальної частинки, тобто частинки, що не знаходиться під дією будь-яких зовнішніх сил.

Для цього помітимо, що цей інтервал не повинен залежати від вибору тієї або іншої інерційної системи відліку, тобто він повинен бути інваріантом відносно перетворень Лоренц. Отже, він повинен бути взятий від скаляру. Далі очевидно, що під інтегралом повинні бути диференціали першої степені. Однак, єдиний такий скаляр, який можна побудувати для вільної матеріальної частинки, є інтервал *ds* або α*ds*, де α – деяка стала.

Отже, дія для вільної частинки повинна мати вигляд:

де інтеграл береться вздовж світової лінії між двома заданими подіями *a* і *b* – знаходженням частинки в початковому і кінцевому в місцях в певні моменти часу *t1* і *t2*, тобто, між заданими світовими точками; α є деяка стала, що характеризують дану частинку. Легко побачити, що для всіх частинок α повинна бути позитивною величиною. Якщо інтеграл \_ має максимальне значення вздовж прямої світової лінії, можна зробити його скільки завгодно малим.

Таким чином, інтеграл, який взято з позитивним знаком, не може мати мінімуму, а інтеграл, який взято у зворотному напрямі має мінімум – вздовж прямої світової лінії.

Дію можна представити у вигляді інтегралу по часу:

*S* =

Коефіцієнт *L* при *dt* називається, як відомо, *функцією Лагранжу* для даної механічної системи. Знайдемо:

*S* =

де υ – швидкість матеріальної частинки. Функція Лагранжу для частинки є, звідси випливає:

*L* = –α*c*

Величина α, як вже помічалося, характеризує дану частинку. В класичній механіці будь-яка частинка характеризується своєю масою *m*. Визначимо з’язок між величинами α і *m*. Він знаходиться з умови, що за лімітного переходу *c*→∞ наш вираз для *L* повинен перейти до класичного виразу

*L* = *mυ2*/2

Для здійснення цього переходу, розкладемо *L* в ряд по степеням υ/c. Тоді, опускаючи члени найвищих порядків, отримуємо:

*L* = –α*c ≈*–α*c* +

Постійні члени в функції Лагранжу не відображуються на рівняннях руху і можуть бути опущені. Опустивши в *L* сталу α*c* і порівнявши з класичним виразом *L* = *m*υ2/2, знайдемо, що α = *mc*.

Таким чином, дія для вільної матеріальної точки дорівнює:

*S* = *mc* (1)

а функція Лагранжу

*L* = –*mc*2 (2)

**Енергія і імпульс**

*Імпульсом*  частинки називається,як відомо, вектор **p** = 𝜕*L*/𝜕**v**  (𝜕*L*/𝜕**v** – символічне означення вектору, компоненти якого дорівнюють похідним від *L* за відповідними компонентами **v**. За допомогою (2) знаходимо:

**p** =  (3)

За малих швидкостей (υ << *c*) або в ліміті за *c* → ∞ цей вираз переходить в класичний **p** = *m***v**. За υ = *c* імпульс обертається у нескінченність. .

Похідна від імпульсу за часом є сила, що діє на частинку. Нехай швидкість частники змінюється тільки за напрямом, тобто, сила напрямлена перпендикулярно до швидкості. Тоді

(4)

Якщо швидкість змінюється тільки за величиною, тобто, сила напрямлена вздовж швидкості, то:

 =  (5)

Ми бачимо, що в обох випадках відношення сили до прискорення різне.

*Енергією* 𝜀частинки називається величина.

ε = **pv –***L*

Користуючись отриманими у минулому пункті даними для *L* і **p**, отримуємо:

ε =  (6)

Ця дуже важлива формула показує, що в релятивістській механіці енергія вільної частинки не обертається в нуль за υ = 0, а залишається кінцевою величино, що дорівнює

ε = *mc2* (7)

Її називають *енергією потоку* частинки.

За малих швидкостей (υ << *c*) маємо, розкладуючи (9.4) за степенями υ/*c*:

ε ≈ *mc*2*+*

тобто, за вирахуванням енергію спокою, класичний вираз для кінетичної енергії частинки.

Підкреслимо, що хоча ми говоримо тут про «частинку», але іі «елементарність» ніде не використовується. Цьому отримані формули в рівній степені можна застосовувати до будь-якого складного тіла, що складається з багатьох частинок, причому під *m* потрібно розуміти повну масу тіла, а під υ – швидкість його руху, як цілого. Формула (7) справедлива і для будь-якого тіла, що покоїться як ціле. Звернемо увагу на те, що енергія вільного тіла (тобто енергія будь-якої замкненої системи) виявляється в релятивістській механіці повністю визначеною, завжди позитивною величиною, безпосередньо пов’язаною з масою тіла. Нагадаємо у зв’язку з цим, що в класичній механіці енергія тіл визначена лише з точністю до довільної адитивної сталої і може бути як позитивною, так і від’ємною.

Енергія тіла, що покоїться, містить у собі, окрім енергій спокою, що входять в склад його частинок, також кінетичну енергію частинок і енергію їх взаємодії одна з одною. Іншими словами, *mc*2 не дорівнює сумі ∑*mac*2. (*ma* – маса частинок), а тому і *m* не дорівнює ∑*ma*. Таким чином, в релятивістській механіці немає місця закон збереження маси: маса складного тіла не дорівнює сумі мас його частинок. Замість цього має місце тільки закон збереження енергії, до якої включається також і енергія спокою частинок.

Зводячи вирази (3) і (6) до квадрату і порівнюючи їх, знайдемо наступне співвідношення між енергією та імпульсом частинки:

 = *p*2*+ m2c2* (8)

енергія, яку виражено через імпульс, називається Функцією Гамільтону *H*:

*H* = *c* (9)

За малих швидкостей *p << mc* і наближено

*H* ≈ *mc*2 +

тобто за вирахуванням енергії спокою отримуємо відомий класичний вирах функції Гамільтону.

З виразів (3) і (6) випливає також наступне співвідношення між енергією, імпульсом і швидкістю вільної частинки:

**p =** (10)

2а. Сила Лоренца. Виведення в тривимірному вигляді. Отримати вираз для еволюції енергії частинки з чотиривимірної формули. (10 балів)

Заряд, який знаходиться в полі, не тільки піддається впливу зі сторони поля, але, в свою чергу, сам впливає на поле, змінюючи його. Однак, якщо заряд *e* не великий, то його дією на поле можна знехтувати. В цьому випадку, розглядаючи руж в заданому полі, можна вважати, що саме поле не залежить ані від координати, ані від швидкості заряду.

Отже, нам потрібно знайти рівняння руху заряду в заданому електромагнітному полі. Ці рівняння отримуються за допомогою варіації дії, тобто, даються рівняннями Лагранжу.

 =  (1)

Де *L* визначається за формулою *L* = *T – V*.

Похідна 𝜕*L/*𝜕v це узагальнений імпульс частинки. Далі пишемо:

 ≡ ∇*L* = grad **Av** – *e*grad φ

Але за відомою формулою векторного аналізу

grad **ab** = (**a**, ∇)**b** + (**b**, ∇)**a** + [**b**rot **a**] + [**a** rot**b**],

де **a** і **b** – будь-які два вектори. Застосовуючи цю формулу до **Av** і пам’ятаючи, що диференціювання за **r** відбувається за сталого **v**, знаходимо:

 = (**v** ∇)**A** + [**v** rot**A**] – *e* grad φ

Рівняння Лагранжу, отже, мають вигляд

(**p** + **A**) = (**v** ∇)**A** + [**v** rot**A**] – *e* grad φ

Але повний диференціал *dt* складається з двох части: зі зміни *dt* векторного потенціалу з плином часу в даній точці простору і зі зміни під час переходу від однієї точки простору до іншої на відстань d**r**. Ця друга частина дорівнює (d**r**∇)**A** Таким чином,

 =  + (**v**∇)**A**

Підставляючи це в минуле рівняння, отримуємо:

 = – – *e* grad φ + [**v** rot**A**] (2)

Це і є рівняння руху частинки в електромагнітному полі. Зліва стоїть похідна від імпульсу частинки за часом. Отже, вираз у правій частині (2) є силою, що діє на заряд в електромагнітному полі. Ми бачимо, що ця сила складається з двох частин. Перша частина (перший і другий члени в правій частині (2)) не залежить від цієї швидкості: пропорційна величні швидкості і перпендикулярна до неї.

Силу першого роду, віднесену до заряду, що дорівнює одиниці, називають *напруженістю електричного поля*; позначимо її через **E**. Отже, за визначенням,

**E** = –  – grad φ (3)

Множник при швидкості, точніше, при **v**/c, в силі другого роду, що діє на одиничний заряд, називають *напруженістю магнітного поля*. Позначимо її через **H**. Отже, за визначенням,

**H** = rot **A** (4)

Якщо в електромагнітному полі **E** ≠ 0, а **H**= 0, то говорять про *електричне поле*; якщо ж **E** = 0, а **H** ≠ 0, то поле називають *магнітним*. В загальному випадку, електромагнітне поле є накладенням полів електричного і магнітного.

Відмітимо, що **E** представляю собою полярний, а **H** – аксіальний вектор.

Рівняння руху заряду в електромагнітному можна тепер записати у вигляді

 = *e***E** + [**vH**] (5)

Вираз праворуч має назву *лоренцевої сили*. Перша її частина – сила, з якою діє електричне поле на заряд, – не залежить від швидкості заряду і орієнтована за напрямом поля **E**. Друга частина – сила з боку магнітного поля на заряд, – пропорційна швидкості заряду і напрямлена перпендикулярно до цієї швидкості і до напряму магнітного поля **H**.

Для швидкостей, що малі в порівнянні зі швидкістю світла, імпульс **p** наближено дорівнює своєму класичному виразу *m***v**, і рівняння руху (5) переходить до

*m = e***E** + [**vH**] (6)

Отримаємо рівняння, що визначає зміну кінетичної енергії частинки з часом, тобто, похідну.

*=*

Легко переконатися, що

 = **v**

Підставляючи *d***p***/dt* з (5) ми помічаємо, що [**v H**]**v** = 0 і маємо

 = *e***Ev** (7)

Зміна кінетичної енергії з часом і є робота, що здійснюється полем за одиницю часу . З (7) видно, що ця робота дорівнює добутку швидкості заряду на силу, з якою діє на нього електричне поле. Робота поля за час *dt*, тобто, під час переміщення заряду на *d***r**, дорівнює *e***E***d***r**.

Відмітимо, що роботу над зарядом здійснює тільки електричне поле; магнітне поле не здійснює роботи над зарядом, який в ньому рухається. Останнє пов’язано з тим, що сила, з якою магнітне поле діє на частинку, завжди перпендикулярне до й швидкості.

Рівняння механіки є інваріантними по відношенню до зміни знаку за часом, тобто по відношенню за заміни майбутнього минулим. Іншими словами, в механіці обидва напряму часу еквівалентні. Це значить, що якщо згідно рівнянням механіки можливий який-небудь руж, то можливий і зворотній рух за якого система проходить ті ж самі стани в оберненому порядку.

2б. Закон Кулона

Для постійного електричного (*електростатичного*) поля рівняння Максвелла мають вигляд

div **E** = 4πρ (1)

rot **E** = 0 (2)

Електричне поле **Е** виражається через один тільки скалярний потенціал співвідношенням

**E** = –grad φ (3)

Підставляючи (3) в (1), знаходимо рівняння, якому задовольняє потенціал постійного електричного поля:

∆φ = –4πρ (4)

Це рівняння називається *рівняння Пуассона*. У порожнечі, тобто при \*\*\*, потенціал задовольняє *рівнянню Лапласа*

∆φ = 0 (5)

З останнього рівняння випливає, зокрема, що потенціал електричного поля ніде не може мати ні максимуму, ні мінімуму. Дійсно, для того щоб φ мало екстремальне значення, необхідно, щоб всі перші похідні від φ по координатам дорівнювали нулю, а другі похідні ∂2φ/∂2*x*, ∂2φ/∂2*y,* ∂2φ/∂2*z* мали однаковий знак. Останнє, однак, неможливо, так як при цьому не може бути задоволено рівняння (5).

Визначимо тепер поле, створюване точковим зарядом. З міркувань симетрії ясно, що воно буде направлено в кожній точці по радіус-вектору, проведеним з точки, в якій знаходиться заряд *е*. З тих же міркувань ясно, що абсолютна величина **Е** поля буде залежати тільки від відстані *R* до заряду. Для знаходження цієї абсолютної величини застосуємо рівняння (1) в інтегральної формі. Потік електричного поля через кульову поверхню з радіусом *R*, проведену навколо заряду *е*, дорівнює 4π*R*2*E*; цей потік має дорівнювати 4π*e*. Звідси знаходимо:

У векторному вигляді:

Таким чином, поле, створюване точковим зарядом, обернено пропорційно квадрату відстані від цього заряду. Це – так званий *закон Кулона*. Потенціал цього поля

Якщо ми маємо систему зарядів, то створюване нею поле, згідно з принципом суперпозиції, дорівнює сумі полів, створюваних кожним із зарядів окремо. Зокрема, потенціал такого поля дорівнює

де *Ra* – відстань від заряду *еа* до точки, в якій ми шукаємо потенціал. Якщо ввести щільність заряду \*, то ця формула набуває вигляду

де *R* – відстань від елемента об’єму *dV* до даної точки ("точки спостереження") поля.

Відзначимо тут математичне співвідношення, що виходить при підстановці в (4) значень ρ і φ для точкового заряду, тобто ρ = *e*δ (**R**), *φ = e/R*. Ми знаходимо тоді:

3. Довести тотожність в координатному вигляді і за допомогою оператора .

а) div [**A**, **B**] = (**B**, rot **A**) – (**A**, rot **B**)

І спосіб

□ (∇, [**A**, **B**]) = ([∇, **A**], **B**) – ([∇, **B**], **A**) = (rot **A**, **B**) – (rot **B**, **A**) ∎

ІІ спосіб

б) rot [**A**, **B**] = **A** div **B** – **B** div **A** + (**B** · ∇) **A** –(**A** · ∇) **B**

І спосіб

□ [∇, [**A**, **B**]] = [∇, [, **B**]] + [∇, [**A**,]] = (∇, **B**) – (∇, **A**) + **A** (∇, **B**) – **B** (∇, **A**) =

= **A** div **B** – **B** div **A** + (**B** · ∇) **A** – (**A** · ∇) **B ∎**

ІІ спосіб

4а. Нехай для вимірювання часу використовується періодичний процес відображення світлового «зайчика» поперемінно від двох дзеркал, укріплених на кінцях стержня довжиною. Один період – це час руху «зайчика» від одного дзеркала до іншого і назад. Світловий годинник нерухомий в системі *S'* і орієнтований паралельно напрямку руху. Користуючись постулатом про сталість швидкості світла, показати, що інтервал власного часу *dτ* виражається через проміжок часу *dt* в системі *S* формулою .

*S*

*S′*

*l0*

Лабораторна система відліку

*l0*

*с*

Власна система відліку

Позначимо за T1 час, за який зайчик «проходить праворуч», а T2 – «ліворуч». Тоді період T буде: T = T1 + T2 в лабораторній системі відліку. у власній системі відліку період T′ буде мати вигляд:

де *c* – швидкість світла, тобто, швидкість, з якою рухається сонячний зайчик.

Нехай V ∙ T1 – відстань, яку пройшла лабораторна система відліку, а *c* ∙ T1 – відстань, яку пройшло світло. Знаючи Лоренцеве скорочення довжини, маємо:

Звідси виразимо T1:

Аналогічним чином отримаємо T2:

Маючи на увазі те, що T = T1 + T2, можемо отримати вираз для T:

З відношення маємо:

В результаті ми бачимо, що власний період T′ можна отримати через період Т в системі *S*.

4б. Частинка з масою *m* має енергію . Знайти швидкість  частинки. Розглянути, зокрема, нерелятивістські і ультра-релятивістські границі. (10 балів)

Ми знаємо вираз для енергії:

Нам відома енергія частинки, її маса і швидкість світла, тобто, всі компоненти рівняння ми знаємо. Отже, можемо виразити швидкість *υ* частинки саме з цієї формули за допомогою нескладних математичних перетворень. Отже:

Отже, ми отримали швидкість частинки через її масу та енергію. Тепер приступимо до другої частини задачі і розглянемо ультра-релятивістську та нерелятивістську границі.

Нерелятивістська границя

Звідси

Ультра-релятивістська границя