Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра фізики нетрадиційних енерготехнологій та екології

Пояснювальна записка

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр»

на тему: «Рівняння Бюргерса: Формування і розпад ударних хвиль»

Виконав : студент 4 курсу, групи НФ-41
Носко Олег Валерійович
Спеціальність: 105 Прикладна фізика та наноматеріали
Освітня програма: прикладна фізика енергетичних систем
Керівник д-р фіз.-мат. наук, професор
Ткаченко Віктор Іванович

Рецензент:

Харків - 2021 р

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Н.КАРАЗІНА

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра фізики нетрадиційних енерготехнологій та екології____
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) __бакалавр
Напрям підготовки 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»____

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ В.І.Ткаченко
підпис

"____"_____2021_року

З А В Д А Н Н Я
НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ (ПРОЕКТ)

_____ Носку Олегу Валерійовичу ____

1. Тема роботи «Рівняння Бюргерса: Формування і розпад ударних хвиль»

керівник роботи Ткаченко Віктор Іванович д-р фіз.-мат. наук, професор

затверджені наказом по університету від " _" грудня_____20__р. _____№

2. Строк подання студентом роботи _____2021 р.

3. Перелік питань, які потрібно розробити: Проаналізувати фізичні основи процесів, що призводять до виникнення кінематичних (ударних) хвиль; навести аналітичний огляд літератури, присвяченої математичному опису ударних хвиль, процесів їх формування і розпаду; дослідити можливості опису кінематичних хвиль густини елементарних сходинок при рості (випаровуванні) кристалів на основі частинних розв'язків рівняння Бюргерса.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Огляд найбільш актуальних моделей формування ударних хвиль.
2	Визначення фізичних основ та особливостей математичного опису ударної хвилі
3	З’ясування способів поширення ударної хвилі в різних середовищах
4	Наведення прикладів отримання та розв’язання рівняння Бюргерса різними методами
5	Опис ударної хвилі на поверхні кристалу в нерівноважних умовах
6	Оформлення та написання бакалаврської роботи

5. Дата видачі завдання _____

Студент _____ Носко О.В.

Керівник роботи _____ Ткаченко В.І.

Реферат

Носко Олег Валерійович «Рівняння Бюргерса: Формування і розпад ударних хвиль»(випускна робота бакалавра), - Харків: ХНУ імені В.Н.Каразіна, 2021.-

Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків; містить 33 рисунків, 1 таблицю, список використаних джерел з 13 найменувань.

Проаналізовано умови виникнення ударних хвиль, процес їх формування та розповсюдження. Наведено математичну модель ударної хвилі на підставі еталонного рівняння Бюргерса, що описує нелінійні хвилі в дисипативному недиспергируючому середовищі. Досліджено можливість опису кінематичної хвилі густини елементарних сходинок, що формується при рості (випаровуванні) кристалу на основі частинного розв'язку рівняння Бюргерса з періодичними граничними умовами.

Ключові слова: ударна хвиля, рівняння Бюргерса, кристалічна поверхня, кінематична хвиля густини сходинок.

ABSTRACT

Nosko Oleg Valeriyovych "Burgers' equation: Formation and decay of shock waves" (bachelor's thesis), - Kharkiv: VN Karazin KhNU, 2021. -

The work consists of an introduction, three sections, conclusions; contains 33 figures, 1 table, a list of used sources with 13 items.

The conditions of shock waves occurrence, the process of their formation and propagation are analyzed. A mathematical model of a shock wave based on the Burgers reference equation describing nonlinear waves in a dissipative nondisperse medium is presented. The possibility of describing the kinematic wave of the density of elementary degrees formed during the growth (evaporation) of a crystal on the basis of a partial solution of the Burgers equation with periodic boundary conditions is investigated.

Keywords: shock wave, Burgers equation, crystal surface, kinematic wave of step density.

ЗМІСТ

ВСТУП..... 7
РОЗДІЛ 1.Ударні хвилі. 9
1.1. Поняття ударної хвилі..... 9
1.2. Слабка ударна хвиля 11
1.3. Сильна ударна хвиля і поняття розривів..... 14
1.3.1 Класифікація розривів. 15
1.3.2 Закон збереження маси. 16
1.3.3 Закон збереження енергії..... 16
1.3.4 Тензор густини потоку імпульсу. 16
1.2.1 Ударна адіабата Гюгоніо. 18
РОДІЛ 2. Поширення ударних хвиль в різних середовищі. 20
2.1. Повітряна ударна хвиля. 20
2.2 Реєстрація ударних хвиль методом BOS..... 24
2.2.1 Відео реєстрація слабких ударних хвиль..... 26
2.2.2 Візуалізація ударних хвиль в полігонних випробуваннях..... 27
2.3 Взаємодія вибухових ударних хвиль на поверхні матеріалів..... 30
РОДІЛ 3. Рівняння Бюргерса. 36
3.1 Аналітичне розв’язання рівняння Бюргерса..... 36
3.1.1 Рівняння Бюргерса у безрозмірних змінних..... 37
3.1.2 Стаціонарне рішення рівняння Бюргерса. 39
3.2 Чисельні розв’язання рівняння Бюргерса. 40
3.3 Опис на основі розв’язку РБ кінематичних хвиль при рості-випаровуванні кристалів. 44
Висновки 49
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 50

ВСТУП

Фізичні явища, пов’язані з рухом газів і інших середовищ, приводять до формування і розвитку в даних середовищах ударних хвиль. Ударні хвилі можуть спостерігатись, також і в космосі, наприклад при обтіканні Землі сонячним вітром. Коли частинки сонячного вітру налітають на магнітосферу Землі перпендикулярно силовим лініям, вони відхиляються магнітним полем і рухаються за гвинтовими траєкторіями. В результаті утворюється поверхнева границя, за яку частинки не можуть проникнути, така границя називається магнітопаузою. Однак частина з них все ж проникає в атмосферу Землі близько полюсів, викликаючи полярні сяйва.

Беручи у якості прикладу нашу Землю, можна стверджувати, що існують ударні хвилі природного походження. Як приклад можна навести, землетруси, виверження вулканів, спалахи блискавки що також являються найбільш відомими прикладами ударних хвиль на Землі. Під час землетрусів при розриві породи та протягом короткого проміжку часу вивільняється величезна енергія. Наприклад, землетрус силою 5 балів за шкалою Ріхтера еквівалентний вибуху 1 кт тротилу, 7 балів - 1 Мт, 9 балів - 1000 Мт. При виверженні вулканів розпечені гази та рідини, що знаходяться під високим тиском в земній корі практично миттєво вириваються в атмосферу Землі. Наприклад, при виверженні вулкана на безлюдному острові Кракатау (Індонезія) в 1883 році в атмосферу було викинуто близько 4.6 $км^3$вулканічного попелу та інших продуктів виверження. Енергія вибуху була еквівалентна приблизно 5000 Мт тротилу. Вибух був чутний на відстані більше ніж 4800 км від джерела, а ударна хвиля тричі обігнула земну кулю.

Ударні хвилі також можуть бути штучно створені. Самим простим прикладом являється вибух. Також до штучного відтворення ударної хвилі можна віднести різкий сплеск пастушачого бича, в якому через те, що і при русі надзвукових літаків, кінець бича рухається зі швидкістю більшою за швидкість звуку в повітрі, що і приводить до ударної хвилі. Також штучно

створені ударні хвилі використовують для різних технологічних цілей, зокрема, при створенні нових матеріалів шляхом нанесення порошку на поверхню матеріалу, а також для зміни фізичних властивостей самого матеріалу шляхом різкого збільшення тепла і тиску за допомогою ударної хвилі. Враховуючі розповсюдженість ударної хвилі, створюють нові технології та механізми в основі яких знаходиться саме таке явище. Як приклад можна назвати детонаційний двигун, який може бути використаний як і на землі, так і в космосі. Важливо сказати, що ударні хвилі також використовують для демонтажу споруд. Не зважаючи на свій руйнівний характер, ударні хвилі знайшли застосування і в медицині, у вигляді короткого імпульсу з великим тиском і амплітудою. Використовують подібні методи як для дроблення каміння в нирках, так і для діагностики, де застосовуються ультразвукові хвилі.

РОЗДІЛ 1.Ударні хвилі.

1.1. Поняття ударної хвилі

Як правило, швидкість хвилі залежить від амплітуди, і у випадку звука ця залежність виникає внаслідок того що у повітрі рухається предмет, який зрушує повітря (газ) зі свого шляху, викликаючи при цьому збурення у вигляді якоїсь ступеневої функції тиску, причому тиск за фронтом хвилі виявляється вище ніж в області, яка ще не збурена, а саме область куди хвиля яка поширюється з нормальною швидкістю ще не дійшла. І повітря за фронтом хвилі виявляється адіабатичною стисненим, через це температура повітря буде збільшуватись, а в області позаду стрибка вона виявиться більшою за швидкість звуку, що попереду. Це означає, що будь-яке інше збурення за стрибком буде рухатись швидше ніж сам фронт: зі збільшенням тиску швидкість буде також збільшуватись (рис.1.1)

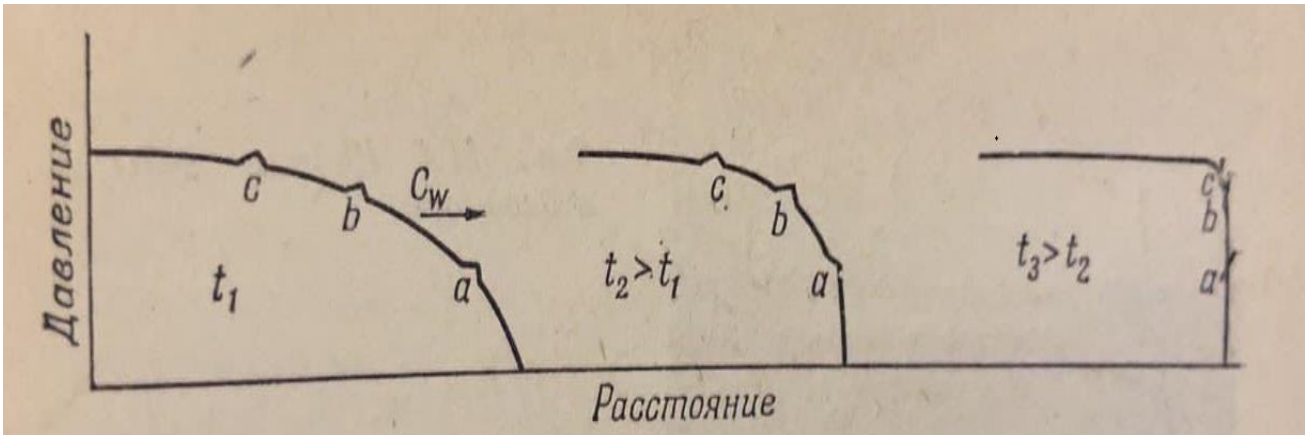


Рис.1.1. Ударний фронт зі зміною часу.

З (Рис.1.1) видно, що області високого тиску з плином часу «підганяють» фронт хвилі, до того моменту поки хвиля тиску не перетвориться у хвилю з різким фронтом. Наприклад, хвиля від вибуху з плином якогось певного проміжку часу рухається швидше звуку, до того моменту поки не відійде достатньо далеко, і в результаті затухання не буде

ослаблена в такій мірі що перепад тиску стане малим у порівнянні з атмосферним. При цьому швидкість фронту хвилі приблизиться до швидкості звука в газі в якому поширюється (швидкість ударної хвилі завжди виявляється більшою за швидкість звука в газі перед нею і нижче швидкості звука в газі за нею. Таким чином імпульс, який рухається позаду буде наздоганяти фронт хвилі, при цьому сам буде рухатись швидше в середовищі ніж нормальна швидкість звукового сигналу. Саме через це ми відчуємо спочатку ударну хвилю і тільки потім звук. Накопичення хвиль явище при якому після приходу однієї хвилі швидкість наступної хвилі що за нею повинна вирости.

Розглянемо газ в стані спокою з постійною густиною і тиском $\rho_0 P_0$ з лівої сторони плаский поршень який в початковий період часу почав стискувати газ з постійною швидкістю яка позначатиметься як U. Оскільки поставлена задача являється автомоделлю єдиним рішенням яке буде задовольнити рішення рівнянь газової динаміки являється тривіальним рішенням в якому U, ρ, P постійні та рішення по типу центрової простої хвилі.

Таким чином залишається одна можливість вирішити рівняння, яке буде граничні умови задачі в незбуреному газі де $U = 0, P = P_0, \rho = \rho_0$. В місці поблизу поршня швидкість газу буде рівна швидкості поршня, приставимо що в точці зіткнення газодинамічні величини отримують розрив.

В динаміці нев'язкого і нетеплопровідного газу існує розрив який являється тонким переходом між шаром двох середовищ. Саме ці розриви в межі і являються ударними хвилями.

Розглядаючи модель ідеального газу рівнянням якого являється рівняння Ейлера для ідеальної рідини - $\frac{\partial U}{\partial t} + (v\nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla P$, при додаванні густини $\nu\Delta v$. Де ν являється малим коли похідна $v(x)$ стає великою, а саме в точці перекидання малий дисипативний член стає більшим.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (v\nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta v$$

Якщо проробити висновок (що і робиться в теорії простих хвиль) і поглянути як доданок увійде в рівняння Коула-Хопфа для U то вийде рівняння типу Бюргерса.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = \nu^* \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$ – Рівняння Бюргерса

В якому ν^* являються всі дисипативні ефекти $\nu^* = \frac{1}{2\rho_0}(\frac{4\eta}{3} + \xi + \kappa\frac{(c_p - c_v)}{c_p c_v}$, з лівої частини те що в рівнянні Коула-Хопфа, з права коефіцієнт помножений на другу похідну від U. Рівняння Бюргерса досить відоме в математичній фізиці, яке за допомогою перетворення може зводитись до рівняння теплопровідності яке може бути вирішене. Важливим являється те що в ньому є одне стаціонарне рішення (рис.1.2).

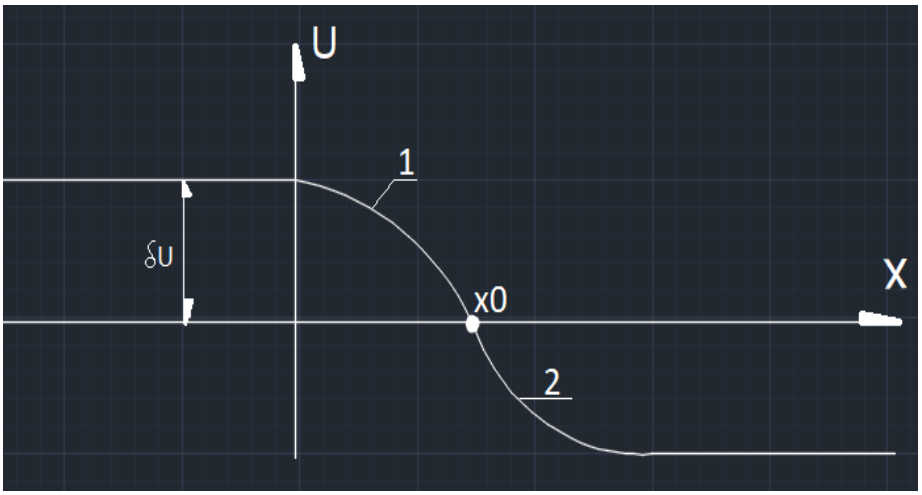


Рис.1.2. Графік стаціонарного рішення рівняння Бюргерса.

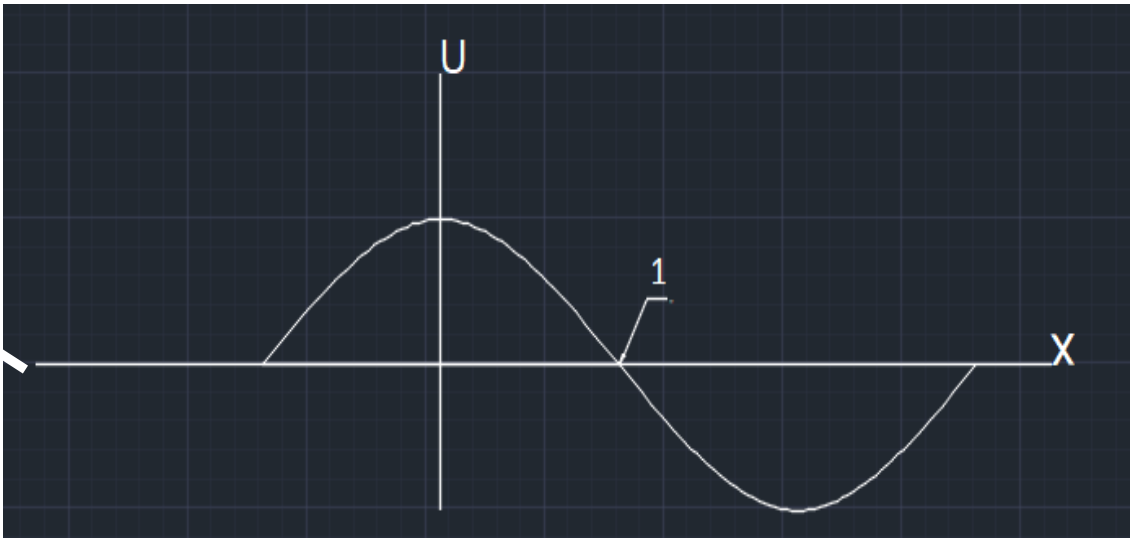
$$U = -\delta U * th\left(\frac{\delta U(x - x_{0)}}{2\nu^*}\right) -$$ стаціонарне рішення.

δU- амплітуда переходу, x_0- точка переходу. Таке рішення називають слабка ударна хвиля.

1.2. Слабка ударна хвиля

Розглядаючи рис.1.2 як швидкість звуку, ми робимо допущення що хвиля рухається зі швидкістю c_0, яка і являється швидкістю звука, який

відноситься до параметрів в точці x_0, тому густина змінюється, в точці1 (рис.1.2.) вона більша, а в точці 2 (рис.1.2) менша, так само і для швидкості, в точці 1 вона більша, а в точці 2 менша, а вся координата біжить зі швидкістю



c_0 яка в точці x_0.Розглянемо як графік (рис.1.2) має відношення для звукових хвиль.

Рис.1.3. Синусоїдальна хвиля.

В момент часу $t = 0$ хвиля являється синусоїдальною (рис.1.3). В наступний період часу картина буде інакшою, в період перекидання там де максимальна похідна на початку профілю швидкості, похідна стає рівна безкінечності при цьому вузли залишаються там де і були в системі відліку що

відповідає швидкості звуку в точці 1(рис.1.3) і півхвиля зміщується на ліво (рис.1.4).

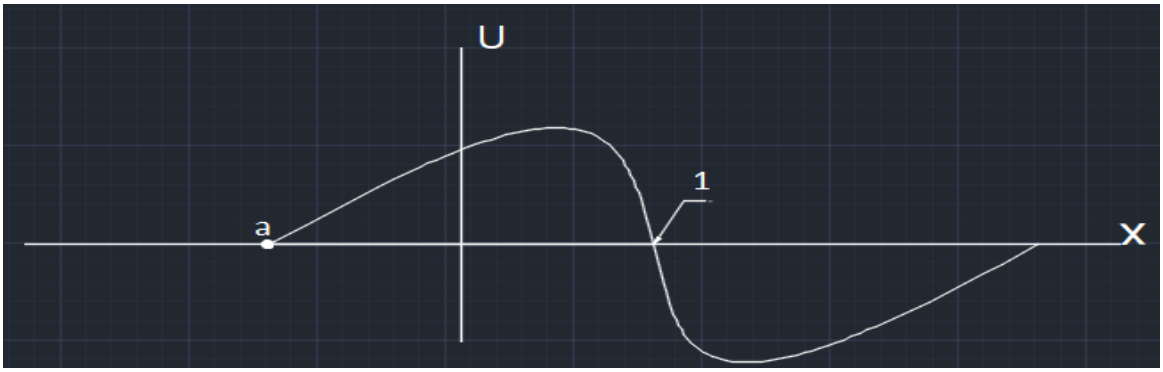


Рис.1.4. Зміщення півхвилі.

Далі з відповідністю рівняння Бюргерса нескінченної похідної в точці 1 (рис.1.4) не буде ніколи, через те, що спершу ніж вона там появиться запрацюють дисипативні складові, а саме тому похідна буде велика, але кінцевою та обернено пропорційна $\nu \sim \frac{1}{\nu}$. Чим менша густина, тим вертикальніша буде похідна і на цьому зупиниться. Проте в місцях де не дійшла до великих похідних, еволюція продовжується, тому можна зобразити що буде в наступні періоди часу поблизу нуля.

Якась похідна буде рівна швидкості, при цьому кінцева похідна буде велика у відповідності на скільки велика густина. В точці а (рис.1.4) похідна швидкості продовжує зменшуватись, через це поблизу вузла а все буде як і раніше, кожна точка буде зміщуватись на право, і картина буде як на (рис.1. 4), частина графіка розтягнулась і верхня точка а зміститься, перемістившись до наступного вузла точки 1, після чого зупиниться, тому, що далі перешкоджають дисипативні сили які працюють в зоні 3(рис.1.5), яка по своїй структурі схожий на графік що показаний на (рис.1.2).

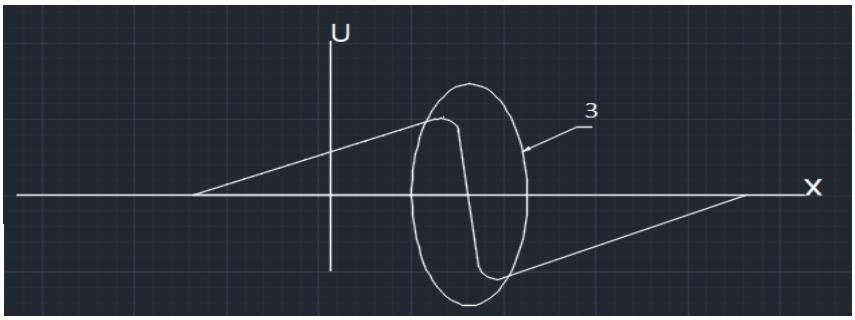


Рис.1.5. Зона дисипативних сил.

Тобто в області 3 (рис.1.5) сформувалась слабка ударна хвиля, в якій проходить поглинення енергії хвилі, а саме енергія яка була передана до області 3 (рис.1.5) перетворюється на тепло. З часом похила буде все зменшуватись, тому, що всі точки будуть зміщуватись на право, через це буде змінена амплітуда і в кінці вона буде рівна нулю і графік стане більш зубчастим, що і показано на (рис.1.6).

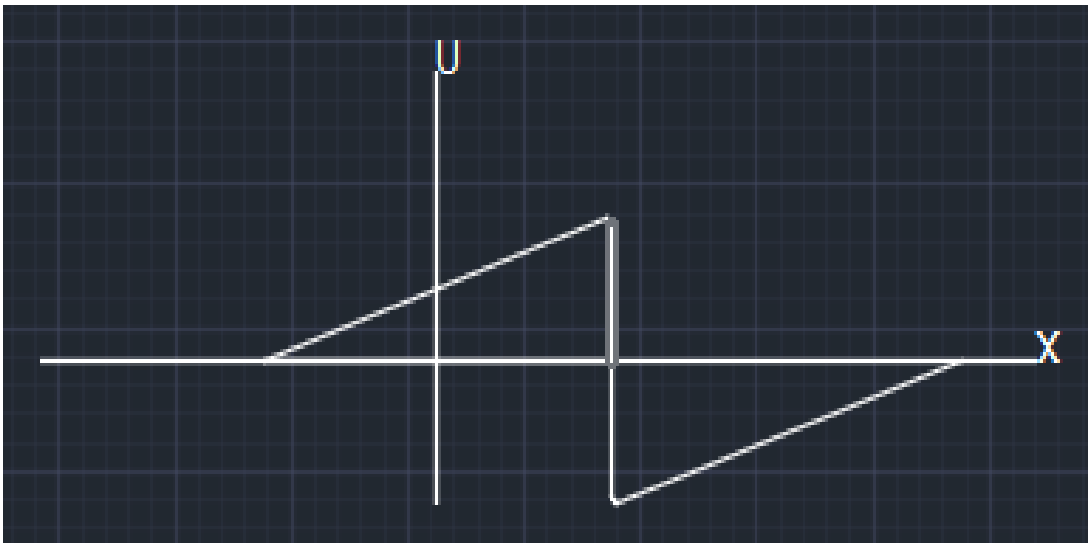


Рис.1.6. Результат зміщення точок вправо.

Якісний процес еволюції звукових хвиль полягає в наступному. Хвиля добігає до стану коли появляється слабка ударна хвиля, але при цьому замість перекидання в донному місці починається дисипація енергії через що амплітуд в результаті падає і поглинається.

1.3. Сильна ударна хвиля і поняття розривів.

З рівняння Бюргерса коли δU велике на стільки щоб зміна густини була в рази більша і зміна швидкості з точки 1 до точки 2 (рис.1.2) була також велика. Якщо δU збільшується то аргумент в гіперболічному тангенсі також, що означає чим більша δU, тим більш різким являється перехід а2, що показано (рис.1.7).

Появляється тонкий перехідний шар який позначений на (рис.1.7) як область 2, і тому v^* вже не являється важливим, оскільки ми вже знаємо що в цьому шарові дисипація енергії і збільшення ентропії. Такий шар називають розривом.

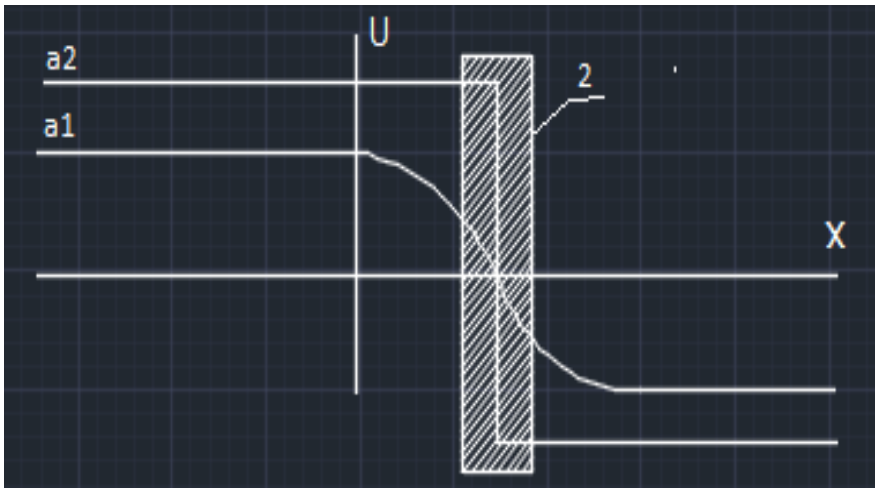


Рис.1.7. Зона переходу.

1.3.1 Класифікація розривів.

Що таке розрив – це якась межа розділу в суцільному середовищі (рис.1.8).

В лівій частині, середовище a (рис.1.8) що можна вважати практично ідеальним газом і з права (b) (рис.1.8) також газ який можливо вважати ідеальним, а в частині s (рис.1.8) виконується стрибок параметрів двох газів a і b.

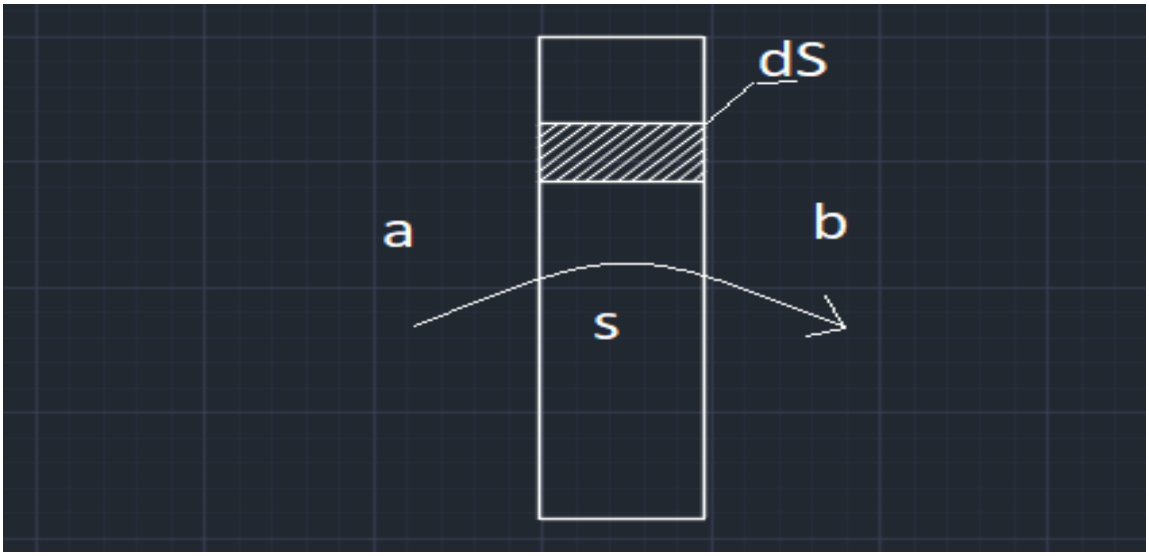


Рис.1.8. Межа розділу.

Параметри які характеризують стрибок: ρ- густина, ν- швидкість, P-тиск в частині a параметри ρ, ν, P одні, а в частині b параметри ρ_1, ν_1, P_1 інші. Якщо в середовищі є така межа розділу тоді мають виконуватись закони збереження.

1.3.2 Закон збереження маси.

Густина потоку маси $j_i = \rho\nu_i$, якщо помножити на вектор з нормаллю до межі розділу $ds_k = n_k ds$ де ds_k- елемент поверхні межі розділу. Смисл закону: скільки увійшло в межу розділу, стільки має і вийти з межі розділу. Що означає що густина потоку по поверхні межі розділу має бути неперервна $j_i ds = const,\ \rho\nu_i n_i = \rho\nu_n$ – також повинно бути неперервне.

1.3.3 Закон збереження енергії.

Густина потоку енергії $S_j = \rho\nu_i(\omega + \frac{\rho\upsilon^2}{2})$ через те, що ρ така сама як і зовні, тоді після до множення на елемент поверхні розділу ds_k враховуватись не буде. $S_j n_k = \rho\nu_n(\omega + \frac{\upsilon^2}{2})$ – неперервна, ω – ентальпія.

1.3.4 Тензор густини потоку імпульсу.

$$\Pi_{ik} ds_k = 0 \ \rightarrow\ \Pi_{ik} n_k = (\rho v_i v_k + P_{bik}) n_k = 0$$

$\Pi_{ik} ds_k$ – потік імпульсу через поверхню ds_k.

Згідно з законами збереження, можна записати систему рівнянь яка буде характеризувати стрибок як з лівої частини так і з права.

$$\begin{cases} \rho\nu_n = 0 & (1) \\ \rho v_i v_n + P_{bin} = 0 & (2) \\ \rho\nu_n \left(\omega + \dfrac{\upsilon^2}{2}\right) = 0 & (3) \end{cases}$$

Варіанти реалізації спільного рішення : Для рівняння (1) $v_n = 0$ протікання через межу розділу немає. Для рівняння (2) $P = 0$.

Що відбувається з іншими компонентами. Якщо $v_\tau = 0,\ \omega, \rho \neq 0$ – термодинамічний стан і густина можуть бути різними, такий розрив називають контактним. Як приклад можна навести межу двох морів Балтійського і Північного (рис.1.9).



Рис.1.9. Контактна межа

Якщо $v_\tau \neq 0,\ \omega, \rho \neq 0$ тоді тангенціальна швидкість $\neq 0$ і її стрибок $\neq 0$ і такий розрив називають тангенціальним. Якщо $v_n \neq 0$ із (2) рівняння слідує що $\rho v_n = 0$, а саме що потік речовини повинний бути неперервним. З (3) рівняння слідує ρv_n виноситься та отримуємо $\omega + \frac{v^2}{2} = 0$.

$$v_n \neq 0 \rightarrow \begin{cases} \rho v_n = 0 \\ v_\tau = 0 \\ \omega + \frac{v^2}{2} = 0 \\ \rho v_n^2 + P = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rho v_n = 0 \\ \rho v_n + P = 0 \\ \omega + \frac{v^2}{2} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Саме такий розрив в системі рівнянь (4) який в системі відліку рухається зі швидкістю v_τ яка являється неперервною називають ударною хвилею.

Тангенціальна швидкість v_τ для ударних хвиль завжди неперервна тому що $v_n \neq 0$ швидкість направлена уздовж межі розділу.

Розглядаючи випадок ударної хвилі що має зберігатись на межі розриву записано в рівнянні (4) в системі відліку межі розриву. Знаходячись в системі відліку де $v_\tau = 0$ і сама межа розділу знаходиться на місці, вважаємо що межа розділу являється пласкою (рис.1.10).

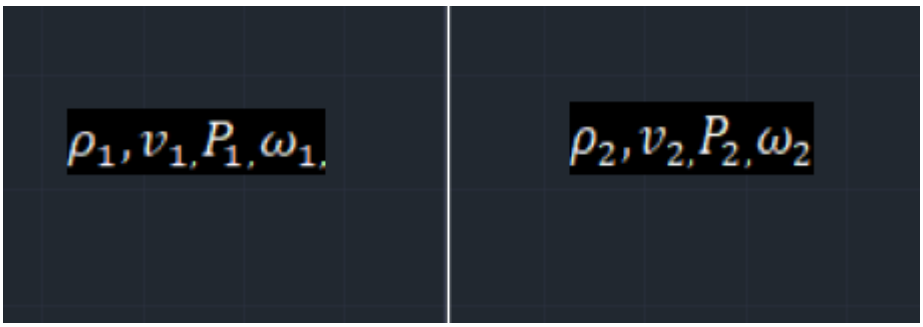


Рис.1.10. Пласка межа розділу.

Поблизу пласкої частини можна записати рівняння в яких незалежними залишаються $\rho_1, v_1, P_1, \omega_1, \rho_2, v_2, P_2, \omega_2$. З рівняння стану $\omega = \omega(P, \rho)$, якщо $v_\tau = 0 \rightarrow v = v_n$ через це залишаємо індекси які будуть позначати сторону і запишемо основні рівняння для ударних хвиль.

$$\begin{cases} \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \ - \text{ непреривність потоку речовини} \\ \rho_1 v_1^2 + P_1 = \rho_2 v_2^2 + P_2 \ - \text{непреривність потоку імпульса} \\ \dfrac{v_1^2}{2} + \omega_1 = \dfrac{v_1^2}{2} + \omega_2 \end{cases}$$

З урахуванням рівняння стану $\omega = \omega(P, \rho)$, невідомі 6 функцій $\rho_1, v_1, P_1, \rho_2, v_2, P_2$. Тому якщо задати любі 3 функції як початкові параметри тоді інші 3 можна буде знайти за допомогою рівняння стану.

1.2.1 Ударна адіабата Гюгоніо.

Особливості та відмінності адіабати Гюгоніо. Якщо взяти точку на звичайній адіабаті, то можливо перейти в любу точку цієї адіабати й даний

процес може бути оберненим і можливий в декілька етапів. Адіабата Гюгоніо влаштована по іншому, по перше в ній неможливо дійти до точки 0, оскільки завжди є вертикальна асимптота, по друге множина точок що на адіабаті одинична перехідна через точку 1 (рис.1.11) та можливість попасти до іншої точки є лише за один крок. Оскільки якщо зробити крок до точки 2 (рис.1.11), тоді наступна адіабата Гюгоніо буде мати інші значення PV, і буде нова крива і через це, з точки 1 ніяк не попасти в точку 3 за два кроки, так як обов'язково потрібно пройти точку 2. Також в адіабаті Гюгоніо весь рух не може бути оберненим, а саме рух по адіабаті може відбуватись тільки в гору, через пониження ентропії. На графіку (рис.1.11), a1- звичайна адіабата, a2- адіабата Гюгоніо.

Для отримання рівняння адіабати Гюгоніо потрібно вести нові означення $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = j;\ \rho_1 = \frac{1}{V_1};\ \rho_2 = \frac{1}{V_2};\ V -$ удільний об'єм, $\rho_1 v_1^2 = j^2 V_1;\ v_1^2 = j^2 V_1^2.$

$$\begin{cases} j^2 V_1 + P_1 = j^2 V_2 + P_2 & (1) \\ \frac{1}{2} j^2 V_1^2 + \omega_1 = \frac{1}{2} j^2 V_2^2 + \omega_2 & (2) \end{cases}$$

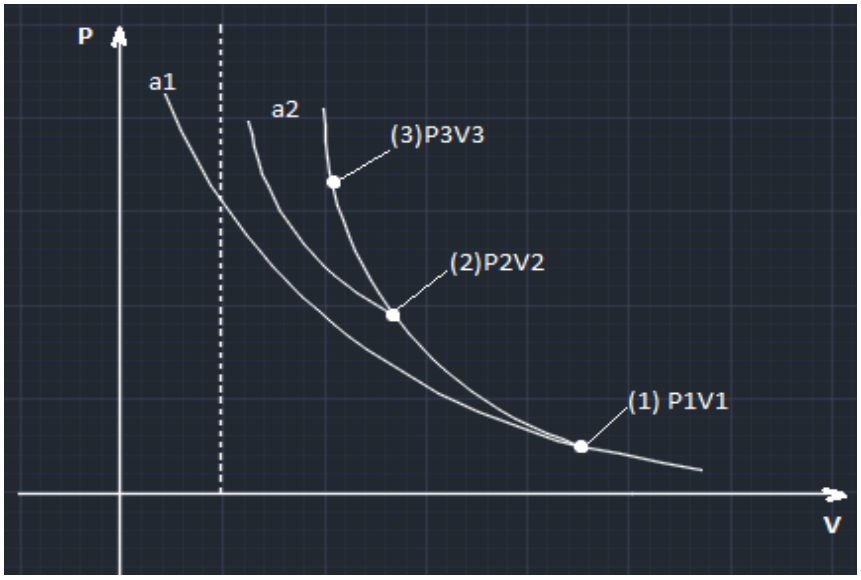


Рис.1.11. Порівняння звичайної адіабати з адіабатою Гюгоніо.

Виразивши j^2 з рівняння (1), отримаємо $j^2 = \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}$, підставимо в рівняння (2). $\omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{2} j^2 (V_1^2 - V_2^2) = \frac{1}{2}(P_2 - P_1)(V_2 + V_1) -$ адіабата Гюгоніо. Звичайна адіабата має вигляд $P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$.

РОДІЛ 2. Поширення ударних хвиль в різних середовищі.

2.1. Повітряна ударна хвиля.

Оскільки на сьогоднішній день процеси вибуху знаходяться в основі функціонування багатьох виробів і технологій. Цим і пояснюється цікавість до вивчення даних процесів. Були сформовані основні закономірності процесів ударних хвиль і вибухів, накопичений великий об'єм експериментальних даних і розроблені математичні моделі даних процесів. Ударна хвиля – процес стрибка ущільнення, розповсюдження з надзвуковою швидкістю, тонка перехідна область в якій проходить різке збільшення густини і швидкості речовини.

У даному підрозділі буде розглянуто наслідки впливу повітряної ударної хвилі на людину, які відносяться до узагальнення опитів минулих і сучасних війн. Експериментальні дослідження 50-60-х років по вибуху відносяться до дослідження ядерної зброї, а фізичні параметри повітряної ударної хвилі, при ядерному вибуху значно відрізняються від характеристики ударної хвилі звичайному (конденсованому) вибуху речовини. Апарати які призначені для виміру не дозволяють забезпечити надійну і точну реєстрацію параметрів повітряної ударної хвилі через що виникає похибка у вимірах.

Ударна хвиля в повітрі виникає за рахунок величезної енергії, яка виділяється в зоні реакції де виключно висока температура і тиск досягає мільярда атмосфер (до 105 млрд. Па). Розпечені пари і гази, прагнуть розширитись, провадять виробництво різкого удару по оточуючим шарам повітря, стискують і нагрівають до великих температур. Данні шари повітря приводять в рух наступні шари, і так стиснення переміщає повітря і все

відбувається від одного шару до другого і у всі сторони від епіцентру вибуху і таким чином виникає повітряна вибухова ударна хвиля. Розширення розпечених газів виконується в малих об'ємах, через це їх дія на віддаленні від центра вибуху зникає і головним носієм дії вибуху стає повітряна ударна хвиля. Поблизу центра швидкість поширення ударної хвилі в декілька разів перевищує швидкість звука в повітрі. З збільшенням відстані від місця вибуху швидкість поширення хвилі швидко зменшується а ударна хвиля зменшується. На великих відстанях ударна хвиля переходить в звичайну акустичну хвилю і швидкість розповсюдження стає рівною швидкості звука в навколишньому середовищі 340 м/с. Повітряна ударна хвиля при ядерному вибуху середньої потужності проходить приблизно 1000 м за 1,4 с, 2000 м за 4 с, 3000 м за 7 с, 5000 м за 12 с. Основними параметрами ударної хвилі, які визначають її вражаючі дії є: надлишковий тиск у фронті хвилі (різниця між максимальним тиском у фронті ударної хвилі і нормальним атмосферним тиском перед даним фронтом) (рис.2.1).

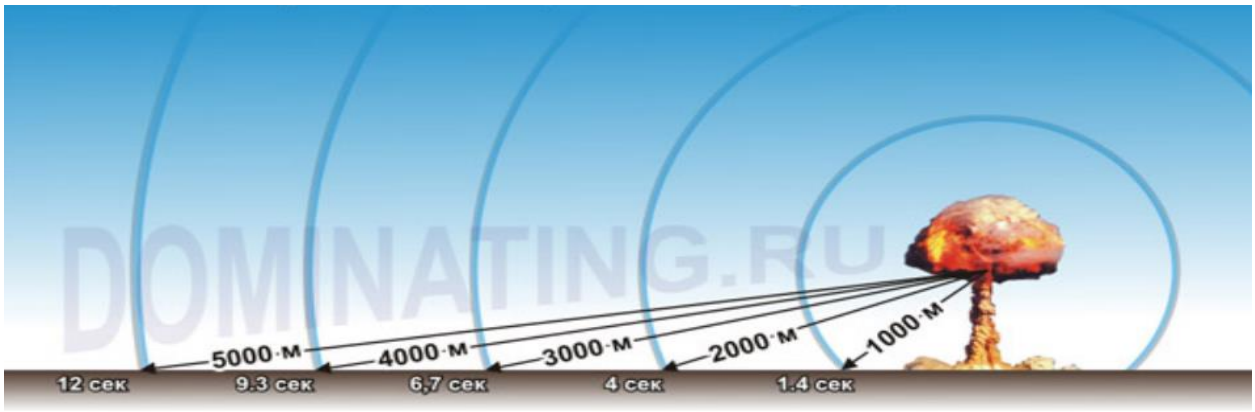


Рис.2.1. Розповсюдження фронту хвилі.

Для визначення залежності надлишкового тиску на фронті ударної хвилі ΔP, кПа, від відстані R,м, до епіцентру вибуху конденсованого вибухової речовини використовують формулу М.А. Садовського для наземного вибуху при умові $1 \leq RC_{\text{тит}}^{-1/3}$, $C_{\text{тит}}$ – Тротиловий еквівалент, т;

$$\Delta P = 95\left(\frac{C_{\text{тит}}^{-\frac{1}{3}}}{R}\right) + 390\left(\frac{C_{\text{тит}}^{-\frac{2}{3}}}{R^2}\right) + 1300\left(\frac{C_{\text{тит}}}{R^3}\right)$$ [1]

Швидкість напору повітря (динамічне навантаження, створене потоком повітря рухаю чогось у хвилі), $q = 1/2\rho u^2$ де ρ – густина повітря за фронтом хвилі; u – швидкість повітря за фронтом ударної хвилі; t- час дії надлишкового тиску $t = (0.85 - 0.002\Delta P)\tau$, де τ – тривалість фази стиснення.

В фазі стиснення ударної хвилі тиск вище атмосферного, а в фазі розрідження нижче.(рис.2.2)



Рис.2.2. Розповсюдження ударної хвилі.

Найбільший тиск повітря спостерігається на зовнішній межі фази стиснення у фронті хвилі. Одночасно з проходженням ударної хвилі відбувається переміщення повітря з великою швидкістю. Причому що у фазі стиснення повітря рухається від центра вибуху а у фазі розрідження до центру.(рис.2.3)

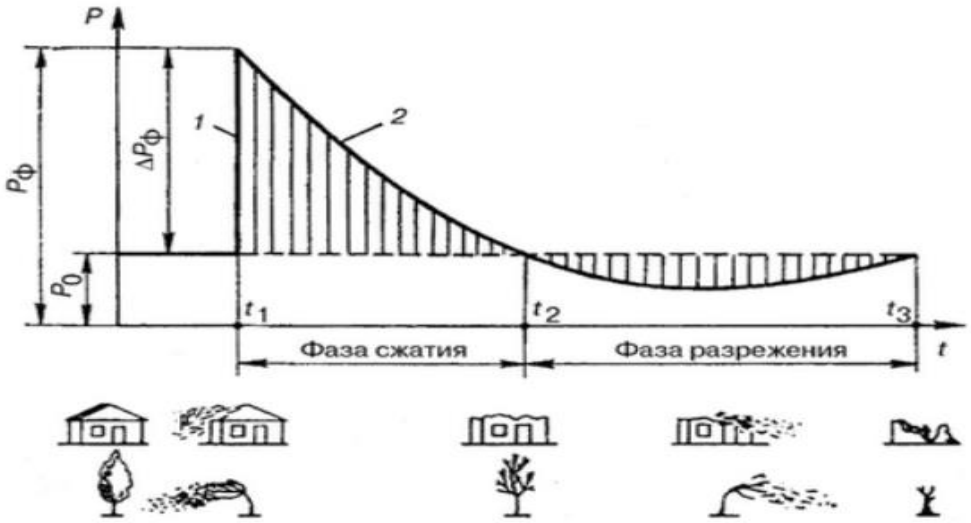


Рис.2.3. Фаза стиснення та фаза розрідження.

На поширення повітряної ударної хвилі істотно впливає місцевість від рельєфів до лісних масивів і метеорологічних умов. І в залежності від рельєфу або метеорологічних умов ударна хвиля може як і зменшити свою руйнівну здатність так і збільшити. Наприклад при крутизні схилу $10-15^{\circ}$ тиск на 15-35% більше ніж на рівній місцевості, при крутизні схилу $15-30^{\circ}$ тиск може збільшитись у 2 рази [4].

Повітряна ударна хвиля що виникає при вибуху має позитивну, негативну фазу переміщення повітряної маси. Поряд з величиною надлишкового тиску у фронті ударної хвилі велике значення має тривалість позитивної фази надлишкового тиску, яка у свою чергу залежить від маси і виду вибухової речовини. Так на приклад при вибуху вибухової речовини масою 10-20 кг тротилового еквіваленту тривалість позитивної фази тиску не перевищує 2 м/с, а при масі в 1000 кг 10м/с.

Експериментальні дослідження показали що, одним з основних механізмів пошкодження дії повітряної ударної хвилі є різкі перепади тиску і розповсюдження по тілу хвиль деформації, включаючи і ударне прискорення.

Характери та тяжкість уражень людей від значень повітряної ударної хвилі, залежать від розміщення людини в момент вибуху і його захисту. Ураження які виникають під дією ударної хвилі, розділяють на легкі, середні, важкі, вкрай важкі (смертельні).

Легкі ураження виникають при надмірному тиску у фронті ударної хвилі P=20-40 кПа (0,2 - 0,4 $кс * с/см^2$) і характеризуються легкою контузією, тимчасовою втратою слуху, забоями і вивихами.

Середні ураження виникають при надмірному тиску у фронті ударної хвилі $P >$ 40-60 кПа (0,4 - 0,6 $кс * с/см^2$) і характеризуються враженням органів слуху, травмами мозку, кровотечами з носа і вух, втратою свідомості.

Важкі і вкрай важкі ураження виникають при надмірному тиску у фронті $P >$60-100 кПа (0,6 - 1,0 $кс * с/см^2$) і $P >$100 кПа (1,0 $кс * с/см^2$) і характеризуються переломами, ураженням внутрішніх органів тощо.

При впливі повітряної ударної хвилі на будівлі можуть отримувати повні, сильні, слабкі руйнування. Руйнування малогабаритних споруд виконується за рахунок дії швидкого напору повітря. Повне руйнування характеризується обваленням всіх стінок. Із обломів утворюються завали.

Відновлення будівель неможливе. Сильні руйнування характеризуються частковим руйнуванням стін. В багатоповерхівках зберігаються нижні поверхі. Середні руйнування характеризуються руйнуваннями влаштованих елементів (двері, вікна, вентиляція) можливе відновлення і продовження використання нижніх поверхів. Ступінь руйнування технологічного обладнання буде залежати тільки від величини ударної хвилі і стану будівлі чи спорудження.

2.2 Реєстрація ударних хвиль методом BOS.

У ряді випадків при відпрацюванні різних боєприпасів необхідно вимірювати параметри ударної хвилі. В теперішній час для вимірювання параметрів ударної хвилі широко використовують датчики тиску. Датчики

тиску дозволяють виміряти залежність тиску від часу в конкретній точці простору (як правило декілька датчиків розміщені в одній плоскості).

Реєстрація сигналів як правило виконується за схемою «датчик тиску – узгоджуючий пристрій – реєстратор». При цьому з однієї сторони кількість датчиків обмежена з точки зору побудови докладної діаграми R(t) з десятками експериментальних точок, з іншої, датчики фізичних величин з електричним способом виведення інформаційного сигналу присутній недолік у вигляді перехідних характеристик у електричних ланцюгах.

Крім того у випадку відбивання, поширення ударних хвиль має важкий характер. Процес відбивання сферичних ударних хвиль в пласкій поверхні показаний на (рис.2.4).

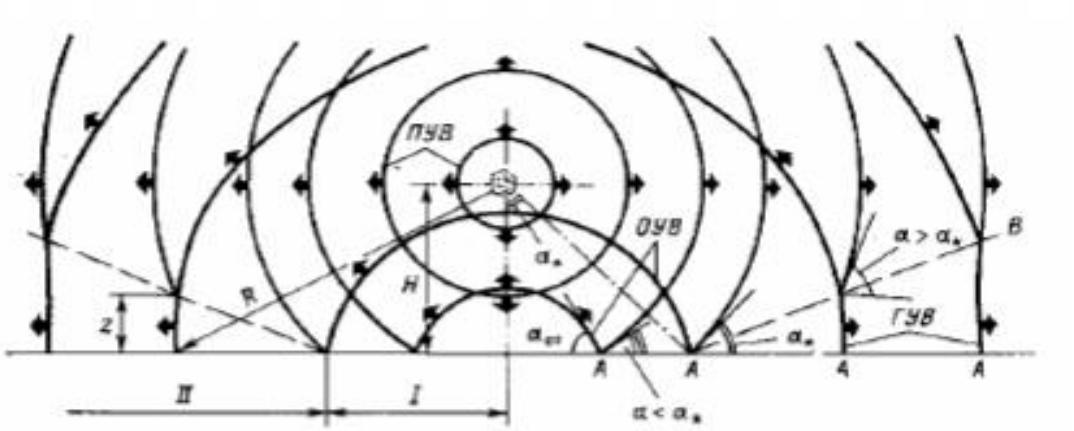


Рис.2.4. Відбивання сферичної ударної хвилі від плоскості.

Після того як регулярні відбивання стають неможливими ($a < a_+$) падаюча ударна хвиля і відбиваюча відходять від поверхні і виникає третя ударна хвиля яка називається хвиля Маха або головною ударною хвилею.

Для реєстрації використовуються і оптичні методи. Оптичні методи засновані на зміні параметрів випромінення в залежності від оптичних властивостей досліджуваного середовища. До найбільш відомих оптичних методів відноситься тіньовий метод, інтерференційний метод, а також BOS (Backgroundorientedschlieren) метод [2]. Одним із головних переваг BOS

метода порівняно з іншими оптичними методами є простота його реалізації. Схема експериментального приладу BOS складається з некогерентного джерела світла, фонового екрана, відеокамери і комп'ютера з програмним забезпеченням. BOS метод дозволяє візуалізувати ударну хвилі і простежити за її розповсюдження у просторі.

2.2.1 Відео реєстрація слабких ударних хвиль.

За допомогою BOS можливо візуалізувати область у оптичному прозорому середовищі, маючи градієнт показання заломлення n, і чим більше значення n, тим легше візуалізувати ці області. Так як ударні хвилі характеризуються стрибкоподібними змінами тиску і густини, і як наслідок отримання градієнту показання заломлення. На (рис.2.5) наведені результати технології BOS для реєстрації ударних хвиль [2].

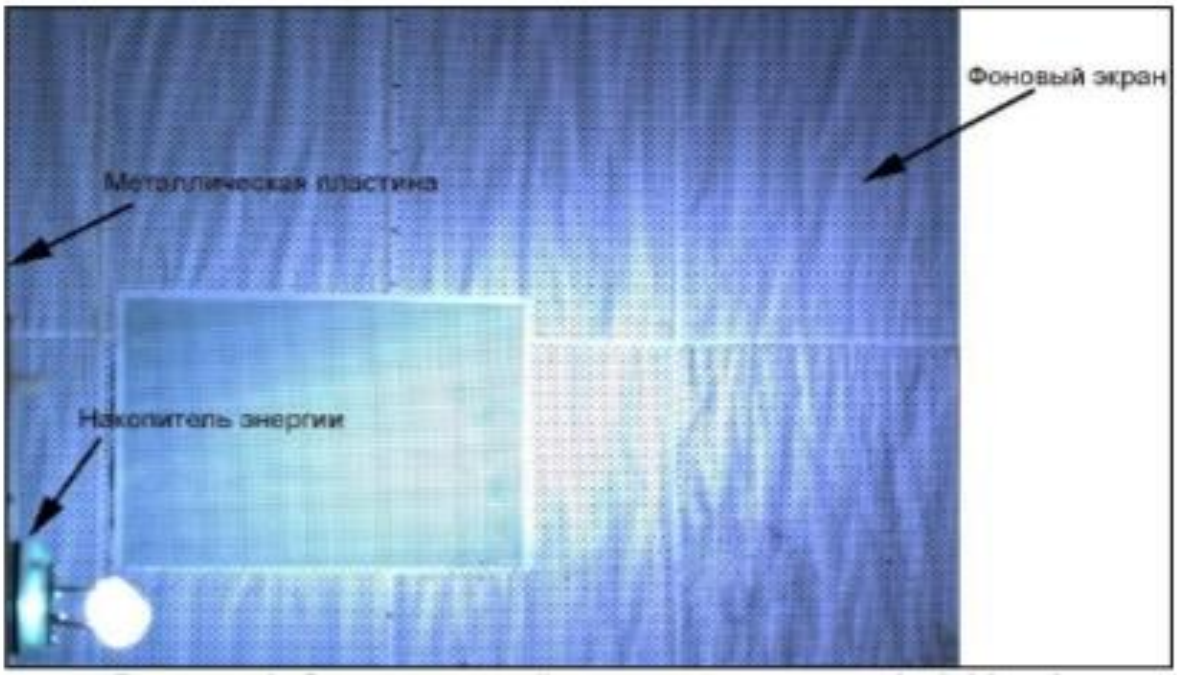


Рис.2.5. Електричний вибух дроту.

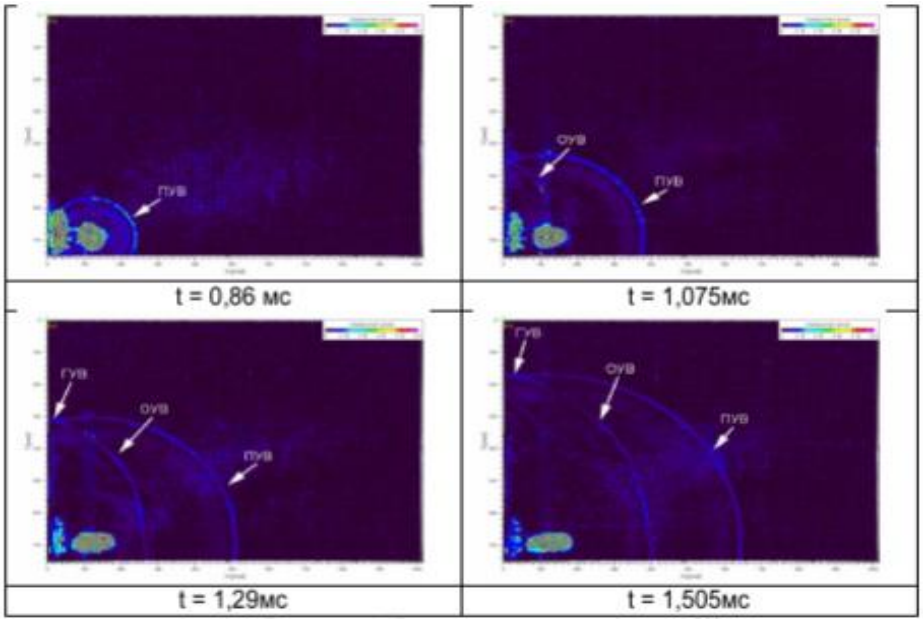


Рис.2.6. Результат візуалізації ударної хвилі.

Виконувалась відео реєстрація електричного вибуху дроту і наступної візуалізації створення ударної хвилі. На (рис.2.5) виконано один з кадрів відео реєстрації, а на (рис.2.6) результат візуалізації. В якості джерела високої напруги використовувавсь накопичувач з енергією розрядного контуру 216Дж і рівень напруги 12кВ. Вибухав мідний дріт діаметром 0,09мм і довжиною 30мм.

2.2.2 Візуалізація ударних хвиль в умовах полігонних випробуваннях.

Специфіка полігонних випробувань проявляє суворіші вимоги для вимірювального обладнання, зокрема, за критерієм «живучості» в зоні реєстрації. Оптична реєстрація дозволяє вибрати цікаву для реєстрації зону і при цьому розташувати так щоб обладнання було на безпечній відстані. Застосування BOS метода дозволяє візуалізувати великомасштабні оптичні неоднорідності, на (рис.2.7 і 2.8) показані одні із прикладів.



Рис.2.7. Постріл з порохової балістичної установки.

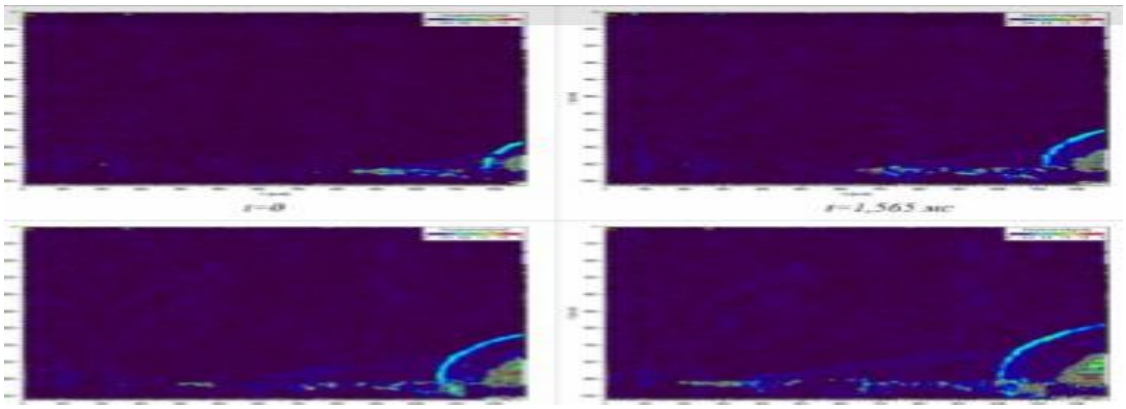


Рис.2.8. Результат візуалізації ударної хвилі.

Експериментальне підтвердження можливостей оптичної реєстрації ударних хвиль. Виконавсь вибух заряду шароподібної форми діаметром 70мм, що складається з вибухової речовини ПВВ-7 масою 250 г. Заряд був підвішений на висоті 2 м. Проводилась як оптична реєстрація сформованих



Рис.2.9.Розміщення обладнання на робочому полі.

ударних хвиль, так і реєстрація за допомогою датчиків тиску, розташованих на одній прямій. На (рис.2.9) показане розташування обладнання на робочому полі. Відео реєстрація ударної хвилі здійснюється на фоні екрана з частотою зйомки 9300 кадр/с і часом експозиції 10 мкс.

На (рис.2.10) показані кадри в результаті візуалізації ударних хвиль в момент

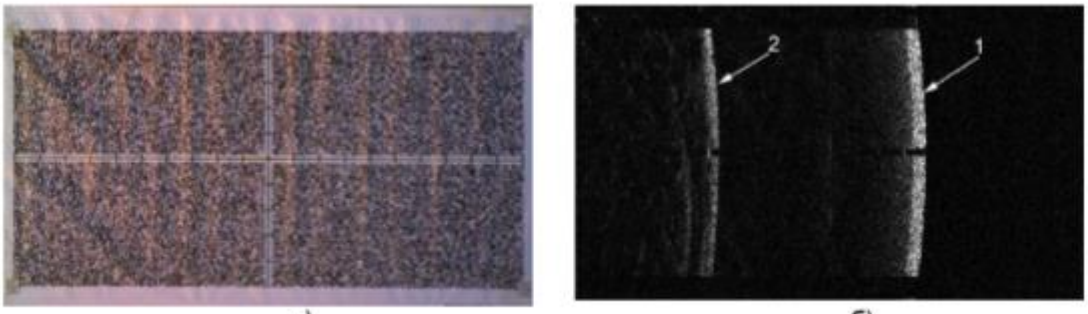


Рис.2.10.Початкова інформація (а). Результат візуалізації (б)

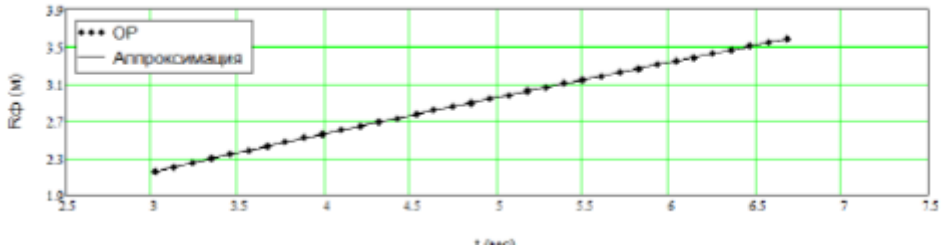


Рис.2.11. Результат розповсюдження ударної хвилі

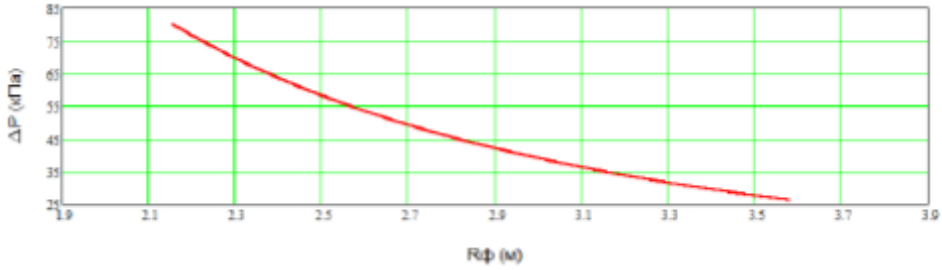


Рис.2.12. Залежність надлишкового тиску у фронті падаючої ударної хвилі

часу 5,5 мс після вибуху. Візуалізовано як первинна 1, так і вторинна 2 падаюча ударна хвиля. Шляхом обробки результатів отримана діаграма переміщення фронту первинної падаючої ударної хвилі R(t), результат показаний на (рис.2.10) [2].

На (Рис.2.12) показана залежність швидкості і надлишкового тиску.

Даний метод BOS можливий у використанні для реєстрації ударних хвиль не тільки для вибуху, а також для руху тіла з швидкістю звука. При отриманні даних можливо прослідкувати поширення ударної хвилі у просторі, а також у випадку вибуху можливо визначити параметри і потужність ударної хвилі.

2.3 Взаємодія вибухових ударних хвиль на поверхні матеріалів.

Вибухова ударна хвиля, виникає в навколишньому просторі після виходу детонаційної хвилі на поверхню заряду вибухової речовини, володіє параметрами, які перевершують межі міцності матеріалів і температури їх плавлення. Тому представляють інтерес вивчення впливу на поверхню металів і сплавів, інтенсивних потоків енергії, що виникають під час вибуху. Перебуваючи в екстремальних умовах, матеріал змінює свої фізико-механічні властивості в дуже короткі проміжки часу. У цих умовах часто спостерігаються аномальні процеси нехарактерні для звичайних схем впливу на поверхню матеріалу. Ударно-хвильове навантаження металів і сплавів технічно можна здійснити двома способами. Перший - це безпосередньою дією вибухових ударних хвиль на поверхню матеріалу і другий навантаження поверхню металу пластиною, рух якої ініційовано вибухом. Незважаючи на те, що ініціюючим фактором і в тому, і в іншому методі є вибух. Через що, характер впливу на поверхню матеріалу різний.

У даний час широке застосування отримали технології, пов'язані з взаємодією на поверхні матеріалів потоків частинок, що володіють дуже високою енергією. При цьому, як правило, матеріал виявляється в екстремальні умовах високих тисків і температур. До числа таких впливів можна віднести дії ударної хвилі, що виникає при вибуху заряду вибухової речовини. Продукти детонації вибухової речовини, що поширюються в навколишньому простір, мають дуже високу початкову щільність, масову швидкість і температуру, ці фактори використовуються для метання масивних тіл або розпилень порошкових матеріалів з метою створення зносостійких покриттів на поверхні металів і сплавів. Взаємодія продуктів

детонації вибухової речовини з частинками порошку, використовуваного для вибухового напилення покриттів. Структура і характеристики для зміцнення покриття багато в чому визначається агрегатним станом частинок порошку що осідає на поверхню, а так само їх динамічними характеристиками. Тобто, важливо в твердому або розплавленому стані частка потрапляє на поверхню матеріалу, і з якою швидкістю вона рухалася. Аналіз динамічної характеристики частинок порошку, рухаючись під дією продуктів детонації вибухової ударної хвилі, швидкість часток порошку дуже швидко росте і порівнюється з масовою швидкістю продуктів детонації. Тобто процес носить характер «збільшенням» частинок, продуктом детонації. Використовувалася проста фізична модель взаємодії продуктів детонації з частинками порошку. В основі, лежить непружне зіткнення молекул продуктів детонації з частинками порошку. Якщо прийняти, що енергетичні втрати в процесі непружного зіткнення переходять у внутрішню теплову енергію частинки порошку, то можна визначити кількість теплоти, яку отримала частка в процесі «бомбардування» її молекулами продуктів детонації.

Закони збереження енергії з урахуванням теплових втрат при непружному зіткненні і імпульсу можна записати у вигляді [3]:

$$Q_n = \frac{mu_n^2}{2} + \frac{Mv_n^2}{2} - \frac{(M+nm)v_{n+1}^2}{2};$$

$$mu_n + (M+nm)v_n = [M+(n+1)m]v_{n+1} \quad (1)$$

Де n=0,…N, m – маса молекули продуктів детонації; M – маса частинки порошку; u_n- масова швидкість детонації; v_n – швидкість частинки порошку після n зіткнення; Q_n- кількість теплоти що виділилось в процесі n зіткнення. У співвідношенні рівняння (1) враховується що масова швидкість детонації зменшується при розширені продуктів детонації в оточуючому середовищі сферичного заряду вибухової речовини по закону: $u(r) = B1r^{-3}$ (2), де $B1 = 0{,}015$, r- відстань від центра сферичного заряду вибухової речовини.

Спільне рішення рівняння системи (1) дозволяє виявити кількість теплоти яке було отримано частинкою порошку в результаті одноразового зіткнення з молекулою продуктів детонації Q_n.

$$Q_n = \frac{u_n^2}{2}\left[m - \frac{m^2}{M+(n+1)m}\right] + \frac{v_n^2}{2}\left[(M+nm) - \frac{(M+nm)^2}{M+(n+1)m}\right] - \frac{m(M+nm)v_n u_n}{M+(n+1)m} \quad (3)$$

Просумувавши Q_n можливо знайти повну теплову енергію що була передана частинці в результаті взаємодії з детонаційною хвилею: $Q = \sum_{n=0}^{N} Q_n$ (4)

N – сумарна кількість зіткнень молекул продуктів детонації з частинкою порошку. Розглянувши графік залежності швидкості частинки від відстані.

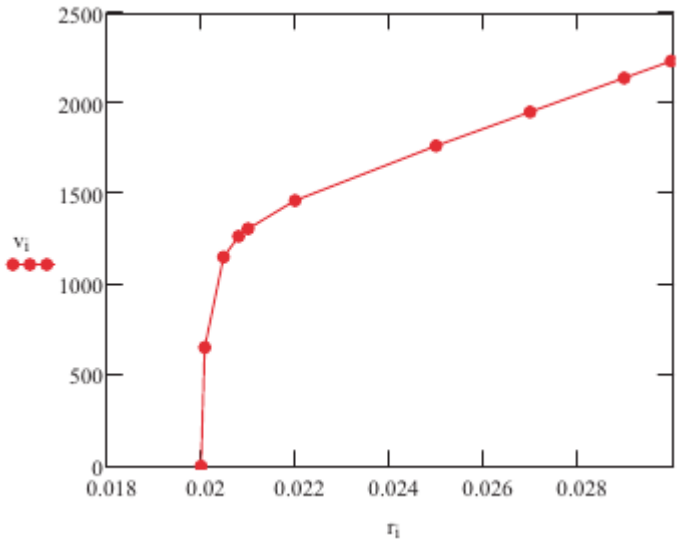
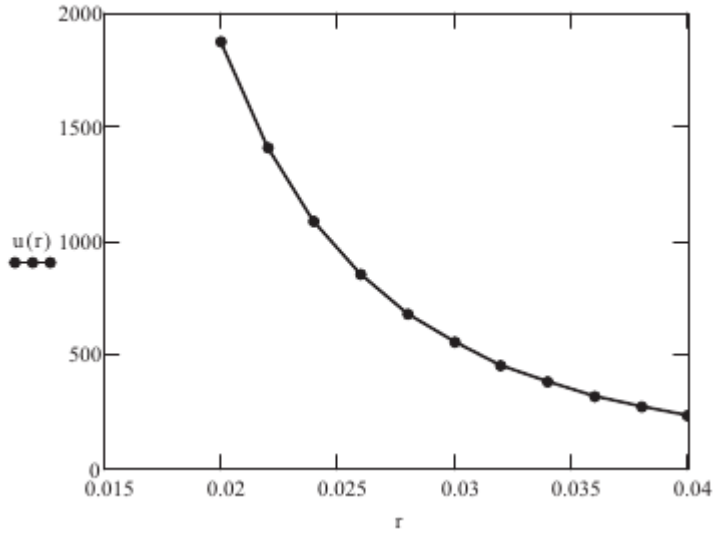


Рис.2.13. Залежність швидкості частинки порошку від відстані.

Як можна побачити з графіка, швидкість частинки дуже швидко зростає на першому етапі взаємодії вибухової хвилі з порошковою насадкою що обумовлено високою щільністю продуктів детонації з початку розширення в повітрі ($\sim 2 \cdot 10^3$ кг/м^3) і великою початковою масовою швидкістю. Подальше стиснення темпів зростання швидкості частинок пов'язане з тим що вже через час $\sim 10^{-7}$з швидкістю руху частинки порошку стає порівняв вимірюваною з масовою швидкістю продуктів детонування, яка достатньо швидко спадає зі збільшенням відстані від центру сферичного заряду вибухової речовини[3].

Це свідчить про те що, на цьому етапі взаємодія частинки порошку з детонаційною хвилею розрідження відбувається «збільшенням» частинами



молекул продуктів детонування. Для порівняння динамічних частинок порошку і молекул продуктів детонації, що розширюються в навколишній простір, показано графічну залежність для масової швидкості від відстані до центра заряду вибухової речовини (Рис.2.14).

Рис. 2.14. Залежність масової швидкості вибухової речовини від відстані.

При побудові залежності $u = u(r)$ використовувався сферичний заряд гексогену радіусом 2 см і масою 120 г. Основні зростання швидкості руху частинки порошку проходять при тиску у фронті хвилі розрідження більше тиску сполучення, тому використовується тільки швидкість, яка визначається співвідношенням (2). Для розрахунку кількості теплоти (3), (4) були використані дані про швидкість руху частинки, а масова швидкість продуктів детонації визначалася співвідношенням (2). Підсумовування в співвідношенні (4) виконувалось чисельними методами в системі MathCAD. Залежність кількості теплоти, отримані часткою при її русі у фронті детонаційної хвилі розрідження, від кількості зіткнень представлена на графіку (Рис.2.14) в подвійному логарифмічному масштабі. В логарифмічному масштабі залежність кількості теплоти, поглиненої часткою порошку, від числа зіткнень практично лінійна. При кількості зіткнень $\sim 10^{12}$ спостерігається зміна характеру залежності логарифма Q від логарифма N. Що свідчить про збільшення швидкості росту Поглинання теплоти.

Взаємодія частки порошку з молекулами продуктів детонації вибухової речовини приводить до її нагрівання. Важливо знати до якої температури може розігріватись частка і чи достатньо теплоти, отриманої при зіткненні для її плавлення. Агрегатний стан частинки порошку має істотне значення для її подальшої взаємодії з обробляючою поверхнею металу або сплаву. По цьому оцінимо зміна температури частинки порошку при її русі у фронті хвилі розрідження продуктів детонації. Розрахунки проводилися для порошку бору з розміром частинок 5 мкм і масою $1{,}5 \cdot 10^{13}$кг. Зміна температури частинки визначається співвідношенням (5).

$$\Delta T = \frac{Q}{c \cdot M} \quad (5),$$

Де $c -$ питома теплоємність бору; $M -$ маса частинки бору; $Q -$ кількість теплоти що визначена співвідношенням (4). Як видно по графіку залежності ΔT від числа зіткнення зростає лінійно і при $N \sim 10^{12}$ швидкість зростання температури збільшується. Так як температура плавлення бора ~ 2200К, то з графіку (Зображення 3) видно що частинка порошку може нагрітись до

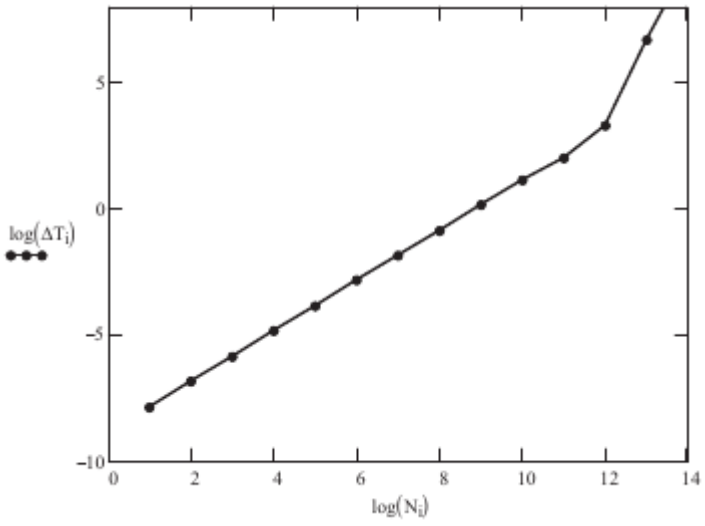


Рис.2.15. Залежність збільшення температури від числа зіткнення.

температури плавлення.

Якщо говорити конкретно про вибухове розпилення порошку бору, то температура частинок бору важлива ще й з точки зору хімічної взаємодії бору з продуктами детонації вибухової речовини. При температурі вище

1500 К бор вступає в хімічну реакцію з азотом з утворенням нітриду бору BN і вуглецем з утворенням карбіду B_4C. В більшості вибухових речовин ці елементи присутні і в результаті вибухових хімічних перетворень можуть міститися в продуктах детонації, взаємодіючих з частинками бору.

Таким чином, процес нанесення зносостійких і зміцнюючи покриття на метали і сплаві методом вибухового напилення дуже чутливий до динаміки і термодинаміки частинок порошку. Змінюючи характеристики вибухової речовини, конструктивні особливості вибухової камери і порошкової насадки можливо управляти процесом напилення і створювати покриття необхідної структури.

РОДІЛ 3. Рівняння Бюргерса.

3.1 Аналітичне розв'язання рівняння Бюргерса.

Особливістю рівняння Бюргерса являється стаціонарне рішення. Система рівнянь гідродинаміки для дисипативного середовища має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho U) = 0 \\ \rho\left(\dfrac{\partial U}{\partial t} + (U\nabla)\,\vec{U}\right) = \nabla P + \eta \Delta U + \left(\xi + \dfrac{\eta}{\xi}\right) graddiv\,\vec{U} \\ P = P(\rho, s) \end{cases}$$

Де η-коефіцієнт здвигової в'язкості, ξ- коефіцієнт об'ємної в'язкості, s-теплопровідність, (являється малою тому в системі рівнянь нею можна знехтувати).

a) В лінійному приближенні за методом повільно змінюючогося профілю $x, \tau = t - x/c_0$, Переставимо в 1D випадку: $\vec{U} = (u, 0,0)$ - Параболічне рівняння. $\frac{\partial U}{\partial x} = D\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$ де: $D = \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}$, $b = \xi + \frac{4}{3}\eta$ -дисипації.
b) В нелінійному випадку без дисипації при малих числах Маха для адіабатного рівняння стану $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{\varepsilon}{c_0^2}\frac{\partial U}{\partial \tau}$ де $\varepsilon = \frac{\varphi+1}{2}$ – число Маха, $\varphi = \frac{C_p}{C_v}$ - показник адіабати.
c) Враховуючи нелінійні складові для випадку M^2, $M(\text{число Маха}) \ll 1$ – адіабата рівняння стану мала. $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \frac{\varepsilon U}{c_0^2}\frac{\partial U}{\partial \tau}$ – рівняння Бюргерса.

Якщо складова $\frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$ менша за складову $\frac{\varepsilon U}{c_0^2}\frac{\partial U}{\partial \tau}$, тоді густина не працює і еволюція профілю виконується лиш за рахунок нелінійності. Принцип супер позиції не працює.

3.1.1 Рівняння Бюргерса у безрозмірних змінних.

Для простоти оперування закономірностями з точки зору чисельного рішення, наприклад (комп'ютерного моделювання) змінні обезрозмірюють. Рівняння Бюргерса в розмірних змінних: $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\varepsilon U}{c_0^2}\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$, $\frac{\varepsilon U}{c_0^2}\frac{\partial U}{\partial \tau}$ нелінійна частина для малих чисел Маха, $\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$ лінійна частина, $\frac{b}{2\rho_0 c_0^3}$ коефіцієнт зміщення об'ємної в'язкості в середовищі (дисипація).Для обезрозмірювання в ведемо позначення і перенормуємо безрозмірні змінні:

- амплітудне значення $V = \frac{U}{U_0}$.
- час $T = \omega_0 \tau$ або $\frac{\tau}{\tau_0}$, все залежить від профілю.

a) Якщо профіль періодичний, тоді краще обирати для вивчення частину ділянок що повторюються $T = \omega_0 \tau$.

b) Якщо ділянка вивчення одинична, тоді краще брати замість частоти ω_0 одиницю поділену на масштаб і характеристику профілю $T = \tau/\tau_0$.

- Відстань $z = x/x_{\text{нел}}$, деяка масштабна величина.

З рівнянь, зазначених вище, отримуємо $U = U_0 V$, $\tau = T/\omega_0$,$x = z x_{\text{нел}}$. Звідки величини $U_0, \omega_0, x_{\text{нел}}$=const не залежать від часу і простору. Величини U_0, ω_0 обираються з виду профілю і коректуються граничними умовами. Тоді підставимо отримані значення в рівняння Бюргерса.

$$\frac{U_0}{x_{\text{нел}}}\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\varepsilon U_0^2 \omega_0}{c_0^2} V \frac{\partial V}{\partial T} + \frac{b U_0 \omega_0^2}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}, |* x_{\text{нел}}$$

Після множення отримаємо.

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{x_{\text{нел}}}{c_0^2/\varepsilon U_0 \omega_0} V \frac{\partial V}{\partial T} + \frac{x_{\text{нел}}}{2\rho c_0^3/b\omega_0^2}\frac{\partial^2 V}{\partial T^2},$$

$\frac{x_{\text{нел}}}{c_0^2/\varepsilon U_0 \omega_0}$ - являється масштабом, $\frac{1}{2\rho c_0^3/b\omega_0^2}$ місце, де проявляється ефект поглинання. Так як $x_{\text{нел}}$ являється довільним параметром, його можна вибрати любим. Отже, безрозмірне рівняння Бюргерса:

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = V\frac{\partial V}{\partial T} + G\frac{\partial^2 V}{\partial T^2},$$

де $G = \frac{x_{\text{нел}}}{x_{\text{погл}}}$ показує вплив нелінійності і поглинання. $G \longrightarrow 0, x_{\text{нел}} \ll x_{\text{погл}}$: характерний масштаб при якому поглинання впливає на профіль. $G \gg 0, x_{\text{нел}} \gg x_{\text{погл}}$: відбувається тільки поглинення.

Зберігання кількості руху (імпульсу).

$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\varepsilon U}{c_0^2}\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$

Позначим імпульс як P і поглянемо як він буде вести себе в середовищі (при зміні відстані).

$$\frac{\partial P}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{+\infty} U d\tau = \int \frac{\partial U}{\partial x} d\tau$$

Підставимо праву частину рівняння Бюргерса в $\int \frac{\partial U}{\partial x} d\tau$ і про інтегруємо.

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} d\tau = \frac{\varepsilon}{2c_0^2}\int \frac{\partial U}{\partial \tau} d\tau + \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\int \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} d\tau = \frac{\varepsilon}{2c_0^2}U^2 + \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}$$

Так як на $\pm\infty$ значення $\frac{\varepsilon}{2c_0^2}U^2, \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}$ будуть =0, ми можемо сказати що на безкінечності не має збурення, що означає що кількість руху (імпульс) P=0 і зберігається в середовищі з урахуванням густини.

Зменшення енергії нелінійної хвилі описаної рівнянням Бюргерса.

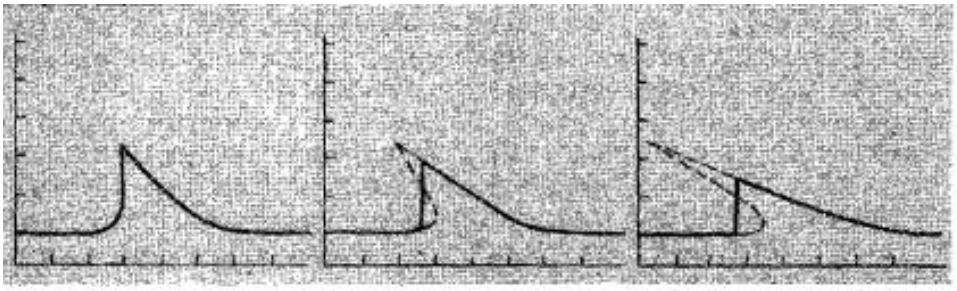
$\frac{\partial W}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{+\infty} U^2 d\tau = 2\int U\frac{\partial U}{\partial x} d\tau$ замість $\frac{\partial U}{\partial x}$ підставимо Рівняння Бюргерса.

$$\int \frac{2\varepsilon U^2}{c_0^2}\frac{\partial U}{\partial \tau} d\tau + \frac{2b}{2\rho_0 c_0^3}\int U\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} d\tau = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{c_0^2}U^3 + \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial U^2}{\partial \tau} - \frac{b}{\rho_0 c_0^2}\int \left(\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)^2 d\tau$$

$\frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{c_0^2}U^3, \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}$,будуть =0. $\frac{b}{\rho_0 c_0^2}$=const

$\int \left(\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)^2 d\tau$ площа під квадратом похідної профілю хвилі яка буде =0 тільки тоді коли весь профіль буде рівний 0 або const (тривіальне рішення),тоді енергія хвилі не зменшується. Якщо профіль не являється тривіальним а являється функцією тоді величина буде більшим за 0, і

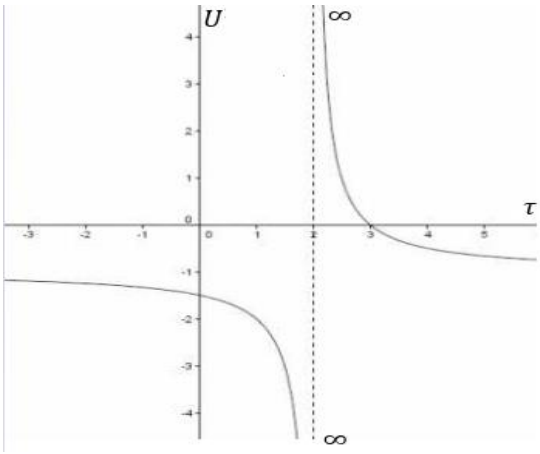
виникає зменшення енергії хвилі з відстанню. Слід зауважити: якщо густину наближувати до 0 тоді рішення не буде виконуватись і рівняння перейде в рівняння простих хвиль де виникає завалювання профілю, на деяких ділянках $\frac{\partial U}{\partial \tau} \to \infty$ і вертикальна дотична буде відповідати точці розриву. Енергія буде зменшуватись.



3.1.2 Стаціонарне рішення рівняння Бюргерса.

$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\varepsilon U}{c_0^2}\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$ про інтегруємо $| \int d\tau$

Для стаціонарного рішення $:\frac{\partial U_{(x,\tau)}}{\partial x} = 0$, профіль залишається не змінним з відстанню в координатах (x, τ) і це означає що в змінних (x, t) профіль біжить в право з швидкістю c_0.



$\frac{1}{2}\frac{\varepsilon U^2}{c_0^2} + \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial U}{\partial \tau} = const$ помножим на $\frac{2c_0^2}{\varepsilon}$ => $U^2 + \frac{b}{\rho_0 c_0 \varepsilon} = const$

На ∞ профіль відсутній, тому граничні умови на ∞ , $U^2 = 0$ тоді $const = 0$

$U = 0 => const = 0,$ після чого отримаємо $U \sim \frac{1}{\tau - \tau_0}$. Так як наявність ∞ являється не Фізичним, дане рішення не підходить.

Нехай збурення на $U_{+\infty} = U_0 = const = c_0^2$. Тоді $U^2 - U_0^2 = -\frac{b}{\rho_0 c_0 \varepsilon}\frac{\partial U}{\partial \tau}$.

В ведемо змінні $F = \frac{U}{U_0}$, $\xi = \frac{\varepsilon \rho_0 c_0 U_0}{b}\tau$,

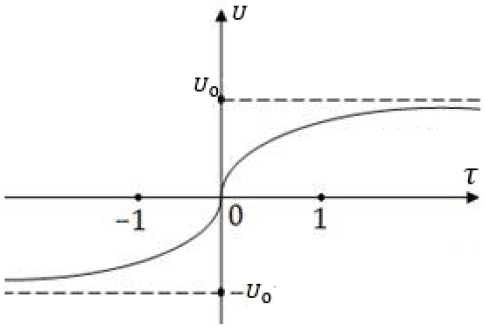
$$\frac{dF}{d\xi} = 1 - F^2 => d\xi = \frac{dF}{1 - F^2} => F = th(\xi - \xi_0)$$

Перейдемо до старих змінних

$U_{(x,\tau)} = U_0 th(\frac{\tau - \tau_0}{\tau_*})$ стаціонарне рішення де $\tau_* = \frac{b}{\varepsilon \rho_0 c_0 U_0}$,

В координатах (U, τ) нерухомий

В координатах (x, t) розповсюдження відбувається в право з швидкістю c_0, τ_*- показує характерну ширину стрибок профілю. Наприклад якщо обрати середовище з більшою густиною, τ_* буде більша. Чим більша амплітуда хвилі тим вужче буде стрибок переходу. Стаціонарне рішення обумовлено урівноваженими діями ефектів нелінійності і густини.



3.2 Чисельне рішення рівняння Бюргерса Чисельний метод вирішення рівняння Бюргерса у вигляді сходинки що біжить.

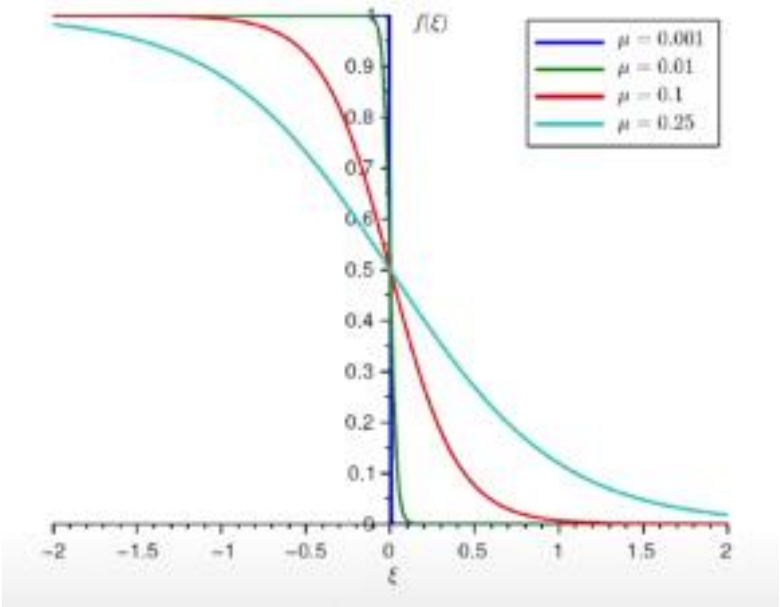
Знайти рішення рівняння Бюргерса $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, у вигляді сходинки що біжить, сходинка задається параметрами $f(\xi) = f(x + Vt)$, де V – швидкість хвилі, при тому що $\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0$. Перейшовши до нової змінної $\xi = x - Vt$, тоді $-V\frac{d}{d\xi}f(\xi) + f(\xi)\frac{d}{d\xi}f(\xi) - \mu\frac{d^2}{d\xi^2}f(\xi) = 0$.

Отримаємо звичайне диференційне рівняння:

$$-Vf(\xi) + \frac{1}{2}\left(f(\xi)\right)^2 - \mu\frac{d}{d\xi}f(\xi) = C_1$$

Постійна інтегрування $C_1 = 0$, що можна побачити із умови $\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0$, а саме якщо $\xi \to \infty$, то $f, f', f'' \to 0$. Отримане рівняння можна вирішити за допомогою інтегрування, після чого отримаємо: $f(\xi) = 2V(1 + 2e^{\frac{V\xi}{\mu}}C_1 V)^{-1}$.

Постійну швидкість V знаходимо з того що $\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = 1$, якщо $\xi \to -\infty$ тоді $f(\xi) = 1$, з чого отримаємо $V = 1/2$, якщо $f(0) = 1/2$, то $C_1 = 1$.



$f(\xi) = (1 + e^{\xi/2\mu})^{-1}$ графічне рішення рівняння показано на (Рис 3.1).

Рис 3.1. Фронт ударної хвиля при різних значеннях μ

За допомогою системи комп'ютерного моделювання отримано чисельне рішення одновимірного нестаціонарного рівняння Бюргерса з періодичними початковими умовами [4]. Чисельне рішення виконано за безсітковою

схемою з використанням методу частинних рішень і радіальних базисних функцій. Дискретизація за часом одновимірного диференціального рівняння Бюргерса здійснена з використанням θ-схеми. У якості радіальних функцій використана зворотна мультіквадратічна функція. Рішення одновимірного нестаціонарного рівняння Бюргерса візуалізовано у вигляді тривимірної поверхні (рис. 3.2). Якісний аналіз отриманого рішення для окремих проміжків часу у вигляді тривимірних графіків вказує на те, що з часом відбувається збільшення нахилу профілю хвилі, що описує безрозмірну густину збурення. Щодо нормалізованого профілю поверхні для 1D- моделі це означає перерозподіл концентрації досліджуваної величини з формуванням згустків.

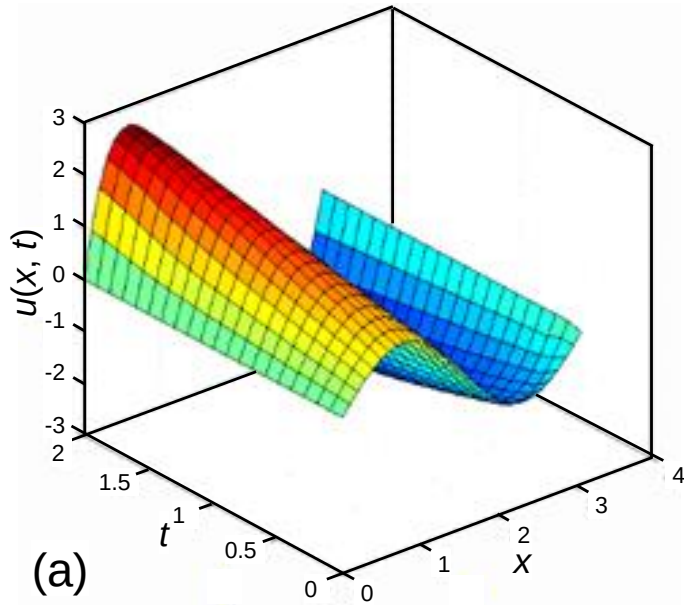


Рис. 3.2. Чисельне рішення рівняння Бюргерса з періодичними початковими умовами, яке демонструє поширення збурення зі збільшенням нахилу профілю хвилі. Тут u (x, t) - швидкість профілю хвилі, x і t - координата і час відповідно.

Разом з тим цей розв’язок, хоча якісно і відображає процес еволюції періодичного збурення, що супроводжується збільшенням нахилу профілю

хвилі, але не відповідає умовам виникнення саме ударних хвиль. Як відомо, процес формування нестаціонарних ударних хвиль супроводжується різким зростанням амплітуди хвилі і розривом значення досліджуваної функції на межі фронту хвилі. Для того, щоб розібратися в особливостях поведінки досліджуваної функції, необхідно дослідити алгоритм розв'язання РБ з нульовими початковими умовами. Такий аналіз був виконаний для одновимірного нестаціонарного РБ з періодичними граничними умовами, де було отримано аналітичний розв'язок у вигляді:

$$u(t,x) = 2\mu\lambda_n \frac{\sin(\lambda_n x) C_R e^{\mu\lambda_n^2 t}}{\left(\cos(\lambda_n x) + C_R e^{\mu\lambda_n^2 t}\right)^2 + \left(\sin(\lambda_n x)\right)^2} \qquad (1)$$

де $\lambda_n = 2\pi n, n = 1,2,3....$

Рішення (1) для першої моди візуалізовано у вигляді тривимірної поверхні (рис. 3.3).

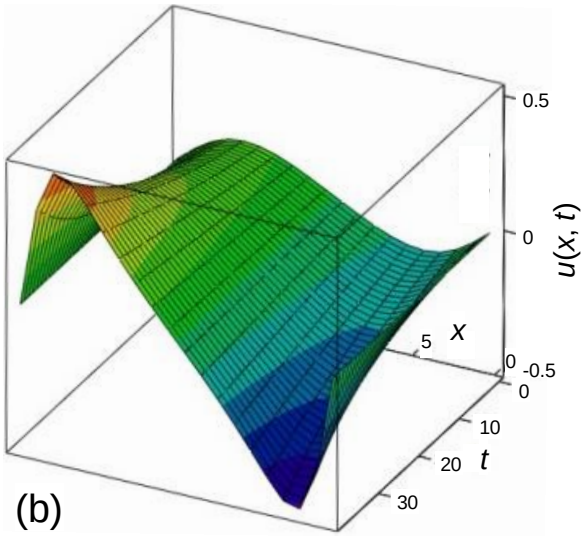


Рис. 3.3. Аналітичне рішення рівняння Бюргерса з періодичними початковими умовами, яке демонструє прагнення профілю хвилі до пилкоподібної формі.

Особливістю отриманого рішення є можливість прогнозування розриву концентрації сходинок, який відповідає процесу формування ударної кінематичної хвилі на віцинальній атомно гладкій в початковому стані поверхні кристалу.

3.3 Приклади опису на основі розв'язку РБ кінематичних хвиль при рості-випаровуванні кристалів.

Дослідження ударних хвиль елементарних сходинок на поверхнях кристалів є актуальними сьогодні у зв'язку з отриманням низькорозмірних структур – квантових ям, дротів, точок. Один із перспективних способів базується на явищі самоупорядкованого росту нанокристалів на макросходинках, що утворюються внаслідок групування елементарних сходинок на віцинальних кристалічних поверхнях у нерівноважних умовах. Необхідною умовою дальнього порядку створюваних наноструктур є періодичність макросходинок.

Еталонним рівнянням, що описує нелінійні хвилі в дисипативному недиспергируючому середовищі, є рівняння Бюргерса. Відомо, що РБ можна звести до рівняння теплопровідності, використовуючи перетворення Хопфа - Коула. У розділі 3.2 в аналітичному вигляді наведено приватне рішення рівняння Бюргерса з періодичними граничними умовами. При малих значеннях параметра форми рішення описує формування ударних хвиль з початкових періодичних збурень. Показано, що з плином часу просторова похідна профілю хвилі зростає і прямує до нескінченності. Отримане рішення використано для контролю комп'ютерних розрахунків, пов'язаних з описом на основі УБ ударної хвилі, що формується на віцінальній поверхні NaCl поблизу {100} для ешелонів елементарних ступенів з орієнтацією <10> в процесі росту (випаровування) з парової фази.

Описана топографія поверхні виявлена на віцінальній поверхні NaCl поблизу (100) для ешелонів ступенів з орієнтацією [10] і [01] в процесі росту з парової фази (рис. 3.4).

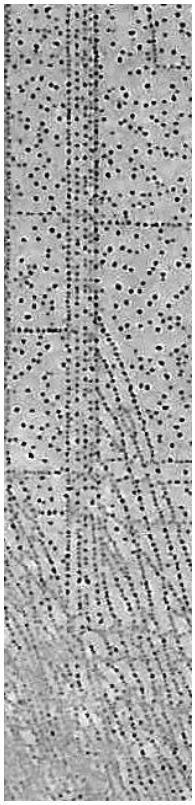


Рис 3.4. ПЕМ-зображення макросходинки, сформованої на поверхні росту пори поблизу (100) NaCl (макросходинка представлена згустками елементарних сходинок; прямолінійні сходинки, що перетинають згустки сходинок, - це смуги ковзання, що виникли при розколюванні кристала і розтині пор в вакуумі перед процедурою декорування частинками золота).

Ділянка, представлена на рис. 3.4, є частиною поверхні росту пори при її русі в поле температурного градієнта [5]. Пересичення, що реалізуються всередині пори поблизу поверхні зростання, а також, характерні параметри морфології поверхні вказують на те, що спостережувана кінематична хвиля повинна описуватися саме рівнянням Бюргерса (а не загальним рівнянням Кортевега де Фріза-Бюргерса, що описує вклад не лише дисипативних, а ще й дисперсійних ефектів, у конкуренцію з нелінійними ефектами). Нажаль, використовувана техніка електронно-мікроскопічного вакуумного декорування сходинок не дозволяє конкретизувати характер розподілу

елементарних сходинок в межах досліджуваної макросходинки. Однак вона дає можливість визначити кількість елементарних сходинок, що беруть участь у формуванні згустків сходинок, які ми називаємо макросходинками. Таке визначення кількості елементарних сходинок можливо через те, що елементарні сходинки з напрямком типу <11> практично не формують згустки сходинок. Мабуть, така відмінність морфології пов'язано з тим, що кінетичні коефіцієнти елементарних сходинок у напрямку <11> набагато більше, ніж сходинок <10>.

Для опису експериментальних результатів за допомогою отриманого аналітичного рішення одновимірного нестаціонарного рівняння Бюргерса з періодичними початковими умовами були проведені наступні дії: оцифровано обрану ділянку поверхні одночасно в напрямку [10] і [11] для 24 елементарних сходинок; відтворено топографію поверхні; за отриманими даними і відомим значенням довжини дифузійного шляху адатомів [5] побудовані залежності концентрації сходинок від поздовжньої координати в напрямку [10] (маркери на рис. 3.5).

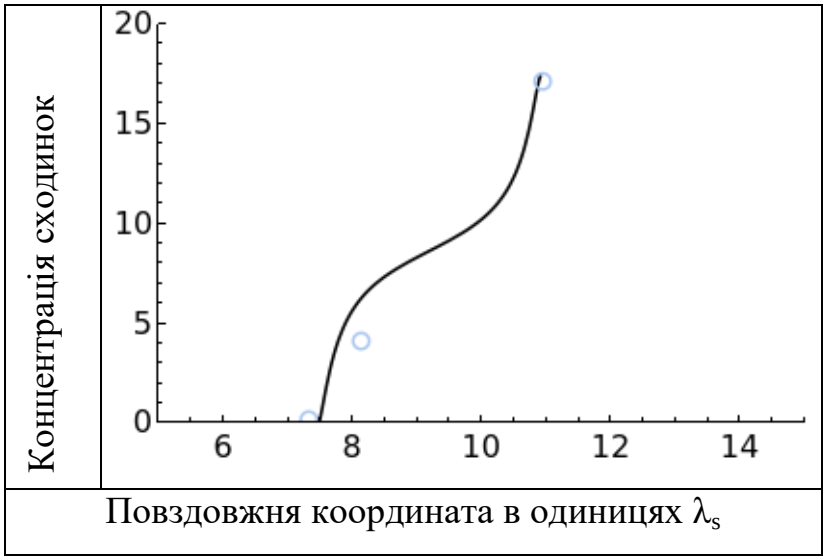


Рис. 3.5. Структура ударної хвилі, представленої на рис. 3.4: маркери - значення концентрації одноатомних сходинок; лінії - результати розрахунку за формулою (1).

З використанням програмного продукту Вольфрам Математика отримані експериментальні залежності концентрації сходинок від їх координати були апроксимовані теоретичною кривою на підставі рішення (1) (суцільна лінія на рис. 3.5). Адекватне узгодження теоретичних розрахунків з експериментом дозволило визначити значення характерних параметрів спостережуваної ударної хвилі (табл.. 1).

Таблиця 1. Параметри ударної хвилі на (рис. 3.5)

$\rho_0\lambda_s$	*ширина фронту*	C_R	x_0	*амплітуда*	*пьєдестал*	t
2,608	1,87	0,049	- 1,7	16,95	8,635	0,825

Отримані результати, і дані про характерні параметри розглянутої ударної хвилі відкривають можливість аналітичного рішення задачі про формування квазіперіодичного рельєфу на термодинамічно стійких віцинальних поверхнях в нерівноважних умовах. Зокрема, стає можливим опис кінетичних закономірностей формування квазіперіодичного профілю поверхні, частиною якої є представлена на рис. 3 ділянка. Як відомо, періодичність є основною вимогою для отримання низькорозмірних структур.

Для параметра форми більше одиниці амплітуда початкового періодичного збурення немонотонно залежить від просторової координати. З плином часу ударна хвиля не утворюється, а амплітуда збурення зменшується експоненціально згодом і прагне до нуля. Цей процес описує розпад ударної хвилі. Нажаль дослідити його не виявилося можливим, але в літературі було знайдено електронно-мікроскопічне зображення поверхні NaCl поблизу (100), що сформувалася за умов Ленгмюрівського випаровування у вакуумі (рис. 3.6). Макроскопічна сходинка, що утворилася при розколі кристалу у вакуумі, з часом «розпадається», тобто еволюціонує

до форми ешелону елементарних сходинок змінної густини. Така топографія поверхні якісно відповідає процесу розпаду ударної хвилі.

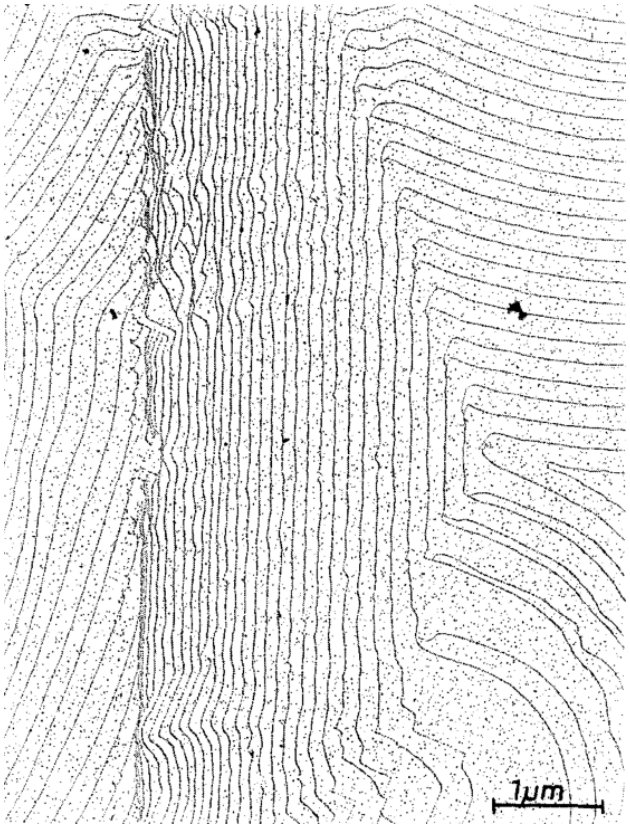


Рис. 3.6. ПЕМ зображення морфології поверхні NaCl(100) на стаціонарній стадії випаровування у вакуумі

Підводячи підсумок, можна зазначити, що наведений частинний розвязок рівняння Бюргерса, дозволяє адекватно описати процес формування ударної хвилі густини елементарних сходинок на віцинальній поверхні кристалу в умовах росту із парової фази, чи випаровування. А також, дозволяє проводити аналіз процесу розпаду подібних ударних хвиль.

Висновки

У даній роботі роглянуто модель формування ударних хвиль в суцільному середовищі за різних початкових умов, визначені фізичні причини їх виникнення і наведені математичні моделі опису на підставі еталонного рівняння, що описує нелінійні хвилі в дисипативному недиспергируючому середовищі, - рівняння Бюргерса. Продемонстровано можливості застосування ударних хвиль, зокрема, у повітряному середовищі для руйнування споруд, а також для нанесення зносостійких і зміцнюючих покриттів на метали і сплави методом вибухового напилення.

Наведено приклади, як аналітичних так і чисельних методів розв’язання рівняння Бюргерса для різних початкових і граничних умов. Відзначено, що при малих значеннях параметра форми досліджуване частинне рішення РБ описує формування ударних хвиль з початкових періодичних збурень. Досліджуване рішення використано для контролю комп'ютерних розрахунків, пов'язаних з описом на основі УБ ударної хвилі, що формується на віцінальній поверхні NaCl поблизу {100} для ешелонів елементарних сходинок з орієнтацією <10> в процесі росту (випаровування) з парової фази.

Аналіз досліджуваного аналітичного розв’язку рівняння Бюргерса з періодичними початковими умовами виконано при значенні параметру μ, який характеризує ефективну в’язкість середовища, близько одиниці. Варіюванням хвильового числа, амплітуди, а також, параметру, що визначає відхилення початкового профілю збурення від синусоїдального, отримані характерні значення змінних, за яких відбувається формування ударної хвилі. Аналіз виконано для відокремленого збурення, але зроблено висновок про те, що за умови існування кількох ідентичних у початковому стані збурень, на деякому етапі процесу можна очікувати сукупність переміжних ударних хвиль, аналогічних тим, що утворюються для відокремленого збурення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ю.О.Гусельщикова , А.С.Вилохин,С.И.Поникаров « Исследование воздушной ударной волны» .
2. Белкин Д.И. ,Нижегородцев Н.В.,Трепалов Н.А. «Регистрация ударной волны Bos методом».
3. Крестелев Анатолий Иванович «Энергетические аспекты технологии взрывного напыления износостойких покрытий».
4. І.В. Гарячевська, Д.О. Протектор. Система комп’ютерного моделювання для числового вирішення одновимірного нестаціонарного рівняння Бюргерса. Вісник Харківського національного університету імен В. Н. Каразіна, Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», випуск 43, 2019, 11-19.
5. O.P. Kulyk, V.I. Tkachenko, O.V. Podshyvalova, V.A. Gnatyuk, T. Aoki, Nonlinear interaction of macrosteps on vicinal surfaces at crystal growth from vapour, Journal of Crystal Growth, Vol. 530 (Jan. 2020) 125296-1-7. DOI: 10.1016/j.jcrysgro.2019.125296
6. W. Eiwwongcharoen, N. Nakareseisoon, S. Thainoi, S. Panyakeow, S. Kanjanachuchai, Ultrathin epitaxial InAs layer relaxation on cross-hatch stress fields, Cryst. Eng. Comm. **18** (2016) 5852-5859, https://doi.org/10.1039/C6CE01127F.
7. Інтернет ресурс : https://www.youtube.com/watch?v=B4GLjfFa1A8.
8. Інтернет ресурс : https://www.youtube.com/watch?v=3M1Ih_J9mWk&t=43s.
9. Інтернет ресурс: https://www.youtube.com/watch?v=qk65pJhJPUg&t=894s.
10. Физическая энциклопедия. – М.: Сов. энциклопедия. Т. I. 1988.
11. А.И. Крестельов «Энергетические аспекты технологии взрывного напыления износостойких покрытий».
12. Зельдович Я.Б. «Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений».
13. Курант Р. Фридрихс К. «сверхзвуковые течение и ударные волны».