

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Проректор з науково-педагогічної роботи

Дітон ЦАНТЕЛЕЙМОНОВ

“ 30 ” червня 2020 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

### ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

рівень вищої освіти	перший( бакалаврський )
галузь знань	10 Природничі науки
спеціальність	105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітні програми	«Комп’ютерна фізика» «Прикладна фізика енергетичних систем» «Прикладна фізика нетрадиційної енергетики»
вид дисципліни	обов’язкова
навчально – науковий інститут	комп’ютерної фізики та енергетики

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики 30 червня 2020 року, протокол № 6-2/20

**РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ:**

Немченко Костянтин Едуардович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор  
Віхтинська Тетяна Геннадіївна, старший викладач

Програму схвалено на засіданні кафедри інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

Протокол від 25 червня 2020 року № 6-3/20

Завідувач кафедри інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

  
\_\_\_\_\_ Руслан СУХОВ

Програму погоджено з гарантом освітньо – професійної програми «Комп'ютерна фізика»

Гарант освітньо – професійної програми «Комп'ютерна фізика»

  
\_\_\_\_\_ Світлана РОГОВА

Програму погоджено з гарантом освітньо – професійної програми  
«Прикладна фізика енергетичних систем»

Гарант освітньо – професійної програми «Прикладна фізика енергетичних систем»

  
\_\_\_\_\_ Руслан СУХОВ

Програму погоджено з гарантом освітньо – професійної програми  
«Прикладна фізика нетрадиційної енергетики»

Гарант освітньо – професійної програми «Прикладна фізика нетрадиційної енергетики»

  
\_\_\_\_\_ Ілля МАРУЩЕНКО

Програму погоджено методичною комісією навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики

Протокол від 30 червня 2020 року № 6/20

Голова методичної комісії ННІ КФЕ

  
\_\_\_\_\_ Ольга ЛІСІНА

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “Лінійна алгебра ” складена відповідно до освітньо-професійної (освітньо-наукової) програми підготовки бакалаврів спеціальність: 105 Прикладна фізика та наноматеріали освітні програми: “Прикладна фізика енергетичних систем”, “Комп’ютерна фізика”, «Прикладна фізика нетрадиційної енергетики»

### 1. Опис навчальної дисципліни

#### 1.1. Мета викладання навчальної дисципліни

Навчальна дисципліна “Лінійна алгебра” є невід’ємною частиною базової математичної підготовки студентів і відноситься до фундаментальних дисциплін, на яких ґрунтуються методи побудови різноманітних математичних моделей процесів, пов’язаних з професійною діяльністю.

*Лінійна алгебра* – розділ математики, *об’єктом* вивчення якого є лінійні (векторні) простори, а *предметом* – розробка відповідних алгебраїчних методів і застосування їх до побудови лінійних математичних моделей реальних явищ та процесів у різноманітних галузях.

**Метою** викладання навчальної дисципліни є ознайомлення та оволодіння сучасними теоретичними положеннями і математичними методами аналітичної геометрії та лінійної алгебри, а саме методами векторної та матричної алгебр, дослідження геометричних об’єктів та їх властивостей шляхом вивчення властивостей рівнянь, геометричними образами яких є ці об’єкти.

#### 1.2. Основні завдання вивчення дисципліни

Основними **завданнями** вивчення дисципліни є практичне застосування теоретичних положень і математичних методів аналітичної геометрії та лінійної алгебри для розв’язування задач; створення математичної бази для подальшого вивчення нормативних та спеціалізованих дисциплін, а саме

- засвоєння основних принципів побудови математичних моделей із використанням методів матричного і векторного аналізу, координатного методу;
- оволодіння навичками здійснення аналізу побудованої моделі;
- набуття досвіду вільного оперування абстрактними математичними об’єктами та наочного подання результатів спостережень у різних областях знань за допомогою геометричних образів;
- формування систем знань для самостійного проведення необхідних розрахунків у рамках побудованих моделей з метою відновлення кількісних і якісних характеристик об’єктів для прогнозування та прийняття оптимальних рішень.

#### 1.3. Кількість кредитів 6

#### 1.4. Загальна кількість годин 180

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Нормативна	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
1-й	-й
Семестр	
1-й	-й
Лекції	
30 год.	год.
Практичні, семінарські заняття	
60 год.	год.
Лабораторні заняття	
год.	год.
Самостійна робота	
90 год.	год.
У тому числі індивідуальне завдання	
5 год.	

#### 1.6. Заплановані результати навчання

Згідно з вимогами освітньо-професійної (освітньо-наукової) програми студенти повинні досягти таких результатів навчання: В результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

**знати:** основні поняття, теоретичні положення і методи лінійної алгебри, а саме

- основні різновиди матриць, можливості її використання при складанні математичної моделі фізичних задач,
- визначники, їх основні властивості та способи обчислення;
- дії над матрицями та їх властивості;
- засоби розв'язання квадратних систем лінійних алгебраїчних рівнянь ;
- основні поняття векторної алгебри;
- форми подання вектора;
- лінійні та нелінійні операції над векторами та їх властивості;
- застосування векторів в задачах геометрії;
- лінійну залежність та незалежність систем векторів;
- базис простору, розклад вектора за базисом;
- формули переходу від однієї системи координат на площині до іншої;

**вміти:** вибирати математичні методи лінійної алгебри для розв'язання математичних і фізичних задач, дослідження фізичних систем та набути навичок самостійного використання і вивчення літератури з математичних дисциплін, а саме

- будувати матриці як складові математичних моделей фізичних задач, виконувати дії над матрицями;
- розв'язувати квадратні системи лінійних алгебраїчних рівнянь;

- досліджувати квадратні системи лінійних неоднорідних рівнянь;
- визначати базис векторного лінійного простору та розкласти вектори за базисом;
- виконувати лінійні та нелінійні операції над векторами.

## **2. Тематичний план навчальної дисципліни**

### **Розділ 1. Теорія визначників. Теорія матриць. Загальна теорія систем лінійних рівнянь.**

#### *Тема 1. Теорія визначників довільного порядку.*

Вступ. Означення визначника другого, третього порядків. Означення перестановки. Парні, непарні перестановки. Знак перестановки. Означення визначника довільного порядку. Властивості визначників. Методи обчислення визначника третього порядків. Означення мінору, алгебраїчного доповнення Методи обчислення визначника довільного порядку.

#### *Тема 2. Теорія матриць*

Лінійні операції над матрицями. Ранг матриці по рядках, ранг матриці по стовпчиках. Теорема про рівність рангу по рядках і рангу по стовпчиках для довільної матриці. Ранг матриці. Добуток матриць. Властивості добутку матриць. Приклади. Транспонування матриць, властивості. Деякі класи матриць (симетричні, кососиметричні матриці), їх властивості. Матричні рівняння. Невироджені матриці, їх властивості. Матриця оберненого лінійного відображення. Обернена матриця, її властивості. Метод Гаусса знаходження оберненої матриці.

#### *Тема 3. Загальна теорія систем лінійних рівнянь.*

Системи лінійних рівнянь. Основна термінологія. Еквівалентність систем лінійних рівнянь. Елементарні перетворення. Приклади. Лінійно залежні, незалежні системи, їх властивості Критерій сумісності системи лінійних рівнянь (теорема Кронекера-Капеллі). Структура множини розв'язків загальної системи лінійних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь Приклади.

Системи лінійних рівнянь другого, третього порядків. Метод Крамера розв'язання систем лінійних рівнянь другого, третього порядків. Метод Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь. Дослідження системи лінійних рівнянь. Метод Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь. Зведення системи лінійних рівнянь до східчастої форми за допомогою елементарних перетворень. Дослідження системи лінійних рівнянь за виглядом її східчастої форми. Матричний метод рішення систем рівнянь..

### **Розділ 2. Векторна алгебра**

#### *Тема 4. Системи координат. Найпростіші задачі аналітичної геометрії.*

Направлені відрізки. Лінійні операції над направленими відрізками. Основні тотожності. Декартові координати на прямій. Декартові координати на площині та в просторі. Відстань між двома точками. Ділення відрізка в заданому відношенні.

#### *Тема 5. Векторна алгебра в просторі*

Поняття вектора. Операції над векторами. Лінійна залежність векторів. Розмірність простору. Поняття базису. Поняття орієнтації. Скалярний добуток векторів. Векторний добуток векторів. Змішаний і подвійний добуток векторів.

#### *Тема 6. Перетворення систем координат*

Перетворення координат на площині. Перетворення декартових прямокутних координат у просторі. Полярні, циліндричні та сферичні системи координат. Заміна базису і системи координат в просторі, на площині

### 3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
го		л	п	лаб.	інд.	с. р.		о	л	п	лаб.	інд.
<b>Розділ 1. Теорія визначників Загальна теорія систем лінійних рівнянь. Теорія матриць</b>												
Тема 1. Теорія визначників довільного порядку	22	4	8			10						
Тема 2. Теорія матриць	32	6	12			14						
Тема 3. Загальна теорія систем лінійних рівнянь	22	4	8			10						
Разом за розділом 1	76	14	28			34						
<b>Розділ 2. Векторна алгебра</b>												
Тема 4. Системи координат. Найпростіші задачі аналітичної геометрії	12	2	4			6						
Тема 5. Векторна алгебра в просторі	70	10	20			40						
Тема 6. Перетворення систем координат	22	4	8			10						
Разом за розділом 2	104	16	32			56						
.												
Усього годин	180	30	60			90						

### 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Теорія визначників довільного порядку	8
2	Теорія матриць	12
3	Загальна теорія систем лінійних рівнянь	8
4	Системи координат. Найпростіші задачі аналітичної геометрії.	4
5	Векторна алгебра в просторі	20
6	Перетворення систем координат	8
	Разом	60

## 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Навчитися методам обчислення визначників довільного порядку	10
2	Навчитися діям над матрицями, вміти застосовувати теорію матриць	14
3	Навчитися засобам розв'язування систем неоднорідних лінійних рівнянь	4
4	Вивчити критерії сумісності прямокутних систем лінійних рівнянь. Вміти застосовувати ранг матриці для аналізу сумісності.	2
5	Знати та вміти застосовувати критерії сумісності довільних систем лінійних рівнянь	2
6	Вміти вирішувати найпростіші задачі аналітичної геометрії за допомогою векторної алгебри.	6
7	Вивчити методи та засоби векторної алгебра в просторі для вирішення прикладних задач	40
8	Вміти застосовувати метод координат для вирішення фізичних задач.	8
	Разом	90

## 6. Індивідуальні завдання

Індивідуальні завдання видаються один раз в семестр . Текст індивідуального завдання додається.

## 7. Методи навчання

У процесі викладання дисципліни «Лінійна алгебра» використовуються всі основні методи навчання:

1. пояснювально – ілюстративний метод
2. проблемні методи навчання з застосуванням
  - розв'язання проблемних задач
  - тестових завдань
  - навчальних дискусій
  - активізації самостійного вивчення студентами літератури
3. метод проблемного викладання з постановкою проблеми на початку нової теми
4. частково-пошуковий (евристичний) метод з самостійною або керованою викладачем роботою студентів над комп'ютерними програмами при виконанні поточних завдань
5. дослідницький метод при самостійному вирішенні студентами завдань контрольних робіт

## 8. Методи контролю

**Поточний контроль**, що здійснюється протягом семестру під час проведення лекційних та практичних занять і оцінюється сумою набраних балів (максимальна сума – 60 балів; мінімальна сума, що дозволяє студенту скласти екзамен – 30 балів).

**Обов'язковим для допуску к екзамену є виконання контрольної роботи, індивідуального завдання та виконання домашнього завдання (сума балів не менш, ніж 30).**

**Поточний контроль** із даної навчальної дисципліни проводиться в таких формах:

- активна робота на лекційних заняттях;
- активна участь у виконанні практичних завдань;
- проведення письмових контрольних робіт;
- проведення самостійних контрольних робіт (індивідуальне завдання);
- експрес-опитування (завдання для експрес-контролю).

### Контрольна робота

Метою контрольної роботи є перевірка результатів навчання щодо рівня засвоєння матеріалу з логічно завершеної частини дисципліни - розділу .

### **Структура контрольної роботи**

Кожний варіант містить п'ять практичних завдань: два завдання першого рівня – стереотипні – визначають ступінь засвоєння студентом початкових теоретичних основ дисципліни; два завдання другого рівня – діагностичні – виявляють здатність студента до вирішення типових завдань і одне завдання третього рівня – евристичне – ставить за мету оцінити глибину знань і творчі можливості студента

### **Індивідуальне завдання**

Метою індивідуального завдання є перевірка результатів навчання щодо рівня засвоєння матеріалу з логічно завершеної частини дисципліни - розділу “ Векторний аналіз”.

### **Структура індивідуального завдання**

Кожний варіант містить чотири практичних завдань: два завдання першого рівня – стереотипні – визначають ступінь засвоєння студентом початкових теоретичних основ дисципліни; одне завдання другого рівня – діагностичні – виявляють здатність студента до вирішення типових завдань і одне завдання третього рівня – евристичне – ставить за мету оцінити глибину знань і творчі можливості студента

### **Експрес-опитування (завдання для експрес-контролю)**

Підготовка до занять перевіряється за допомогою експрес-контролю. Бал, який було отримано за експрес-контроль є коефіцієнтом для отримання балів за виконання домашнього завдання

**Підсумковий контроль.** Підсумковий контроль знань та компетентностей студентів здійснюється на підставі проведення семестрового екзамену. Екзаменаційний білет охоплює програму дисципліни і передбачає визначення рівня знань та ступеня опанування компетентностей .Завданням екзамену є перевірка розуміння студентом програмного матеріалу в цілому, логіки та взаємозв'язків між окремими розділами, здатності творчо використовувати накопичені знання, вміння формулювати своє ставлення до певної проблеми навчальної дисципліни тощо. В умовах реалізації компетентнісного підходу екзамен оцінює рівень засвоєння студентом компетентностей, що передбачені кваліфікаційними вимогами.

### **Структура екзаменаційного білету**

Кожен екзаменаційний білет складається із 2 теоретичних питань (одне з першого розділу, друге – з другого розділу) та 3 практичних завдань, які передбачають розв'язання типових завдань та дозволяють діагностувати рівень його компетентності з навчальної дисципліни. Екзаменаційний білет включає одне стереотипне, одне діагностичне та одне евристичне завдання,

Семестровий контроль у формі *екзамену* проводиться письмово. На екзамен виносяться ключові питання, типові і комплексні завдання, а також завдання, що потребують творчої відповіді, вміння узагальнювати інформацію та синтезувати отримані знання для вирішення певних проблем фахової направленості. Результат екзамену оцінюється у балах (максимальна кількість – 40 балів). Підсумкова оцінка з навчальної дисципліни є сумою балів за екзамен, та балів, отриманих у результаті поточного контролю за накопичувальною системою Розподіл балів, які отримують студенти протягом семестру, наведено в наступному розділі.

### **Контрольні запитання до першого розділу**

1. Перестановка множини з  $n$  елементів. Знак перестановки. Довести, транспозиція змінює парність перестановки.
2. Означення визначника довільного порядку. Довести, що операція транспонування не змінює значення визначника.
3. Означення визначника довільного порядку. Довести, що якщо два рядки (стовпчика) поміняти місцями, тоді знак визначника зміниться на протилежний. Довести, що визначник є лінійною функцією елементів довільного його рядка (стовпчика).
4. Означення визначника довільного порядку. Достатні умови рівності визначника нулю.



5. Означення визначника довільного порядку. Довести, що визначник не зміниться, якщо до одного з рядків (стовпчиків) додати лінійну комбінацію інших рядків (стовпчиків).
6. Означення мінору, алгебраїчного доповнення до елемента матриці з номером  $i, j$ . Довести формулу розкладу визначника по елементах деякого рядка (стовпчика).
7. Означення визначника довільного порядку. Застосування теорії визначників до дослідження матриці на невірродженість.
8. Означення визначника довільного порядку. Застосування теорії визначників до знаходження оберненої матриці.
9. Означення визначника довільного порядку. Застосування теорії визначників до розв'язання визначених СЛР.
10. Елементарні перетворення як добуток матриць.
11. Як елементарні перетворення змінюють значення визначника?
12. Теорема про добуток матриць.
13. Добуток матриць. Довести, що для довільної матриці  $A \in M_{m \times n}$  виконується  $AE = EA = A$ ,  $AO = OA = O$ , де  $E$  – одинична матриця,  $O$  – нульова матриця. Довести, що для довільного числа  $\alpha \in \mathfrak{R}$ , для довільних матриць  $A \in M_{m \times r}$ ,  $B \in M_{r \times n}$  виконується  $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ .
14. Добуток матриць. Довести, що для довільних матриць  $A, B \in M_{m \times r}$ ,  $C \in M_{r \times n}$  виконується  $(A+B)C = AB+BC$ .
15. Добуток матриць. Довести, що для довільних матриць  $A \in M_{m \times r}$ ,  $B \in M_{r \times s}$ ,  $C \in M_{s \times n}$  виконується  $(AB)C = A(BC)$ .
16. Транспонування матриць. Довести, що для довільних матриць  $A, B \in M_{m \times n}$ , для довільного числа  $\alpha \in \mathfrak{R}$  виконується  $(A^T)^T = A$ ,  $(A+B)^T = A^T + B^T$ ,  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ .
17. Транспонування матриць. Довести, що для довільних матриць  $A \in M_{m \times r}$ ,  $B \in M_{r \times n}$  виконується  $(AB)^T = B^T A^T$ .
18. Означення рангу матриці. Теорема про ранг добутку матриць.
19. Системи лінійних рівнянь: основна термінологія
20. Метод Крамера розв'язання систем лінійних рівнянь.
21. Метод матричний розв'язання систем лінійних рівнянь.
22. Метод Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь
23. Теорема Кронекера-Капелі.

### *Типові завдання контрольної роботи № 1*

**1.** Означення визначника. Властивості визначника.

**2.** Обчислити  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

**3.** Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - 9x_3 - 4x_4 - 17x_5 = -9 \\ 12x_1 + 6x_2 + 33x_3 + 24x_4 + 68x_5 = 21 \\ 16x_1 + 8x_2 + 42x_3 + 24x_4 + 82x_5 = 34 \\ 4x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 20x_5 = 5 \end{cases}$$

**4.** Нехай  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ . Перевірити, чи існує  $A^{-1}$ . Якщо так, обчислити  $BA^{-1}$ , де

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -8 & 5 \\ 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

**5.** Обчислити  $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ .

### Контрольні запитання до другого розділу

- Сума векторів (означення). Довести, що операція додавання векторів асоціативна, тобто  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  для довільних векторів  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .
- Добуток вектора на число (означення). Довести, що для довільних дійсних чисел  $\alpha, \beta$  для довільного вектора  $\vec{a}$  виконується  $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ .
- Означення рівності двох векторів. Довести, що для довільного дійсного числа  $\alpha$ , для довільних векторів  $\vec{a}, \vec{b}$  виконується  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ .
- Добуток вектора на число (означення). Довести, що для довільних дійсних чисел  $\alpha, \beta$  для довільного вектора  $\vec{a}$  виконується  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ .
- Означення векторного простору. Навести приклад векторного простору.
- Означення лінійної незалежності системи векторів. Довести, що два неколінеарних вектори на площині є лінійно незалежними.
- Означення лінійної залежності системи векторів. Довести, що два вектори на прямій є лінійно залежними.
- Означення лінійної залежності системи векторів. Необхідна і достатня умова лінійної залежності системи векторів.
- Базис векторного простору (означення). Твердження про розклад довільного вектора за базисними векторами.
- Базис векторного простору (означення). Твердження про єдиність розкладу вектора за базисом.
- Базис векторного простору (означення). Твердження про координати вектора, який є лінійною комбінацією заданих векторів.
- Твердження про базис на прямій, на площині, в просторі.
- Загальна декартова система координат (означення). Задача про поділ відрізка у заданому відношенні.
- Ортонормований базис, прямокутна декартова система координат (означення). Задача про поділ відрізка у заданому відношенні.
- Проекція точки на площину, вектора на площину (означення). Довести, що для довільної площини  $\alpha$ , довільних векторів  $\vec{a}, \vec{b}$  виконується  $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \text{Пр}_\alpha \vec{a} = \text{Пр}_\alpha \vec{b}$ .
- Проекція точки на пряму, вектора на пряму на площині (означення). Довести, що для довільних вектора  $\vec{a}$ , числа  $\lambda$ , прямої  $\gamma$  виконується  $\text{Пр}_\gamma(\lambda\vec{a}) = \lambda \text{Пр}_\gamma \vec{a}$ .
- Проекція вектора на вектор (означення). Довести, що для довільних векторів  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ( $\vec{c} \neq \vec{0}$ ) виконується  $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \text{Пр}_{\vec{c}} \vec{a} = \text{Пр}_{\vec{c}} \vec{b}$ .
- Проекція вектора на вектор (означення). Довести, що для довільних векторів  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ( $\vec{c} \neq \vec{0}$ ) виконується  $\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{Пр}_{\vec{c}} \vec{a} + \text{Пр}_{\vec{c}} \vec{b}$ .

19. Скалярний добуток векторів (означення). Твердження про властивості скалярного добутку.
20. Вираз скалярного добутку через координати векторів в довільному і ортонормованому базисі.
21. Геометричні властивості скалярного добутку.
22. Векторний добуток векторів (означення). Довести, що  $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ .
23. Векторний добуток векторів (означення). Довести, що для довільного дійсного числа  $\alpha$  виконується  $[\alpha\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \alpha\vec{b}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}]$ .
24. Векторний добуток векторів (означення). Довести, що  $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$ .
25. Вираз векторного добутку через координати векторів в довільному і ортонормованому базисі.
26. Мішаний добуток векторів (означення). Довести, що мішаний добуток векторів за модулем дорівнює об'єму паралелепіпеда, який побудований на цих векторах.
27. Мішаний добуток векторів (означення). Довести, що мішаний добуток векторів є додатним (від'ємним), якщо ці вектори є правою (лівою).
28. Мішаний добуток векторів (означення). Довести, що мішаний добуток векторів дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли вектори є компланарними.
29. Мішаний добуток векторів (означення). Довести, що  $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$ . Довести, що якщо переставити місцями два вектори в мішаному добутку, то знак мішаного добутку зміниться на протилежний. Довести, що мішаний добуток векторів – лінійна функція по кожному з аргументів.
30. Вираз мішаного добутку через координати векторів в довільному і ортонормованому базисі.
31. Перетворення координат на площині.
32. Перетворення декартових прямокутних координат у просторі.
33. Полярні, циліндричні та сферичні системи координат.
34. Заміна базису і системи координат в просторі, на площині.

### *Типове індивідуальне завдання*

**1.** Скалярний добуток векторів (означення). Довести, що  $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$ .

**2.** У декартовій прямокутній системі координат задано точки:

$$A_1(1, 4, 1), \quad A_2(3, 2, 1), \quad A_3(1, -1, -3), \quad A_4(10, 7, 4)$$

Знайти:

1. проєкцію вектора  $\overrightarrow{A_1A_2}$  на вектор  $\overrightarrow{A_1A_4}$ ;
2. кут між векторами  $\overrightarrow{A_1A_2}$ ,  $\overrightarrow{A_1A_4}$ ;
3. площу трикутника  $A_1A_2A_3$ ;
4. об'єм піраміди  $A_1A_2A_3A_4$ .
5. висоту піраміди з вершини  $A_4$
6. рівняння та довжину ребра  $\overrightarrow{A_1A_2}$ ,

**3.** Задано вектори  $\vec{a} = \{1, 2, -1\}$ ,  $\vec{b} = \{2, 1, 3\}$ ,  $\vec{c} = \{1, 1, 0\}$ ,  $\vec{d} = \{0, -1, 1\}$ . Перевірити, чи будуть вектори  $\vec{a} - 2\vec{b}$ ,  $3\vec{c} - 2\vec{d}$ ,  $-2\vec{d} + \vec{a}$  компланарними.

**4.** Задано вектори  $\vec{a} = \{1, 2, -1\}$ ,  $\vec{b} = \{2, 1, 3\}$ ,  $\vec{c} = \{1, 1, 0\}$ ,  $\vec{d} = \{0, -1, 1\}$ . Перевірити чи утворюють вектори **a**, **b**, **c** базис. Якщо так, розкласти вектор **d** за базисом.

## 9. Схема нарахування балів

У розділ 1 входять теми 1-3, у розділ 2 – теми 4-6. Обов'язковим для допуску к екзамену є виконання контрольних робіт, індивідуального завдання та виконання домашнього завдання (сума балів не менш, ніж 30). Проводиться 2 контрольних роботи, яка оцінюється по 10 балів кожна. Перескладання контрольної роботи дозволяється тільки з поважної причини, яка підтверджується документом, з дозволу декана та проводиться підчас консультації.

Домашнє завдання перевіряється підчас аудиторного заняття та оцінюється в 15 балів за семестр (0.5 бала за кожне повністю виконане домашнє завдання). Перескладання домашнього завдання дозволяється тільки з поважної причини, яка підтверджується документом, з дозволу декана та проводиться підчас консультації.

Індивідуальне завдання виконується підчас самостійної роботи. Наявність правильної роботи – 10 балів, захист – 5 балів, захист роботи проводиться підчас консультації. Кінцевий термін здачі індивідуальної роботи 25 грудня 2020 року, захисту – 4 січня 2021 року.

Робота в аудиторії – 10 балів за семестр.

*Оцінювання за формами контролю:*

	<i>Розділ 1</i>		<i>Розділ 2</i>	
	<i>Min. 12 балів</i>	<i>Max 22 балів</i>	<i>Min. 18 балів</i>	<i>Max 38 балів</i>
Активність студента на практичних заняттях	3	5	2	5
Виконання домашніх робіт	4	7	4	8
Контрольна робота 1	5	10		
Контрольна робота 2			5	10
Індивідуальне завдання			7	15

*При простому розрахунку отримаємо:*

	Розділ 1	Розділ 2	екзамен	Підсумкова оцінка
<i>Мінімум</i>	12	18	20	50
<b>Максимум</b>	<b>22</b>	<b>38</b>	<b>40</b>	<b>100</b>

Для студентів, які набрали сумарно меншу кількість балів ніж *критично-розрахунковий мінімум – 30 балів* для одержання іспиту обов'язковим є *перескладання контрольних робіт*.

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання							Разом	Екзамен	Сума		
Розділ 1			Контр. робота, передбачена навч. планом	Розділ 2			Контр. робота, передбачена навч. планом	Індивідуальне завдання	60	40	100
T1	T2	T3		T4	T5	T6					
2	4	4	10	2	10	3	10	15			

T1, T2 ... T12 – теми розділів.

## Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінювання знань студентів під час лекційних та практичних занять проводиться за накопичувальною системою.

Критерії оцінювання враховують:

- розуміння, ступінь засвоєння теорії та методології проблем, що розглядаються;
- ступінь засвоєння фактичного матеріалу навчальної дисципліни;
- ознайомлення з рекомендованою літературою;
- вміння поєднувати теорію з практикою під час розв'язання задач обчислювального і застосовного характеру;
- логіка, структура, стиль викладу матеріалу в письмових роботах і під час виступів в аудиторії, вміння обґрунтувати свою позицію, здійснювати узагальнення інформації та робити висновки.

Максимально можливий бал за конкретним завданням ставиться за умови відповідності індивідуального завдання студента або його усної відповіді всім зазначеним критеріям. Відсутність тієї або іншої складової знижує кількість балів складової знижує кількість балів

### ***Критерії оцінювання контрольної роботи***

За умови виконання всіх завдань з демонстрацією: глибоких знань теоретичних положення дисципліни і вміння застосовувати їх під час розв'язання практичних завдань, за високий рівень оформлення письмової роботи студент отримує 10 балів. При цьому: словесні формулювання і символічні математичні записи повинні бути: чіткими і лаконічними; формальні викладки (перетворення виразів), числові розрахунки здійснені раціональними (ефективними) способами; і в цілому роботи акуратні, без виправлень.

### ***Критерії оцінювання індивідуального завдання***

За умови виконання всіх завдань та успішного захисту з демонстрацією: глибоких знань теоретичних положення дисципліни і вміння застосовувати їх під час розв'язання практичних завдань, за високий рівень оформлення письмової роботи студент отримує 15 балів. При цьому: словесні формулювання і символічні математичні записи повинні бути: чіткими і лаконічними; формальні викладки (перетворення виразів), числові розрахунки здійснені раціональними (ефективними) способами; і в цілому роботи акуратні, без виправлень.

**Критерії оцінювання позааудиторної самостійної роботи студентів.** Загальними критеріями, за якими здійснюється оцінювання позааудиторної самостійної роботи студентів, є: глибина і міцність знань; належний рівень мислення, вміння систематизувати знання за окремими темпами і робити обґрунтовані висновки; володіння понятійним апаратом, навичками і прийомами виконання практичних завдань; вміння знаходити необхідну інформацію, здійснювати її систематизацію та обробку.

Виконання завдань самостійних робіт за темами навчальної дисципліни оцінюється зважаючи на:

- розуміння, ступінь засвоєння теорії та методології проблем, що розглядаються;
- ступінь ознайомлення з рекомендованою літературою і засвоєння фактичного матеріалу навчальної дисципліни;
- вміння поєднувати теорію з практикою при розгляді практичних ситуацій, розв'язанні задача, проведення розрахунків, при виконанні завдань, винесених для самостійного опрацювання;
- повнота урахування вимог до виконання завдання;
- логічність викладеного матеріалу та відповідність його структурі передбаченим у завданні змістовим елементам;
- наявність та повнота розгляду ключових понять (визначень, термінів, різновидів і т.п.) предметної області завдання;
- наявність та обґрунтованість підсумкових висновків студента;

ілюстрування опрацьованого матеріалу наведенням (студентом) власних прикладів та графічного матеріалу

Підготовка до занять перевіряється за допомогою експрес-контролю. Бал, який було отримано за експрес-контроль є коефіцієнтом для отримання балів за виконання домашнього завдання

**Критерій оцінювання експрес-контролю:** 1 бал за бездоганну відповідь (усну або письмову)

Зниження оцінки за виконання завдання залежно від недоліків і допущених помилок:

0,1 бала – розв’язання завдання виконано правильно, але низька культура математичних записів.

0,2 бала – завдання виконано частково: є суттєва помилка;

0,3 бала – у процесі розв’язання завдання допущена смислова помилка;

0,4 бала – наведені лише початкові правильні міркування.

#### **Критерій оцінювання самостійної роботи (домашнього завдання)**

Домашнє завдання перевіряється підчас аудиторного заняття та оцінюється в 15 балів за семестр: 0.5 бала за кожне повністю виконане домашнє завдання за умови виконання на 71-100%,

0,25 бала за 50-70% виконання, 0,12 бали за 21-50%, 0 за 0-20%.

Перескладання домашнього завдання дозволяється тільки з поважної причини, яка підтверджується документом, з дозволу декана та проводиться підчас консультації.

#### **Критерій оцінювання аудиторної роботи**

Студент уважно слідує за викладанням теоретичного матеріалу, веде повний конспект лекцій, аналізує та орієнтується у матеріалі (помічає помилки, задає змістовні питання, відповідає на питання лектора). Студент уважно слідує за методами розв’язку задач, веде повний конспект практичних занять, аналізує та орієнтується у матеріалі (помічає помилки, задає змістовні питання, відповідає на питання викладача. Студент заробляє за розв’язок аудиторних задач протягом семестру (біля дошки або самостійно у зошиті).

Якщо студент систематично запізнюється без поважної причини, не веде конспект лекцій відволікається або відволікає інших, не може відповісти на прості запитання стосовно матеріалу за яким має слідувати, то з 10 балів стягуються бали пропорційно кількості зроблених зауважень, запізнень або пропуску матеріалу у конспекті продовж усього семестру.

### **Шкала оцінювання**

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

## 10. Рекомендоване методичне забезпечення

### Основна література

1. Немченко К.Е. Аналитическая геометрия. – М.: Эксмо, 2007. – 352 с.
2. Немченко К.Е. Аналітична геометрія. – Х.: ХНУ імені В.Н.Каразіна, 2012. – 272 с.
3. Немченко К.Е. Аналітична геометрія. Схеми, таблиці та задачі. – Х.: ХНУ імені В.Н.Каразіна, 2007. – 64 с.
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука., 1987. – 320 с.
5. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука., 1975. – 272 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит., 2001. – 272 с.
7. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. – М.: Физматлит., 2001. – 272 с.
8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Линейная алгебра. – М.: Физматлит., 2001. – 368 с.
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры – М.: Наука., 1968. – 432 с.
10. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука., 1970. – 400 с.
11. Придатченко Ю.В., Львов В.А. Алгебра для фізиків: вектори і координати: Навч. посібник. – Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2002. – 87 с.

### Допоміжна література

12. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука., 1968. – 912 с.
13. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука., 1971. – 272 с.
14. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. – М.: Наука., 1970. – 528 с.
15. Кострикин А.И. Введение в алгебру – М.: Наука., 1977. – 496 с.
16. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия– М.: Наука., 1986. – 309 с.
17. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука., 1982. – 272 с.
18. Постников М.М. Аналитическая геометрия. – М.: Наука., 1979. – 336 с.
19. Постников М.М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. – М.: Наука., 1979. – 336 с.
20. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ: Пер. с англ.. – М.: Мир., 1989. – 655 с.

### *в) збірники задач:*

21. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Наука., 1987. – 496 с.
22. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – М.: Физматлит., 2002. – 248 с.
23. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. – М.: Наука., 1975. – 320 с.
24. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука., 1972. – 240 с.
25. Кострикин А.И. Сборник задач по алгебре. – М.: Физматлит., 2001. – 464 с.
26. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука., 1976. – 384 с.
27. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука., 1974. – 384 с.

28. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. – СПб.: Издательство «Лань», 2004. – 288 с.

29. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука., 1970. – 336 с.

**10. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення**

1. <http://matphys.rpd.univ.kiev.ua/downloads/courses/angem/AGLA.pdf>
2. <http://matphys.rpd.univ.kiev.ua/downloads/courses/angem/AGLA.pdf>
3. [http://matphys.rpd.univ.kiev.ua/downloads/courses/angem/Metod\\_AGLA\\_1.pdf](http://matphys.rpd.univ.kiev.ua/downloads/courses/angem/Metod_AGLA_1.pdf)
4. [http://matphys.rpd.univ.kiev.ua/downloads/courses/angem/Metod\\_AGLA\\_2.pdf](http://matphys.rpd.univ.kiev.ua/downloads/courses/angem/Metod_AGLA_2.pdf)
5. [http://matphys.rpd.univ.kiev.ua/downloads/courses/angem/Metod\\_AGLA\\_3.pdf](http://matphys.rpd.univ.kiev.ua/downloads/courses/angem/Metod_AGLA_3.pdf)