МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАУКОВО-НАВЧАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ

Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем бакалавр

«Динамічні характеристики циліндричної оболонки з рідиною при рівномірному обертанні»

Виконала: студентка 4 курсу, групи НФ-43
Караєва Є.О.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Прикладна фізика енергетичних систем
Керівник: д. т. н., проф. Стрельнікова О.О.

Рецензент:

Харків – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра інформаційних технологій у фізико-енергетичних системах
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) бакалавр
Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Руслан СУХОВ
підпис

"____"_____2020 року

З А В Д А Н Н Я

НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ

Караєва Елизавета Олександрівна

1.Тема роботи «динамічні характеристики циліндричної оболонки при рівномірному обертанні» керівник роботи: Стрельнікова Олена Олександрівна, доктор технічних наук, професор,
затверджені наказом по університету від "05" грудня 2019 року №0210-05/2249

2. Строк подання студентом роботи 06.06.2020

3. Перелік питань, які потрібно розробити:

1) провести аналіз сучасного стану питання міцності та коливань оболонкових конструкцій частково заповнених рідиною;

2) здійснити огляд публікацій, присвячених дослідженню коливань рідини в циліндричних резервуарах;

3) сформулювати задачу визначення вільних коливань рідини в циліндричних резервуарах за умови рівномірного обертання;
4) провести аналіз граничних умов на поверхнях оболонки та рідини;
5) побудувати форму вільної поверхні в випадку обертання циліндричного резервуару із заданою частотою;
6) побудувати алгоритм визначення власних частот;
7) провести числові дослідження.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми, узгодження, а також затвердження її на кафедрі
2	Робота над літературою та іншими джерелами
3	Затвердження теми на кафедрі
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6	Написання третього розділу
7	Завершення написання дипломної роботи (висновки та література)
8	Подача науковому керівнику
9	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
10	Попередній захист
11	Захист

5.Дата видачі завдання

Студент _____ Елизавета КАРАЄВА
підпис

Керівник роботи _____ Олена СТРЕЛЬНІКОВА
підпис

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ ТА АБРЕВІАТУР

ГІХ – гравітаційно-інерційні хвилі

РЕФЕРАТ

Єлизавета Караєва «Динамічні характеристики циліндричної оболонки з рідиною при рівномірному обертанні»

Кваліфікаційна робота бакалавра з прикладної фізики. – Х.: ХНУ імені В. Н.Каразіна, 2020. – 40 с.

В різних галузях науки, техніки та промисловості задача знаходження власних частот резервуарів, частково заповнених рідиною, є надзвичайно актуальною і необхідною, оскільки це дозволяє ідентифікувати власні резонансні параметри. Часто такі резервуари знаходяться під дією постійної обертальної сили, що забезпечує більшу стабільність конструкцій. Основною задачею даного дослідження була ідентифікація власних хвиль, що виникають у прямому циліндрі під дією постійного обертання.

Під час моделювання обертання було використано наближення ідеальної рідини із постійною густиною. Отримано гіперболічне диференціальне рівняння, розв’язавши яке було знайдено дисперсійне співвідношення для власних частот системи.

Отримані аналітичні результати були застосовані для конкретної геометричної моделі прямого циліндричного резервуару.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ІДЕАЛЬНА РІДИНА, ГІДРОДИНАМІКА, ГІПЕРБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ, МЕТОД ФУР’Є РОЗДІЛЕННЯ ЗМІННИХ, ДИСПЕРСІЙНЕ СПІВВІДНОШЕННЯ.

РЕФЕРАТ

Елизавета Караева «Динамические характеристики цилиндрической оболочки с жидкостью при равномерном вращении»

Квалификационная работа бакалавра по прикладной физике. – Х.: ХНУ имени В. Н.Каразина, 2020. – 40 с.

В разных отраслях науки, техники и промышленности задача нахождения собственных частот резервуаров, частично заполненных жидкостью, является очень актуальной и необходимой, поскольку это позволяет идентифицировать собственные резонансные параметры. Часто такие резервуары находятся под действием постоянной вращающей силы, что обеспечивает большую стабильность конструкции. Основной задачей данного исследования была идентификация собственных волн, возникающих в прямом цилиндре под действием постоянного вращения.

Во время моделирования было использовано приближения идеальной жидкости с постоянной плотностью. Получено гиперболическое дифференциальное уравнение, решив которое было найдено дисперсионное соотношение для собственных частот системы.

Полученные аналитические результаты были использованы для конкретной геометрической модели прямого цилиндрического резервуара.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ, ГИДРОДИНАМИКА, ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, МЕТОД ФУРЬЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ, ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ.

ABSTRACT

Yelyzaveta Karaieva “Dynamic characteristics of uniformly rotating cylindrical container with fluid”

Qualification work of the bachelor of applied physics. – Kharkiv. – V.N. Karazin KhNU, 2020. – 40 p.

Problem of identification eigenvalues of containers with liquid is very important in different areas of science, techniques and industry, because its calculation makes real to study inertial resonance parameters of the system. These containers are usually interacted with rotated force, which can give more stability to the construction. The most important problem of this research is identification of inertial waves.

We use the model of perfect fluid with constant density. Finding of the hyperbolical equation makes it real to obtain the dispersion relationship for eigenvalues.

Analytical were used in calculation of eigenvalues of real cylinder with fluid.

KEYWORDS: PERFECT FLUID, FLUID DYNAMICS, HYPERBOLICAL EQUATION, FOURIER PROCEDURE, DISPERSION EQUATION .

ЗМІСТ

ВСТУП 9
1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ 12
1.1 Рівняння ідеальної рідини для середовища, що рівномірно обертається ... 12
2. ГРАВІТАЦІЙНО-ІНЕРЦІАЛЬНІ ХВИЛІ В ПРЯМОМУ ЦИЛІНДРІ 19
2.1 Вільна поверхня прямого циліндра, що обертається 19
2.2 Вільна поверхня у випадку високих значень зовнішньої кутової частоти . 21
2.3 Гравітаційно-інерційні хвилі 24
2.4 Аксіально-симетричні гравітаційно-інерційні хвилі 26
2.5 Аксіально-симетричні інерційні хвилі в прямому циліндрі 33
3. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ 35
ВИСНОВКИ 38
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 39

ВСТУП

Плескання – це феномен, який виявляється в широкому діапазоні промислового застосування: в контейнерах для схову зрідженого газу, в паливних баках ракет и літаків, в резервуарах вантажних танкерів. Питання плескань рідини в частково заповнених резервуарах знаходиться в центрі уваги багатьох дослідників протягом декількох останніх десятиріч. Феномен плескань можна описати як рух вільної поверхні рідини, що міститься в резервуарі, під дією раптово прикладеного навантаження. В роботі [1] наведено класифікацію коливань вільної поверхні рідини в резервуарах, при цьому виділено три основні форми плескань, а саме: а) повздовжні плескання, б) вертикальні плескання в) обертальні плескання.

Відомо, що саме частково заповнені резервуари піддаються дії особливо сильних плескань. Потужний рух рідини може створити високий локалізований тиск рідини на стінки резервуара, що в свою чергу може призвести до руйнування конструкції або до втрати стійкості.

Проектування цих резервуарів потребує ретельного дослідження поведінки рідини в ємностях в умовах експлуатації. Плескання проявляються як наслідок дії зовнішніх сил та викликаються прискоренням (раптовим уповільненням або зупинкою) рухомого об’єкту, що містить рідину. Особливої уваги заслуговує вивчення розподілу тиску на стінки резервуару, знаходження його локальних максимумів, які можуть вдвічі перевищувати значення відповідних величин у незаповненому резервуарі [2]. У вантажних танкерах та баках ракетоносіїв проблема плескань є особливо актуальною: навіть малі рухи контейнеру можуть викликати значні плескання, що може призвести до руйнування ємності, її перекидання. Це потребує також вивчення стійкості руху.

Низку досліджень, присвячених проблемам плескань рідини в резервуарах, відображено в ґрунтовних оглядах Р.А. Ібрагіма [3,4].

Оскільки ракетна техніка використовує рідке пальне, вочевидь, що

характер поведінки рідини в паливному баці суттєво впливає на динаміку польоту. Це стимулювало сплеск інтересу до проблем плескань рідини в баках ракетоносіїв на початку 60-х років пришлого сторіччя, особливо після початку космічних програм СРСР і NASA (Gemini and Apollo programs). До цих досліджень відносяться роботи Г. Абрамсона [5-6].

Традиційні підходи, що використовуються для оцінки навантажень при плесканнях, включають лінійну і нелінійну теорію потенціалу, натурний експеримент и експеримент на модельних зразках. Відзначимо застосування методів обчислювальної механіки рідини (Computational Fluid Dynamics, CFD) до вивчення плескань [7, 8].

В різних інженерних задачах достатньо застосовувати спрощені моделі для опису руху рідини в рухомому (наприклад, здійснюючому коливання) резервуарі. Перевага цих моделей полягає в тому, що вони дозволяють описати плескання з достатньою точністю при використанні простих рівнянь. При цьому в окремих випадках вдається отримати аналітичні розв’язки. Відзначимо, що аналітичні розв’язки можна застосувати лише для опису плескань з невеликою амплітудою в контейнерах простої геометричної форми та за умови пласкої форми вільної поверхні. Такі дослідження не можуть бути узагальнені щодо плескань з великою амплітудою в контейнерах складної форми, з конструкційними перегородками, при неплоскій формі вільної поверхні,тощо [9].

На цей час існує ціла низка різних числових методів та схем для опису характеру плескань в резервуарах за наявності вільної поверхні рідини.

В [10] розроблено скіченно- елементний підхід для розв’язання задач про потенціальну течію рідини і досліджено тривиміру нелінійну поведінку рідини в резервуарі.

В [11-12] запропоновано підхід, заснований на використанні поєднання методів скінченних і граничних елементів для розв'язання задачі про власні коливання пружних оболонок обертання, заповнених рідиною, і для

розв'язання задачі про власні коливання рідини в жорстких резервуарах. Цей підхід має певні переваги. В отриманих розв’язуючих рівняннях функції та їх похідні визначаються тільки на границях області, що дозволяє істотно зменшувати розмірність систем рівнянь. Цей метод надає якісно нові можливості в моделюванні зв'язаних динамічних задач механіки рідини.

Для зменшення амплітуди плескань та забезпечення стабільності руху ракетоносіїв використовують різні пристрої, на кшталт перегородок, часткових покриттів вільної поверхні та ін. [13-14].

При вивченні динаміки ракетоносіїв основними завданнями є забезпечення керованості і стійкості на активних і пасивних ділянках руху.

Як стабілізуючий чинник розглядають обертання ракети навколо поздовжньої осі, яке може бути викликано спеціально за допомогою органів закрутки. Таке обертання може також здійснюватись для створення штучної гравітації. Але ж таке обертання може мати й негативну природу внаслідок впливів збурення при відсутності управління в каналі крену [15-16].

Таким чином, одним з актуальних питань динаміки баків, частково заповнених рідиною, є дослідження коливань рідини при врахуванні обертання баків. Зауважимо, що при цьому вільна поверхня рідини втрачає пласку форму, що призводить до додаткових труднощів при комп’ютерному моделюванні цього явища.

1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

1.1 Рівняння ідеальної рідини для середовища, що рівномірно обертається

Як відомо, повну систему рівнянь ідеальної рідини утворюють рівняння неперервності та рівняння Ейлера, що є наслідком другого закону Ньютона [17]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_l}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_l \vec{v} = 0 \\ \rho_l \left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} \right) = -\nabla P + \vec{F}_{1V} \end{cases},$$

де ρ_l – густина рідини, $\vec{v}$ – Ейлерова швидкість рідини (швидкість у конкретній точці простору), P – тиск, $\vec{F}_{1V}$ – зовнішня сила, що діє на одиницю об'єму рідини.

Нехай рідина знаходиться у резервуарі, що обертається з постійною кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$. Уся система знаходиться в полі сили тяжіння. Тому зовнішніми силами, що діють на рідину, будуть сила тяжіння $\rho_l \vec{g}$, та інерціальні сили, пов'язані з рівномірним обертанням – центробіжна сила інерції $-\rho_l \left[\vec{\Omega}, \left[\vec{\Omega}, \vec{r}\right]\right]$ та сила Коріоліса $2\rho_l \left[\vec{v}, \vec{\Omega}\right]$.

Користуючись сказаним вище, рівняння Ейлера трансформується

$$\rho_l \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} \right) = -\nabla P + \rho_l \vec{g} - \rho_l \left[\vec{\Omega}, \left[\vec{\Omega}, \vec{r}\right]\right] + 2\rho_l \left[\vec{v}, \vec{\Omega}\right]$$

Центробіжну силу можна виразити через градієнт функції $\frac{\rho_l}{2}\left[\vec{\Omega}, \vec{r}\right]^2$. Дійсно,

$$\nabla\left(\frac{\rho_l}{2}\left[\vec{\Omega},\vec{r}\right]^2\right)=\frac{\rho_l}{2}\nabla\left[\vec{\Omega},\vec{r}\right]^2=\frac{\rho_l}{2}\nabla\left(\left[\vec{\Omega},\vec{r}\right],\left[\vec{\Omega},\vec{r}\right]\right)=\frac{\rho_l}{2}\nabla\left(\vec{\Omega},\left[\vec{r},\left[\vec{\Omega},\vec{r}\right]\right]\right)=$$
$$=\frac{\rho_l}{2}\nabla\left(\vec{\Omega},\vec{\Omega}r^2-\vec{r}\left(\vec{\Omega},\vec{r}\right)\right)=\frac{\rho_l}{2}\nabla\left(r^2\Omega^2-\left(\vec{\Omega},\vec{r}\right)^2\right)=$$
$$=\frac{\rho_l}{2}\left(2\Omega^2\vec{r}-2\left(\vec{\Omega},\vec{r}\right)\vec{\Omega}\right)=\rho_l\left[\vec{\Omega},\left[\vec{r},\vec{\Omega}\right]\right]=-\rho_l\left[\vec{\Omega},\left[\vec{\Omega},\vec{r}\right]\right].$$

Сила тяжіння теж є консервативною функцією:

$$\nabla(\vec{g},\vec{r})=\frac{\partial}{\partial x_i}(g_k x_k)=g_k\frac{\partial x_k}{\partial x_i}=g_k\delta_{ik}=g_i=\vec{g}$$

Тобто рівняння Ейлера представляється у наступному вигляді:

$$\rho_l\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\vec{v}+2\left[\vec{\Omega},\vec{v}\right]\right)=-\nabla\left(P-\frac{\rho_l}{2}\left[\vec{\Omega},\vec{r}\right]^2-\rho_l(\vec{g},\vec{r})\right)$$

У випадку нестисливої рідини повна система рівнянь ідеальної рідини у випадку рівномірного обертання трансформується у наступну

$$\begin{cases}\operatorname{div}\vec{v}=0\\ \rho_l\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\vec{v}+2\left[\vec{\Omega},\vec{v}\right]\right)=-\nabla\left(P-\frac{\rho_l}{2}\left[\vec{\Omega},\vec{r}\right]^2-\rho_l(\vec{g},\vec{r})\right)\end{cases}$$

У випадку малих збурень нелінійним членом можна знехтувати, і тоді базова система рівнянь ідеальної рідини для тіла, що рівномірно обертається, визначається наступним чином:

$$\begin{cases}\operatorname{div}\vec{v}=0\\ \rho_l\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+2\left[\vec{\Omega},\vec{v}\right]\right)=-\nabla\left(P-\frac{\rho_l}{2}\left[\vec{\Omega},\vec{r}\right]^2-\rho_l(\vec{g},\vec{r})\right)\end{cases}\qquad(1.1)$$

Розв’язком цієї системи є функції швидкості та тиску в будь-якій точці в будь-який момент часу. Спробуємо зробити елементарні перетворення, щоб

представити систему рівнянь ідеальної рідини, що рівномірно обертається, у замкненому вигляді як окреме векторне рівняння для швидкості та скалярне рівняння для тиску. Спочатку застосуємо операцію «ротор» до рівняння Ейлера:

$$\rho_l\left(\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+2\operatorname{rot}[\vec{\Omega},\vec{v}\,]\right)=-\operatorname{rot}\nabla\left(P-\frac{\rho_l}{2}[\vec{\Omega},\vec{r}]^2-\rho_l(\vec{g},\vec{r})\right)$$

Просторові похідні та похідна за часом є комутативними. Крім того, ротор градієнта дорівнює нулю

$$\operatorname{rot}\nabla f=[\nabla,\nabla f]=\varepsilon_{ikm}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_m}=\varepsilon_{ikm}\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial f}{\partial x_k}=-\varepsilon_{ikm}\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial f}{\partial x_k}=0$$

Тоді

$$\frac{\partial\operatorname{rot}\vec{v}}{\partial t}+2\operatorname{rot}[\vec{\Omega},\vec{v}\,]=0$$

Обчислимо окремо другий член рівняння.

$$\operatorname{rot}[\vec{\Omega},\vec{v}\,]=\left[\nabla,[\vec{\Omega},\vec{v}\,]\right]=\vec{\Omega}(\nabla,\vec{v}\,)-(\vec{\Omega},\nabla)\vec{v}=\vec{\Omega}\operatorname{div}\vec{v}-(\vec{\Omega},\nabla)\vec{v}$$

Але за рівнянням неперервності (1.1) дивергенція швидкості дорівнює нулю, тому

$$\operatorname{rot}[\vec{\Omega},\vec{v}\,]=-(\vec{\Omega},\nabla)\vec{v}$$

Ротор рівняння Ейлера має наступний вигляд

$$\frac{\partial\operatorname{rot}\vec{v}}{\partial t}=2(\vec{\Omega},\nabla)\vec{v} \qquad (1.2)$$

Це рівняння демонструє, що ми не можемо шукати вектор швидкості у вигляді потенціальної функції, її ротор не дорівнює нулю.

Застосуємо до цього рівняння ще одну операцію «ротор»

$$\frac{\partial \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}}{\partial t} = 2\operatorname{rot}(\vec{\Omega},\nabla)\vec{v}$$

Обчислимо окремо ротор від ротора:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} = [\nabla,\operatorname{rot}\vec{v}] = \left[\nabla,[\nabla,\vec{v}]\right] = \nabla(\nabla,\vec{v}\,) - (\nabla,\nabla)\vec{v} = \nabla\operatorname{div}\vec{v} - \Delta\vec{v}$$

Дивергенція вектора швидкості дорівнює нулю, а другий член цього рівняння є векторним лапласіаном швидкості.

Обчислимо праву частину ротора від рівняння (1.2), скориставшись тим, що кутова швидкість є сталою функцією, а тому операції просторових похідних є комутативними

$$\operatorname{rot}(\vec{\Omega},\nabla)\vec{v} = (\vec{\Omega},\nabla)\operatorname{rot}\vec{v}$$

Маємо

$$\frac{\partial\Delta\vec{v}}{\partial t} + 2(\vec{\Omega},\nabla)\operatorname{rot}\vec{v} = 0$$

Візьмемо другу похідну від даного рівняння за часом

$$\Delta\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} + 2\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\Omega},\nabla)\operatorname{rot}\vec{v} = 0$$

Скористаємось рівнянням (1.2)

$$\Delta\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} + 4(\vec{\Omega},\nabla)(\vec{\Omega},\nabla)\vec{v} = 0 \qquad (1.3)$$

Це і є замкненим диференціальний рівнянням другого порядку для вектору швидкості.

Тепер знайдемо замкнене рівняння для тиску. Для цього застосуємо операцію «дивергенція» до рівняння Ейлера:

$$\rho_l\left(\frac{\partial\,\mathrm{div}\,\vec{v}}{\partial t}+2\,\mathrm{div}[\vec{\Omega},\vec{v}\,]\right)=-\,\mathrm{div}\,\nabla\left(P-\frac{\rho_l}{2}[\vec{\Omega},\vec{r}]^2-\rho_l(\vec{g},\vec{r})\right)$$

Дивергенція градієнта це оператор Лапласа. Зробимо заміну

$$P'=P-\frac{\rho_l}{2}[\vec{\Omega},\vec{r}]^2-\rho_l(\vec{g},\vec{r})$$

Обчислимо дивергенцію від векторного добутку

$$\mathrm{div}[\vec{\Omega},\vec{v}\,]=(\nabla,[\vec{\Omega},\vec{v}\,])=([\nabla,\vec{\Omega}],\vec{v}\,)=-([\vec{\Omega},\nabla],\vec{v})=-(\vec{\Omega},[\nabla,\vec{v}])=$$
$$=-(\vec{\Omega},\mathrm{rot}\,\vec{v})$$

Отримуємо

$$2\rho_l(\vec{\Omega},\mathrm{rot}\,\vec{v})=\Delta P'$$

Продифференціюємо це рівняння за часом

$$2\rho_l\left(\vec{\Omega},\frac{\partial\,\mathrm{rot}\,\vec{v}}{\partial t}\right)=\Delta\frac{\partial P'}{\partial t}$$

Скористаємося рівнянням (1.2)

$$4\rho_l(\vec{\Omega},(\vec{\Omega},\nabla)\vec{v})=\Delta\frac{\partial P'}{\partial t}$$

Ще раз продифференціюємо це рівняння за часом

$$4(\vec{\Omega},\nabla)\left(\vec{\Omega},\rho_l\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)=\Delta\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}$$

Скористаємося рівнянням Ейлера

$$\rho_l\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\nabla P'-2\rho_l[\vec{\Omega},\vec{v}\,]$$

$$\left(\vec{\Omega},\rho_l\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)=-(\vec{\Omega},\nabla P'+2\rho_l[\vec{\Omega},\vec{v}\,])=-(\vec{\Omega},\nabla P')-2\rho_l(\vec{\Omega},[\vec{\Omega},\vec{v}\,])$$

Змішаний добуток векторів, два з яких однакові, дорівнює нулю:

$$(\vec{\Omega},[\vec{\Omega},\vec{v}\,])=([\vec{\Omega},\vec{\Omega}],\vec{v}\,)=0$$

Тоді

$$\left(\vec{\Omega},\rho_l\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)=-(\vec{\Omega},\nabla)P'$$

Отримуємо замкнене рівняння для тиску

$$\Delta\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}+4(\vec{\Omega},\nabla)(\vec{\Omega},\nabla)P'=0$$

Тобто на вектор швидкості та на тиск діють однакові оператори. Два рівняння можна об’єднати в систему

$$\begin{cases}\Delta\dfrac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2}+4(\vec{\Omega},\nabla)(\vec{\Omega},\nabla)\vec{v}=0\\ \Delta\dfrac{\partial^2 P'}{\partial t^2}+4(\vec{\Omega},\nabla)(\vec{\Omega},\nabla)P'=0\end{cases}$$

Нехай напрям кутової швидкості збігається з напрямом вісі $Oz\ \vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$.

У цьому випадку

$$(\vec{\Omega}, \nabla) = \Omega \frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \Omega^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Отримуємо такі рівняння

$$\begin{cases} \Delta \dfrac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} + 4\Omega^2 \dfrac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} = 0 \\ \Delta \dfrac{\partial^2 P'}{\partial t^2} + 4\Omega^2 \dfrac{\partial^2 P'}{\partial z^2} = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

2. ГРАВІТАЦІЙНО-ІНЕРЦІАЛЬНІ ХВИЛІ В ПРЯМОМУ ЦИЛІНДРІ

2.1 Вільна поверхня прямого циліндра, що обертається

Розглянемо прямий, закритий з усіх боків циліндр радіуса R та висотою H. Нехай в циліндрі міститься ідеальна рідина, густина якої ρ_l. Нехай у стані спокою висота рівня води в циліндрі $H_0, H_0 < H$. Вільну поверхню циліндра можна вважати плоскою, оскільки ми враховуємо додатковий паскалівський тиск сил поверхневого натягу.

Через деякий час циліндр починає обертатися з постійною кутовою швидкістю Ω. Необхідно знайти рівняння вільної поверхні циліндра.

Як було показано у першому розділі, рівняння Ейлера для рідини, що рівномірно обертається виглядає як друге рівняння системи (1.1):

$$\rho_l\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2[\vec{\Omega}, \vec{v}\,]\right) = -\nabla\left(P - \frac{\rho_l}{2}[\vec{\Omega}, \vec{r}]^2 - \rho_l(\vec{g}, \vec{r})\right)$$

Для знаходження стаціонарної вільної поверхні S_0 не будемо враховувати малі збурення швидкості. Отже, на рідину діє лише центробіжна сила:

$$\nabla\left(P - \frac{\rho_l}{2}[\vec{\Omega}, \vec{r}]^2 - \rho_l(\vec{g}, \vec{r})\right)\Big|_{S_0} = 0$$

Якщо градієнт будь-якої функції дорівнює нулю, то у стаціонарному випадку ця функція має бути константою

$$P|_{S_0} - \frac{\rho_l}{2}[\vec{\Omega}, \vec{r}]^2\Big|_{S_0} - \rho_l(\vec{g}, \vec{r})|_{S_0} = C$$

Введемо циліндричні координати ρ, α, z та направимо вісь Oz за напрямком кутової швидкості. Тоді отримаємо відповідні вирази у циліндричних координатах

$$\vec{g} = (0,0,-g) \Rightarrow (\vec{g},\vec{r}) = -gz$$

$$\vec{\Omega} = (0,0,\Omega) \Rightarrow [\vec{\Omega},\vec{r}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_\rho} & \overrightarrow{e_\alpha} & \overrightarrow{e_z} \\ 0 & 0 & \Omega \\ \rho & 0 & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\rho \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{\Omega},\vec{r}]^2 = ([\vec{\Omega},\vec{r}],[\vec{\Omega},\vec{r}]) = \Omega^2\rho^2$$

Рівняння Бернуллі на вільній поверхні виглядає наступним чином

$$P|_{S_0} - \frac{\rho_l}{2}\Omega^2\rho^2\Big|_{S_0} + \rho_l g z|_{S_0} = C$$

Нехай вільна поверхня описується рівнянням $\zeta^{(0)}(\rho)$. Тиск на вільній поверхні є атмосферним. Невідому константу представимо як $C = P_0 + C_1$. Тоді отримуємо рівняння

$$-\frac{\rho_l}{2}\Omega^2\rho^2 + \rho_l g\zeta^{(0)}(\rho) = C_1$$

Отримуємо розв'язок цього рівняння

$$\zeta^{(0)}(\rho) = \frac{C_1}{\rho_l g} + \frac{\Omega^2\rho^2}{2g}$$

Для знаходження невідомої константи скористаємося властивістю нестиснення рідини. З цього випливає, що об’єм рідини у циліндрі до і після початку обертання має зберігатися. Об’єм рідини в циліндрі до обертання

$$V = \pi R^2 H_0$$

Після початку обертання об'єм рідини можна обчислити за допомогою потрійного інтегралу

$$V = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \rho d\rho \int_0^{\zeta^{(0)}(\rho)} dz = 2\pi \int_0^R \zeta^{(0)}(\rho)\rho d\rho = 2\pi \int_0^R \left(\frac{C_1}{\rho_l g} + \frac{\Omega^2 \rho^2}{2g}\right)\rho d\rho =$$
$$= 2\pi \left(\frac{C_1}{\rho_l g}\int_0^R \rho d\rho + \frac{\Omega^2}{2g}\int_0^R \rho^3 d\rho\right) = 2\pi\left(\frac{C_1}{\rho_l g}\frac{R^2}{2} + \frac{\Omega^2}{2g}\frac{R^4}{4}\right)$$

Прирівняємо об'єми і отримаємо рівняння

$$\pi R^2 H_0 = 2\pi\left(\frac{C_1}{\rho_l g}\frac{R^2}{2} + \frac{\Omega^2}{2g}\frac{R^4}{4}\right)$$

Виразимо звідси невідому константу

$$H_0 = \frac{C_1}{\rho_l g} + \frac{\Omega^2}{g}\frac{R^2}{4} \Rightarrow C_1 = \rho_l g H_0 - \frac{\rho_l \Omega^2 R^2}{4}$$

Тобто рівняння вільної поверхні має наступний вид

$$\zeta^{(0)}(\rho) = \frac{\Omega^2 \rho^2}{2g} - \frac{\Omega^2 R^2}{4g} + H_0 \tag{2.1}$$

2.2 Вільна поверхня у випадку високих значень зовнішньої кутової частоти

В рівнянні (2.1) вільна поверхня представлена як функція від змінної ρ. Виразимо ρ через z:

$$\rho(z) = \pm\sqrt{\frac{2gz}{\Omega^2} + \frac{R^2}{2} - \frac{2gH_0}{\Omega^2}}$$

Розглянемо випадок $\Omega^2 \gg 2gH_0$. Введемо безрозмірний параметр $\alpha = 2gH_0/\Omega^2$. Тоді

$$\rho(z) = \pm\sqrt{\alpha\left(\frac{z}{H_0} - 1\right) + \frac{R^2}{2}}$$

Якщо $\alpha = 0$, то вільна поверхня представляє собою дві паралельні візки до вісі Oz:

$$R_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}R$$

Проаналізуємо отриманий результат. Якщо у прямому циліндрі відсутнє обертання, при знехтуванні силами поверхневого натягу його поверхня буде плоскою. При ввімкненні обертання поверхня стане параболою (Рис. 2.1).

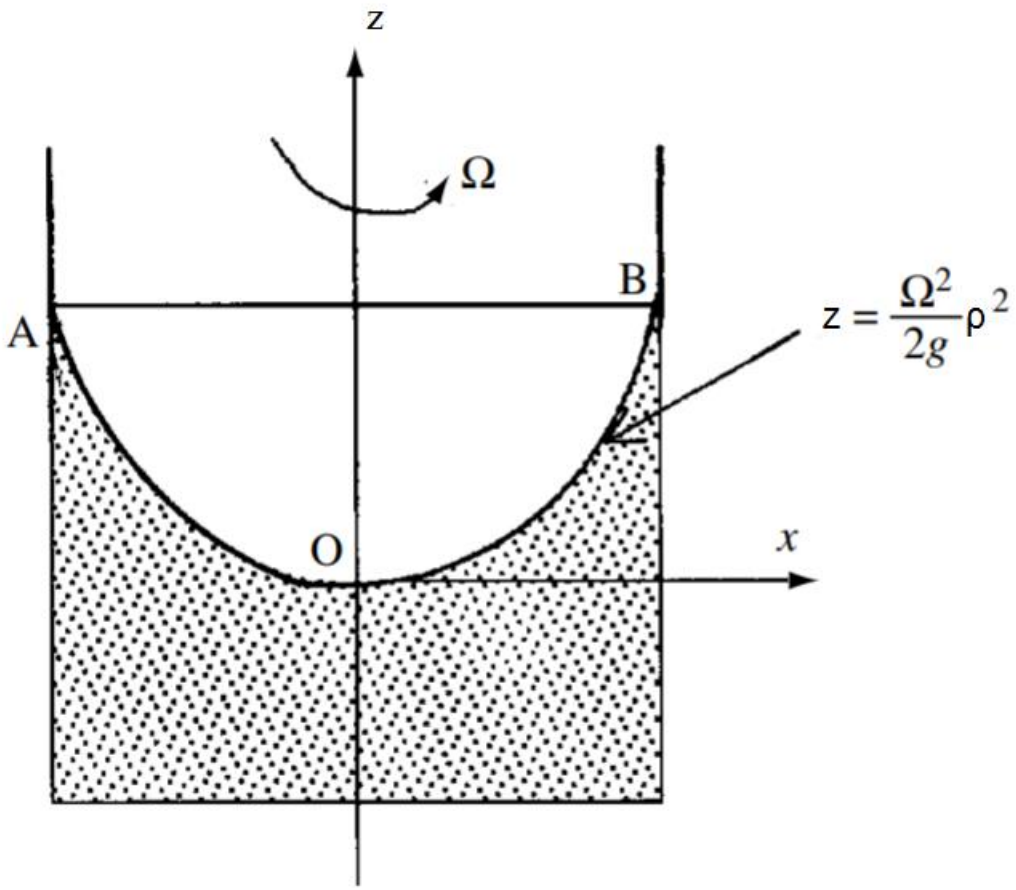


Рис 2.1. Вільна поверхня рідини у прямому циліндрі, що обертається.

Зі збільшенням частоти рівень рідини на бокових стінках буде поступово підвищуватися, а дно буде відкриватися. У випадку $\Omega^2 \gg 2gH_0$ рідина у циліндрі буде представляти собою циліндричний шар із повітряною порожниною усередині (Рис. 2.2).

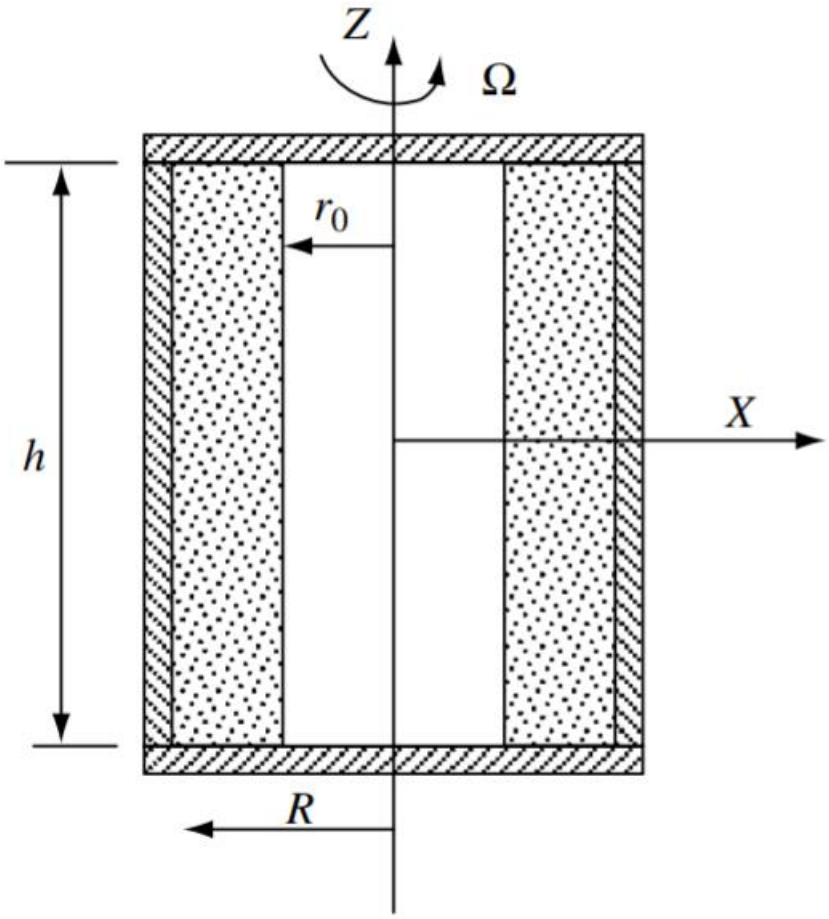


Рис. 2.2. Вільна поверхня рідини у прямому циліндрі, що обертається, в граничному випадку.

2.3 Гравітаційно-інерційні хвилі

Повернемося до системи (1.4)

$$\begin{cases} \Delta \dfrac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} + 4\Omega^2 \dfrac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} = 0 \\ \Delta \dfrac{\partial^2 P'}{\partial t^2} + 4\Omega^2 \dfrac{\partial^2 P'}{\partial z^2} = 0 \end{cases}$$

Нагадаємо, ми робили заміну

$$P' = P - \frac{\rho_l}{2}\left[\vec{\Omega}, \vec{r}\right]^2 - \rho_l(\vec{g}, \vec{r})$$

У циліндричних координатах ця функція має вигляд

$$P' = P - \frac{\rho_l}{2}\Omega^2\rho^2 + \rho_l g z$$

Підставимо цей вираз у друге рівняння системи (4.1)

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 P'}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$$

Система перетворюється у наступну:

$$\begin{cases} \Delta\dfrac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} + 4\Omega^2\dfrac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} = 0 \\ \Delta\dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2} + 4\Omega^2\dfrac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \end{cases}$$

Шукатимемо розв’язок цієї системи у вигляді монохроматичної хвилі. Ми перейдемо до комплексних величин, маючи на увазі, що реальні параметри хвилі будуть характеризуватися дійсною або уявною частиною цих величин:

$$\begin{cases} \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r})e^{i\omega t} \\ P(\vec{r}, t) = P(\vec{r})e^{i\omega t} \end{cases} \quad (2.2)$$

Підставимо ці рівняння у систему

$$\frac{\partial P(\vec{r}, t)}{\partial t} = P(\vec{r})\frac{\partial e^{i\omega t}}{\partial t} = i\omega P(\vec{r})e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 P(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = i\omega P(\vec{r})\frac{\partial e^{i\omega t}}{\partial t} = -\omega^2 P(\vec{r})e^{i\omega t}$$

$$\Delta\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{i\omega t}\Delta P$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}e^{i\omega t}$$

Підставивши відповідні вирази у систему (1.4) та скоротивши експоненційній множник, отримуємо

$$\begin{cases} -\omega^2\Delta\vec{v} + 4\Omega^2\dfrac{\partial^2\vec{v}}{\partial z^2} = 0 \\ -\omega^2\Delta P + 4\Omega^2\dfrac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \end{cases}$$

Або

$$\begin{cases} \Delta\vec{v} - \dfrac{4\Omega^2}{\omega^2}\dfrac{\partial^2\vec{v}}{\partial z^2} = 0 \\ \Delta P - \dfrac{4\Omega^2}{\omega^2}\dfrac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \end{cases} \qquad (2.3)$$

2.4 Аксіально-симетричні гравітаційно-інерційні хвилі

Розглянемо випадок, коли вектор швидкості та тиск не залежать від кутової координати. В циліндричних координатах рівняння для тиску матиме наступний вигляд:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) - \left(\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1\right)\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

У випадку $\omega < 2\Omega$ це рівняння є диференційним рівнянням гіперболічного типу із частинними похідними другого порядку. Для його розв’язання необхідно задати граничні умови для тиску. Спроектуємо

рівняння Ейлера на нормаль до граничної поверхні рідини, тобто помножимо рівняння Ейлера скалярно на вектор нормалі до поверхні

$$\rho_l\left(\frac{\partial(\vec{v},\vec{n})}{\partial t}+2\left(\left[\vec{\Omega},\vec{v}\,\right],\vec{n}\right)\right)\Big|_S=-\frac{\partial}{\partial n}\left(P-\frac{\rho_l}{2}\left[\vec{\Omega},\vec{r}\right]^2-\rho_l(\vec{g},\vec{r})\right)\Big|_S$$

Нормальна компонента вектора швидкості на границі дорівнює нулю. Отже

$$\frac{\partial P}{\partial n}\Big|_S=-2\rho_l\left(\left[\vec{\Omega},\vec{v}\,\right],\vec{n}\right)\big|_S+\frac{\rho_l}{2}(\vec{n},\nabla\Omega^2\rho^2)\Big|_S+\rho_l(\vec{n},\vec{g})|_S$$

$$\frac{\partial P}{\partial n}\Big|_S=-2\rho_l\left(\left[\vec{\Omega},\vec{v}\,\right],\vec{n}\right)\big|_S+\rho_l n_\rho\Omega^2\rho\big|_S-\rho_l g n_z|_S$$

Розкриємо змішаний добуток

$$\left(\left[\vec{\Omega},\vec{v}\,\right],\vec{n}\right)=\begin{vmatrix}0 & 0 & \Omega\\ v_\rho & v_\alpha & v_z\\ n_\rho & 0 & n_z\end{vmatrix}=-\Omega n_\rho v_\alpha$$

Отримуємо

$$\frac{\partial P}{\partial n}\Big|_S=2\rho_l\Omega n_\rho v_\alpha\big|_S+\rho_l n_\rho\Omega^2\rho\big|_S-\rho_l g n_z|_S$$

Запишемо граничну умову на нижній стінці циліндра $z=0$. Вектор нормалі на ній дорівнює $\vec{n}|_{z=0}=(0,-1)$.

$$\frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=0}=-\rho_l g$$

На верхній стінці $\vec{n}|_{z=0}=(0,1)$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=H} = -\rho_l g$$

На боковій стінці $\vec{n}|_{\rho=0} = (1,0)$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = 2\Omega\rho_l v_\alpha|_{\rho=R} + \rho_l \Omega^2 R$$

На вільній поверхні тиск дорівнює атмосферному

$$P|_{\rho=R_0} = P_0$$

Тепер з'ясуємо значення компоненти вектора швидкості на боковій стінці. Для цього розпишемо рівняння (1.2) у циліндричних координатах в аксіально-симетричному випадку:

$$\begin{cases} -i\omega\dfrac{\partial v_\alpha}{\partial z} = 2\Omega\dfrac{\partial v_\rho}{\partial z} \\ i\omega\left(\dfrac{\partial v_\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial \rho}\right) = 2\Omega\dfrac{\partial v_\alpha}{\partial z} \\ i\omega\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho v_\alpha)}{\partial \rho} = 2\Omega\dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{cases}$$

Розглянемо окремо перше рівняння. Його можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(v_\alpha + \frac{2\Omega}{i\omega}v_\rho\right) = 0$$

З цього випливає, що вираз у дужках залежить лише від змінної ρ

$$v_\alpha + \frac{2\Omega}{i\omega}v_\rho = f(\rho)$$

Звідси випливає, що

$$v_\alpha = f(\rho) - \frac{2\Omega}{i\omega} v_\rho$$

Підставимо цей вираз у третє рівняння системи:

$$i\omega \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho f(\rho))}{\partial \rho} - 2\Omega \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} = 2\Omega \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Або

$$i\omega \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho f(\rho))}{\partial \rho} = 2\Omega \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

У правій частині записано аксіально-симетричне рівняння неперервності в циліндричних координатах, а отже

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho f(\rho))}{\partial \rho} = 0$$

Розв'язок цього рівняння наступний

$$f(\rho) = \frac{\beta}{\rho}$$

Отже кутова компонента швидкості пов’язана з радіальною наступним чином

$$v_\alpha = \frac{\beta}{\rho} - \frac{2\Omega}{i\omega} v_\rho$$

На боковій стінці $v_\rho = 0$, а отже $v_\alpha|_{\rho=R} = \frac{\beta}{R}$. Тоді отримуємо наступне рівняння для тиску із граничними умовами

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)-\left(\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1\right)\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=0 \\ \left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=0}=-\rho_l g \qquad \left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=H}=-\rho_l g \\ \left.\frac{\partial P}{\partial\rho}\right|_{\rho=R}=2\Omega\rho_l\frac{\beta}{R}+\rho_l\Omega^2 R \qquad P|_{\rho=R_0}=P_0 \end{cases}$$

Для того, щоб перетворити граничні умови в однорідні, зробимо заміну

$$P'=P-P_0+\rho_l gz-\frac{\rho_l}{2}\Omega^2\rho^2-2\Omega\beta\ln\rho+\frac{\rho_l}{2}\Omega^2R_0^2+2\Omega\beta\ln R_0$$

Дійсно,

$$\begin{cases} \frac{\partial P'}{\partial\rho}=\frac{\partial P}{\partial\rho}-\rho_l\Omega^2\rho-\frac{2\Omega\beta}{\rho} \\ \frac{\partial P'}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial z}+\rho_l g \end{cases}$$

Перевіримо граничні умови

$$\left.\frac{\partial P'}{\partial\rho}\right|_{\rho=R}=0 \quad P'|_{\rho=R_0}=\rho_l gz$$
$$\left.\frac{\partial P'}{\partial z}\right|_{z=0}=0 \qquad \left.\frac{\partial P'}{\partial z}\right|_{z=H}=0$$

Розв'яжемо рівняння методом розділення змінної. Нехай $P'(\rho,z)=\xi(\rho)\eta(z)$. Тоді

$$\frac{\eta}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\xi}{d\rho}\right)-\left(\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1\right)\xi\frac{d^2\eta}{dz^2}=0$$

Розділимо вираз на P' і отримаємо

$$\frac{1}{\xi\rho\left(\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1\right)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\xi}{d\rho}\right)=\frac{1}{\eta}\frac{d^2\eta}{dz^2}=-\lambda^2$$

Рівняння розпадається на два

$$\begin{cases}\rho^2\frac{d^2\xi}{d\rho^2}+\rho\frac{d\xi}{d\rho}+\lambda^2\left(\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1\right)\rho^2\xi=0\\ \frac{d^2\eta}{dz^2}+\lambda^2\eta=0\end{cases}$$

Розв'язок першого рівняння – суперпозиція функції Бесселя і Неймана нульового порядку

$$\xi(\rho)=AJ_0\left(\lambda\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}\rho\right)+BY_0\left(\lambda\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}\rho\right)$$

Розв'язок другого рівняння – суперпозиція синуса і косинуса

$$\eta(z)=C\sin(\lambda z)+D\cos(\lambda z)$$

Загальний розв’язок наступний

$$P'(\rho,z)=\left(AJ_0\left(\lambda\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}\rho\right)+BY_0\left(\lambda\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}\rho\right)\right)(C\sin(\lambda z)+\\ +D\cos(\lambda z))$$

Обчислимо часткові похідні цієї функції

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P'}{\partial \rho} = -\lambda\sqrt{\dfrac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}\left(AJ_1\left(\lambda\sqrt{\dfrac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}\rho\right)+BY_1\left(\lambda\sqrt{\dfrac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}\rho\right)\right)\cdot \\ \qquad\qquad \cdot (C\sin(\lambda z)+D\cos(\lambda z)) \\ \dfrac{\partial P'}{\partial z} = \lambda\left(AJ_0\left(\lambda\sqrt{\dfrac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}\rho\right)+BY_0\left(\lambda\sqrt{\dfrac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}\rho\right)\right)\cdot \\ \qquad\qquad \cdot (C\cos(\lambda z)-D\sin(\lambda z)) \end{cases}$$

Щоб знайти невідомі константи та коефіцієнти застосуємо граничні умови.

$$\left.\frac{\partial P'}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\left.\frac{\partial P'}{\partial z}\right|_{z=H} = 0 \Rightarrow \sin(\lambda H) = 0 \Rightarrow \lambda_k = \frac{\pi k}{H}$$

$$\left.\frac{\partial P'}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = 0 \Rightarrow AJ_1\left(\lambda\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}R\right) = -BY_1\left(\lambda\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}R\right)$$

Отриманий розв'язок представимо у наступному вигляді

$$P'(\rho,z) = A\left(Y_1\left(\lambda\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}R\right)J_0\left(\lambda\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}\rho\right)-\right.$$

$$\left.-J_1\left(\lambda\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}R\right)Y_0\left(\lambda\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}\rho\right)\right)\cos(\lambda z)$$

Щоб знайти співвідношення для частоти хвилі ω, необхідно застосувати умову на вільній поверхні. Простіше за все це можна зробити при відсутності сили тяжіння.

2.5 Аксіально-симетричні інерційні хвилі в прямому циліндрі

Спростимо дану задачу тим, що не будемо враховувати силу тяжіння. Це справедливо, оскільки паливо в баках ракетоносіїв рухається із прискоренням, протилежним до прискорення вільного падіння. Розв'яжемо цей граничний випадок.

На вільній поверхні змінена функція тиску дорівнює нулю, а отже

$$P_k'(\rho,z)|_{\rho=R_0} = \\ = A\left(Y_1\left(\lambda_k\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}R\right)J_0\left(\lambda_k\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}R_0\right)-\right. \\ \left.-J_1\left(\lambda_k\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}R\right)Y_0\left(\lambda_k\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}R_0\right)\right)\cos(\lambda_k z)=0$$

Скоротимо рівняння і отримаємо

$$Y_1\left(\frac{\pi k}{H}\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}R\right)J_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi k}{H}\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}R\right)- \\ -J_1\left(\frac{\pi k}{H}\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}R\right)Y_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi k}{H}\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}R\right)=0$$

Розв'язок цього нелінійного рівняння і дає вираз можливих частот хвиль.

Нехай μ_k – розв'язки цього рівняння. Тоді невідомі частоти виражаються наступним чином:

$$\frac{\pi k}{H}\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1R}=\mu_k$$

$$\omega_k^2=\frac{4\Omega^2}{\left(\frac{\mu_k H}{\pi k R}\right)^2+1}$$

У наступному розділі представлено числовий розв’язок цього рівняння для конкретних параметрів циліндра.

3. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розглянемо прямий циліндр із висотою $H = 2$ м та радіусом $R = 1$ м. Тоді власні числа рівняння (2.3) можна обчислити як корені наступного нелінійного рівняння

$$Y_1(\mu_k)J_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_k\right) - J_1(\mu_k)Y_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_k\right) = 0$$

Розв’яжемо це рівняння графічно. Зобразимо графік функції $f(x) = Y_1(x)J_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) - J_1(x)Y_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$ та знайдемо його нулі.

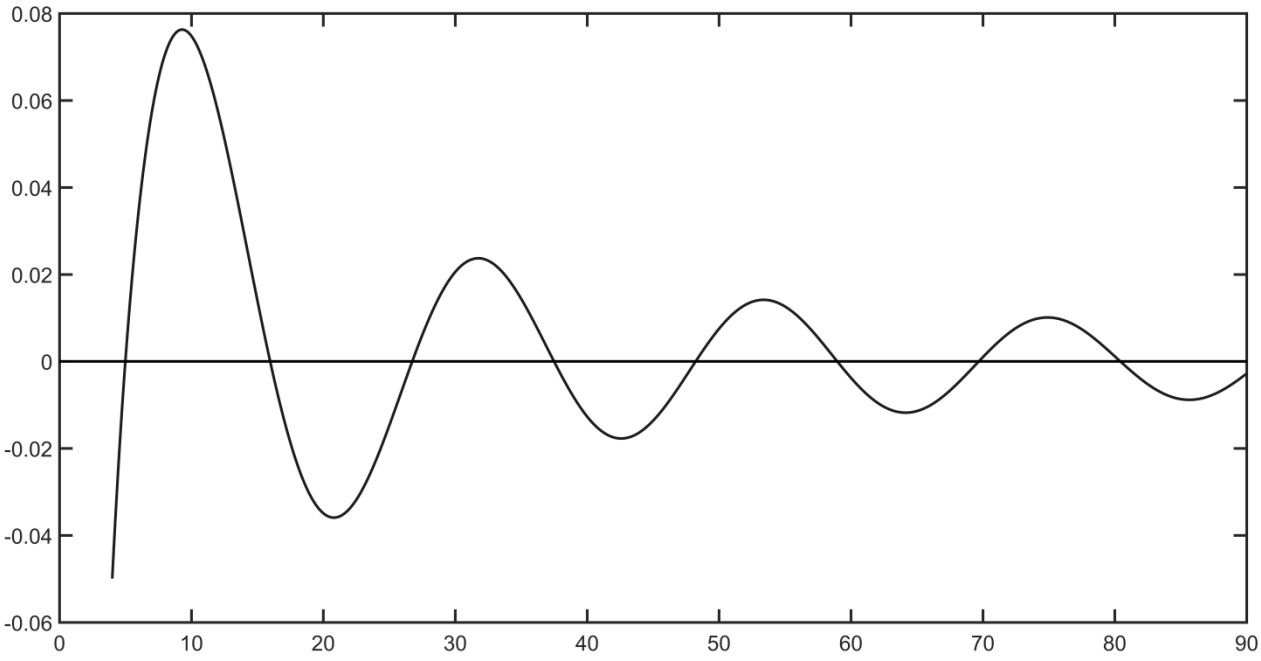


Рис. 3.1. Графік рівняння знаходження власних частот.

Представимо перші вісім коренів цього рівняння у таблиці.

k	μ_k
1	4.9941
2	15.9714
3	26.7447
4	37.4910
5	48.2282
6	58.9614
7	69.6924
8	80.4220

Таб. 3.1. Корені рівняння для знаходження власних частот

Тепер підставимо конкретні геометричні параметри в формулу

$$\omega_k^2 = \frac{4\Omega^2}{\left(\frac{\mu_k H}{\pi k R}\right)^2 + 1}$$

Нехай зовнішня кутова частота $\Omega = 1$ рад/с.

Отримуємо наступні результати, що представлені у таблиці 3.2.

k	ω_k^2
1	0.3601
2	0.1490
3	0.1204
4	0.1093
5	0.1033
6	0.0997
7	0.0972
8	0.0953

Таб. 3.2. Власні частоти системи, що обертається.

Як ми бачимо, дозволені власні частоти набагато менші за зовнішню частоту, тобто рівномірне обертання рідини дозволяє задати максимальне

значення частоти власних хвиль, що буде менше за зовнішню кутову частоту обертання.

Максимум частоти спостерігається при $k = 1$. Проаналізуємо цей випадок.

$$\omega_1^2 \approx \frac{4\Omega^2}{\left(\frac{H}{2\pi R}\right)^2 + 1}$$

Або

$$\left(\frac{H}{2\pi R}\right)^2 + 1 \approx \frac{4\Omega^2}{\omega_1^2}$$

Тобто ця величина залежить лише від співвідношення між висотою та радіусом циліндра.

ВИСНОВКИ

Дослідження розповсюдження хвиль в резервуарах з рідиною, що частково займає об’єм є надзвичайно важливою задачею в різних галузях науки та техніки, промисловості, тощо. Дуже часто ці резервуари знаходяться під дією постійної обертальної сили, що забезпечує більшу стабільність конструкцій. Основною задачею даного дослідження була ідентифікація власних хвиль, що виникають у прямому циліндрі під дією постійного обертання.

Використовувалася модель ідеальної рідини із постійною густиною. Через наявне обертання в рівняння Ейлера були включені центробіжна сила та сила Коріоліса. Центробіжну силу можна представити за допомогою градієнтного перетворення, а от із силою Коріоліса таке перетворення зробити не можна. Через це потік рідини не є безвихровим, що не дозволяє нам шукати розв’язок рівнянь ідеальної рідини за допомогою введення скалярного потенціалу.

Однак за наявності постійного обертання ми отримали диференціальне рівняння другого порядку для тиску. У даній роботі було використано наближення високих значень зовнішньої кутової частоти, що дозволяє розглядати вільну поверхню рідини як циліндричний шар.

Це рівняння було розв’язано у наближенні невагомості, тобто знайдено власні частоти аксіально-симетричних інерційних хвиль в прямому циліндрі.

Отримані аналітичні формули були використані для обчислення власних частот прямого циліндру із конкретними геометричними параметрами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. H. Olsen. “What is sloshing?” Seminar on Liquid Sloshing. Det Norske Veritas,1973

2. L. Khezzar, A. C. Seibi, A. Goharzadeh. Water Sloshing in Rectangular Tanks – An Experimental Investigation & Numerical Simulation. International Journal of Engineering (IJE), Vol. 3, No. 2. pp. P. 174-184, 2010.

3. R.A. Ibrahim, V.N. Pilipchuck, and T. Ikeda. Recent Advances In Liquid Sloshing Dynamics. Applied Mechanics Reviews, Vol. 54, No. 2, pp. 133-199, 2001.

4. R.A. Ibrahim. “Liquid Sloshing Dynamics” Cambridge University Press, New York, 2005.

5. H.N. Abramson, W.-H. Chu and L.R. Garza; Liquid sloshing in spherical tanks; AIAA J. 1, pp. 384- 389; 1963

6. H.N. Abramson; Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers; Applied Mechanics Reviews, 16, pp. 501 - 506; 1963

7. H.N. Abramson; The dynamic behavior of liquids in moving containers; NASA SP-106; 1966

8. A.T. Chwang, and K.H. Wang. “Nonlinear Impulsive Force on an Accelerating Container” J. of Fluids Eng., Vol. 106, pp. 233-240, 1984

9. G. Popov, S. Sankar, T.S. Sankar, and G.H. Vatitas. 'Liquid Sloshing In Rectangular Road Containers, Computers Fluids, Vol. 21, No. 4, pp. 551-569, 1992.

10. Wu, G.X., Ma, Q.W., Eatock Taylor, R. Numerical simulation of sloshing waves in a 3-D tank based on a finite element methods. Applied Ocean Research 20, pp. 337–355, 1998.

11. V. Gnitko, V. Naumenko, U. Ogorodnyk, E. Strelnikova. Coupled multi-domain BEM and FEM for fluid-structure interaction analysis. WIT Transaction on Modelling and Simulation, 2013, Vol.54, pp.33-44.

12. Gnitko V., Degtyariov K., Karaiev A. & Strelnikova E. Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells, WIT Transactions on Engineering Sciences, 126, WIT Press, pp.189-200, 2019. DOI: 10.2495/BE420171.

13. Gnitko V, Naumemko Y., Strelnikova E. Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles, International Journal of Applied Mechanics and Engineering. – 2017. – Vol. 22. – Issue 4. – P. 867-881, DOI: 10.1515/ijame-2017-0056

14. Choudhary N. & Bora S.N., Linear sloshing frequencies in the annular region of a circular cylindrical container in presence of a rigid baffle, Sadhana-Academy Proceedings in Engineering Sciences. Vol. 42(5), 2017, pp. 805–815.

15. А. Н. Лапко, А. А. Мелешко. Угловая стабилизация объекта, быстро вращающегося вокруг продольной оси. Космическая техника. Ракетное вооружение. 2018. Вып. 2 (116), с. 151-156.

16. Strauss S Space medicine at the NASA-JSC, neutral buoyancy laboratory. Aviat Space Environ Med. **79**(7): 732–733. (July 2008).

17. Landau, L.D., Lifshits, E.M.: Fluid Dynamics. Pergamon Press, Oxford (1987)