МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАУКОВО-НАВЧАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ

Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем бакалавр

«Дослідження температурних полів в неоднорідних середовищах»

Виконав: студент 4 курсу, групи НФ-43
Чучко Д.Є
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Прикладна фізика
енергетичних систем
Керівник: к. ф.-м. наук Лісіна О.Ю.

Рецензент:

Харків – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра інформаційних технологій у фізико-енергетичних системах
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) бакалавр
Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Руслан СУХОВ
підпис
"____"_____2020 року

З А В Д А Н Н Я

НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ

Чучко Дмитро Євгенович

1.Тема роботи «Дослідження температурних полів в неоднорідних середовищах» керівник роботи: Лісіна О.Ю. , кандидат фізико – математичних наук,

затверджені наказом по університету від 5 грудня 2020 року № 0210–05/2249.

2. Строк подання студентом роботи 06.06.2020

3. Перелік питань, які потрібно розробити:

1) провести аналіз методів побудови різницевих схем щодо вирішення диференційних рівнянь у частинних похідних;

2) ознайомитись із інтегро-інтерполяційним методом та вивчити алгоритм вирішення задачі теплопровідності;

3) розробити алгоритм розрахунку теплопровідності середовища, яке складається із декількох середовищ з різними коефіцієнтами теплопровідності;

4) провести обчислювальний експеримент.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми, узгодження, а також затвердження її на кафедрі
2	Робота над літературою та іншими джерелами
3	Затвердження теми на кафедрі
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6	Написання третього розділу
7	Завершення написання дипломної роботи (висновки та література)
8	Подача науковому керівнику
9	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
10	Попередній захист
11	Захист

5.Дата видачі завдання

Студент _____ Дмитро ЧУЧКО
підпис

Керівник роботи _____ Ольга ЛІСІНА
підпис

РЕФЕРАТ

Дмитро Чучко «Дослідження температурних полів в неоднорідних середовищах» Кваліфікаційна робота бакалавра прикладної фізики. - М.: ХНУ імені В. Н.Каразіна, 2020. - 45 с.

В даний час питання дослідження впливу нестаціонарних температурних полів в тілах кінцевих розмірів мають велике значення і привертають увагу фахівців з різних областей. Подібні питання розглядаються при вивченні багатьох технологічних процесів, супроводжуваних нагріванням або використовують нагрівання, таких як розробка та модернізація обпалюючих пристроїв, створення нових сплавів, для подальшого впровадження їх в різні конструкції та галузі. Великий інтерес представляють задачі теплопровідності для багатошарових середовищ, в яких всередині кожного шару фізико-механічні характеристики матеріалу непостійні. Тому виникає актуальність в розробці та дослідженні алгоритму теплопровідності середовища, яке складається із декількох середовищ з різними коефіцієнтами теплопровідності. Проведення обчислювального експерименту за допомогою чисельних методів моделювання фізичних процесів, для дослідження нестаціонарних температурних полів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ, ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ, МЕТОД КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЬ, ІНТЕГРО-ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ МЕТОД

РЕФЕРАТ

Дмитро Чучко «Исследование температурных полей в неоднородных средах» Кваліфікаційна робота бакалавра з прикладної фізики. – Х.: ХНУ імені В. Н.Каразіна, 2020. – 45 с.

В настоящее время вопросы исследования влияния нестационарных температурных полей в телах конечных размеров имеют большое значение и привлекают внимание специалистов из разных областей. Подобные вопросы рассматриваются при изучении многих технологических процессов, сопровождаемых нагреванием или используют нагрева, таких как разработка и модернизация обжигая устройств, создания новых сплавов, для дальнейшего внедрения их в различные конструкции и области. Большой интерес представляют задачи теплопроводности для многослойных сред, в которых внутри каждого слоя физико-механические характеристики материала непостоянны. Поэтому возникает актуальность в разработке и исследовании алгоритма теплопроводности среды, состоящее из нескольких сред с различными коэффициентами теплопроводности. Проведение вычислительного эксперимента с помощью численных методов моделирования физических процессов, для исследования нестационарных температурных полей.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ, ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ, ИНТЕГРО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД

ABSTRACT

Dmitry Chuchko “Study of temperature fields in inhomogeneous media” Qualification work of the bachelor of applied physics. – Kharkiv. – V.N. Karazin KhNU, 2020. – 45 p.

Currently, the issues of studying the influence of unsteady temperature fields in bodies of finite dimensions are of great importance and attract the attention of specialists from different fields. Similar issues are considered in the study of many technological processes accompanied by heating or use heating, such as the development and modernization of firing devices, the creation of new alloys, for their further implementation in various designs and fields. Of great interest are the problems of thermal conductivity for multilayer media in which the physical and mechanical characteristics of the material inside each layer are unstable. Therefore, there is a relevance in the development and study of the algorithm of thermal conductivity of the medium, consisting of several media with different coefficients of thermal conductivity. Carrying out a computational experiment using numerical methods for modeling physical processes to study unsteady temperature fields.

KEY WORDS: NON-STATIONARY TEMPERATURE FIELD, THERMAL CONDUCTIVITY, FINITE DIFFERENCE METHOD, INTEGRO-INTERPOLATION METHOD

ЗМІСТ

ВСТУП 8
1. АНАЛІЗ МЕТОДІВ ПОБУДОВИ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ЩОДО ВИРІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ 9
1.1 Метод кінцевих різниць 11
1.1.1 Теорема Тейлора в методі кінцевих різниць 11
1.1.1.1 Кінцево-різницеві апроксимації до частинних похідних 12
1.2 Кінцево-різницеві схеми 15
2. АЛГОРИТМ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ІНТЕГРО-ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМ МЕТОДОМ 18
2.1 Поняття апроксимації диференціальної крайової задачі різницевою схемою 18
2.2 Інтегро-інтерполяційний метод 20
2.3 Консервативна різницева схема для стаціонарної задачі теплопровідності 21
2.4 Алгоритм розрахунку теплопровідності середовища, яке складається із декількох середовищ з різними коефіцієнтами теплопровідності. Одновимірна нестаціонарна задача теплопровідності багатошарового середовища методом кінцевих різниць 23
2.5 Одновимірна нестаціонарна задача теплопровідності неявним інтегро-інтерполяційний методом 26
3. ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ 28
3.1 Дослідження температурних полів одновимірної нестаціонарної задачі теплопровідності багатошарового середовища методом кінцевих різниць 28
3.2 Дослідження температурних полів одновимірної нестаціонарної задачі теплопровідності багатошарового середовища неявним інтегро-інтерполяційний методом 33
ВИСНОВОК 39
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ 41
Додаток А 42
Додаток Б 45

ВСТУП

Актуальність теми. В даний час питання дослідження впливу нестаціонарних температурних полів в тілах кінцевих розмірів мають велике значення і привертають увагу фахівців з різних областей. Подібні питання розглядаються при вивченні багатьох технологічних процесів, супроводжуваних нагріванням або використовують нагрівання, таких як розробка та модернізація обпалюючих пристроїв, створення нових сплавів, для подальшого впровадження їх в різні конструкції та галузі. Великий інтерес представляють задачі теплопровідності для багатошарових середовищ, в яких всередині кожного шару фізико-механічні характеристики матеріалу непостійні. Рішення "подібних завдань часто пов'язане з великими труднощами в задоволенні умов сполучення для великої кількості шарів. Фізико-механічні характеристики багатошарових тіл можуть бути апроксимувати за допомогою безперервних функцій. Рішення багатьох практично важливих задач для неоднорідних тіл викликає великі труднощі. Коло робіт, присвячених задачам теплопровідності для неоднорідних тіл, досить вузьке. Причому в цих роботах теплопровідність визначаються або при впливі стаціонарних температурних полів, або в необмежених тілах (нескінченно довгих циліндрах, стрижнях, необмежених пластинах). Тому проблема вивчення нестаціонарних температурних полів в неоднорідних тілах кінцевих розмірів є актуальною.

Методи дослідження. В даній роботі було розроблено алгоритм оснований на методі кінцевих різниць та інтегро-інтерполяційному методі.

Мета роботи. Мета роботи полягає в розробці та дослідженні алгоритму теплопровідності середовища, яке складається із декількох середовищ з різними коефіцієнтами теплопровідності. Проведення обчислювального експерименту за допомогою чисельних методів моделювання фізичних процесів, для дослідження нестаціонарних температурних полів.

1. АНАЛІЗ МЕТОДІВ ПОБУДОВИ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ЩОДО ВИРІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Рівняння, що зв'язує невідому функцію $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, незалежні змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$ і частинні похідні від невідомої функції, називається диференціальним рівнянням в частинних похідних. Рішенням такого рівняння називається будь-яка функція $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка, будучи підставлена в рівняння замість невідомої функції та її частинних похідних, перетворює це рівняння в тотожність по незалежним змінним.

Одним з найважливіших класів диференціальних рівнянь в частинних похідних є рівняння другого порядку (*порядком рівняння* називають порядок старшої похідної, що входить в нього). Важливість даного класу задач обумовлена тим фактом, що математичними моделями багатьох процесів механіки (коливання струн, стрижнів, мембран і тривимірних об’ємів), фізики (електромагнітні коливання, поширення тепла або дифузія частинок в середовищі), гідро- і газодинаміки (різні види течій рідини і газу), а також багатьох інших областей знань є рівняння саме другого порядку [1].

Слід зазначити, що тільки деяку підмножину рівнянь зазначеного класу можна вирішити аналітично (наприклад, в разі постійних коефіцієнтів). Більшість же завдань, які описують явища і процеси оточуючого нас світу, допускають лише чисельне рішення[2].

Так як не існує єдиного методу чисельного рішення диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку, слід розглянути їх класифікацію, що дозволяє використовувати єдині методи для чисельного рішення кожного з підтипів цих рівнянь.

Розглянемо рівняння другого порядку загального вигляду:

$$\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0(x)u = f(x),$$

де $u = u(x_1, \dots, x_n)$. При цьому будемо вважати, що матриця коефіцієнтів симетрична, тобто $A_{ik}(x) = A_{ki}(x)$ (це фактично вимога незалежності змішаних похідних від порядку диференціювання). Далі будемо називати цю матрицю матрицею старших коефіцієнтів. У зв'язку з цим зауваженням будемо говорити про матрицю старших коефіцієнтів в певній точці. Вважаємо, що матриця старших коефіцієнтів є матрицею деякої квадратичної форми. Цю форму можна привести до нормального вигляду, тобто діагонального вигляду з коефіцієнтами, рівними по модулю нулю або одиниці. Число позитивних коефіцієнтів називається позитивним індексом інерції квадратичної форми, число негативних коефіцієнтів - негативним індексом форми, а число нульових коефіцієнтів - дефектом форми. Рівняння можна класифікувати за допомогою цих трьох чисел, які і будемо вказувати в порядку їх перерахування: (α, β, γ). Сума цих трьох чисел дорівнює кількості незалежних змінних. Множення всього рівняння на мінус одиницю призведе до того, що всі елементи матриці старших коефіцієнтів поміняють знак. Отже, позитивний і негативний індекси відповідної форми поміняються ролями. Таким чином, рівняння (α, β, γ) і (α, β, γ) належать до одного типу класифікації [3].

Перелік основних класів рівнянь:

- Гіперболічне – $(n-1, 1, 0); (1, n-1, 0);$
- Параболічне – $(n-1, 0, 1); (0, m-1, 1);$
- Еліптичне – $(n, 0, 0); (0, n, 0).$

Рівняння гіперболічне, якщо дефект відповідної квадратичної форми дорівнює нулю, а один з індексів дорівнює одиниці. Рівняння параболічне, якщо його форма має рівний одиниці дефект і всі коефіцієнти одного знака. Рівняння еліптичне, якщо дефект його форми дорівнює нулю і всі коефіцієнти мають однаковий знак.

В даній роботі буде розглянуте рівняння параболічного типу, як класичний приклад рівняння теплопровідності.

Існують такі методи для чисельного рішення диференціальних рівнянь в приватних похідних:

- Метод кінцевих різниць;
- Метод кінцевих елементів;
- Метод кінцевих (скінченних) об’ємів.

1.1 Метод кінцевих різниць

Метод кінцевих різниць (МКР) працює шляхом заміни області, в якій визначені незалежні змінні в диференціальних рівняннях в частинних похідних, кінцевою сіткою точок, в яких апроксимується залежна змінна. Частинні похідні в кожній точці сітки апроксимуються з сусідніх значень з використанням теореми Тейлора[4].

1.1.1 Теорема Тейлора в методі кінцевих різниць

Нехай $U(x)$ має n безперервних похідних на інтервалі (a, b). Тоді для $a < x_0, x_0 + h < b$,

$$U(x_0 + h) = U(x_0) + hU_x(x_0) + h^2 \frac{U_{xx}(x_0)}{2!} + \cdots + h^{n-1} \frac{U_{n-1}(x_0)}{(n-1)!} + O(h^n), \quad (1.0)$$

де:

- $U_x = \frac{\partial U}{\partial x}, U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U_{(n-1)} = \frac{\partial^{n-1} U}{\partial x^{n-1}}$ – частинні похідні.
- $U_x(x_0)$ – похідна U по x, оцінена при $x = x_0$.
- $O(h^n)$ – невідома помилка.

Звичайна інтерпретація теореми Тейлора каже, що, якщо ми знаємо значення U та значення її похідних в точці x_0, тоді ми можемо записати рівняння (1.1) для його значення у сусідній точці $x_0 + h$. Цей вираз містить невідому

величину, що записана як $O(h^n)$. Якщо ми відкинемо $O(h^n)$ у (1.1) (тобто відсічемо праву частину рівняння (1.1)), то отримаємо приближення до $U(x_0 + h)$. Помилка в цьому приближенні – $O(h^n)$[5].

В методі кінцевих різниць ми знаємо значення U в точках сітки та хочемо замінити частинні похідні на апроксимації в цих точках. Це робиться шляхом інтерпретації (1.1). В методі кінцевих різниць і x_0 і $x_0 + h$ є точками сітки, а $U(x_0)$ та $U(x_0 + h)$ відомі. Це дозволяє нам переставити рівняння (1.1) для отримання так званих кінцево-різницевих апроксимацій до похідних, що мають помилки $O(h^n)$[5].

1.1.2 Кінцево-різницеві апроксимації до частинних похідних

Відсікання (1.1) після першого похідного члена дає:

$$U(x_0 + h) = U(x_0) + hU_x(x_0) + O(h^2) \tag{1.2}$$

Перестановка (1.2) дає:

$$U_x(x_0) = \frac{U(x_0 + h) - U(x_0)}{h} + \frac{O(h^2)}{h} = \frac{U(x_0 + h) - U(x_0)}{h} + O(h) \tag{1.3}$$

Нехтуючи терміном $O(h)$, маємо:

$$U_x(x_0) \approx \frac{U(x_0 + h) - U(x_0)}{h} \tag{1.4}$$

Рівняння (1.4) називається кінцево-різницева апроксимація першого порядку до $U_x(x_0)$, оскільки помилка апроксимації $O(h)$ залежить від степені h. Ця апроксимація називається прямою кінцево-різницевою апроксимацією, оскільки ми починаємо з x_0 та йдемо вперед до точки $x_0 + h$. h називається розміром кроку.

Побудуємо загальні кінцево-різницеві апроксимації для загальних частинних похідних. Для простоти припустимо, що U є функцією тільки двох змінних, t і x. Ми апроксимуємо частинні похідні від U по x. Оскільки t підтримується постійною, U фактично є функцією єдиної змінної x, тому ми можемо використовувати формулу Тейлора (1.1) [5], де звичайні похідні члени тепер є частинними похідними, а аргументи (t, x) замість x. Нарешті,

ми замінимо розмір кроку h на Δx (щоб вказати на зміну x) так, щоб (1.1) стало:

$$U(t, x_0 + \Delta x) = U(t, x_0) + \Delta x U_x(t, x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} U_{xx}(t, x_0) + \cdots + \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} U_{(n-1)}(t, x_0) + O(\Delta x^n) \tag{1.5}$$

Відсікаючи (1.5) до $O(\Delta x^2)$ дає:

$$U(t, x_0 + \Delta x) = U(t, x_0) + \Delta x U_x(t, x_0) + O(\Delta x^2) \tag{1.6}$$

Тепер виведемо деякі кінцево-різницеві апроксимації до частинних похідних. Перестановка (2.5) дає:

$$U_x(t, x_0) = \frac{U(t, x_0 + \Delta x) - U(t, x_0)}{\Delta x} - \frac{O(\Delta x^2)}{\Delta x}$$

$$U_x(t, x_0) = \frac{U(t, x_0 + \Delta x) - U(t, x_0)}{\Delta x} - O(\Delta x) \tag{1.7}$$

Рівняння (1.7) виконується в будь-якій точці (t, x_0). У численних схемах для вирішення рівнянь в приватних похідних ми обмежені сіткою дискретних значень $x, x_1, x_2, \ldots, x_N$ і дискретних t рівнів $0 = t_0, t_1, \ldots$.[6] Ми будемо припускати постійний інтервал сітки, Δx, в x, так що $x_{i+1} = x_i + \Delta x$. Обчислення рівняння (1.6) для точки (t_n, x_i) на сітці дає:

$$U_x(t_n, x_i) = \frac{U(t_n, x_{i+1}) - U(t_n, x_i)}{\Delta x} - O(\Delta x) \tag{1.8}$$

Ми будемо використовувати загальний запис нижнього / верхнього індексу:

$$U_i^n = U_x(t_n, x_i) \tag{1.9}$$

так що при відкиданні терміна помилки $O(\Delta x)$, (1.7) становиться:

$$U_x(t_n, x_i) \approx \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x} \tag{1.10}$$

(1.9) є прямою кінцево-різницевою апроксимацією першого порядку до $U_x(t_n, x_i)$, яке було виведено раніше в (1.4). Тепер виведемо ще одну кінцево-різницеву апроксимацію до $U_x(t_n, x_i)$. Заміна Δx на $-\Delta x$ в (1.6) дає:

$$U(t, x_0 - \Delta x) = U(t, x_0) - \Delta x U_x(t, x_0) + O(\Delta x^2) \tag{1.11}$$

Оцінка (2.71) в (t_n, x_i) і перестановка, як раніше, дає:

$$U_x(t_n, x_i) \approx \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} \tag{1.12}$$

(1.12) є зворотною кінцево-різницевою апроксимацією першого порядку до $U_x(t_n, x_i)$.

Перші дві кінцево-різницеві апроксимації мають перший порядок по x, але ми можемо збільшити порядок (і, таким чином, зробити наближення більш точним), взявши більше членів з ряду Тейлора [6]. Усічення (1.5) до $O(\Delta x^3)$, потім заміна Δx на $-\Delta x$ і віднімання цього нового виразу з (1.5) і оцінка в (t_n, x_i) дає, після деяких обчислень:

$$U_x(t_n, x_i) \approx \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} \tag{1.18}$$

(1.18) є центральною кінцево-різницевою апроксимацією другого порядку до $U_x(t_n, x_i)$.

Можна побудувати кінцево-різницеві апроксимації ще більш високого порядку до U_x, взявши ще більше членів з ряду Тейлора, але апроксимацій другого порядку до похідних першого порядку буде досить.

Багато диференціальних рівнянь в частинних похідних містять частинні похідні другого порядку (і вище), тому потрібно вивести їх наближення. Звернемо увагу на незмішані частинні похідні другого порядку, тобто U_{xx}. Усічення (1.5) до $O\ (\Delta x^4)$ дає:

$$U(t, x_0 + \Delta x) = U(t, x_0) + \Delta x U_x(t, x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} U_{xx}(t, x_0) + \frac{\Delta x^3}{3!} U_{xxx}(t, x_0) + O\ (\Delta x^4) \tag{1.19}$$

Заміна Δx на $-\Delta x$ в (1.19) дає:

$$U(t, x_0 - \Delta x) = U(t, x_0) - \Delta x U_x(t, x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} U_{xx}(t, x_0) - \frac{\Delta x^3}{3!} U_{xxx}(t, x_0) + O(\Delta x^4) \quad (1.20)$$

Додавання (1.19) до (1.20) дає:

$$U(t, x_0 + \Delta x) + U(t, x_0 - \Delta x) = 2\,U(t, x_0) + \Delta x^2 U_{xx}(t, x_0) + O(\Delta x^4) \quad (1.21)$$

Оцінка (1.21) в (t_n, x_i) та використання дискретних позначень дає:

$$U_{i+1}^n + U_{i-1}^n = 2\,U_i^n + \Delta x^2 U_{xx}(t_n, x_i) + O(\Delta x^4) \quad (1.22)$$

Перестановка (1.12) і відкидання помилки $O(\Delta x 2)$ дає:

$$U_{xx}(t_n, x_i) = \frac{U_{i+1}^n - 2\,U_i^n + U_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (1.23)$$

(1.23) є симетричною кінцево-різницевою схемою другого порядку до $U_{xx}(t_n, x_i)$. Усі виведені кінцево-різницеві апроксимації до частинних похідних першого та другого порядку наведені у таблиці 1.1:

Таблиця 1

Кінцево-різницеві апроксимації для частинних похідних

Частинна похідна	Кінцево-різницева апроксимація	Тип	Порядок
$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$	$\frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x}$	Пряма	Перший для *x*
$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$	$\frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x}$	Зворотна	Перший для *x*
$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$	$\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x}$	Центральна	Перший для *x*
$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U_{xx}$	$\frac{U_{i+1}^n - 2\,U_i^n + U_{i-1}^n}{\Delta x^2}$	Симетрична	Другий для *x*

1.2 Кінцево-різницеві схеми

Явними схемами називаються такі різницеві схеми для еволюційних рівнянь, коли дані на наступному шарі за часом знаходяться безпосередньо з

даних на попередньому шарі без рішення алгебраїчних систем рівнянь. У такій схемі явно визначається поле температури і не потрібно вирішувати систему рівнянь для визначення коефіцієнтів прогону[7].

Якщо ж на верхньому часовому шарі для визначення значень сіткової функції необхідно вирішувати систему алгебраїчних рівнянь, то схема називається *неявною*.

Явна різницева схема є умовно стійкою і вимагає спеціальних заходів з оцінки можливості її використання, наприклад вибору кроку інтегрування за часом. Неявна ж схема завжди є стійкою.

Кінцево-різницеві апроксимації для частинних похідних першого порядку для явної та неявної схем однакові [7].

Кінцево-різницева апроксимація для частинних похідних другого порядку в явній різницевій схемі виглядає так:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1}^n - 2\,U_i^n + U_{i-1}^n}{\Delta x^2} \tag{1.24}$$

Кінцево-різницева апроксимація для частинних похідних другого порядку в неявній різницевій схемі виглядає так:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2\,U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \tag{1.25}$$

Розглянемо неявно-явну схему з вагами для найпростішого рівняння теплопровідності:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \theta\alpha^2 \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2\,U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta)\alpha^2 \frac{U_{i+1}^n - 2\,U_i^n + U_{i-1}^n}{\Delta x^2} \tag{1.26}$$

де θ - вага неявної частини кінцево-різницевої схеми, $1-\theta$ - вага для явної частини, причому $0 \le \theta \le 1$. При $\theta = 1$ маємо повністю неявну схему, при $\theta = 0$ - повністю явну схему, і при $\theta = 1/2$ - схему *Кранка-Ніколсона*.

Для схеми Кранка-Ніколсона ($\theta = 1/2$) порядок апроксимації становить $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$, тобто на один порядок за часом вище, ніж звичайні явна або неявна схеми[7].

Таким чином, схема Кранка-Ніколсона (1.14) при $\theta = 1/2$ абсолютно стійка і має другий порядок апроксимації за часом і просторовою змінною x.

2. АЛГОРИТМ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ІНТЕГРО- ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМ МЕТОДОМ

2.1 Поняття апроксимації диференціальної крайової задачі різницевою схемою

Метод кінцевих різниць є одним з найбільш універсальних методів вирішення крайових задач. Застосування методу передбачає побудову різницевої схеми, яка представляє собою деякий дискретний аналог вихідної (безперервної) крайової задачі. Рішенням різницевої крайової задачі є так звана сіткова функція, яка визначена в кінцевому числі точок даної області зміни незалежних змінних. При практичному застосуванні методу скінченних різниць важливо мати можливість зменшення відмінності між наближеним рішенням і точним рішенням вихідної задачі до рівня допустимої похибки. Така можливість у першу чергу пов'язується з властивістю збіжності різницевої схеми. Властивість збіжності є найважливішим властивістю різницевої схеми. Суть властивості збіжності полягає в скільки бажаному наближенні рішення різницевої задачі до вирішення вихідної диференціальної задачі математичної фізики при необмеженій подрібненні сітки. У той же час властивість збіжності тісно пов'язане зі властивостями апроксимації і стійкості різницевої схеми, причому при певних умов збіжність є наслідком апроксимації і стійкості[8].

Крайова задача математичної фізики записується в наступній операторній формі:

$$Lu = f\ , u \in \widetilde{U} \subset U, f \in F \tag{2.1}$$

де u - шукане рішення крайової задачі;

L - диференційний оператор крайової задачі;

U - функціональний простір, якому належить рішення і;

$\widetilde{U}$ - область визначення оператора L;

f - права частина операційного рівняння, що представляє собою упорядкований набір правих частин диференціального рівняння і крайових умов задачі математичної фізики;

Для вирішення крайової задачі (2.1) будуємо таку різницеву схему:

$$L_h u_h = f_h\ , u_h \in \widetilde{U_h} \in U_h\ , f_h \in F_h \tag{2.2}$$

L_h - оператор, який представляє собою сітковий аналог диференціального оператора L.

u_h - сіткова функція, яка є шуканим рішенням різницевої крайової задачі.

f_h - сітковий аналог правій частині f рівняння (2.1).

$\widetilde{U_h}$ - область визначення оператора L_h.

U_h - лінійний простір сіткових функцій, якому належить функція u_h.

F_h - лінійне простір сіткових об'єктів, що мають ту ж структуру, що і f_h.

Форма (2.1) являє собою символічний операційний запис крайової задачі математичної фізики, який включає в себе як диференціальне рівняння, так і крайові умови [8]. Для крайової задачі теплопровідності маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x,t),\ x \in [0,l], t \in [0,T] \\ u|_{t=0} = \psi(x),\ \ x \in [0,l] \\ u|_{x=0} = \alpha(t),\ \ u|_{x=l} = \beta(t),\ \ t \in (0,T] \end{cases} \tag{2.3}$$

В операторній формі маємо:

$$Lu = \begin{pmatrix} L^1 u \\ L^2 u \\ L^3 u \\ L^4 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} \\ u|_{x=0} \\ u|_{x=l} \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x,t) \\ \psi(x) \\ \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Скорочений запис різницевої схеми, що об'єднує кілька сіткових співвідношень:

$$L_h u_h = \begin{pmatrix} L_h^1 u_h \\ L_h^2 u_h \\ \cdots \\ L_h^n u_h \end{pmatrix}, f_h = \begin{pmatrix} f_h^1 \\ f_h^2 \\ \cdots \\ f_h^n \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Розглядаючи одне з сіткових співвідношень, включених в схему $L_h^s u_h^s = f_h^s$ s=1,n фіксуємо вузол (x_i, y_j, t_k) сітки,тоді:

$$\delta f_h^s|_{x_i,y_j,t_k} = \{L_h^s[u]_h - f_h^s\}_{x_i,y_j,t_k} - \text{похибка локальної апроксимації} \tag{2.6}$$

План знаходження порядків апроксимації різницевої схеми:

1) Вибрати одне з сіткових співвідношень (2,5) схеми (2,2). Зафіксувати деякий вузол (x_i, y_j, t_k) сітки, в якому співвідношення (2,5) визначено. Розкласти всі функції, що входять у вираз локальної похибки апроксимації в околиці вузла (x_i, y_j, t_k) , використовуючи формулу Тейлора.

$$\delta f_h^s|_{x_i,y_j,t_k} = \{L_h^s[u]_h - f_h^s\}_{x_i,y_j,t_k} \quad (2.6)$$

2) Підставити отримані розкладання в вираз (2,6), провести спрощення, а потім виділити ненульові складові найменших порядків щодо кроків дискретизації h_x, h_y, h_t. Порядки цих доданків будуть порядками локальної апроксимації співвідношення (2.5) в обраному вузлі. Тут необхідно врахувати, що функція і є рішенням рівняння (2.1) і, отже, звертає його в тотожність, яке доцільно використовувати при проведенні спрощень.
3) Знайти порядки локальної апроксимації для кожного з співвідношень 2.5) схеми (2.2) у відповідних їм вузлах. Потім, використовуючи визначення норми в просторі F_h, записати вираз для похибки апроксимації схеми (2.2)

$$||\delta f_h||_{F_h} = ||L_h[u]_h - f_h||_{F_h} \quad (2.7)$$

Аналізуючи вираз (2.7), встановлюємо порядки апроксимації схеми, виділивши складові найменших порядків щодо кроків дискретизації.

2.2 Інтегро-інтерполяційний метод

У завданнях математичної фізики часто виходять із законів збереження субстанції (енергії, маси та ін.) В диференціальної формі. Однак, диференціальна форма може давати коректний опис процесу не завжди. Інтегральна ж форма позбавлена цього недоліку. Диференціальні рівняння математичної фізики виходять так: розглядають малий обсяг речовини і для нього записують закон збереження, він має інтегральну форму для цього обсягу. Якщо підінтегральний вираз буде містити розривні в деяких точках функції, то інтегральна форма все ж буде коректною. Оскільки диференціальна форма отримана в припущенні, що всі функції, що входять в підінтегральний вираз безперервні по змінної інтегрування, то ця форма, взагалі кажучи, не описує фізичного процесу в точках розриву. Отже, якщо для опису процесу використовуються розривні функції, то для
побудови різницевої схеми доцільно виходити з інтегральної форми закону збереження. Відомо, що формальне використання диференціальної форми закону збереження в зазначеному випадку може призводити до так званої «помилкової збіжності», коли з подрібненням сітки схема сходиться, але не

до вирішення задачі математичної фізики. Різницеві схеми, при побудові яких використовувалися інтегральні форми законів збереження, називають консервативними [1].

2.3 Консервативна різницева схема для стаціонарної задачі теплопровідності

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u + \varphi(x) = 0, \;\; 0 \le x \le l \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases} \tag{2.1}$$

Вважаємо, що функції $k(x),\ q(x)$ та $\varphi(x) -$ кусочно безперервні, причому $k(x) \ge a > 0$.

Для побудови різницевої схеми скористаємося сіткою:

$$x_i = ih, i = \overline{0, I}, h = \frac{l}{I}$$

Запишемо інтегральну форму рівняння балансу тепла:

$$\frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\left(\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u(x) + \varphi(x)\right)dx = \frac{\omega\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) - \omega\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)}{h} -$$
$$\frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x)dx + \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi(x)dx = 0 \tag{2.2}$$

$\omega(x) = -k(x)\frac{du}{dx} -$ потік тепла через перетин, відповідне значенню x.

Вважаючи, що функція u(x) непреривна, а q(x) інтегруюча тоді:

$$\frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x)dx \cong u(x_i)q_i$$

$$q_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)dx \tag{2.3}$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi(x)dx \qquad (2.4)$$

$k(x) \neq 0$ звідси

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\omega(x)}{k(x)} \qquad (2.5)$$

Інтегруємо (2.5) в межах від x_{i-1} до x_i

$$\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{du}{dx}dx = -\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\omega(x)}{k(x)}dx$$

$$\frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{h} = -\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\omega(x)}{k(x)}dx \qquad (2.6)$$

Оскільки функція $\omega(x)$ неперервна, а $k(x)$ інтегрована, причому $k(x) \geq a > 0$, то можемо записати наступну наближену рівність:

$$\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\omega(x)}{k(x)}dx \cong \omega(x_{i-1/2})\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}$$

$$\frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{h} \cong -\omega(x_{i-1/2})\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}$$

$$\omega(x_{i-1/2}) = -a_i\frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{h},\ a_i = \left[\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\right]^{-1} \qquad (2.7)$$

Врахуємо в рівнянні (2.2) вираження (2.4), (2.5), (2.7), а також додамо сіткові аналоги граничних умов[9]. В результаті отримаємо наступну різницеву схему:

$$\begin{cases} \frac{1}{h}\left\{a_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - a_i\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right\} - q_iu_i + \varphi_i = 0,\ i = \overline{1, I-1} \\ u_0 = \alpha \qquad\qquad u_I = \beta \end{cases} \qquad (2.8)$$

Схема (2.8) отримана на основі інтегрального рівняння балансу тепла, а тому є консервативною.

2.4 Алгоритм розрахунку теплопровідності середовища, яке складається із декількох середовищ з різними коефіцієнтами теплопровідності. Одновимірна нестаціонарна задача теплопровідності багатошарового середовища методом кінцевих різниць

Розглянемо чисельний розв'язок рівняння теплопровідності з крайовими умовами. Аналізуємо теплопередачу через плоску середу. На лівій та правій межі задаємо граничні умови першого, другого роду та четвертого роду на кордонах дотику шарів[10].

Математична постановка задачі буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \rho_1 C_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial t} = k_1 \dfrac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, & 0 < x < x^1 \\ \rho_2 C_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial t} = k_2 \dfrac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, & x^1 < x < x^2 \\ \rho_3 C_3 \dfrac{\partial T_3}{\partial t} = k_3 \dfrac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}, & x^2 < x < L \end{cases} \tag{2.9}$$

$$t > 0, \qquad 0 < x < L$$

$$t = 0, \qquad T = T_0$$

$$x = 0, \qquad T = T_{lv}$$

$$x = L, \qquad T = T_{pr}$$

$$T_1(t, x^1) = T_2(t, x^1)$$

$$T_2(t, x^1) = T_3(t, x^2)$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial t}|_{x=x^1} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial t}|_{x=x^1}$$

$$= -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial t}|_{x=x^1} = -k_3 \frac{\partial T_3}{\partial t}|_{x^1=x^2}$$

На кордонах $x = 0$ і $x = L$ розглядаються граничні умови першого роду. Принциповим моментом є дослідження граничних умов IV роду в точці контакту пластин. Рішення даного завдання проводиться чисельно на основі неявної різницевої схеми. Гранична умова IV роду використовується для визначення прогоночних коефіцієнтів в точках x^1 та x^2.

Алгоритм рішення сформульованої крайової задачі можна представити таким чином. Спочатку проводимо апроксимацію диференціального рівняння кінцевими різницями, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку вирішуємо методом прогонки.

При знаходженні прогоночних коефіцієнтів в області $0 < x < x^1$ використовуємо характеристики першого середовища, в області $x^1 < x < x^2$ використовуємо характеристики другого середовища, в області $x^2 < x < L$ використовуємо характеристики третього середовища. В точках $x = x^1,\ x = x^2$ необхідно використовувати граничні умови IV роду.

Виведемо прогоночні коефіцієнти в точці контакту двох середовищ:

$$T_{1,i} = T_{2,i}$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial t}\Big|_{x=x^1} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial t}\Big|_{x=x^1}$$

Аналізуємо апроксимацію першого порядку щодо кроку по просторовій координаті при $i < i^1, T = T_1;\ i > i^1, T = T_2$:

$$T_{1,i^1} = T_{2,i^1} \tag{2.10}$$
$$-k_1 \frac{T_{1,i^1} - T_{1,i^1-1}}{h} = -k_2 \frac{T_{1,i^1+1} - T_{2,i^1}}{h}$$
$$T_{1,i^1} = T_{2,i^1} \equiv T_{i^1}$$

Використовуючи прогоночні співвідношення

$$T_{i^1} = \alpha_{i^1-1} T_{i^1} + \beta_{i^1-1}$$

$$T_{i^1} - \alpha_{i^1-1} T_{i^1} - \beta_{i^1-1} = \frac{k_2}{k_1} T_{i^1+1} - \frac{k_2}{k_1} T_{i^1}$$

Або

$$T_{i^1} = \frac{k_2}{k_2 + k_1(1 - \alpha_{i^1-1})} T_{i^1+1} + \frac{k_1 \beta_{i^1-1}}{k_2 + k_1(1 - \alpha_{i^1-1})}$$

Звідси

$$\begin{cases} \alpha_{i^1} = \dfrac{k_2}{k_2 + k_1(1 - \alpha_{i^1-1})} \\ \beta_{i^1} = \dfrac{k_1\beta_{i^1-1}}{k_2 + k_1(1 - \alpha_{i^1-1})} \end{cases} \tag{2.11}$$

У разі ж апроксимації другого порядку щодо кроку по просторовій координаті отримаємо:

$$\begin{cases} \alpha_{i^1} = \dfrac{2a_1a_2tk_2}{2a_1a_2tk_2\left(k_2+k_1\left(1-\alpha_{i1_{-1}}\right)\right)+h^2(k_1a_2+k_2a_1)} \\ \beta_{i^1} = \dfrac{2a_1a_2tk_1\beta_{i^1_{-1}}+h^2(k_1a_2+k_2a_1)T_i^n}{2a_1a_2tk_2\left(k_2+k_1\left(1-\alpha_{i1_{-1}}\right)\right)+h^2(k_1a_2+k_2a_1)} \end{cases}, \tag{2.12}$$

Далі аналізуємо апроксимацію першого порядку щодо кроку по просторовій координаті при $i^1 < i^2, T_1 = T_2;\ i^1 > i^2, T_1 = T_3$:

$$\begin{gathered} T_{2,i^2} = T_{3,i^2} \\ -k_2\frac{T_{2,i^2} - T_{2,i^2-1}}{h} = -k_3\frac{T_{2,i^2+1} - T_{3,i^2}}{h} \\ T_{2,i^2} = T_{3,i^2} \equiv T_{i^2} \end{gathered} \tag{2.13}$$

Використовуючи прогоночні співвідношення

$$T_{i^2} = \alpha_{i^2-1}T_{i^2} + \beta_{i^2-1}$$

$$T_{i^2} - \alpha_{i^2-1}T_{i^2} - \beta_{i^2-1} = \frac{k_3}{k_2}T_{i^2+1} - \frac{k_3}{k_2}T_{i^2}$$

Або

$$T_{i^1} = \frac{k_3}{k_3 + k_2(1 - \alpha_{i^2-1})}T_{i^2+1} + \frac{k_2\beta_{i^2-1}}{k_3 + k_2(1 - \alpha_{i^2-1})}$$

Звідси

$$\begin{cases} \alpha_{i^2} = \dfrac{k_3}{k_3 + k_2(1 - \alpha_{i^2-1})} \\ \beta_{i^1} = \dfrac{k_2\beta_{i^2-1}}{k_3 + k_2(1 - \alpha_{i^2-1})} \end{cases} \tag{2.14}$$

,

У разі ж апроксимації другого порядку щодо кроку по просторовій координаті отримаємо:

$$\begin{cases} \alpha_{i^1} = \dfrac{2a_2a_3tk_3}{2a_2a_3tk_3\left(k_3 + k_2(1-\alpha_{i^2-1})\right) + h^2(k_2a_3 + k_3a_2)} \\ \beta_{i^1} = \dfrac{2a_2a_3tk_2\beta_{i^2-1} + h^2(k_2a_3 + k_3a_2)T_i^n}{a_2a_3tk_3\left(k_3 + k_2(1-\alpha_{i^2-1})\right) + h^2(k_2a_3 + k_3a_2)} \end{cases} \quad (2.15)$$

Отже, спочатку знаходять прогоночні коефіцієнти для першої середовища, на кордоні i^1 , далі знаходять прогоночні коефіцієнти для другого середовища, на кордоні i^2, далі визначають прогоночні коефіцієнти для третього середовища.

2.5 Одновимірна нестаціонарна задача теплопровідності неявним інтегро-інтерполяційний методом

Неявним інтегро-інтерполяційним методом називається метод балансу. Використовуючи закони збереження будуємо кінцево-різнісні формули для задачі теплопровідності середовища з різними коефіцієнтом теплопровідності[11].

$$T_t = (\alpha^2 T_x)_x \quad (2.16)$$
$$\alpha^2 = \frac{k(x)}{\rho C}$$

Вибираємо прямокутну сітку для наближеного рішення. Інтегруючи по осередку диференційне рівняння, приводячи до інтегральної форми:

$$0 = \int_{t_n}^{t_m+1} dt \int_{x_n-1/2}^{x_n+1/2} dx(T_t - (\alpha^2 T_x)_x) = \int_{x_n-\frac{1}{2}}^{x_n+\frac{1}{2}} dx(T^{m+1} - T^m) - \quad (2.17)$$
$$- \int_{t_n}^{t_m+1} dt\left((\alpha^2 T_x)_{n+\frac{1}{2}} - (\alpha^2 T_x)_{n-\frac{1}{2}}\right)$$

Апроксимуємо підінтегральну функцію многочленом нульового ступеня, який підраховано в єдиному квадратному вузлі, розташованому по середині відрізка інтегрування. Тоді за законом збереження маємо:

$$\bar{x} \equiv \frac{x_i + x_f}{2} \Longrightarrow \int_{x_i}^{x_f} dx f(x) \approx \left(x_f - x_i\right) f(\bar{x}) = \{y \equiv f(\bar{x})\} = \left(x_f - x_i\right) y \quad (2.18)$$

Використовуючи для першої частини інтегралу формулу середніх, а для другої формулу прямокутників перетворюємо вираз:

$$y \equiv T(\bar{x}) \Longrightarrow \int_{x_n - \frac{1}{2}}^{x_n + \frac{1}{2}} dx(T^{m+1} - T^m) \approx (y_n^{m+1} - y_n^m)(x_{n+\frac{1}{2}} - x_{n-\frac{1}{2}}) \quad (2.19)$$

$$\tau \equiv t_{m+1} - t_m \Longrightarrow \int_{t_n}^{t_m + 1} dt(\,(\alpha^2 T_x)_{n+\frac{1}{2}} - (\alpha^2 T_x)_{n-\frac{1}{2}}) \approx \tau((\alpha^2 y_x)_{n+\frac{1}{2}}^{m+1} -$$

$$-(\alpha^2 y_x)_{n-\frac{1}{2}}^{m+1})$$

Замінюючи похідні кінцево – різносними виразами, використовуючи рівномірність сітки:

$$x_{n+\frac{1}{2}} - x_{n-\frac{1}{2}} \equiv h \quad (2.20)$$

$$(y_x)_{n+\frac{1}{2}}^{m+1} \approx \frac{y_{n+1}^{m+1} - y_n^{m+1}}{h} \Longrightarrow (y_n^{m+1} - y_n^{m+1})h$$

$$= \frac{\tau}{h}((\alpha^2)_{n+\frac{1}{2}}^{m+1}(y_{n+1}^{m+1} - y_n^{m+1}) -$$

$$-(\alpha^2)_{n-\frac{1}{2}}^{m+1}(y_{n+1}^{m+1} - y_n^{m+1}))$$

Кінцева формула має вигляд:

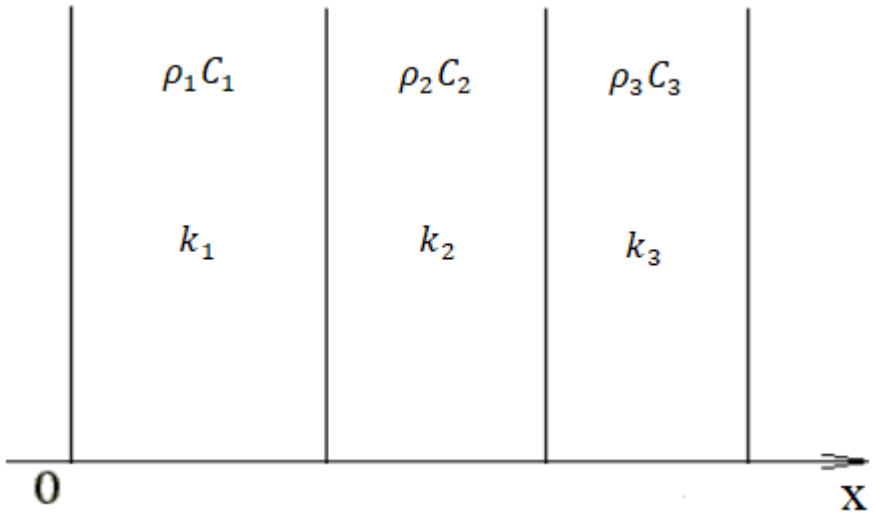
$$\frac{y_n^{m+1} - y_n^m}{\tau} = \frac{1}{h^2}((\alpha^2)_{n+\frac{1}{2}}^{m+1}(y_{n+1}^{m+1} - y_n^{m+1}) - (\alpha^2)_{n-\frac{1}{2}}^{m+1}(y_{n+1}^{m+1} - y_n^{m+1})) \quad (2.21)$$

$$\alpha^2(x) \equiv \frac{k(x)}{\rho C} = \begin{cases} k_1 = \cdots, \ x \in \left[0, \frac{l}{3}\right] \\ k_2 = \cdots, \ x \in \left[\frac{l}{3}, \frac{2l}{3}\right] \\ k_3 = \cdots, \ x \in \left[\frac{2l}{3}, l\right] \end{cases} \quad l = 3$$

3. ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

3.1 Дослідження температурних полів одновимірної нестаціонарної задачі теплопровідності багатошарового середовища методом кінцевих різниць

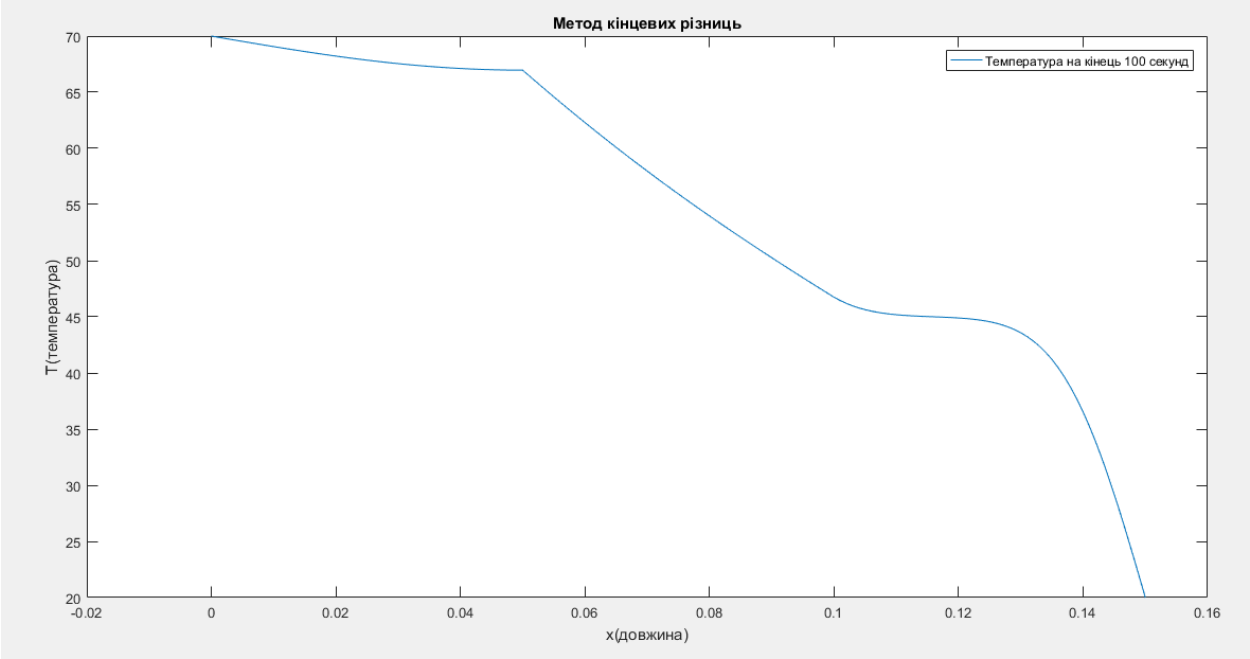
Розглянемо розрахункову схему багатошарового середовища



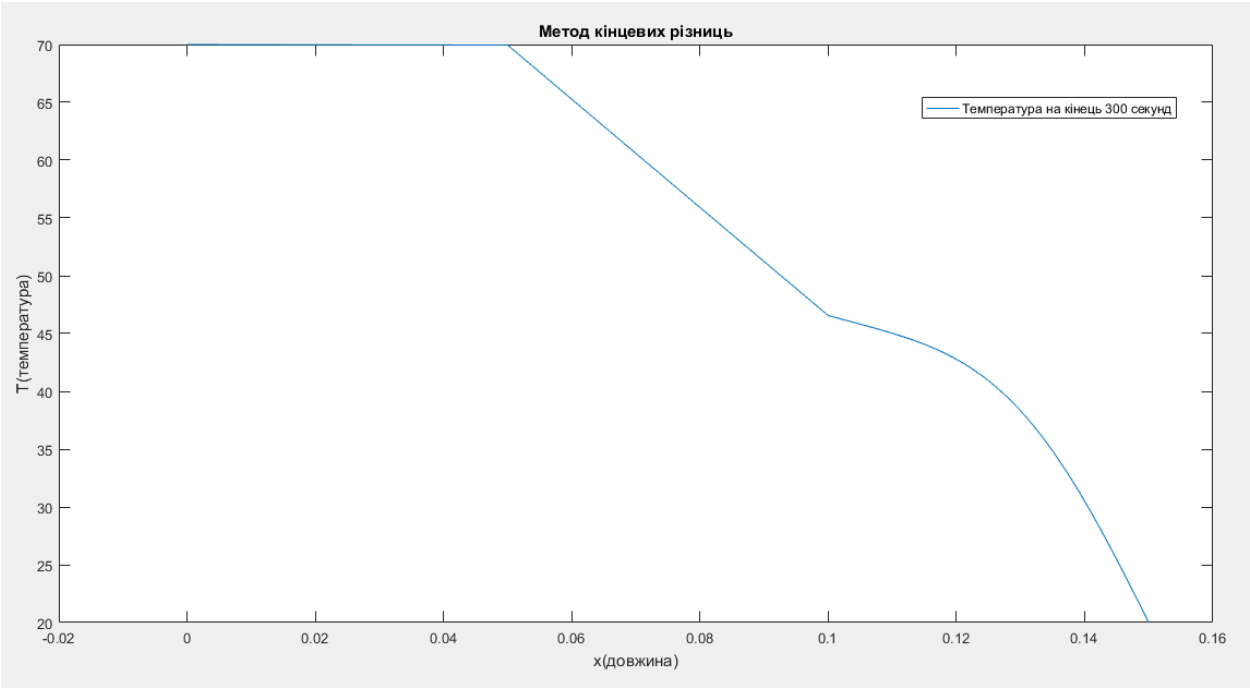
Характеристика багатошарового середовища з однаковими розмірами середовища

№	Матеріал	Густина ρ, кг/м³	Теплоємкість С, Дж/(кг·град).	Коефіцієнт Теплопровід-ності, к, Вт/(м·град).	Розмір L, см
1	Чугун	7000	540	45	5
2	Повітря	1300	1010	0,026	5
3	Бетон	2300	2500	1,5	5

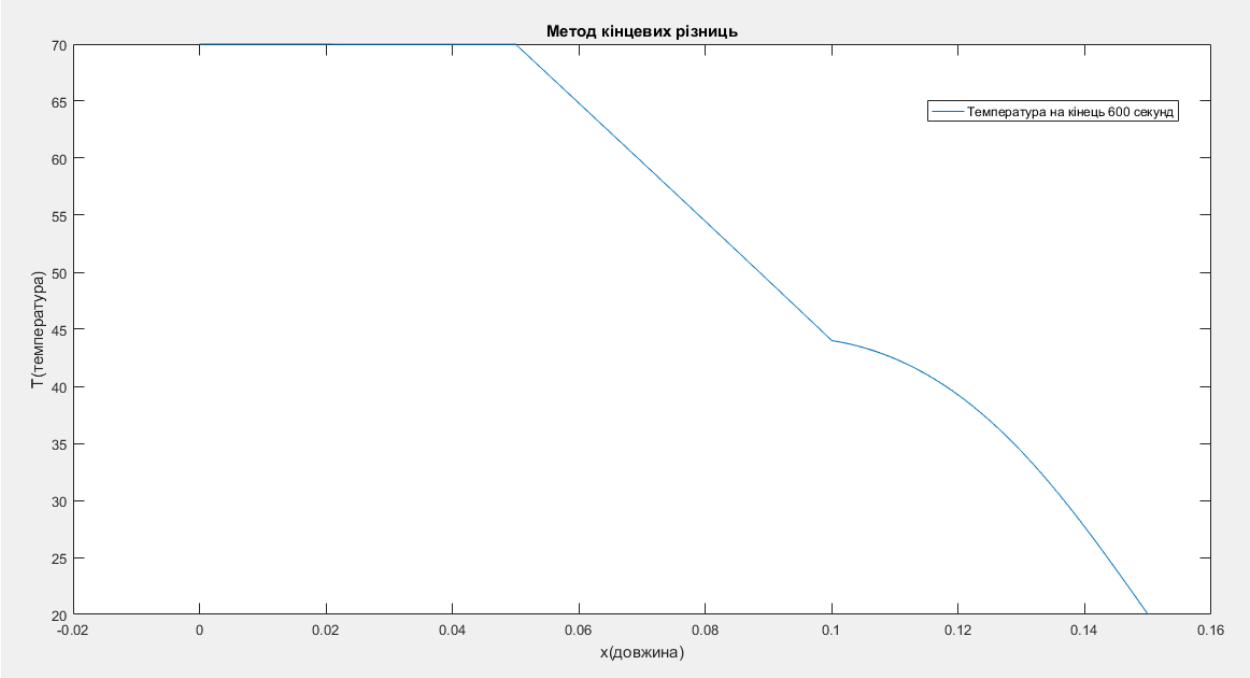
Визначимо температурне поле трьох складового середовища з однаковими розмірами с $T_1 = 70\ °C$ та $T_3 = 20\ °C$ через 100, 300, 600 та 900 секунд.



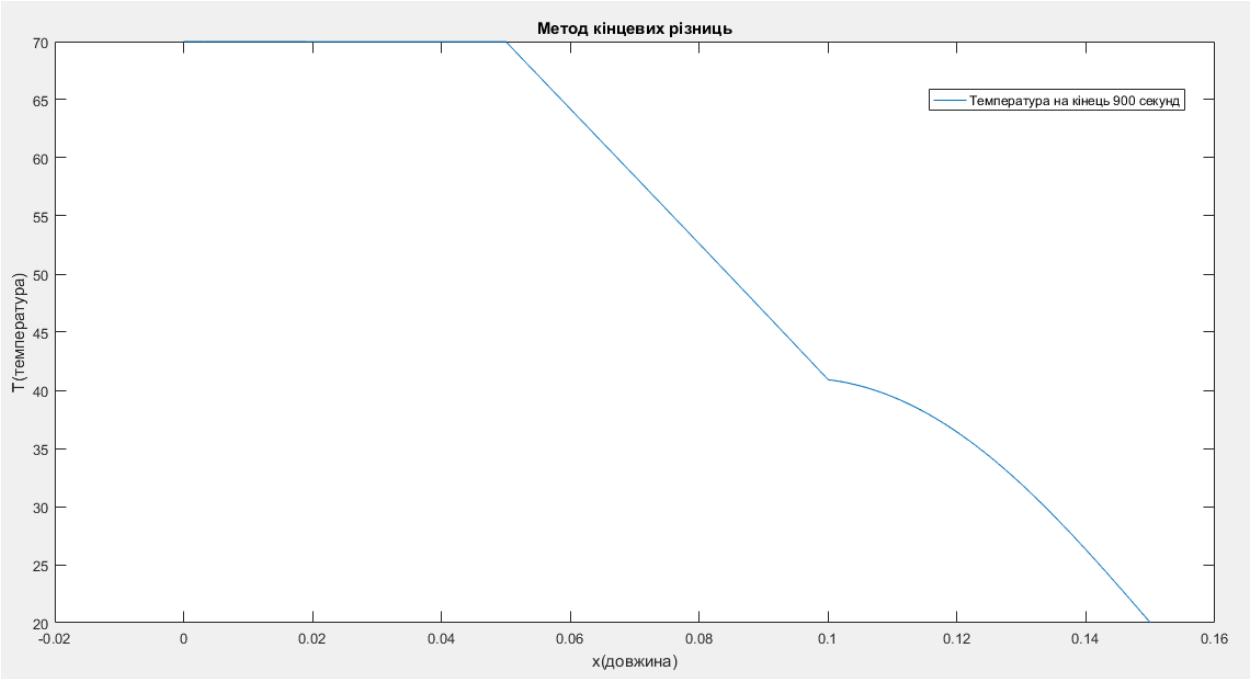
Розподіл температурного поля при t=100с



Розподіл температурного поля при t=300с



Розподіл температурного поля при t=600с



Розподіл температурного поля при t=900с

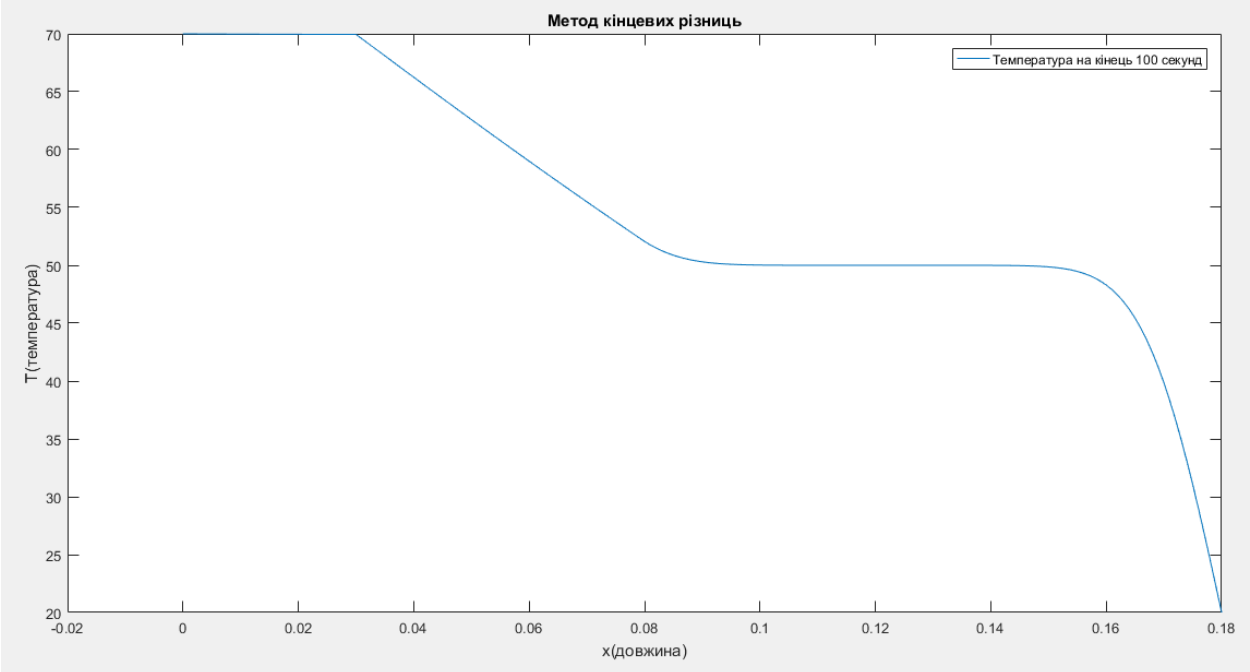
Аналізуючи графіки багатошарового середовища з однаковими розмірами середовища, видно, що на ділянці, з найбільшим коефіцієнтом теплопровідності, температурне поле залежить прямолінійно протягом певного часу. Однак з невеликими коефіцієнтами теплопровідності, протягом певного часу на ділянках температурне поле починає зменшуватись лінійно,

а при переході в наступну ділянку, з невеликим коефіцієнтом теплопровідності, температурне поле набуває квадратичного характеру.

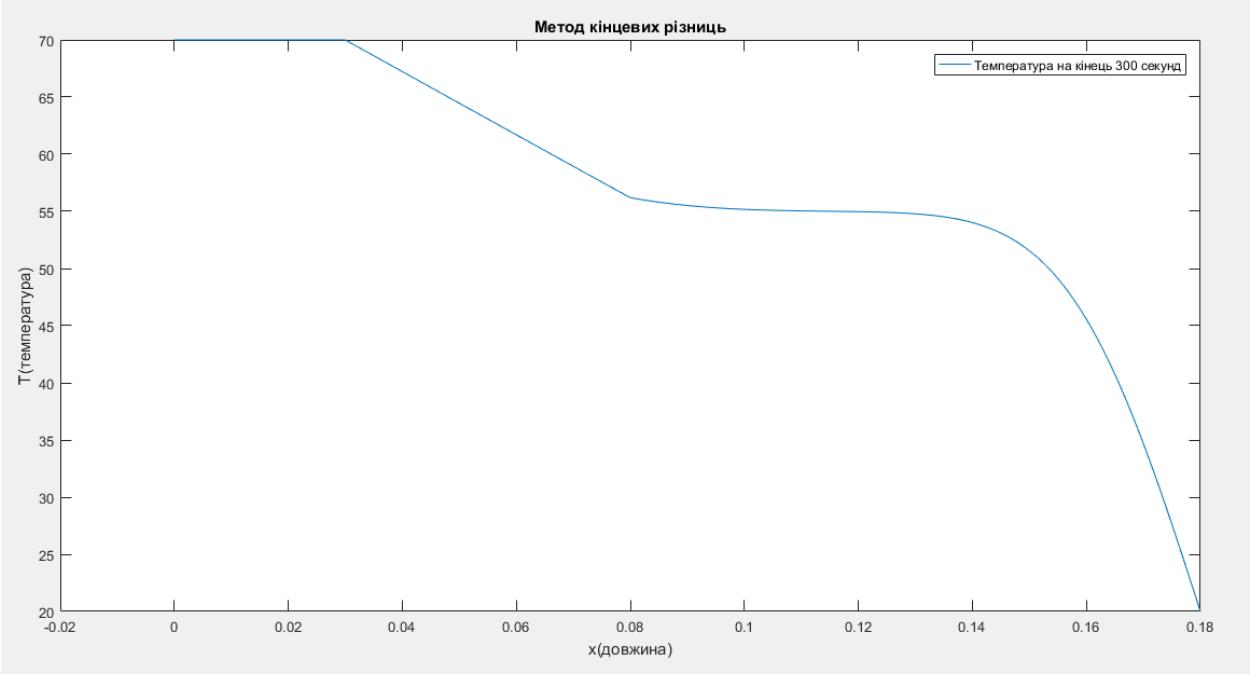
Характеристика багатошарового середовища з різними розмірами середовища

№	Матеріал	Густина ρ, кг/м³	Теплоємкість С, Дж/(кг·град).	Коефіцієнт Теплопровід-ності, к, Вт/(м·град).	Розмір L, см
1	Чугун	7000	540	45	3
2	Повітря	1300	1010	0,026	5
3	Бетон	2300	2500	1,5	10

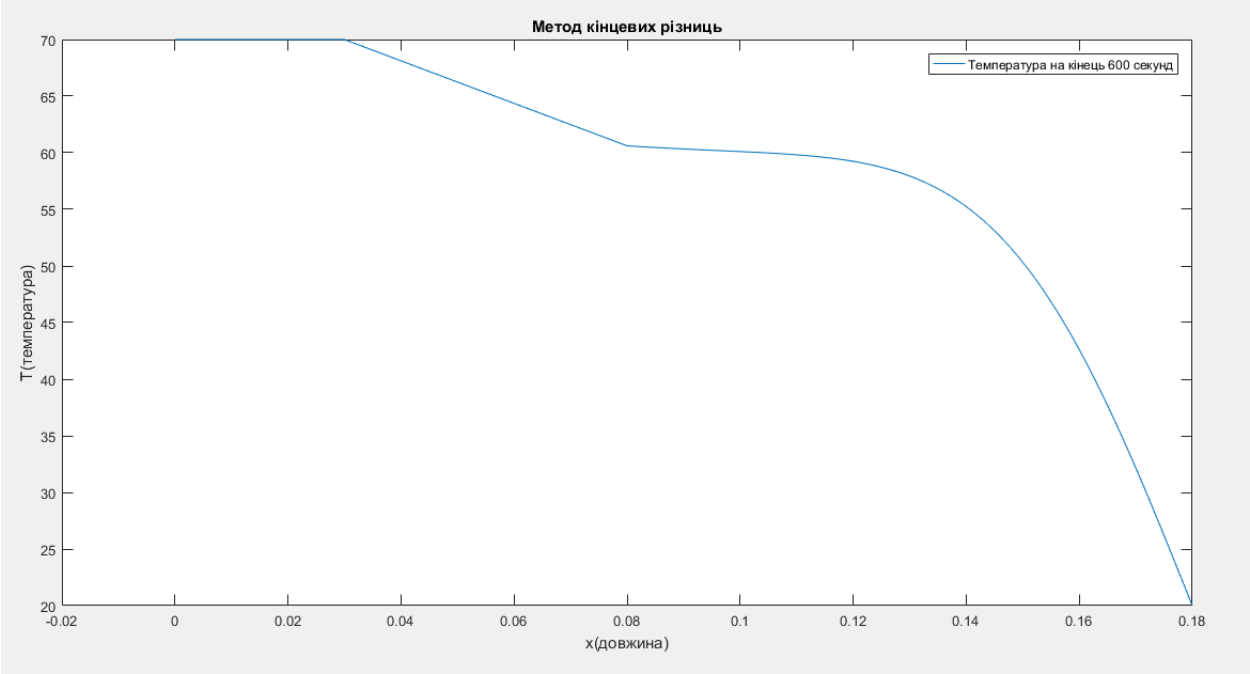
Визначимо температурне поле трьох складового середовища з різними розмірами с $T_1 = 70\ °C$ та $T_3 = 20\ °C$ через 100, 300, 600 та 900 секунд.



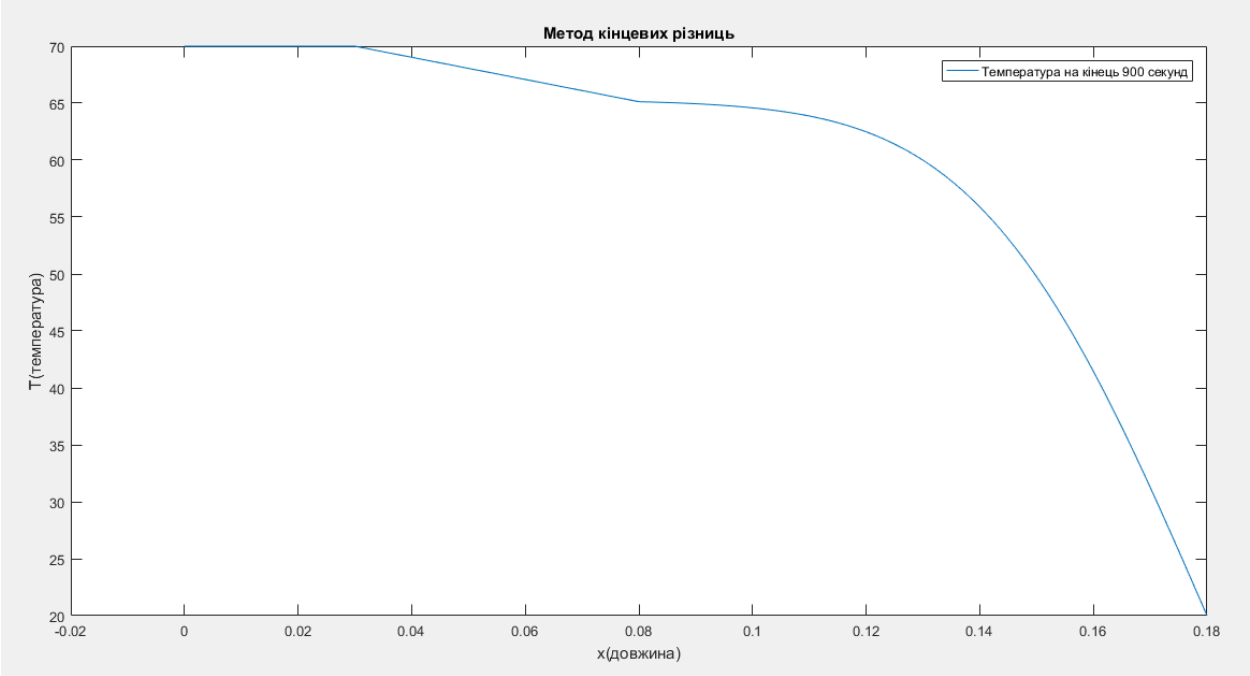
Розподіл температурного поля при t=100с



Розподіл температурного поля при t=300с



Розподіл температурного поля при t=600с



Розподіл температурного поля при t=900с

Аналізуючи графіки багатошарового середовища з різними розмірами середовища, простежується квадратичний розподіл температурного поля на всій ділянці. З цього робимо висновок, що розподіл температурного поля протягом певного часу, залежить від розмірів середовища, при різних показниках якого, температурний розподіл поля показує квадратичну залежність.

Приклад коду чисельного моделювання температурного поля методом кінцевих різниць представлений у додатку А.

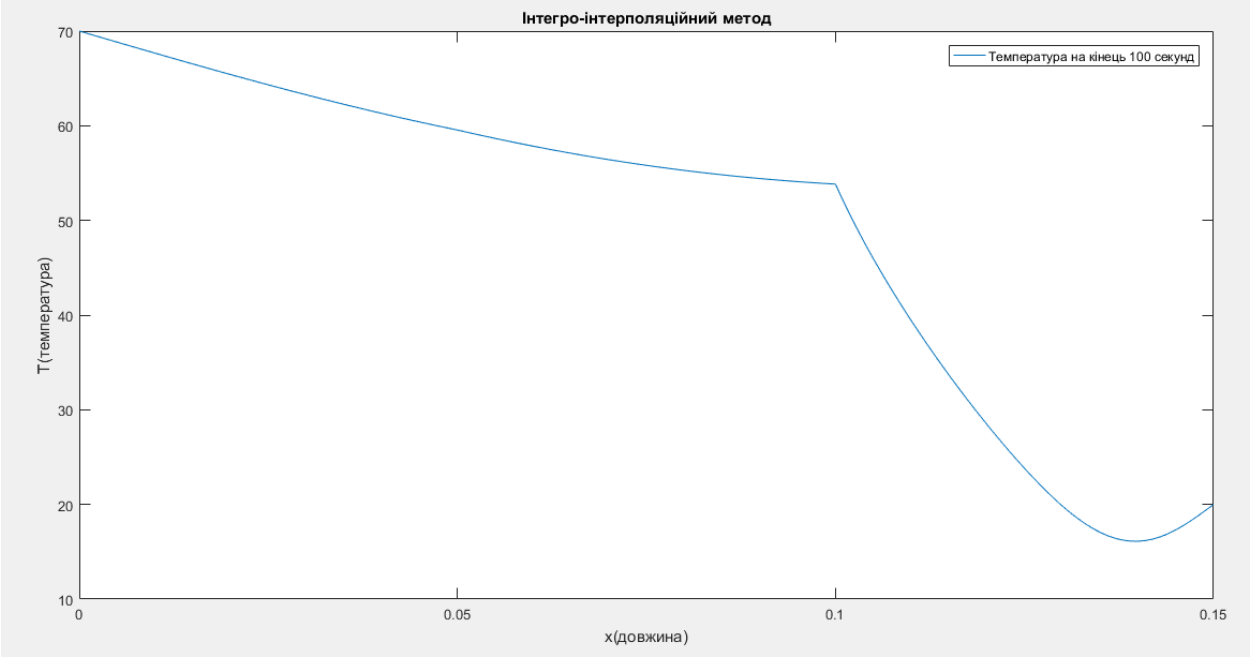
3.2 Дослідження температурних полів одновимірної нестаціонарної задачі теплопровідності багатошарового середовища неявним інтегро-інтерполяційний методом

Характеристика багатошарового середовища з однаковими розмірами середовища

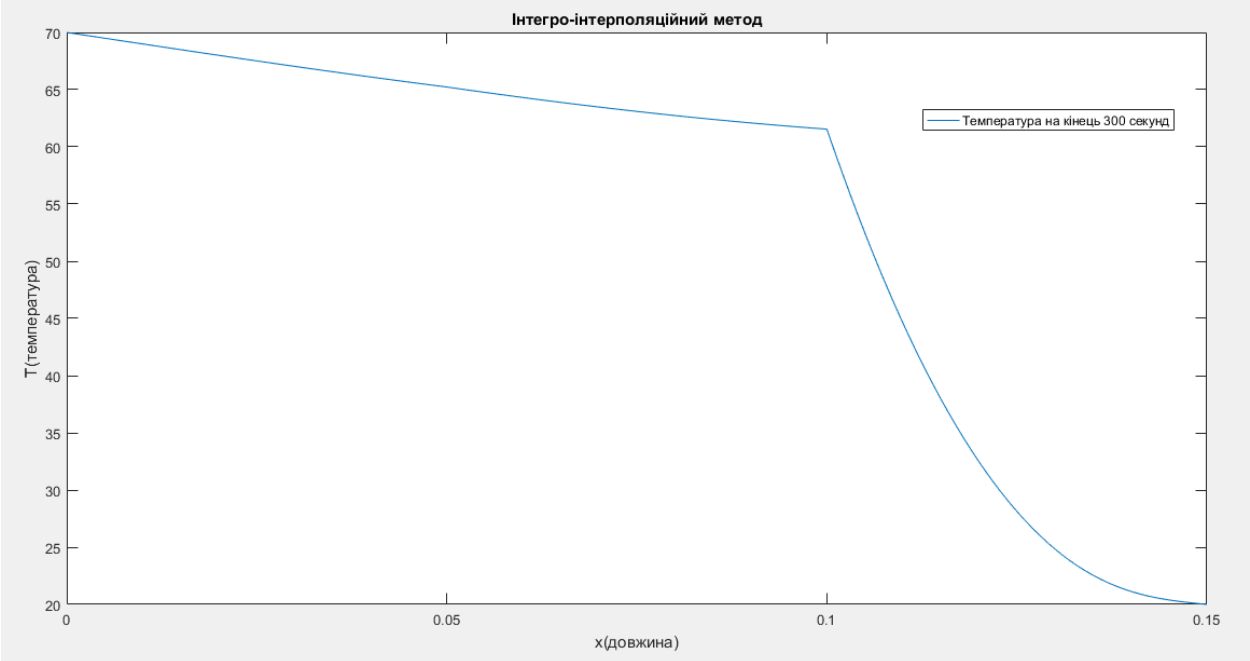
№	Матеріал	Густина ρ, кг/м³	Теплоємкість С, Дж/(кг·град).	Коефіцієнт Теплопровід-ності, к, Вт/(м·град).	Розмір L, см

1	Чугун	7000	540	45	5
2	Повітря	1300	1010	0,026	5
3	Бетон	2300	2500	1,5	5

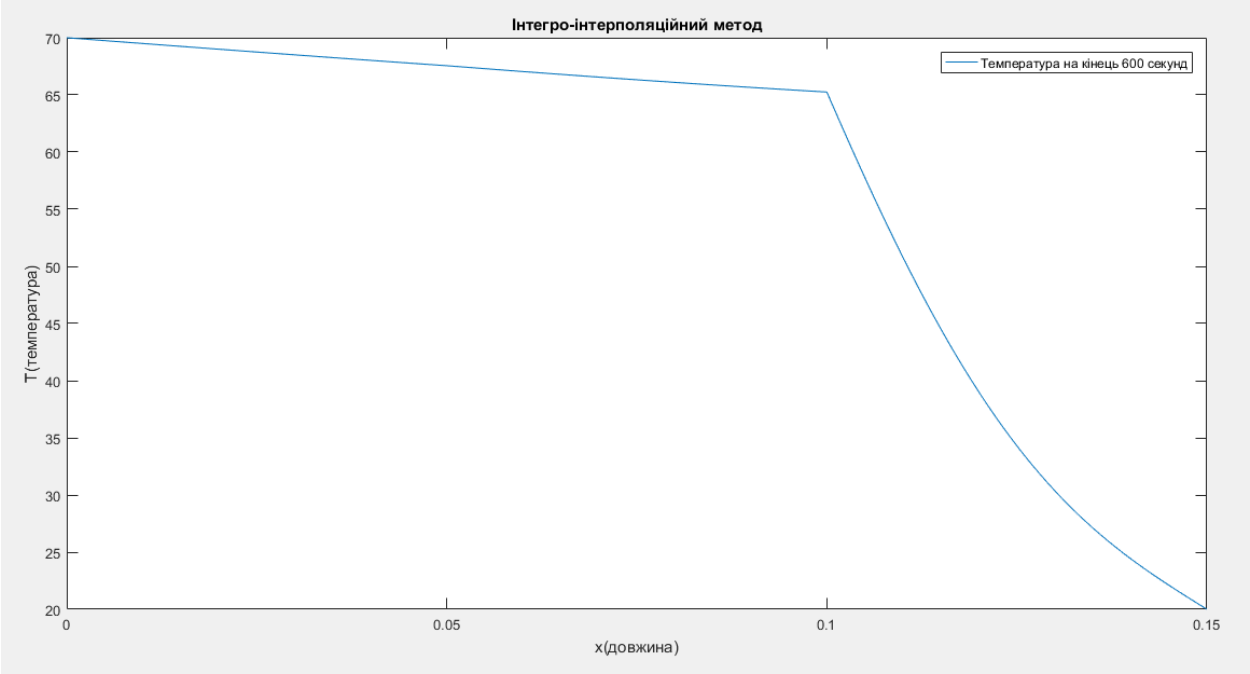
Визначимо температурне поле трьох складового середовища з однаковими розмірами с $T_1 = 70\,°C$ та $T_3 = 20\,°C$ через 100, 300, 600 та 900 секунд.



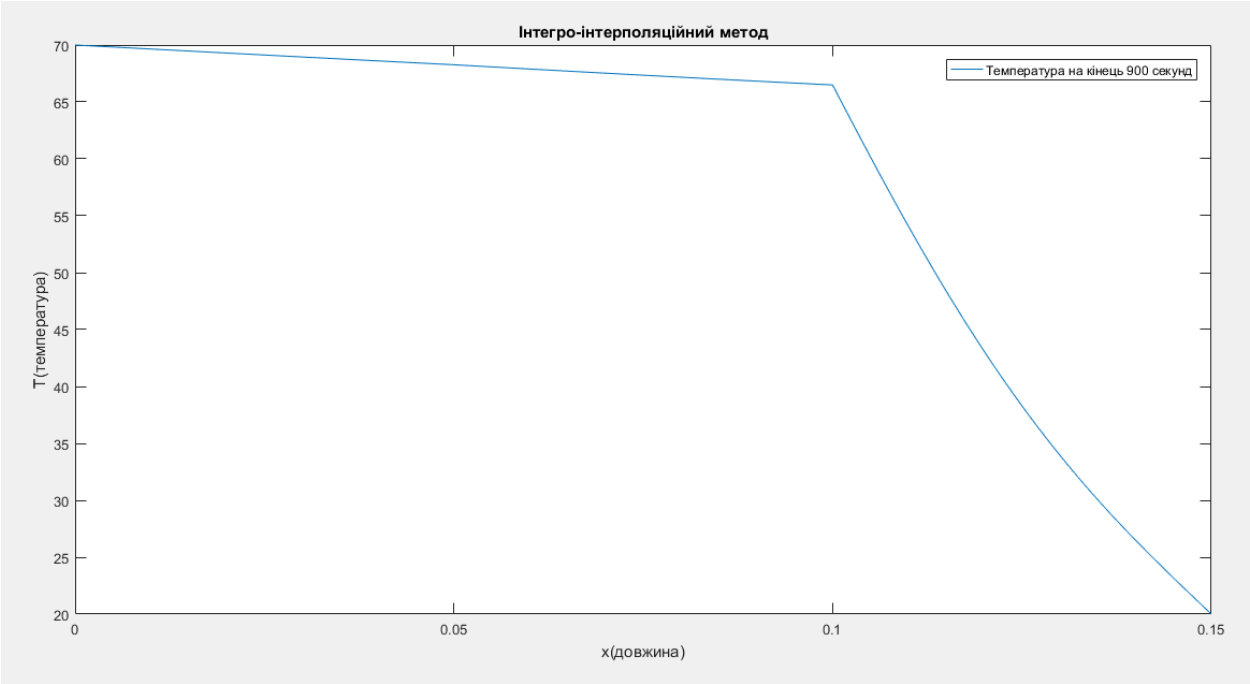
Розподіл температурного поля при t=100с



Розподіл температурного поля при t=300с



Розподіл температурного поля при t=600с



Розподіл температурного поля при t=900с

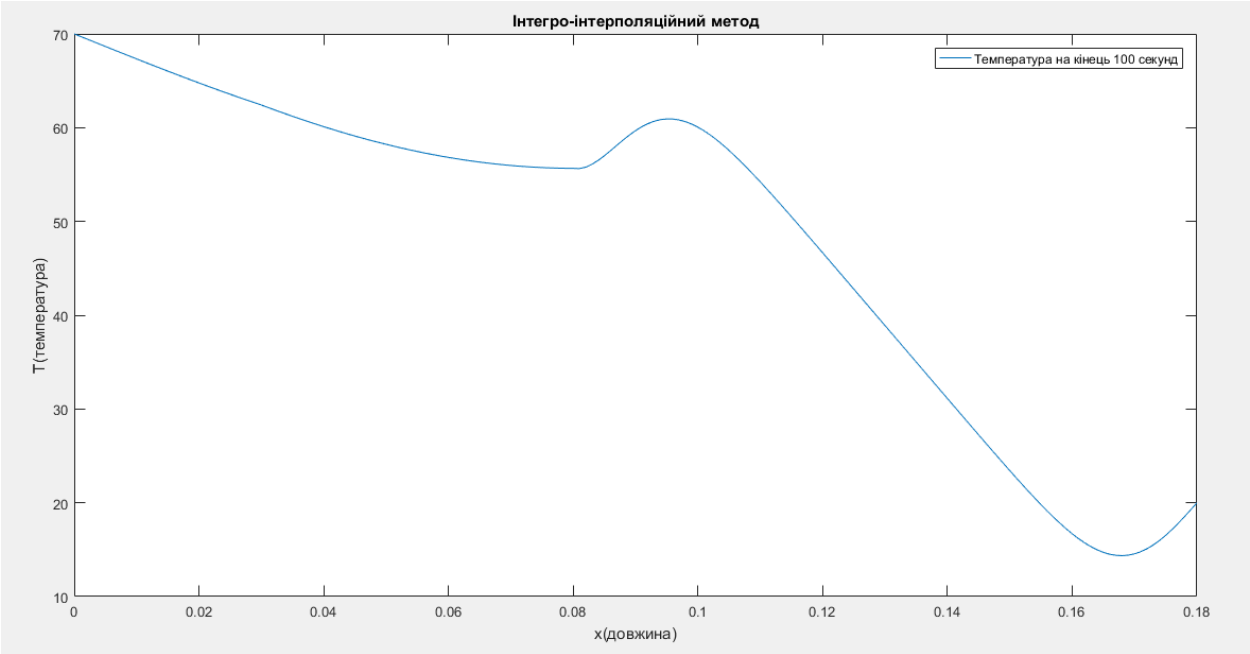
Аналізуючи графіки багатошарового середовища з однаковими розмірами середовища, простежується лінійний розподіл температурного поля на перших двох ділянках, протягом певного часу. На останній ділянці , видно

,що протягом певного часу, температурне поле змінюється від квадратичної до лінійної залежності.

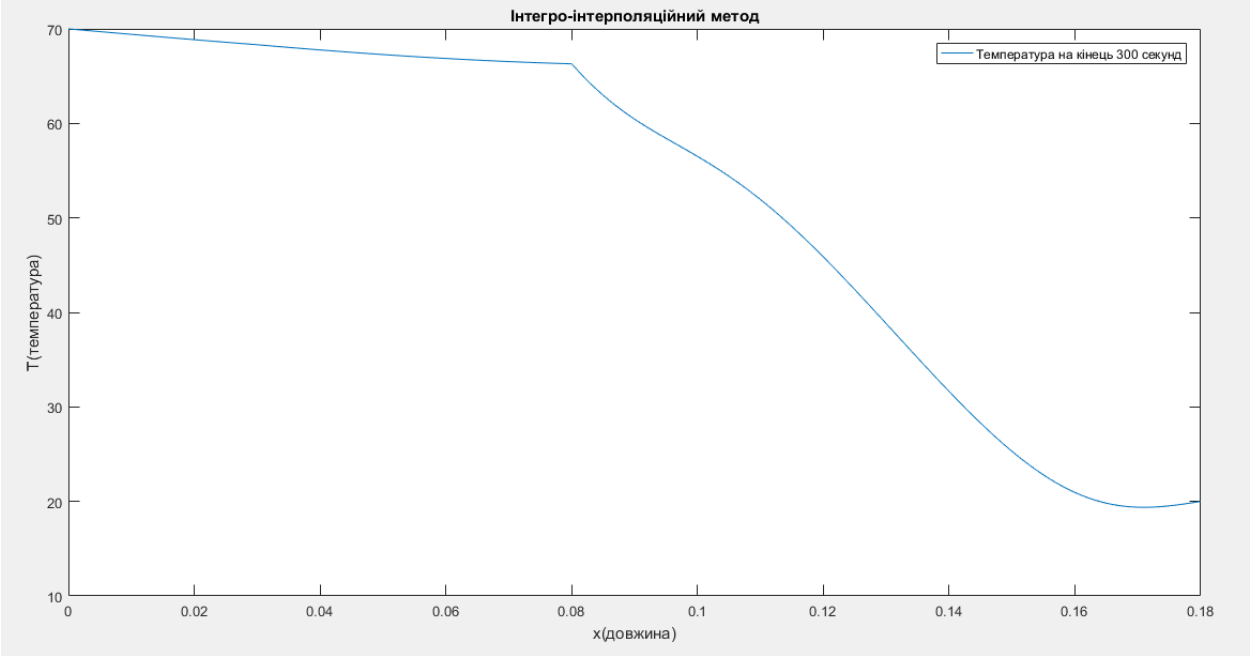
Характеристика багатошарового середовища з різними розмірами середовища

№	Матеріал	Густина ρ, кг/м³	Теплоємкість С, Дж/(кг· град).	Коефіцієнт Теплопровід-ності, к, Вт/(м ·град).	Розмір L, см
1	Чугун	7000	540	45	3
2	Повітря	1300	1010	0,026	5
3	Бетон	2300	2500	1,5	10

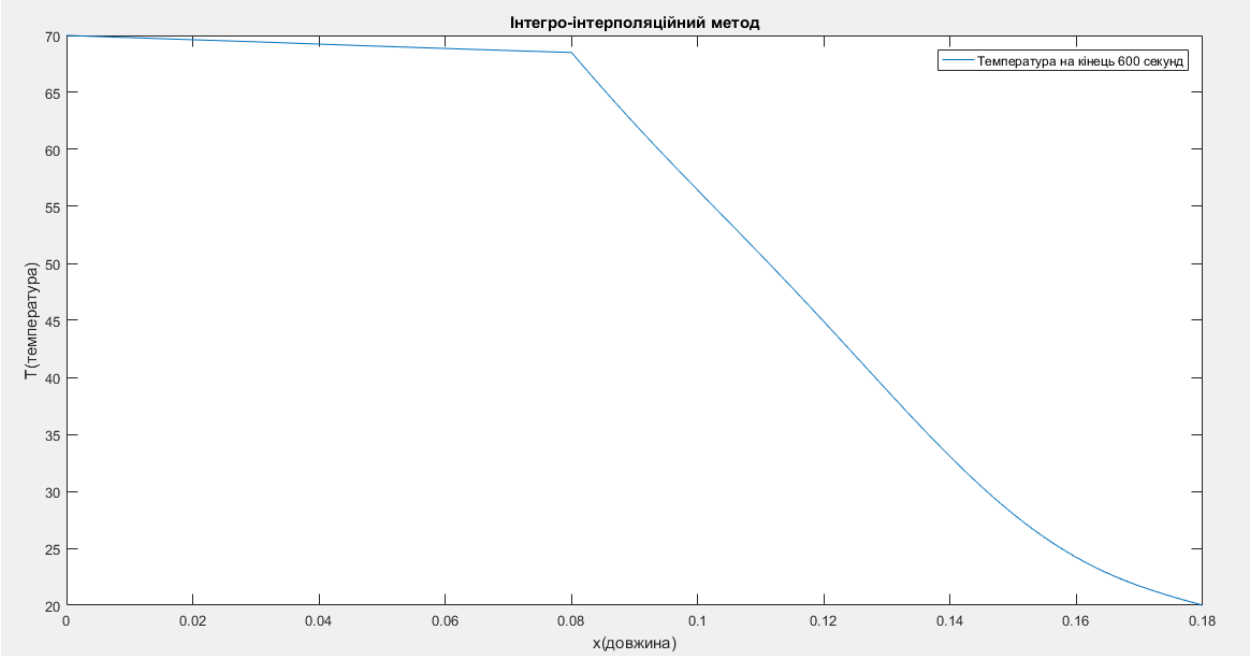
Визначимо температурне поле трьох складового середовища з різними розмірами с $T_1 = 70\ °C$ та $T_3 = 20\ °C$ через 100, 300, 600 та 900 секунд.



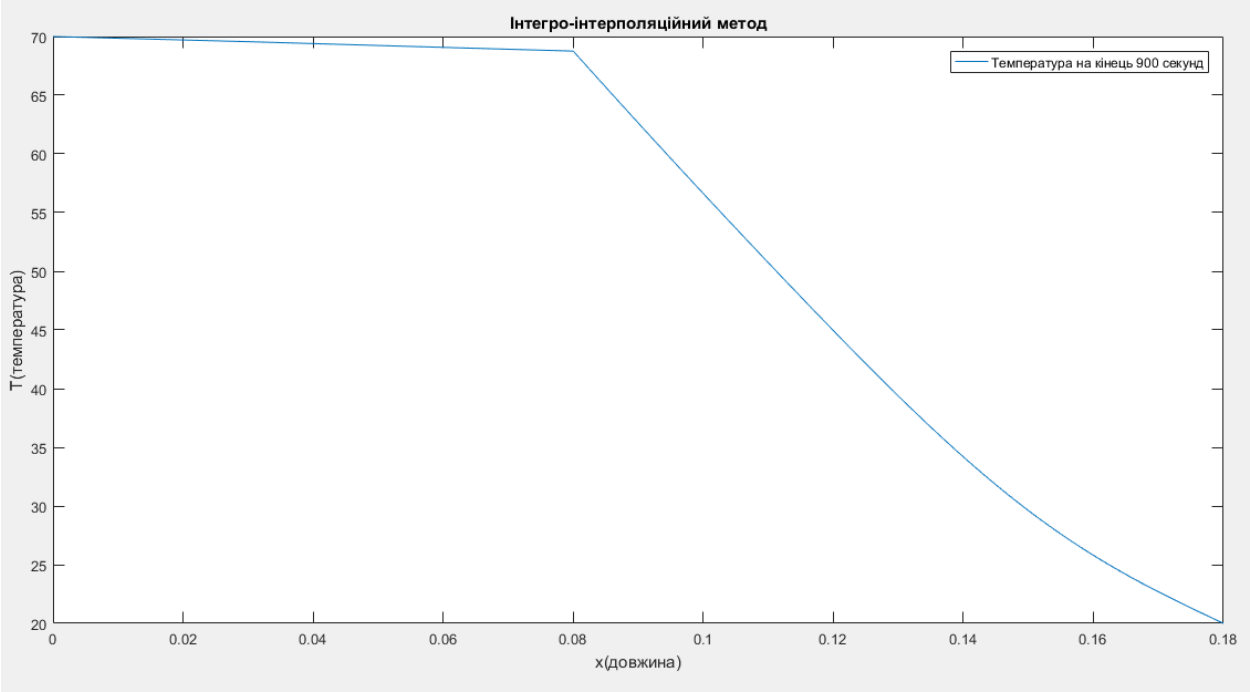
Розподіл температурного поля при t=100с



Розподіл температурного поля при t=300с



Розподіл температурного поля при t=600с



Розподіл температурного поля при t=900с

Аналізуючи графіки багатошарового середовища з різними розмірами середовища, простежується нерівномірний розподіл температурного поля, при невеликому значені часу, на всій ділянці. Однак, протягом тривалого розрахунку, видно , що залежність температурного поля набуває лінійного характеру, при переходах з одного середовища в інше. Розроблений алгоритм розрахунку теплопровідності середовища, яке складається із декількох середовищ з різними коефіцієнтами теплопровідності.

Приклад коду чисельного моделювання температурного поля інтегро-інтерполяційним методом представлений у додатку Б.

ВИСНОВОК

В даній роботі було проаналізовані методи побудови різницевих схем щодо вирішення диференційних рівнянь у частинних похідних. Показано, алгоритм вирішення стаціонарної задачі теплопровідності інтегро-інтерполяційним методом.

Отримано рівняння одновимірної нестаціонарної задачі теплопровідності методом кінцевих різниць.

Отримано рівняння одновимірної нестаціонарної задачі теплопровідності неявним інтегро-інтерполяційний методом.

Побудовано неявну чисельну схему на прямокутній сітці для рівняння одновимірної нестаціонарної задачі теплопровідності методом кінцевих різниць та одновимірної нестаціонарної задачі теплопровідності неявним інтегро-інтерполяційний методом.

Досліджено розподіл температурних полів одновимірної нестаціонарної задачі теплопровідності багатошарового середовища методом кінцевих різниць.

Досліджено розподіл температурних полів одновимірної нестаціонарної задачі теплопровідності багатошарового середовища інтегро-інтерполяційним методом.

Аналізуючи графіки багатошарового середовища з однаковими та різними розмірами середовища, приходимо до висновку, що інтегро-інтерполяційній метод, точніше моделює розподіл температурного поля протягом певного часу.

Для багатошарового середовища з однаковими розмірами середовища, простежується зміна розподілу температурного поля на різних ділянках чисельного моделювання багатошарового середовища протягом певного часу.

Для багатошарового середовища з різними розмірами середовищ простежується нерівномірний розподіл температурного поля, при невеликому значені часу, на всій ділянці. Однак, протягом тривалого

розрахунку, видно , що залежність температурного поля набуває лінійного характеру, при переходах з одного середовища в інше.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М .: Наука, 1977.

2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М .: Наука, 1989.

3. Шостак Р.Я. В признаке условной определённости квадратичной формы n переменных, подчинённых линейным связям, и о достаточном признаке условного экстремума функций n переменных, УМН, 9: 2 (60) (1954).

4. Т. Н. Губина, Е. В. Андропова. РЕШЕНИЕ дифференциальных Уравнений В СИСТЕМЕ компьютерной МАТЕМАТИКИ Махима .Елец - 2009

5. А.А. Дегтярев. Метод конечных разностей реферат. Самара 2011

6. Мареев В.В, Станковая Е.Н. основы методов конечных разностей. - СПб: Изд-во С. Петерб, ун-та, 2012

7. Н.Н. Меркулова, М.Д. Михайлов. Разностные СХЕМЫ ДЛЯ обыкновенных дифференциальных уравнений Учебное пособие. Томск 2014

8. Крайнов А.Ю, Рыжих Ю.Н., Тимохин А.М. Численные методы в задачах теплопереноса. Учебно-методическое пособие Томск.2009

9. В. Г. приказчиков Интегра интерполяционный МЕТОД построения разностных уравнений в задачах колебаний пластины. УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЦАГИ .Поэтому 4. 1973

10. В. Кузнецов, М. А. Шеремет. Разностные МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ теплопроводности. Учебное пособие Издательство Томского Политехнического университета Томск 2007

11. Турчак Л.И, Плотников П.В. Основы численных методов. М: ФИЗМАЛИТ.2005

Додаток А

```
MKP
%_____________________________________________________
%Input parameters
%_____________________________________________________
P1 = 30;
P2 = 50;
P3 = 100;
L = 0.18;
k1 = 48.5;
k2 = 0.0259;
k3 = 2.04;
rho1 = 7000;
rho2 = 1.205;
rho3 = 2500;
cp1 = 290.1;
cp2 = 1010;
cp3 = 1500;
tf = 900;
T_left = 70;
T_right = 20;
T0 = 65;

%_____________________________________________________
%Initializing variables for further calculations
P = P1 + P2 + P3 + 1;
A = zeros(P);
B = zeros(P);
C = zeros(P);
F = zeros(P);
alpha = zeros(P);
beta = zeros(P);
T = zeros(P);
X = zeros(P);
a1 = k1/(rho1*cp1);
a2 = k2/(rho2*cp2);
a3 = k3/(rho3*cp3);
%Calculating spatial and time steps respectively
delta_x = L/(P - 1);
delta_t = tf/100;

%Setting the initial temperature
for i = 1:P
    T(i) = T0;
end

%Setting boundaries temperature
T(1) = T_left;
T(P) = T_right;

%Setting time counter to zero
time = 0;

%_____________________________________________________
%Time loop
while(time <= tf)

    %Implementation of the implicit approach
```

```
    %Setting the initial sweep coefficients based on the left boundary
condition
    alpha(1) = 0;
    beta(1) = T_left;

    %Loop for determining the sweep coefficients by expressions

    for i = 2:P1

        %Coefficients of the canonical representation of linear equations
        %system with a tridiagonal matrix

        A(i) = k1/(delta_x^2);
        B(i) = 2*k1/(delta_x^2) + (rho1*cp1)/delta_t;
        C(i) = k1/(delta_x^2);
        F(i) = -(rho1*cp1*T(i))/delta_t;

        %Sweep coefficients (alpha, beta)
        alpha(i) = A(i)/(B(i) - C(i) * alpha(i-1));

        beta(i) = (C(i) * beta(i-1) - F(i))/(B(i) - C(i) * alpha(i-1));
    end

    %Sweep coef on inbetween-border
        alpha(P1+1) = (2*a1*a2*delta_t*k2)/(2*a1*a2*delta_t*(k2+k1*(1-
alpha(P1))) + delta_x^2*(k1*a2+k2*a1));

        beta(P1+1) =
(2*a1*a2*delta_t*k1*beta(P1)+delta_x^2*(k1*a2+k2*a1)*T(i))/(2*a1*a2*delta_t*(
k2+k1*(1-alpha(P1)))+delta_x^2*(k1*a2+k2*a1));


     for i = P1+2:P1+P2

        %Coefficients of the canonical representation of linear equations
        %system with a tridiagonal matrix

        A(i) = k2/(delta_x^2);
        B(i) = 2*k2/(delta_x^2) + (rho2*cp2)/delta_t;
        C(i) = k2/(delta_x^2);
        F(i) = -(rho2*cp2*T(i))/delta_t;

        %Sweep coefficients (alpha, beta)
        alpha(i) = A(i)/(B(i) - C(i) * alpha(i-1));

        beta(i) = (C(i) * beta(i-1) - F(i))/(B(i) - C(i) * alpha(i-1));
     end

     %Sweep coef on inbetween-border
        alpha(P1+P2+1) = (2*a2*a3*delta_t*k3)/(2*a2*a3*delta_t*(k3+k2*(1-
alpha(P1+P2))) + delta_x^2*(k2*a3+k3*a2));

        beta(P1+P2+1) =
(2*a2*a3*delta_t*k2*beta(P1+P2)+delta_x^2*(k2*a3+k3*a2)*T(i))/(2*a2*a3*delta_
t*(k3+k2*(1-alpha(P1+P2)))+delta_x^2*(k2*a3+k3*a2));

     for i = P1+P2+2:P-1

        %Coefficients of the canonical representation of linear equations
        %system with a tridiagonal matrix
```

```
        A(i) = k3/(delta_x^2);
        B(i) = 2*k3/(delta_x^2) + (rho3*cp3)/delta_t;
        C(i) = k3/(delta_x^2);
        F(i) = -(rho3*cp3*T(i))/delta_t;

        %Sweep coefficients (alpha, beta)
        alpha(i) = A(i)/(B(i) - C(i) * alpha(i-1));

        beta(i) = (C(i) * beta(i-1) - F(i))/(B(i) - C(i) * alpha(i-1));
    end

    %Current coordinate

    X(P) = L;
    i = P-1;

    %Loop for reverse sweep
    while i >= 1

        T(i) = alpha(i) * T(i+1) + beta(i);
        X(i) = X(i+1) - delta_x;
        i = i-1;
    end



    %Increasing the time
    time = time + delta_t;
end
%end while loop
%_____________________________________________

%Plotting
plot(X(1:P),T(1:P))
xlabel('x(довжина)')
ylabel('T(температура)')
title('Метод кінцевих різниць')
legend('Температура на кінець 900 секунд')
```

Додаток Б

```
Интегро - Интерполяционный
%_____________________________________________
%Input parameters
%_____________________________________________
global L k1 k2 k3
L = 0.18;
k1 = 48.5/(7000*290.1);
k2 = 0.0259/(1.205*1010);
k3 = 2.04/(2500*1500);
tf = 900;
Tm = 70;

%Calculating spatial and time steps respectively
delta_x = 0.001;
delta_t = 9;

X = 0:delta_x:L;
P = length(X);
%_____________________________________________
%Initializing variables for further calculations

A = zeros(P);
B = zeros(P);
C = zeros(P);
F = zeros(P);
alpha = zeros(P);
beta = zeros(P);
T = zeros(P);


%Calculating the initial temperature distribution

for i = 1:P
    if X(i) <= 0.5*L
        T(i) = ((2*Tm)/L)*X(i);
    end
    if X(i) > 0.5*L
        T(i) = ((2*Tm)/L)*(L-X(i));
    end
end




time = 0;
while time <= tf

    alpha(2) = 0;
    beta(2) = 70;

    for i = 2:P-1

        A(i) = -(delta_t/delta_x^2)*k(X(i)+0.5*delta_x);
        B(i) = 1 + (delta_t/delta_x^2)*(k(X(i)+0.5*delta_x)+k(X(i)-
0.5*delta_x));
        C(i) = -(delta_t/delta_x^2)*k(X(i)-0.5*delta_x);

    end
```

```
    for i = 2:P-1
        alpha(i+1) = - A(i)/(B(i)+C(i)*alpha(i));
        beta(i+1) = (T(i) - C(i)*beta(i))/(B(i)+C(i)*alpha(i));
    end

    T(P) = 20;

    for i = (P-1):-1:1
        T(i) = alpha(i+1)*T(i+1)+beta(i+1);
    end
    time = time + delta_t;
end

plot(X(1:P),T(1:P))
xlabel('x(довжина)')
ylabel('T(температура)')
title('Інтегро-інтерполяційний метод')
legend('Температура на кінець 900 секунд')
```