МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ

Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем бакалавр

«Розробка системи комп'ютерного моделювання для чисельного розв'язання нелінійного рівняння теплопровідності»

Виконала: студент 4 курсу, групи НФ-43
Усатенко Е. О.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Прикладна фізика енергетичних систем
Керівник: к.т.н. Гарячевська І. В.

Рецензент:

Харків – 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах
Рівень вищої освіти (освітньо-професійний рівень) бакалавр
Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Руслан СУХОВ
підпис

"____"_____2021 року

З А В Д А Н Н Я

НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ

Усатенко Емілія Олександрівна

1. Тема роботи "Розробка системи комп'ютерного моделювання для чисельного розв'язання нелінійного рівняння теплопровідності" керівник роботи: Гарячевська Ірина Василівна, кандидат технічних наук,
затверджені наказом по університету від
2. Строк подання студентом роботи 21.05.2021
3. Перелік питань, які потрібно розробити:
    1) огляд літератури;
    2) вибір чисельного методу рішення нестаціонарного одновимірного рівняння теплопровідності;
    3) розробка інтерфейсу програмного продукту для чисельного рішення нестаціонарного одновимірного рівняння теплопровідності;
    4) розробка архітектури системи комп'ютерного моделювання для чисельного рішення нелінійного рівняння теплопровідності;

5) комп'ютерна реалізація системи комп'ютерного моделювання для чисельного рішення нелінійного рівняння теплопровідності;
6) тестування програмного продукту;

4.План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми, узгодження, а також затвердження її на кафедрі
2	Робота над літературою та іншими джерелами
3	Затвердження теми на кафедрі
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6	Написання третього розділу
8	Завершення написання дипломної роботи (висновки та література)
9	Подача науковому керівнику
10	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
11	Попередній захист
12	Захист

5. Дата видачі завдання

Студент _____ Емілія УСАТЕНКО
підпис

Керівник роботи _____ Ірина ГАРЯЧЕВСЬКА
підпис

РЕФЕРАТ

Бакалаврська робота виконана студенткою Усатенко Емілією на тему: «Розробка системи комп’ютерного моделювання для чисельного розв’язання нелінійного рівняння теплопровідності».

Об’єктом дослідження дипломної роботи є одновимірні нелінійні граничні рівняння теплопровідності.

Предмет дослідження: чисельний розв’язок одновимірного нелінійного рівняння теплопровідності.

Мета роботи полягає в розробці системи комп'ютерного моделювання для чисельного розв’язку нелінійного рівняння теплопровідності за безсітковою схемою з використання радіальних базисних функцій.

В процесі виконання дипломної роботи була розроблена система комп’ютерного моделювання, за допомогою якої можливо розв’язати нелінійні граничні рівняння теплопровідності.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: СИСТЕМА КОМП’ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ, НЕЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ, РАДІАЛЬНІ БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ, НЕСТАЦІОНАРНА КРАЙОВА ЗАДАЧА

ABSTRACT

Bachelor’s work was done by student Emiliya Usatenko on the topic: «Development of a computer model system for the numerical solution of non-linear thermal conductivity».

The object of research of the thesis is the one-dimensional nonlinear equation of heat conduction.

Subject of research: numerical solution of a one-dimensional nonlinear equation of heat conduction.

The purpose of the work is to develop a computer simulation system for the numerical solution of the nonlinear heat equation according to a gridless scheme using radial basis functions.

During the process of completing the thesis, was developed a computer model system, with the help of which it is possible to control and solve non-linear linear boundary levels of thermal conductivity.

KEYWORDS: COMPUTER MODEL SYSTEM, NONLINEAR EQUATION OF THERMAL CONDUCTIVITY, RADIAL, BASIS FUNCTIONS, NONSTATIONARY BOUNDARY VALUE PROBLEM.

РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа выполнена студенткой Усатенко Эмилией на тему: «Разработка системы компьютерного моделирования для численного решения нелинейного уравнения теплопроводности».

Объектом исследования дипломной работы является одномерное нелинейное уравнение теплопроводности.

Предмет исследования: численное решение одномерного нелинейного уравнения теплопроводности.

Цель работы состоит в разработке системы компьютерного моделирования для численного решения нелинейного уравнения теплопроводности по бессеточной схеме с использование радиальных базисных функций.

В процессе выполнения работы была разработана системы компьютерного моделирования, с помощью которой возможно решить нелинейные краевые уравнения теплопроводности.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: СИСТЕМА КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ, НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, РАДИАЛЬНЫЕ БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ, НЕСТАЦИОНРАНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА.

ЗМІСТ

ВСТУП 7
1. ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ 9
1.1. Аналіз процесів поширення тепла і явища дифузії 9
1.2. Аналіз методів розв’язку нелінійного рівняння теплопровідності 10
1.3. Аналіз програмних реалізацій методів розв’язку нелінійного рівняння теплопровідності 11
1.4. Постановка задачі 16
2. РОЗРОБКА СИСТЕМИ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ 17
2.1. Чисельний метод розв’язання нелінійного рівняння теплопровідності 17
2.2. Алгоритм системи комп’ютерного моделювання 23
2.3. Етапи розробки системи комп’ютерного моделювання 24
3. ОПИС ТА ТЕСТУВАННЯ СИСТЕМИ КОМП’ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ 34
3.1. Вимоги до використання розробленої системи комп’ютерного моделювання 34
3.2. Інструкції користувачу 34
3.3. Тестування розробленої програми 39
ВИСНОВКИ 41
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 42

ВСТУП

Кожне явище в природі, фізичне, хімічне або біологічне, можна легко описати за допомогою алгебраїчних, диференціальних або інтегральних рівнянь, і для їх розв’язку ми використовуємо чисельні методи і отримуємо наближені рішення. Основна ідея чисельного моделювання полягає в тому, щоб перетворити складну фундаментальну проблему в просту дискретну форму математичного опису, відтворити та розв'язати проблему на комп'ютері, і, нарешті, визначити явища віртуально відповідно до вимог аналітиків. Інженери та вчені надали нам різні чисельні методи, такі як метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, методи граничних елементів. В наші часи метод скінченних елементів для моделювання складних проблем в прикладної механіки і пов'язаних областях добре зарекомендував себе. Це надійний і ретельно розроблений метод, але він не позбавлений недоліків. Використання в методі сітки призводить до ускладнень для деяких класів задач. Використання сітки при моделюванні, створює труднощі при обробці неоднорідностей, які не збігаються з вихідними лініями сітки. Для розв'язання цих проблем було запропоновано метод без сітки або без елементів, і в останні роки досягнуто помітного прогресу в даному методі. Безсітковий метод - це метод, який використовується для встановлення системних алгебраїчних рівнянь для всієї складної області без використання наперед визначеної сітки для дискретизації області. Він використовує набір точок, розподілених в складній області. Цей набір розподілених точок називається просто вузлами. В апроксимації будується тільки за допомогою вузлових точок.

Мета роботи полягає в розробці системи комп'ютерного моделювання для чисельного розв’язку нелінійного рівняння теплопровідності за безсітковою схемою з використання радіальних базисних функцій.

Об'єктом дослідження дипломної роботи є одномірне нелінійне рівняння теплопровідності.

Предмет дослідження: чисельний розв’язок одновимірного нелінійного рівняння теплопровідності.

Актуальність: Рівняння теплопровідності має широкий спектр застосувань. Окрім опису процесу розповсюдження тепла, воно використовується в теорії фільтрації рідин і газів, в теорії руху ґрунтових вод, в біології при побудові математичних моделей зростання і міграції популяцій, в хімічній кінетиці та т.д. У наш час відомо велика кількість чисельних методів для розв’язку рівняння теплопровідності. Останнім часом набирає популярність безсіткові методи. За останні кілька років безсіткові методи знайшли своє застосування в багатьох різних областях, від штучного інтелекту, комп'ютерної графіки, обробки зображень і оптимізації, до чисельного розв’язку крайових задач, що описується диференціальними рівнями з частинними похідними. В даних методах область розв'язання крайової задачі представляється набором рівномірно розподілених вузлів, до яких прив'язуються базисні функції. Головною перевагою даних методів являється відсутність генерації інтерполяційної сітки. Бо це є трудомістким процесом. В наш час існує ряд програмних продуктів дозволяють розв’язати даний тип рівнянь, проте всі вони є комерційним рішенням і є обчислювально витратними.

1. ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Аналіз процесів поширення тепла і явища дифузії

Теплопровідність - це одна з можливостей матеріалу передавати або проводити тепло. Це один з трьох методів передачі тепла, два інших - конвекція і випромінювання. Цей процес виникає при нерівномірному розподілі температур. Теплопровідність виникає, коли енергія передається від одного атома або об'єкта до іншого. Провідність може відбуватися в рідких, газоподібних або твердих об'єктах. Щоб провідність мала місце між двома об'єктами, вони повинні торкатися один одного. Щоб провідність відбулась між атомами в межах одного і того ж об'єкта, вони повинні стикатися (або майже стикатися). Коли виникає провідність, вона не змушує об'єкти рухатися, як ви могли подумати. Тепло рухається по температурному градієнту від області з високою температурою і високою молекулярною енергією до області з більш низькою температурою і більш низькою молекулярною енергією. Це перенесення триватиме до тих пір, поки не буде досягнута теплова рівновага. Швидкість, з якою передається тепло, залежить від величини температурного градієнта (різниці температур) і конкретних теплових характеристик матеріалу (теплопровідності матеріала).

У звичайному житті, з теплопровідністю ми стикаємося на кожному кроці. Наприклад, тепло від гарячої рідини робить чашку гарячою, якщо ви візьмете чашку з гарячою кавою, чаєм чи бульйоном, сама чашка буде гарячою, і ваші руки це відчують; при прасуванні одягу праска нагрівається, і тепло передається одягу; пісок може проводити тепло, ось чому прогулянка по пляжу в спекотний літній день зігріє ноги. Також, за приклад можна взяти радіатор - це пристрій, який передає тепло від об'єктів при високих температурах повітря або рідини, яка потім відводить надлишкову теплову енергію. У більшості комп'ютерів до процесора прикріплений радіатор. Радіатор зроблений з металу, який відводить тепло від процесора, а потім невеликий вентилятор циркулює повітря навколо радіатора, змушуючи теплову енергію розсіюватися. Якщо все зроблено правильно, радіатор

дозволяє процесору працювати в стабільному стані. Наскільки добре працює радіатор, залежить від провідності металу, площі поверхні, товщини і підтримуваного температурного градієнта.

1.2. Аналіз методів розв’язку нелінійного рівняння теплопровідності

Найбільш часто використовуваний методом чисельного аналізу є метод скінченних елементів. Спочатку він був розроблений для розв’язку задач механіки твердого тіла (точніше, задач вигину пластин), але з того часу він знайшов широке застосування у всіх областях обчислювальної фізики та техніки. Метод скінченних елементів на сьогодні є найбільш гнучким з усіх методів, і його можна адаптувати до широкого кола чисельних задач. Це робить метод скінченних елементів універсальним інструментом для чисельного розв’язку диференціальних рівнянь. Основну концепцію методу скінченних елементів можна розглядати як поділ обчислювальної області на окремі невеликі ділянки та пошук локальних розв’язків, що задовольняють диференціальні рівняння в межах цієї ділянки. Зшиваючи окремі розв’язки разом, можна отримати глобальний розв’язок.

Метод граничних елементів - потужна й ефективна альтернатива методу скінченних елементів. Простота цього методу полягає в створенні сітки тільки на кордоні тіла, а не на всій області. Вузлові точки, розташовані на кордонах, переміщаються разом з рухомим фронтом зміни фази. Ефективність цього методу очевидна, особливо для задач зі змінними та множинними рухомими областями. Однак для нестаціонарних або нелінійних задач потрібна додаткова вибірка внутрішньої області, щоб мати справу з членами, які не взяті в межах. Ця вибірка значно збільшує обсяг даних, необхідних для розв'язання задачі, і ускладнює додаткові обчислення.

Безсіткові методи - це особлива група чисельних методів, використовних для моделювання фізичних явищ, в тому числі механічних, шляхом розв'язання початково-крайової задачі. На відміну від сіткових

методів, заснованих на накладеній жорсткої сітки елементів, безсіткові методи будуються на «хмарі» точок, розкиданих всередині області Ω, на якому будується розв’язок з використанням різних методів апроксимації. Існує безліч версій цієї групи методів з різними назвами, наприклад, метод згладжених гідродинамічних частинок, метод Гальоркіна. В наш час вони дуже швидко розвиваються.

Метод Гальоркіна, як метод скінченних елементів вважається одним з найбільш успішних підходів до побудови стійких чисельних апроксимацій в задачах моделювання процесів. Математична ідея, закладена в методі Гальоркіна, виявилася дуже корисною для створення основ як якісного, так і кількісного аналізу рівнянь в частинних похідних, які стали інтенсивно вивчатися з середини XIX століття. Вони виявилися набагато складніше, ніж звичайні диференціальні рівняння, які вивчалися раніше. Математичні моделі на основі рівнянь частинних похідних, виникли із завдань механіки і фізики.

1.3. Аналіз програмних реалізацій методів розв’язку нелінійного рівняння теплопровідності

Система «Ліра-САПР» розроблена у 2015 році. Призначена для розрахунків об'єктів будівництва, машинобудування, атомної енергетики, нафтовидобувній промисловості та т.д. [1]

Крім загального розрахунку моделі об'єкта, можливі розрахунок видів статичних навантажень, температурних, деформаційних і динамічних дій (вітер з урахуванням пульсації, сейсмічні впливи тощо).

Реалізований метод розрахунку - метод скінченних елементів і метод граничних елементів.

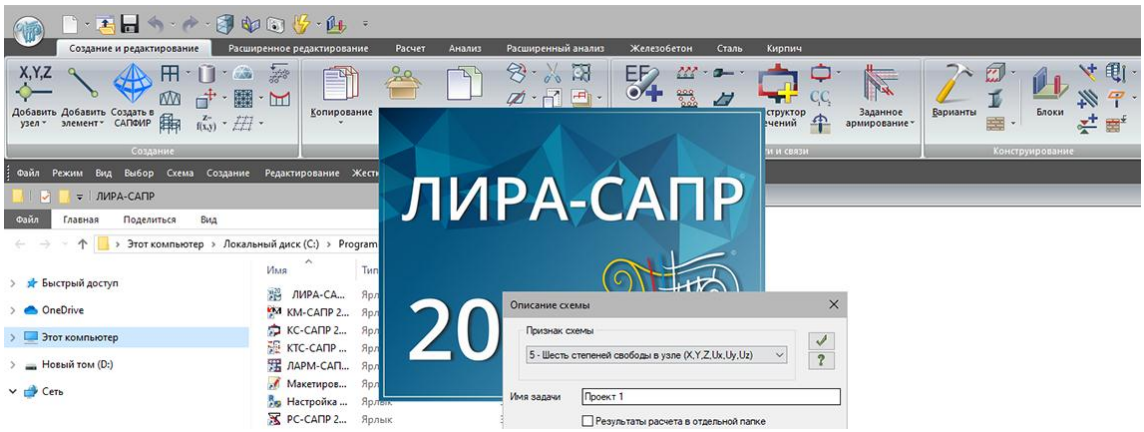


Рис. 1.1. Система «Ліра-САПР»

У системі реалізований блок для розв’язку стаціонарних і нестаціонарних задач теплопровідності. На Рис.1.2. і Рис.1.3. представлено приклади діалогових вікон завдання фізичних параметрів матеріалів.

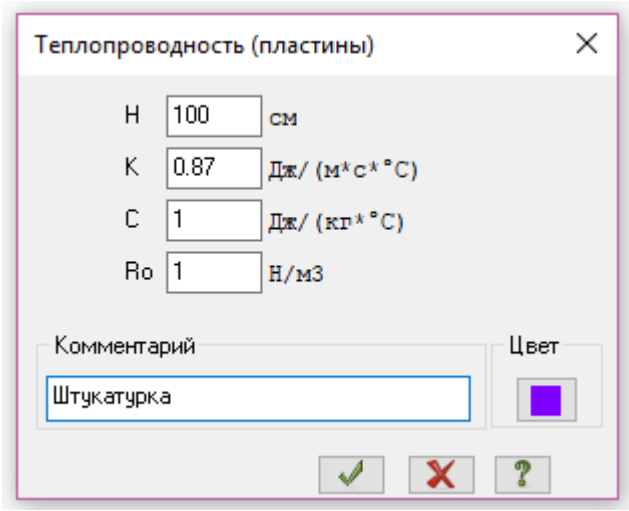


Рис. 1.2. Завдання параметрів пластини

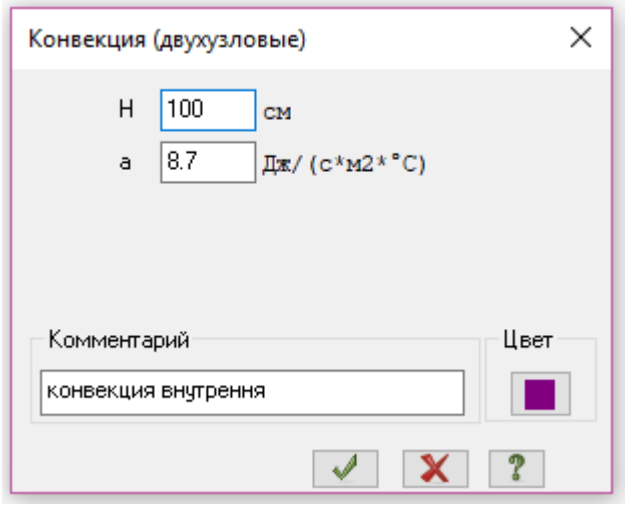


Рис. 1.3. Завдання параметрів конвекції

Система дозволяє розв’язати нестаціонарні задачі теплопровідності методом граничних елементів (Рис.1.4.)

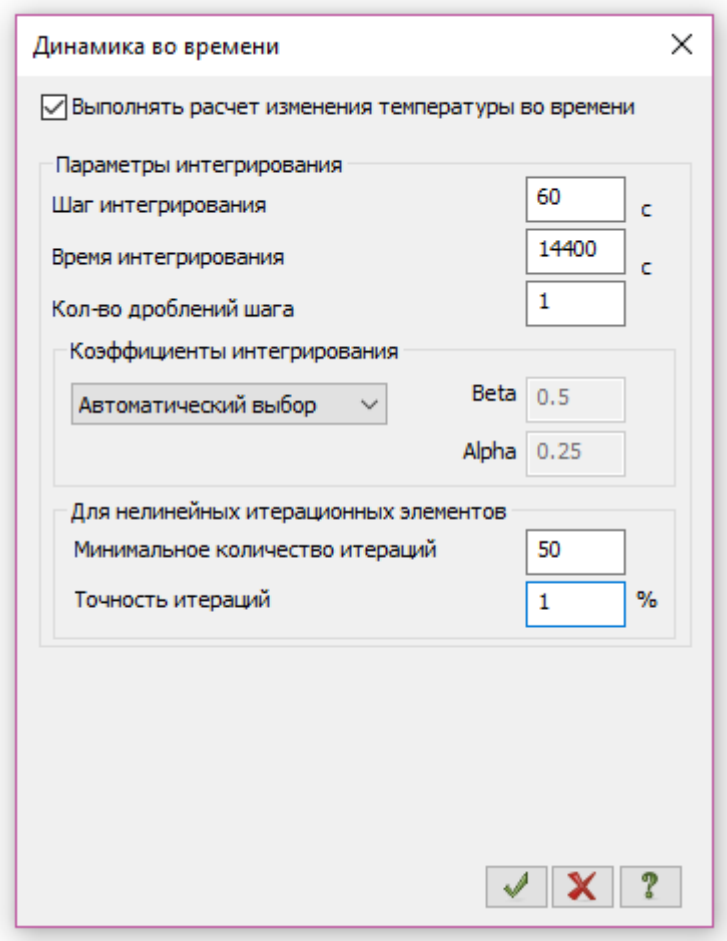


Рис. 1.4. Параметри розв’язку нестаціонарної задачі теплопровідності

На рис.1.5. представлена візуалізація розподілу температури в певний момент часу.

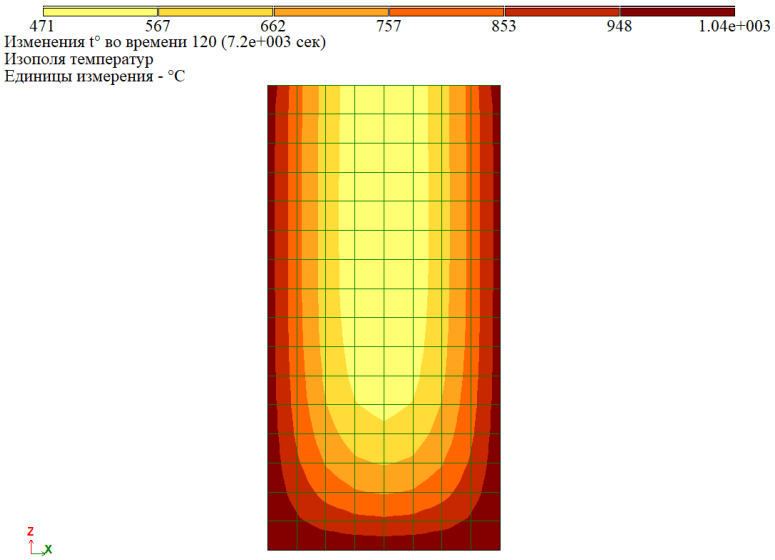


Рис.1.5. Візуалізація розподілу температури

Недоліком системи «Ліра-САПР» є неможливість проведення розрахунків для нелінійних задач теплопровідності і вартість системи - 218 тис. грн., ліцензія на рік.

Друга система ELCUT [5].

ELCUT може виконувати лінійний і нелінійний стаціонарний температурний аналіз в плоскій і осесиметричній постановці. Елементи графічного інтерфейсу ELCUT показані на рис. 1.6

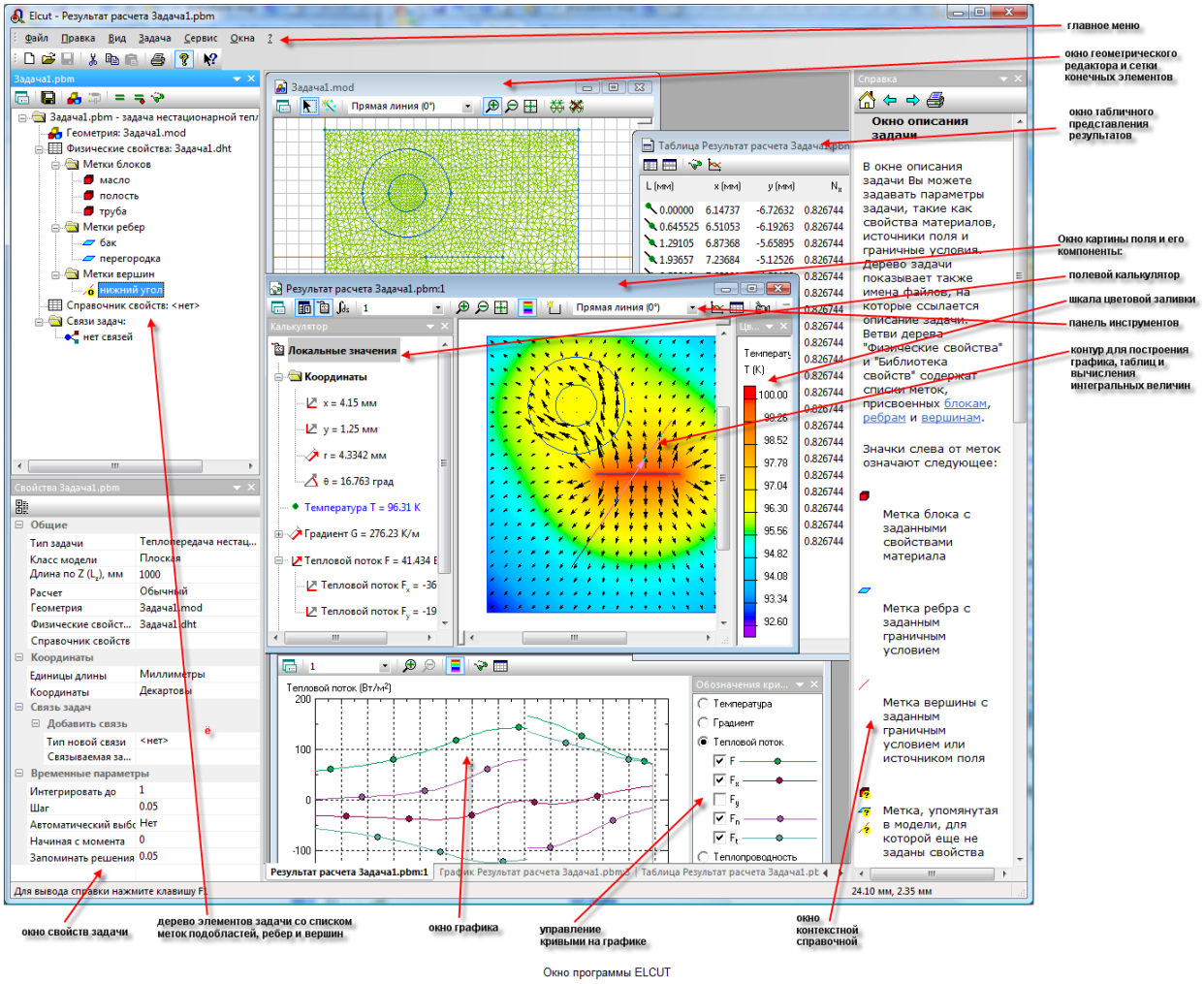


Рис. 1.6. Елементи графічного інтерфейсу ELCUT

ELCUT успішно розв’язує задачу індукційного нагріву, які вимагають спільного розв’язку рівнянь електромагнітного поля і теплопровідності, а також дозволяє розрахувати температурне поле для обліку термічних напружень в завданні пружного напруженого стану.

У завданнях теплопровідності ELCUT передбачає такі види граничних умов (рис. 1.7.)

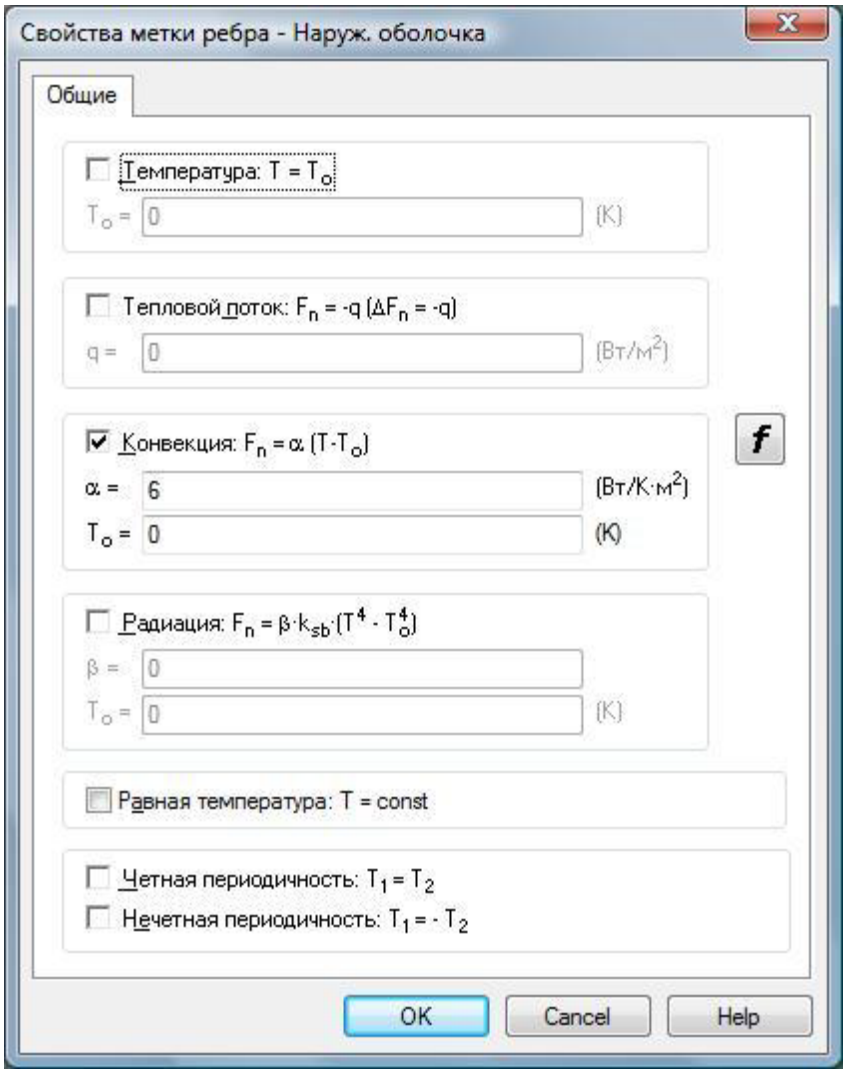


Рис. 1.7. Види граничний умов в задачах теплопровідності.

Реалізований метод розрахунку - метод скінченних елементів і метод граничних елементів.

Недоліком системи «ELCUT» є вартість системи - 120 тис. грн., ліцензія на рік.

Розглянуті приклади програмних продуктів є комерційними що унеможливлює їх використання в освітніх закладах та наукових дослідженнях.

Але основним недоліком розглянутих програмних продуктів є побудова інтерполяційної сітки при розв’язку крайових задач. Як відомо, генерація інтерполяційної сітки потребує значних обчислювальних потужностей і є одним з часозатратних процесів.

1.4. Постановка задачі

Мета полягає в розробці системи комп'ютерного моделювання для чисельного розв’язку нелінійного рівняння теплопровідності за безсітковою схемою з використання радіальних базисних функцій.

Задачі:

- Провести аналіз існуючих систем методів розв’язку нелінійного рівняння теплопровідності;
- Обрати чисельний метод розв’язку нестаціонарного одновимірного рівнянння теплопровідності;
- Розробити алгоритм роботи;
- Розробити архітектуру та інтерфейс системи;
- Розробити систему компьютерного моделювання для чисельного розв’язання нелінійного рівняння теплопровідності на мові програмування MATLAB;
- Провести тестування системи;

В програмі можливо використання однієї з запропонованих радіальних базісних функцій:

- Гауссіан
- Мультіквадратична
- Зворотна квадратична
- Зворотна мультиквадратична

В кінцевому результаті ми отримаємо у вигляді розподілу температури фронту теплової хвилі в нелінійному рівнянні теплопровідності.

2. РОЗРОБКА СИСТЕМИ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

2.1. Чисельний метод розв'язання нелінійного рівняння теплопровідності

Розробка чисельних алгоритмів розв'язання крайових задач, які описують процес теплопровідності, продовжує залишатися актуальним завданням фундаментального та прикладного характеру. Різні види нелінійних рівнянь, які описують цей процес, що обумовлені залежністю коефіцієнта теплопровідності від параметрів процесу, вимагають різних підходів до розв'язку. У дипломній роботі розглядається одновимірне рівняння теплопровідності зі степеневою нелінійністю:

$$\rho c_p \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\sigma}(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \quad (1)$$

де $x \in [a,b]$, $t \in [0,T]$, ρ – щільність, c_p – питома теплоємність при сталому тиску, k – коефіцієнт теплопровідності, а $\sigma > 0$ – відомий коефіцієнт.

Початкові умови для даної задачі задаються у вигляді:

$$u(x,0) = u_0(x), x \in [a,b] \quad (2)$$

Граничні умови Діріхле представлені у вигляді:

$$\begin{cases} u(a,t) = g_1(t) \\ u(b,t) = g_2(t) \end{cases}, t \in [0,T] \quad (3)$$

Виконавши заміну $u(x,t) = v^{\frac{1}{\sigma}}(x,t)$, рівняння (1) зводиться до наступного рівняння:

$$\rho c_p \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{k}{\sigma}\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^2 + kv(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \quad (4)$$

з початковими

$$v(x,0) = v_0(x), x \in [a,b] \quad (5)$$

та граничними умовами:

$$\begin{cases} v(a,t) = h_1(t) \\ v(b,t) = h_2(t) \end{cases}, t \in [0,T] \quad (6)$$

Застосувавши θ-схему для дискретизації рівняння (4) за часом, отримаємо:

$$v(x,t) \approx \theta v^{n+1} + (1-\theta)v^n \quad (7)$$

$$\nabla v(x,t) \approx \theta \nabla v^{n+1} + (1-\theta)\nabla v^n \quad (8)$$

$$\Delta v(x,t) \approx \theta \Delta v^{n+1} + (1-\theta)\Delta v^n \quad (9)$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \approx \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} \quad (10)$$

де $v^n = v(x,t^n)$, $t^n = n\tau$, τ – крок за часом, $0 \le \theta \le 1$ – ваговий коефіцієнт, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Підставляємо рівняння (7)-(10) в рівняння (4):

$$\rho c_p \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = \frac{k}{\sigma}(\theta \nabla v^{n+1} + (1-\theta)\nabla v^n)^2 + k(\theta v^{n+1}\Delta v^{n+1} + (1-\theta)v^n \Delta v^n) \quad (11)$$

Нехай коефіцієнт θ в рівняння (11) дорівнює нулю. Тоді рівняння (11) прийме наступний вигляд:

$$\rho c_p \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = \frac{k}{\sigma}(\nabla v^n)^2 + k v^n \Delta v^n \quad (12)$$

Перепишемо рівняння (12) в наступному вигляді:

$$v^{n+1} = v^n + \frac{\tau k}{\rho c_p}\left(\frac{1}{\sigma}(\nabla v^n)^2 + v^n \Delta v^n\right) \quad (13)$$

Рівномірно розподілимо $N-2$ точки колокації $\{x_i\}_2^{N-1}$ всередині області (a,b) і дві точки на кордоні області $x_1 = a$ и $x_n = b$. Наближений розв'язок рівняння (4) може бути отриманий з використанням радіальних базисних функцій $\varphi(r_{ij})$:

$$v^n(x_i) \approx \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^n \varphi(r_{ij}) \quad (14)$$

де $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$ – евклідова відстань між вузлами, α_j^n – невідомі коефіцієнти, які підлягають визначенню.

Підставивши рівняння (14) в рівняння (13), приходимо до наступних систем лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^{n+1} \varphi(r_{ij}) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^n \varphi(r_{ij}) + \\ + \frac{\tau k}{\rho c_p} \left[\frac{1}{\sigma} \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^n \varphi'(r_{ij}) \right)^2 + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^n \varphi(r_{ij}) \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^n \varphi''(r_{ij}) \right] \tag{15}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^{n+1} \varphi(r_{1j}) = h_1(t) \\ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^{n+1} \varphi(r_{Nj}) = h_2(t) \end{cases} \tag{16}$$

У дипломній роботі для апроксимації використовуються наступні радіальні базисні функції:

$\varphi(r_{ij}) = e^{-(cr_{ij})^2}$ – функція Гаусса

$\varphi(r_{ij}) = \sqrt{r_{ij}^2 + c^2}$ – мультиквадратична функція

$\varphi(r_{ij}) = \frac{1}{r_{ij}^2 + c^2}$ – зворотна квадратична функція

$\varphi(r_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{(r_{ij}^2 + c^2)^3}}$ – зворотна мультиквадратична функція

де $c \neq 0$ – параметр форми радіальної базисної функції.

Рівняння (13) є рекурсивним рівнянням, тому будемо розв’язувати його крок за кроком, починаючи з початкових умов (5). Запишемо рівняння (14) разом з граничними умовами (6) в матричному вигляді:

$$[v]^n = A[\alpha]^n \tag{17}$$

де $[v]^n = [v_1^n, v_2^n, \dots, v_N^n]^T$, $[\alpha]^n = [\alpha_1^n, \alpha_2^n, \dots, \alpha_N^n]^T$ і $A = \left[\varphi\left(r_{ij}\right)\right], 1 \le i, j \le N$.

Розділимо матрицю A в рівнянні (17) на дві матриці A_d і A_b, які відповідають внутрішнім і граничним точкам області крайової задачі:

$$A = A_d + A_b \tag{18}$$

де

$$A_d = \begin{cases} \varphi\left(r_{ij}\right), \text{якщо } 2 \le i \le N-1, 1 \le j \le N \\ 0, \text{інакше} \end{cases}$$

$$A_b = \begin{cases} \varphi\left(r_{ij}\right), \text{якщо } i = 1, N, 1 \le j \le N \\ 0, \text{інакше} \end{cases}$$

Запишемо разом рівняння (15) і (16), з урахуванням рівняння (18), в матричному вигляді:

$$\begin{aligned} A[\alpha]^{n+1} = A_d[\alpha]^n + \\ + \frac{\tau k}{\rho c_p}\Big(\frac{1}{\sigma}(B_d[\alpha]^n).*(B_d[\alpha]^n) + \left(A_d[\alpha]^n.*(C_d[\alpha]^n)\right) \\ + [\mathrm{H}]^{n+1}\Big) \end{aligned} \tag{19}$$

де

$$B_d = \begin{cases} \varphi'\left(r_{ij}\right), \text{якщо } 2 \le i \le N-1, 1 \le j \le N \\ 0, \text{інакше} \end{cases}$$

$$C_d = \begin{cases} \varphi''\left(r_{ij}\right), \text{якщо } 2 \le i \le N-1, 1 \le j \le N \\ 0, \text{інакше} \end{cases}$$

$[\mathrm{H}]^{n+1} = \left[h_1^{n+1}, \underbrace{0, 0, \ \dots \ , 0}_{N-2}, h_2^{n+2}\right]^T$, “ .* ” – покомпонентний добуток двох векторів.

Позначимо праву частину рівняння (19) як:

$$\mathrm{M} = A_d[\alpha]^n + \frac{\tau k}{\rho c_p}\left(\frac{1}{\sigma}(B_d[\alpha]^n).*(B_d[\alpha]^n) + (A_d[\alpha]^n).*(C_d[\alpha]^n)\right) + [\mathrm{H}]^{n+1} \quad (20)$$

З урахуванням рівняння (20), рівняння (19) перепишеться у вигляді:

$$A[\alpha]^{n+1} = \mathrm{M} \quad (21)$$

Рівняння (21) може бути вирішено щодо невідомих коефіцієнтів наступним чином:

$$[\alpha]^{n+1} = A^{-1} * \mathrm{M} \quad (22)$$

Тоді наближене розв’язок рівняння (4) на наступному кроці може бути отримано за такою формулою:

$$[v]^{n+1} = A[\alpha]^{n+1} \quad (23)$$

Даний метод розв’язку був реалізований в розробленій системі комп'ютерного моделювання для чисельного розв’язку нелінійного одновимірного нестаціонарного рівняння теплопровідності.

2.2. Алгоритм системи комп’ютерного моделювання



Рис.1.8. Блок-схема роботи програми

Програма складається з наступних частин:

- Частина вибіру радіальної базисної функції.

- Частина задання крайових умов для програми.
- Частина задання початкових умов для програми.
- Частина задання коефіцієнта σ.
- Частина задання коефіцієнта теплопровідності.
- Частина задання щільності.
- Частина задання питомої теплоємності.
- Частина задання розміру області.
- Частина задання відстані між вузлами.
- Частина задання тимчасового інтервалу.
- Частина задання кроку за часом.
- Частина задання параметру форми радіальної базисної функції.
- Частина запуску розв’язку
- Частина отримання та візуалізації результату.

2.3. Етапи розробки системи комп’ютерного моделювання

В цій частині програми реалізована функція *Розрахунок*. Ця функція зчитує всі введені дані з текстових полів введення параметри розв’язку, граничні та початкові умови. На підставі введених даних за допомогою розробленої ітераційної схеми знаходимо чисельний розв’язок нелінійного рівняння теплопровідності. Отриманий результат візуалізується в вигляді тривимірної поверхні.

```
Un1 = [];
S = [];
Number = [];
index = 4;
function Calculate(~,~)
    A = eval(vectorize(get(a,'String')));
    B = eval(vectorize(get(b,'String')));
    DX = eval(vectorize(get(dx,'String')));
    T_END = eval(vectorize(get(T,'String')));
```

```
tau = eval(vectorize(get(dt,'String')));
sigma = str2double(get(Sigma,'String'));
k = str2double(get(K,'String'));
ro = str2double(get(Ro,'String'));
cp = str2double(get(Cp,'String'));
x = A:DX:B;
t = 0:tau:T_END;
[A, Ad, Bd, Cd] = CreateMatrixRBF(x);
BC = real(BoundaryConditions(t));
 Vn = real(InitialConditions(x));
counter = 1;
   WB = waitbar(0,'Зачекайте, йде рішення...');
Vn1(:,counter) = Vn;
counter = counter + 1;
while(counter <= length(t))
   alfaN = mldivide(A,Vn);
   Hn = [BC(counter,1);zeros(length(x)-2,1);BC(counter,2)];
   M =
Ad*alfaN+tau*k/(r0*cp)*(1/sigma*(Bd*alfaN).*(Bd*alfaN)+(Ad*alfaN).*(Cd*alf
aN))+Hn;
   alfaN1 = mldivide(A,M);
   Vn1(:,counter) = A*alfaN1;
   Vn = Vn1(:,counter);
   counter = counter + 1;
   waitbar((counter-1)/length(t))
end
close(WB)
[X,Y] = meshgrid(x,t);
Vn1(Vn1 < 0) = 0;
Un1 = (Vn1').^(1/sigma);
```

```
S = surf(X,Y,Un1);
shading interp
if(strcmp(get(surf_grid,'State'),'on'))
   set(S,'EdgeColor','k');
else
   set(S,'EdgeColor','none');
end
set(ax,'Box','on')
view(ax,[-40 30])
set(ax,'FontSize',10)
grid(ax,'minor')
xlabel(ax,'x','FontSize',16,'Color','b')
ylabel(ax,'t','FontSize',16,'Color','b')
zlabel(ax,'u(x,t)','FontSize',16,'Color','b')
colormap(ax,'jet')
set(sumbit,'Enable','on')
set(surf_grid,'Enable','on')
set(exp_sol,'Enable','on')
set(text1,'String',['Вибір ітерації від 1 до 50001 ', num2str(length(t))])
Number = t;
end
```

В цій частині програми реалізована функція *Вибір ітерації*. Ця функція дозволяє візуалізувати окремі ітерації та тимчасові інтервали в вигляді тривимірної поверхні.

```
function ChooseIter(~,~)
A = eval(vectorize(get(a,'String')));
B = eval(vectorize(get(b,'String')));
DX = eval(vectorize(get(dx,'String')));
T_END = eval(vectorize(get(T,'String')));
tau = eval(vectorize(get(dt,'String')));
```

```
    x = A:DX:B;
    t = 0:tau:T_END;
    [X,Y] = meshgrid(x,t);
    IT = str2num((get(iter,'String')));
    for i = 1:length(IT)
       plot3(X(IT(i),:),Y(IT(i),:),Un1(IT(i),:),'Color','k')
       hold on
    end
    hold off
    set(ax,'Box','on')
    view(ax,[-40 30])
    set(ax,'FontSize',10)
    grid(ax,'minor')
    xlabel(ax,'x','FontSize',16,'Color','b')
    ylabel(ax,'t','FontSize',16,'Color','b')
    zlabel(ax,'u(x,t)','FontSize',16,'Color','b')
    colormap(ax,'jet')
    set(surf_grid,'Enable','off')
  end
```

В цій частині програми реалізована функція *Рівняння джерела*. Ця функція дозволяє вводити значення джерела тепла в числовому форматі.

```
  function F = SourceFcn(step,BC,x,t)
    F = zeros(1,length(x)) + eval(vectorize(get(f,'String')));
    tau = eval(vectorize(get(dt,'String')));
    MU = eval(vectorize(get(mu,'String')));
    F = F * tau / MU;
    F(1) = BC(step,1);
    F(end) = BC(step,2);
    F = F';
  end
```

В цій частині програми реалізована функція *Початкові умови*. Ця функція включає в себе задання функції початкових умов у вигляді константи або функції залежної від координат.

```
function IC = InitialConditions(x)
    sigma = str2double(get(Sigma,'String'));
    IC = zeros(1,length(x)) + eval(vectorize(get(u0,'String'))).^sigma;
    IC = IC';
end
```

В цій частині програми реалізована функція *Граничні умови*. Ця функція включає в себе задання крайових умов.

```
function BC = BoundaryConditions(TIME)
    G1 = get(g1,'String');
    G2 = get(g2,'String');
    sigma = str2double(get(Sigma,'String'));
    BC = zeros(length(TIME),2);
    for i = 1:length(TIME)
        t = TIME(i);
        left = eval(vectorize(G1));
        right = eval(vectorize(G2));
        BC(i,1) = left(1).^sigma;
        BC(i,2) = right(end).^sigma;
    end
end
```

В цій частині програми реалізована функція *Створення матриці Радіально базисної функції*. Ця функція включає в себе вводити значення та вирахувати матрицю.

```
function [A, Ad, Bd, Cd] = CreateMatrixRBF(x)
    DX = eval(vectorize(get(dx,'String')));
    DistanceMatrix = zeros(length(x));
    for i = 1:length(x)
```

```
        DistanceMatrix(:,i) = sqrt((x - x(i)).^2);
    end
    A = rbf(DistanceMatrix);
    Ad = A;
    Ad([1,end],:) = 0;
        [~,Bd] = gradient(Ad,DX);
    [~,Cd] = gradient(Bd,DX);
end
```

В цій частині програми реалізована функція *Радіально базисної функції.* Ця функція включає в себе вибір з чотирьох можливих радіально базисних функцій та їх розв’язок.

```
function fi = rbf(r)
    E = str2double(get(e,'String'));
    if index == 1
        fi = exp(-((E*r).^2));
    elseif index == 2
        fi = sqrt(E^2 + r.^2);
    elseif index == 3
        fi = 1./(E^2 + r.^2);
    elseif index == 4
        fi = 1./(E^2 + r.^2).^(3/2);
            end
end
```

В цій частині програми реалізована функція *Зум +/-*. Ця функція включає в себе режим масштабування активного графіка. Так само ця функція дозволяє побачити в збільшеному вигляді окремі шматочки складного графіка.

```
function ZoomInOn(~,~)
    RotateOff
    set(rotate,'State','off')
    ToolDataCursorOff
```

```
    set(data_cursor,'State','off')
    zoom on
end
function ZoomInOff(~,~)
    zoom off
end
```

В цій частині програми реалізована функція *Обертання*. Ця функція виконує обертання графічного об'єкта або графіка в 3-вимірному просторі. В данній програмі це виконується в трьох можливих площинах: 1) X - Y; 2) X – Z; 3) Y – Z;

```
function RotateOn(~,~)
    ZoomInOff
    set(zoomin,'State','off')
    ToolDataCursorOff
    set(data_cursor,'State','off')
    rotate3d on
end
function RotateOff(~,~)
    rotate3d off
end
```

В цій частині програми реалізована функція *Перегляд значення в точці*. Ця функція включає в себе перегляд значення в будь-якій точці графіка.

```
function ToolDataCursorOn(~,~)
    ZoomInOff
    set(zoomin,'State','off')
    RotateOff
    set(rotate,'State','off')
    datacursormode on
    dcm_obj = datacursormode(h);
    set(dcm_obj,'UpdateFcn',@UpdateDataCursor)
```

```
end
function ToolDataCursorOff(~,~)
    datacursormode off
end
function txt = UpdateDataCursor(~,event_obj)
    pos = get(event_obj,'Position');
    txt = {['x: ',num2str(pos(1))],['t: ',num2str(pos(2))],['u(x,t): ',num2str(pos(3))]};
end
```

В цій частині програми реалізована функція *Зберегти розв'язок як зображення.* Ця функція виконує збереження розв'язку в трьох доступних форматах в зображення.

```
function SaveSolution(~,~)
    [filename, pathname] = uiputfile({'*.jpg','JPEG (*.jpg)';'*.png','Portable Network Graphics (*.png)';'*.svg','Scalable Vector Graphics (*.svg)'},' Зберегти розв'язок');
    if filename ~= 0
    fullpathname = strcat(pathname,filename);
    set(0,'showhiddenhandles','on')
    obj = findobj(h,'type','axes');
    nFig = figure('Units','pixels','Position',[50,50,1000,800],'MenuBar','none','Resize','off','NumberTitle','off','Name','');
    newAx = copyobj(obj,nFig);
    set(newAx,'Position',[200 100 600 600])
    grid(newAx,'off')
    grid(newAx,'on')
    fullpathname(end-3:end) = [];
    if strcmp(filename(end-2:end),'jpg')
      print(nFig,fullpathname,'-djpeg','-r400')
```

```
        elseif strcmp(filename(end-2:end),'png')
            print(nFig,fullpathname,'-dpng','-r400')
        elseif strcmp(filename(end-2:end),'svg')
            print('-painters',nFig,fullpathname,'-dsvg')
        end
        close(nFig)
    end
end
```

В цій частині програми реалізована функція *Відобразити/Приховати сітку*. Ця функція виконує відображення головних ліній сітки для поточної системи координат. Або видаляє усі лінії сітки для поточної системи координат.

```
function GridOn(~,~)
    set(S,'EdgeColor','k')
end
function GridOff(~,~)
    set(S,'EdgeColor','none')
end
```

В цій частині програми реалізована функція *Експорт розв'язку в бінарний файл.* Ця функція виконує збереження розв'язку в бінарному форматі.

```
function ExportToBinary(~,~)
    A = eval(vectorize(get(a,'String')));
    B = eval(vectorize(get(b,'String')));
    DX = eval(vectorize(get(dx,'String')));
    T_END = eval(vectorize(get(T,'String')));
    tau = eval(vectorize(get(dt,'String')));
    x1 = A:DX:B;
    t1 = 0:tau:T_END;
    [x,t] = meshgrid(x1,t1);
```

```
    if strcmp(get(rus,'Checked'),'on')
       [filename, pathname] = uiputfile({'*.mat','MAT-files (*.mat)';}, 'Експорт
розв`язку');
if filename ~= 0
       fullpathname = strcat(pathname,filename);
       save(fullpathname,'x','t','Un1');
    end
```

3. ОПИС ТА ТЕСТУВАННЯ СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

В даній дипломні роботі розроблена система комп'ютерного моделювання призначена для чисельного розв'язку нелінійної одномірної нестаціонарної задачі теплопровідності. Розроблений додаток може використовуватися в вищих навчальних закладах, при наукових дослідженнях, так само при приватному використанні. Також, програмний продукт є абсолютно безкоштовним.

Чисельний розв'язок в системі комп'ютерного моделювання відбувається за допомогою методу колокації та радіальних базисних функцій. Метод колокації використовується для знаходження невідомих коефіцієнтів, а радіальні базисні функції - для апроксимації розв'язку.

3.1. Вимоги до використання розробленої системи комп'ютерного моделювання

Система комп'ютерного моделювання запускається на персональному комп'ютері під управлінням операційної системи Windows 7 та вище. Для роботи програми.

3.2. Інструкції користувачу

При запуску програми перед користувачем відкривається головне вікно системи комп'ютерного моделювання (рис 3.1.).

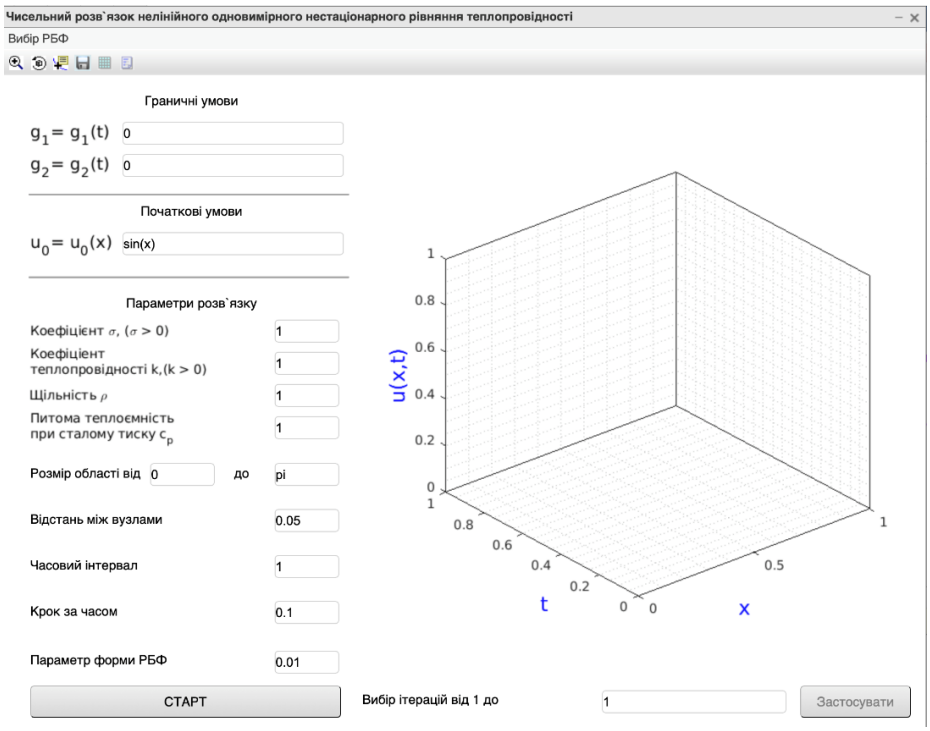


Рис.3.1. Головне вікно системи комп’ютерного моделювання

Натискаємо кнопку Вибір РБФ. У даній вкладці меню користувач може обрати одну із існуючих радіальних базисних функцій.

Далі користувач задає значення в полі *Граничні умови* задається умови на кінцях теплової хвилі.

В полі введення *Початкові умови* користувач задає значення початкових умов у вигляді константи.

Необхідно ввести значення в усі поля введення *Параметри рішення*.

Задаємо значення в полі введення *Коефіцієнт σ* - відомий коефіцієнт.

Задаємо значення в полі введення *Коефіцієнт теплопровідності k, (k>0)*.

Значення в полі введення *Щільність ρ* задаємо значення щільності.

Далі задаємо значення в полі введення *Питома теплоємність при сталому тиску* C_p.

Задаємо значення в полі введення *Розмір області*.

Задаємо значення в полі введення *Відстань між вузлами*.

Задаємо значення в полі введення *Часовий інтервал*.

Задаємо значення в полі введення *Крок за часом*.

Задаємо значення в полі введення *Параметри форми РБФ*.

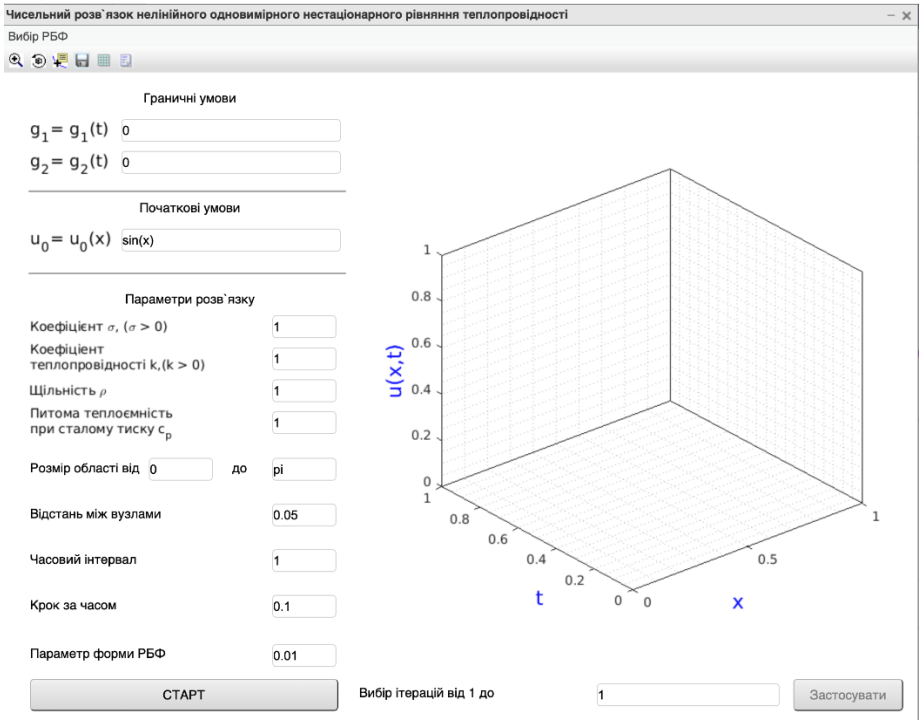


Рис. 3.2. Задання крайових умов задачі та параметрів розв’язку задачі

Щоб отримати розв’язок користувач повинен натиснути кнопку Старт, далі з'явиться вікно *Зачекайте, йде розв’язок*. Після декілька секунд користувач отримає візуалізацію результату (Рис. 3.3.).

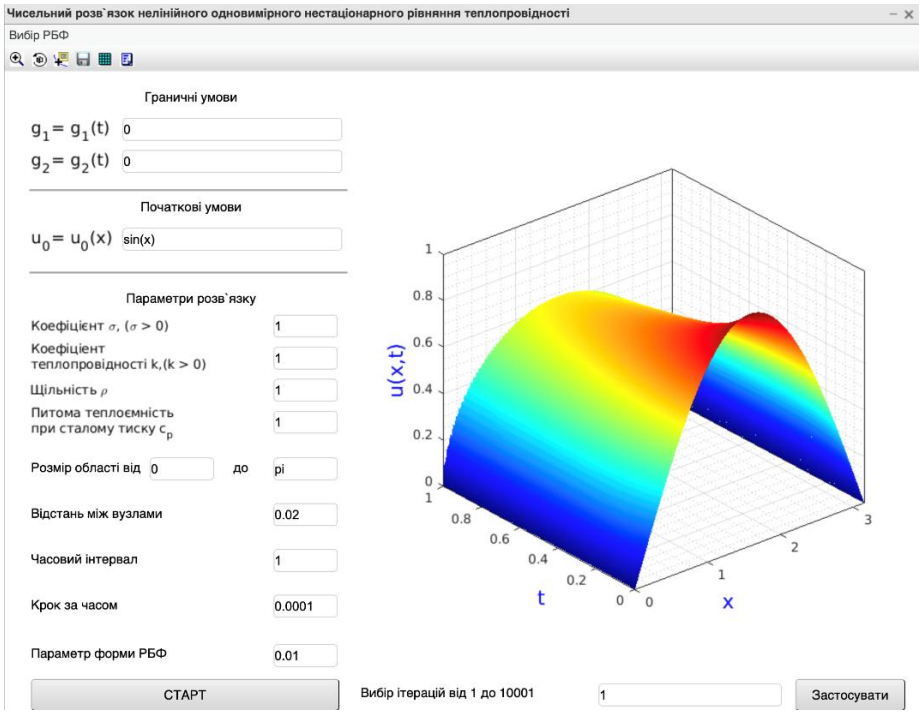


Рис.3.3. Візуалізації розв’язку

Налаштування візуалізація розв’язку (Рис. 3.4) відбувається за допомогою кнопки Обертати. У даній вкладці меню користувач може обертати графік в трьох можливих площинах.

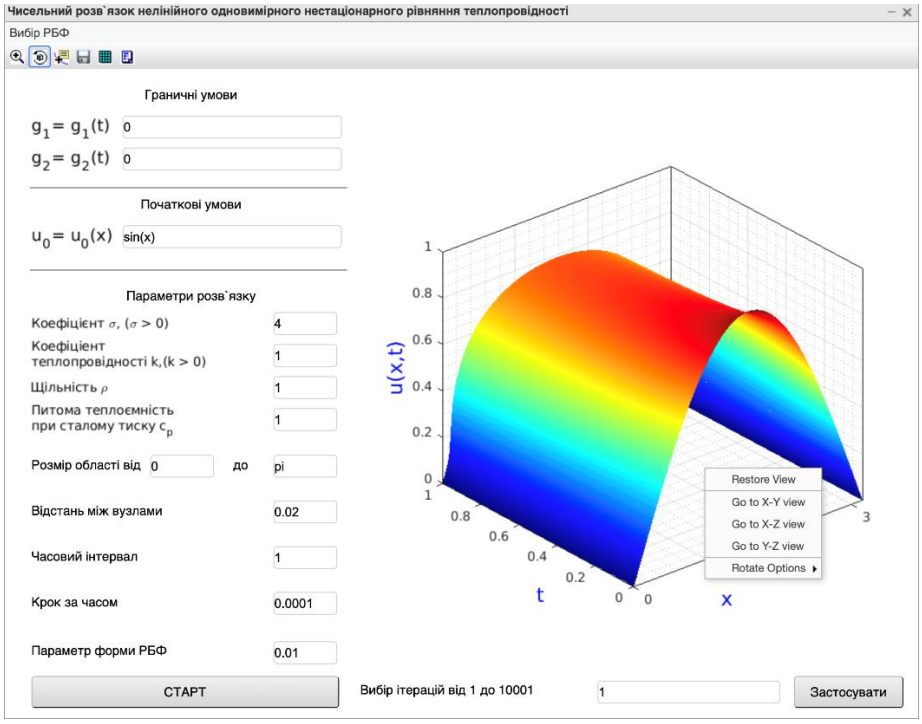


Рис. 3.4. Налаштування параметрів відображення розв’язку

На (Рис. 3.5) зображена візуалізація в одній з обраних площин xOz.

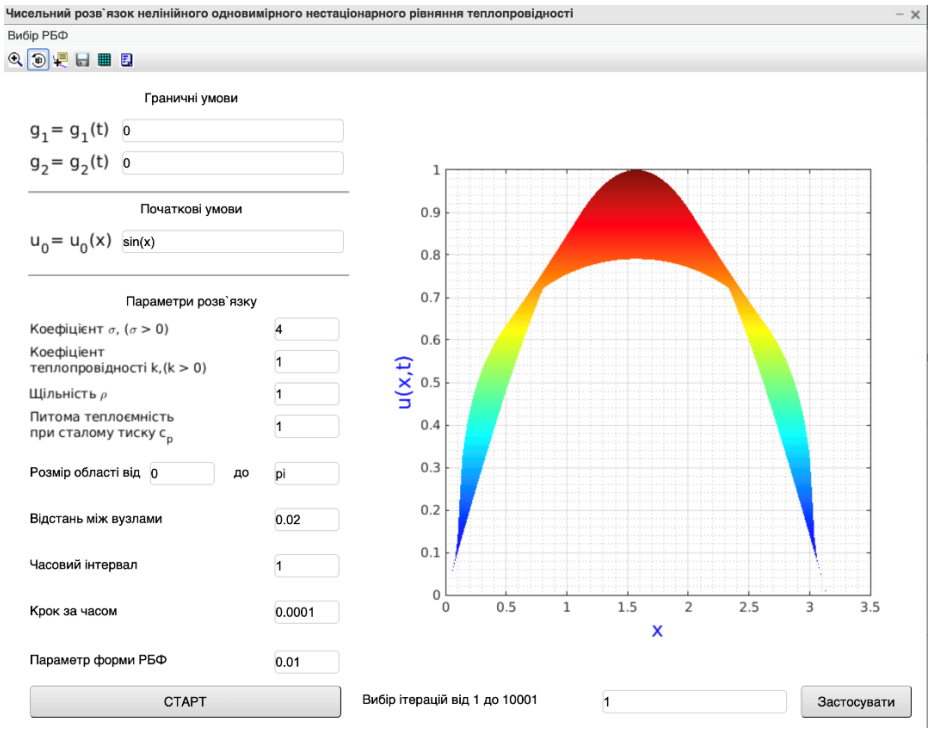


Рис.3.5. Візуалізація розв’язку в площини xOz .

За допомогою кнопки Перегляд значення в точці на вкладці меню, користувач може переглянути числове значення розв’язку графіку в окремих вузлах (Рис. 3.6).

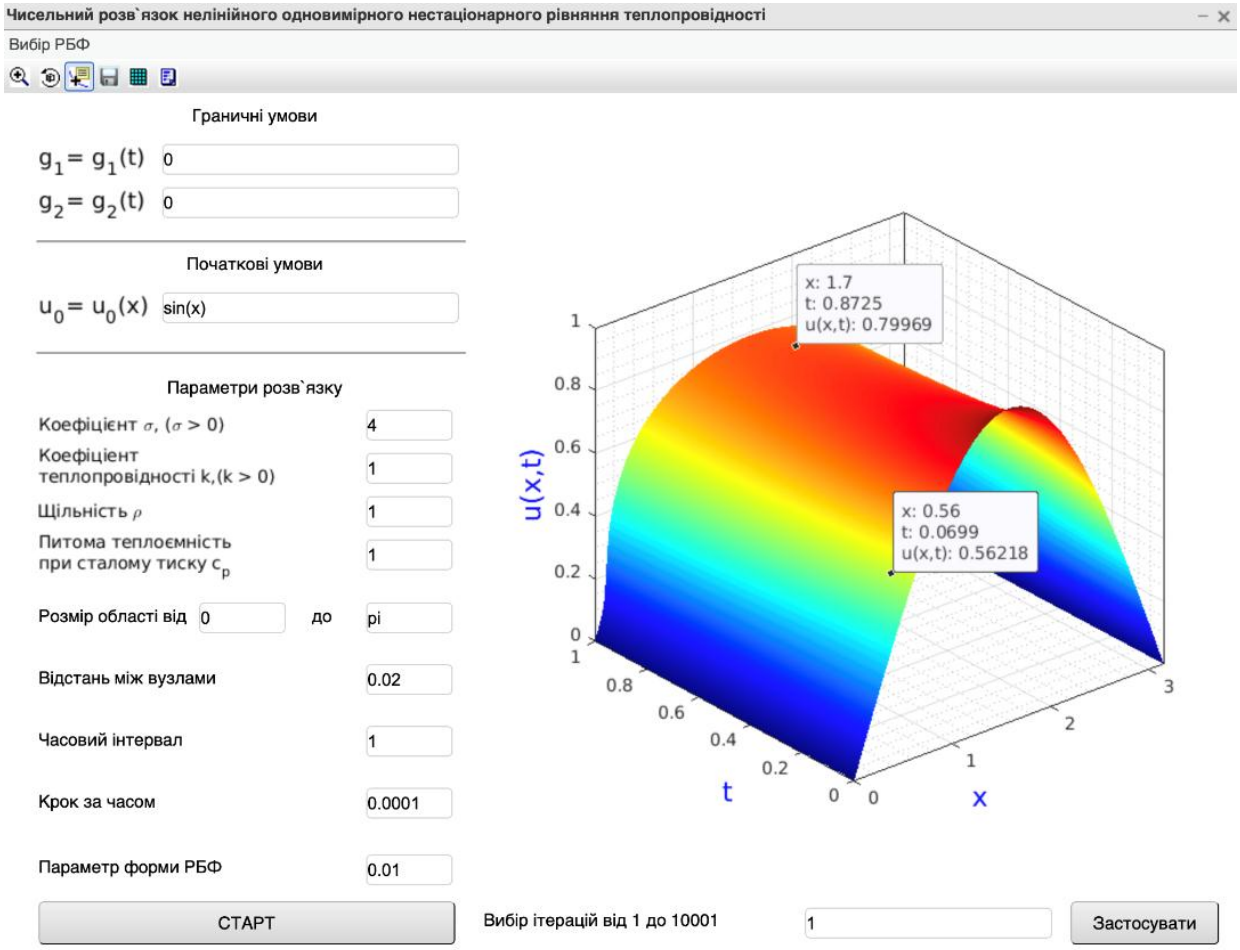


Рис. 3.6. Перегляд числового значення розв’язку в окремих вузлах

Налаштування візуалізація розв’язку на окремих ітераціях (Рис. 3.7) відбувається у полі «Вибір ітерації від 1 до ». В залежності від графіка програма сама вираховує до якого значення можливі ітерації.

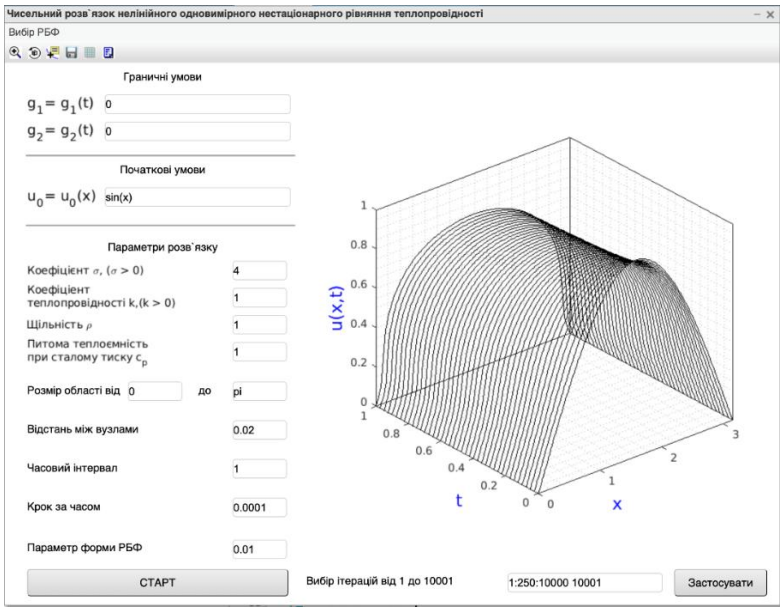


Рис.3.7. Візуалізація розв’язку на окремих ітераціях.

3.3. Тестування розробленої програми

Розглянемо одновимірне нестаціонарне рівняння теплопровідності зі степеневою нелінійністю:

$$\rho c_p \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\sigma}(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \tag{24}$$

де $x \in [0,1]$, $d_x = 0.01$, $t \in [0,6]$, $\tau = 0.0001$, $\rho = 1$, $c_p = 1$, $k = 1$, $\sigma = 4.5$.

Початкові умови задані наступним рівнянням:

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\left(4\left| x - \frac{1}{4} \right| - 8\left| x - \frac{1}{2} \right| + 4\left| x - \frac{3}{4} \right| \right) \tag{25}$$

Граничні умови мають вигляд:

$$\begin{cases} u(a,t) = 0 \\ u(b,t) = 0 \end{cases} \tag{26}$$

На Рис. 3.8. представлена візуалізація наближеного розв’язку даної крайової задачі.

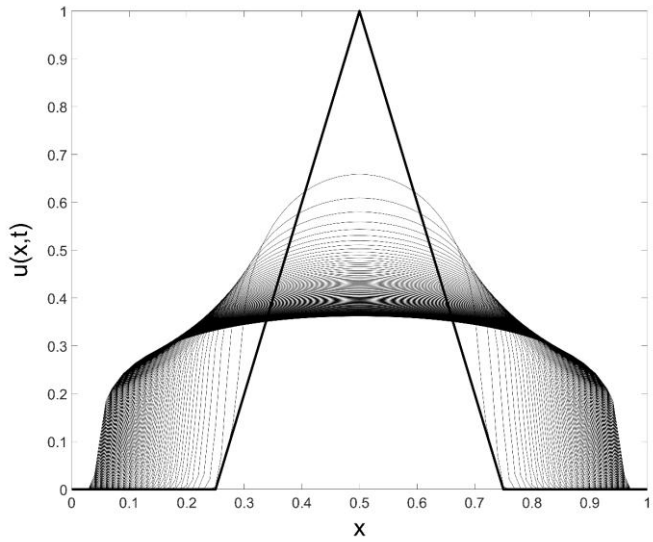


Рис. 3.8. Візуалізація наближеного розв’язку крайової задачі

Дана крайова задача моделює процес зупинки фронту теплової хвилі в нелінійному рівнянні теплопровідності. Жирною лінією на Рис. 3.8. зображено початковий розподіл температури.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дипломної роботи було вирішено наступні завдання:

- було проведено аналіз існуючих систем методів розв’язку нелінійного рівняння теплопровідності;
- було обрано чисельний метод розв’язку нестаціонарного одновимірного рівнянння теплопровідності;
- було розроблено алгоритм роботи програми;
- було розроблено архітектуру та інтерфейс системи;
- було розроблено систему компьютерного моделювання для чисельного розв’язання нелінійного рівняння теплопровідності на мові програмування MATLAB;
- було проведено тестування системи.

Розроблена система комп’ютерного моделювання для чисельного розв’язання нелінійного рівняння теплопровідності за безсітковою схемою з використанням радіальних базисних функцій. Безсітковий метод в наші часи більш популярний, він значно швидше і простіше, ніж сітковий, особливо на складних областях . Програма безкоштовна, та не потребує особливих ресурсів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел – 2-е издание, М.: Наука, 1964 г. – 488 с. с ил.
2. Берман Р. Теплопроводность твердых тел. – М.; Мир, 1978 г. – 287 с.
3. Формалев В. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2015 г. – 280 с. – ISBN 978-5-9221-1624-4.
4. Интернет ресурс: https://www.liraland.ru/
5. Интернет ресурс: https://elcut.ru/
6. *Шевченко И.В.* Численное моделирование движения воздушных масс бессеточными методами. Математическое моделирование. Т. 20. – 2008.–№ 10 – С.75–85.
7. Плохотников К. Вычислительные методы. Теория и практика в среде MATLAB: курс лекций. Учебное пособин для вузов. – 2-е издание, испр. – М.: Горячая линия – Телеком, 2013 г. – 496 с.: ил. ISBN 978-5-9912-0354-8.
8. Власова В., Зарубин В., Кувыркин Г. Приближенные методы математической физики. – М.: Изд-во МАИ, 1996 г. – 356 с.
9. Головин Н., Кувыркин Г., Цицин А. Численное решение нестационарной осесиметричной задачи теплопроводности для анизотропного тела переменного объёма. Проблемы прочности. 1988 г. - №12 – С.105-108.
10. Зарубин В. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоатомиздат, 1983 г. – 328 с.
11. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986 г.
12. Карташов Э. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа. – 2001 г. – 552 с.
13. Карташов Э. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися

границами (обзор). – Инженерно-физический журнал. – 2000 г. – Т.74 - №2 – С.1-24.

14. Лыков А. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа. – 1967 г. – 600 с.
15. Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L. Element–free Galerkin Methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 37. – 1994. – P. 229– 256.
16. Костомаров Д. П., Фаворский А. П. Вводные лекции по численным методам: Учеб. пособие. М.: Университетская книга, Логос, 2006. 184 с.
17. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах: Учеб. пособие. М.: Высшая школа, 2006, 480с.
18. Кетков Ю. Л., Кетков А. Ю., Шульц М. М. MATLAB7: программирование, численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 752с.
19. Потемкин В. Г. Вычисления в среде MATLAB. М.: Диалог-МИФИ, 2004. 720с.
20. Плохотников К. Э. Метод и искусство математического моделирования. Курс лекций. М.: Флинта, 2013. 518с.
21. Боглаев Ю. П. Вычислительная математика и программирование. М.: Высшая школа, 1990. 544с.
22. Мэтьюз Дж. Г., Финк К. Д. Численные методы. Использование MATLAB. М.: Издательский дом “Вильямс”, 2001. 720с.
23. Плохотников К. Э., Волков Б. И., Задорожный С. С., Антонюк В. А., Терентьев Е. Н., Белинский А. В. Методы разработки курсовых работ. Моделирование, вычисления, программирование на C/C++ и MATLAB, виртуализация, образцы лучших студенческих курсовых работ: Учеб. пособие / Под ред. К. Э. Плохотникова. М.: СОЛОН- ПРЕСС, 2006. 320с.