МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАУКОВО-НАВЧАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ

Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем бакалавр

«Моделювання структури неоднорідних процесів з використанням wavelet-систем»

Виконав: студент 4 курсу, групи НФ-43
Гапша В.А.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Прикладна фізика енергетичних систем
Керівник: доц. Лісіна О.Ю.

Рецензент:

Харків – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра інформаційних технологій у фізико-енергетичних системах
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) бакалавр
Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Руслан Сухов

підпис

"____"_____2020 року

З А В Д А Н Н Я

НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ

Гапша Владислав

1.Тема роботи «Моделювання структури неоднорідних процесів з використанням wavelet-систем» керівник роботи: Лісіна Ольга Юліївна, кандидат фізико-математичних наук,
затверджені наказом по університету від "05" грудня 2019 року №0210-05/2249

2. Строк подання студентом роботи 06.06.2020р.

3. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) ознайомитись з теорією вейвлетів;

2) вивчити алгоритм побудови wavelet-систем;

3) розробити чисельний алгоритм вирішення задачі перенесення на основі використання базисів з wavelet-функцій та тригонометричних функцій;

4) провести порівняльний обчислювальний експеримент.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми, узгодження, а також затвердження її на кафедрі
2	Робота над літературою та іншими джерелами
3	Затвердження теми на кафедрі
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6	Написання третього розділу
7	Завершення написання дипломної роботи (висновки та література)
8	Подача науковому керівнику
9	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
10	Попередній захист
11	Захист

5.Дата видачі завдання

Студент _____ Владислав ГАПША
підпис

Керівник роботи _____ Ольга ЛІСІНА
підпис

РЕФЕРАТ

Роботу виконав Гапша Владислав Анатолійович на тему: Моделювання структури неоднорідних процесів із використанням wavelet-систем.

Об’єктом дослідження є моделювання теплових полів.

Предметом дослідження є розв’язування задач теплопровідності за допомогою wavelet-функцій.

Мета полягає у дослідження поведінки розв’язків крайових задач у випадку використання вейвлетів, як базисних функцій обчислювального алгоритму.

В ході виконання дипломної роботи було опановано теорію вейвлетів, алгоритми побудови вейвлет-систем, розроблений числовий алгоритм розв’язання задачі перенесення на основі використання базисів з wavelet-функцій та проведений обчислювальний експеримент щодо порівняння наближеного методу з точним.

Дипломний проект містить: 37 сторінок, 21 рисунок, 1 додаток, 20 джерел.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: WAVELET-ФУНКЦІЇ, МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПОЛІВ, НЕСТАЦІОНАРНІ ЗАДАЧІ.

РЕФЕРАТ

Работу выполнил Гапша Владислав Анатольевич на тему: Моделирование структуры неоднородных процессов с использованием wavelet-систем.

Объектом исследования является моделирование тепловых полей.

Предметом исследования является решение задач теплопроводности с помощью wavelet-функций.

Цель состоит в исследовании поведения решений краевых задач в случае использования вейвлетов, в качестве базисных функций вычислительного алгоритма.

В ходе выполнения дипломной работы была освоена теория вейвлетов, алгоритмы построения вейвлет-систем, разработанный числовой алгоритм решения задачи переноса на основе использования базисов с wavelet-функций и проведен вычислительный эксперимент для сравнения приближенного метода с точным.

Дипломный проект содержит 37 страниц, 21 рисунков, 1 приложение, 20 источников.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: WAVELET-ФУНКЦИИ, МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ, НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ.

ABSTRACT

The work was performed by Gapsha Vladislav Anatoliyovych on the topic: Modeling of the structure of inhomogeneous processes using wavelet systems.

The object of research is the modeling of thermal fields.

The subject of the research is solving problems of thermal conductivity using wavelet functions

The aim is to study the behavior of solutions of boundary value problems in the case of using wavelets as basis functions of a computational algorithm.

During the completion of the work, the theory of wavelets, algorithms for constructing wavelet systems were studied, there was developed a numerical algorithm for solving the transfer problem based on the use of wavelet functions as basis and computational experiment to compare the approximate method with the exact one was fulfilled.

Thesis contains: 37 pages, 21 figures, 1 appendix, 20 sources.

KEY WORDS: WAVELET FUNCTIONS, THERMAL FIELD MODELING, NON-STATIONARY PROBLEMS.

ЗМІСТ

ВСТУП 8
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ВЕЙВЛЕТІВ 11
1.1 Що таке вейвлети 11
1.2 Вейвлет-перетворення 13
2. МЕТОДИ РІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСІВ 17
2.1 Метод Гальоркіна у знаходженні проекції рішення диференціальних рівнянь 17
2.2 Вейвлет-метод Гальоркіна для рішення рівняння КдФ 19
2.3 Вирішення рівняння Бюргерса вейвлет-методом Гальоркіна 21
3. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРЕМЕНТУ 23
3.1 Рішення одновимірного залежного від часу рівняння теплопровідності за домогою вейвлет Хаара для Алюмінія. 23
3.2 Рішення одновимірного залежного від часу рівняння теплопровідності за домогою вейвлет Хаара для Міді. 26
3.3 Рішення одновимірного залежного від часу рівняння теплопровідності за домогою вейвлет Хаара для Сталі. 30
ВИСНОВКИ 34
ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА 36
ДОДАТОК А 38

ВСТУП

Успішне дослідження будь-якого фізичного об’єкту чи процесу не можливе без знання фізики та математики. Тому тісний зв’язок цих двох наук прослідковується від розв’язання шкільних задач до досліджень складних процесів, які здійсненні та описані в працях науковців.

Без елементарних знань математики не можливо розв’язати жодної задачі з фізики [5]. Так як фізичні величини мають конкретні числові значення, процеси відбуваються за визначеними закономірностями – є можливість провести розрахунки, знайти та відслідкувати залежність величин одна від одної. Тому у всі часи, фізики з успіхом використовували математичний апарат для вираження законів у загальній та точній формі, виведення закономірностей з теоретичних передумов, перетворення формул, знаходження величин, які не можливо безпосередньо виміряти.

Ще Леонардо да Вінче зазначав, що ніяке дослідження не може бути назване істиною, якщо воно не проходить через математичні доведення.

З розвитком обчислювальних технологій, у дослідників є можливість провести спостереження та експерименти з об’єктами, замінивши частину обладнання комп’тером або ґаджетом зі спеціальним програмним забезпеченням. Для цього фізичні явища та процеси замінюють віртуальними, тобто використовують моделювання.

Під моделюванням [10] розуміють «створення образа» і його «вивчення» та подальше «дослідження». Створення моделей та їх дослідження засобами математики називається математичним моделюванням [9]. Задачі, що виникають у життєвих ситуаціях і стосуються реальних об'єктів або процесів, тобто прикладні задачі, вимагають переформулювання їх мовою математики.

Для розв'язування прикладної задачі необхідно зробити кілька кроків, а саме:

1. Перевести умову прикладної задачі на мову математики.

2. Розв'язати отриману математичну задачу.

3. Скористатися результатами розв'язання математичної задачі, щоб знайти правильний розв'язок.

Такий підхід до розв'язування задач називається методом математичного моделювання [1]. Побудова математичної моделі – перший і дуже відповідальний етап. Неправильна математична модель веде до хибної відповіді.

Застосування математичного моделювання може відбуватися двома шляхами: використання задачі-моделі до розв’язання аналогічної та побудова моделі до певної задачі [8]. У першому випадку засобами математики будується модель, що ілюструє явище, про яке йдеться в умові задачі. У другому випадку використовують абстрактну задачу, в умові якої акцент робиться на основні параметри явища. У процесі розв’язування, по суті, будують математичну модель згідно тих фізичних законів, про які йдеться в задачі. Розв’язання такої задачі має значну цінність, бо дозволяє встановити закономірність, що вказує на характер залежності відомих та шуканої величини.

Яка користь математичного моделювання? Складання математичної моделі дає змогу відійти від несуттєвих для конкретної задачі властивостей об'єктів, від другорядних умов, що не виливають на розв'язок задачі [6].

Метод математичного моделювання був і залишається актуальним для більшості досліджень, пов’язаних з фізичними процесами. Цей метод ми використаємо в нашій роботі.

Тема дослідження неоднорідних процесів є досить складною в плані математичних обчислень, тому їх доцільно спростити, використавши wavelet-функції.

Мета дослідження: вирішити крайові задачі за допомогою вейвлетів та оцінити точність таких обчислень.

Для досягнення мети дослідження потрібно вирішити такі завдання:

1. Узагальнити відомості про теорію вейвлетів.

2. Визначити алгоритм побудови вейвлет-систем.

3. Розробити алгоритм вирішення задачі перенесення на основі використання базисів з wavelet-функцій та тригонометричних функцій.

4. Провести обчислювальний експеримент.

Об’єкт дослідження: моделювання фізичних процесів.

Предмет дослідження: розв’язування задач за допомогою wavelet-функцій.

Методи досліджень: аналіз і синтез, індукція та дедукція, моделювання, комп’ютерне моделювання.

Практична значущість дослідження полягає в тому, що була написана програма для практичного застосування вейвлет Хаара на прикладі моделювання рівняння тепла із високою точністю результатів.

Підсумовуючи вище викладене, зазначимо, що моделювання в процесі розв’язання фізичних задач є не тільки методом дослідження реально існуючих фізичних об’єктів і явищ, а й одночасно методом побудови розв’язання фізичної задачі. Тому для нашого дослідження ми обрали метод вирішення задач та тригонометричних функцій за допомогою wavelet-функцій.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ВЕЙВЛЕТІВ

Перш ніж перейти до математичної моделі та вибору задач, які будемо розв'язувати в рамках нашого дослідження, розглянемо теорію вейвлетів.

В цьому розділі роботи наведемо теоретичні відомості про вейвлет, їх практичне застосування та значення саме в нашому дослідженні.

1.1 Що таке вейвлети

Слово «вейвлет» (wavelet - маленька хвиля, хвилька, хвилькові перетворення або брижі) введено А.Гроссманом і Ж.Морле в 1982 році в роботі, присвяченій проблемі аналізу сейсмічних сигналів, в яких потрібно виділити і час (положення) сплеску в сигналі і його спектральний склад (масштаб) [3].

Вейвлет - аналіз застосовують в задачах з аналізом у просторових полях зі складною широкомасштабною структурою (турбулентний потік), або тимчасових сигналів зі змінним з часом спектральним складом (сейсмічні сигнали). Основна ідея: використання базису, кожна функція якого характеризує визначену просторову (тимчасова) частоту, так і місце її локалізації в фізичному просторі (у часі).

Вейвлети широко застосовуються для розпізнавання образів, наприклад при аналізі зображень різного походження, при обробці та синтезу сигналів мовлення, звуку, для вивчення властивостей турбулентних полів, для упакування великих об'ємів інформації та інших випадках [4, с.5].

До розроблення вейвлетів призвели декілька незалежних шляхів міркувань, що почалися з робіт Альфреда Хаара [3], який на початку двадцятого століття поставив запитання: «Чи існує інша ортонормальна система $h_0(x), h_1(x), \ldots, h_n(x)$ функцій, визначених на проміжку [0, 1], таких, що довільну функцію $f(x) \in C[0,1]$ можна записати як суму вигляду $\langle f, h_0 \rangle h_0(x) + \ldots + \langle f, h_n \rangle h_n(x) + \ldots$, і що вона буде збіжною до $f(x)$ єдиним чином на [0, 1]?» Як виявилося таких систем можна побудувати нескінченну

кількість. У 1909 році Хаар запропонував найпростіший розв'язок і відкрив шлях, що веде до wavelet.

Ортонормальна система Хаара будується починаючи з базисної функції $h(x)=1$ на проміжку $\left[0,\frac{1}{2}\right)$, $h(x)=-1$ на $\left[\frac{1}{2},0\right)$ та $h(x)=0$ всюди крім $[0,1)$. Для $n\geq 1$ запишемо $n=2^j+k, j\geq 0, 0\leq k\leq 2^j$, і визначемо, що $h_n(x)=2^{\frac{j}{2}}h\left(2^j-k\right)$. Носієм $h_n(x)$ буде інтервал $I=\left[k2^{-j},(k+1)2^{-j}\right]$, що входить до [0, 1), коли $0\leq k\leq 2^j$. Довизначимо $h_0(x)=1$ на [0, 1). Побудований ряд $h_0(x), h_1(x),\ldots,$ $h_n(x)$ це ортонормальний базис або Гільбертів базис в $L_2[0,1]$Апроксимація функції $f(x)$ послідовністю $S_n(f)(x)=\langle f,h_0\rangle h_0(x)+\ldots+\langle f,h_n\rangle h_n(x)$ — це класична апроксимація неперервної функції.

Можна виділити дві основні операції над вихідною функцією: трансляція або зсув та диляція (стискання, масштабування).

Вивченням теорії хвильок або вейвлетів та також займався радянський математик Микола Лузін (30-ті роки), його праці були продовжені Гвідо Вейссом (Guido Weiss) та Роналдом Куафманом (Ronald R. Coifman) у 60-ті — 80-ті [2]. Їхній підхід використовувався для обробки сиґналів, і оснований на атомарних функціях також цей напрям розвивають учні В. Л. Рвачева (Харків). Означення дискретних вейвлетів належить Штромберґу (Stromberg) та Мейєру (Y. Meyer) (1983).

Новий етап розвитку вейвлетів починається з роботи Стефана Маллата (Stephane Mallat), спеціаліста з обробки зображень, в якій узагальнювалися вже існуючі теоретичні розробки:

а) квадратурний дзеркальний фільтр (quadrature mirror filter) для цифрової телефонії;

б) пірамідальний алгоритм Бурта-Аделсона (Burt Adelson), який використовувався для обробки зображень;

в) ортонормальний вейвлет базис Штромберґа та Мейера. Маллат створив багаторозкладний аналіз (multiresolution analysis), який відкривав шлях до побудови теорії вейвлетів.

Найголовніший крок належить Інгрід Добеші (Ingrid Daubechies) [2]. У 1988 році вийшла її стаття, де вперше розглядається сімейство ортонормованих систем в L_2 з важливими особливостями:

1. кожна система породжується масштабною функцією за допомогою трансляції та диляції;
2. кожен елемент даної системи має компактний носій і неперервний, або може бути вибраний досить гладкий (до певного порядку) шляхом зміни масштабу. Носії базисних функцій стають тим менші чим більший індекс j;
3. існують швидкі алгоритми для обчислень коефіцієнтів розкладу певної функції. Називається — дискретне вейвлет-перетворення від функції до вейвлет коефіцієнтів розкладу. Цей алгоритм має складність порядку *O(N)*;
4. Класичне дискретне перетворення Фур'є та косинус перетворення з'являються як частинний випадок дискретного вейвлет-перетворення (DWT)
5. дискретне вейвлет-перетворення може бути розпаралелене.

1.2 Вейвлет-перетворення

Усі вейвлет-перетворення розглядають функцію (взяту як функцією від часу) у термінах коливань, локалізованих за часом (простором) і частотою [11]. Локальність у просторі означає, що енергія хвильок (вейвлетів) сконцентрована на скінченному інтервалі, так звана функція на компактному носії. Частотна локалізація означає, що перетворення Фур'є хвильки локалізоване. Частотна локалізація функції зводиться до понять гладкості та кількості зникаючих моментів. Вейвлет-перетворення звичайно поділяють на дискретне вейвлет-перетворення (DWT) та неперервне вейвлет-перетворення (CWT) [3].

Дискретне вейвлет-перетворення (DWT) звичайно використовується для кодування сигналів, у той час як CWT для аналізу сигналів. Саме тому, DWT широко застосовується в інженерній справі і комп'ютерних науках, а CWT у наукових дослідженнях фізичних процесів.

Для практичного застосування, важливо знати ознаки, за якими можна чи являється функція вейвлетом чи ні [4, с.26].

1. Допустимість. Так званий материнський вейвлет $\psi(t)$ повинен мати середнє значення, яке =0.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0 \qquad (1.1)$$

2. Подібність. Всі функції сукупності, повинні бути отримані з вейвлета, який аналізується шляхом масштабного перетворення та зсуву $\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$. Отримуємо сукупність функцій з двома параметрами, да a – масштаб (протяжність) функції, b – положення (здвиг) функції.

3. Оборотність. Існування зворотного перетворення дає змогу отримати початкову функцію через її вейвлет - перетворення.

4. Регулярність. Функція $\psi(t)$ повинна бути добре локалізована і в фізичному просторі і в просторі Фур'є.

Вейвлет-перетворення в наш час взяті на озброєння для величезної кількості різнопланових застосувань, нерідко заміняючи звичайне перетворення Фур'є у багатьох прикладних задачах [2,17]. Ця зміна парадигми спостерігається в багатьох галузях фізики, включаючи молекулярну динаміку, астрофізику, квантовій механіці, геофізиці, оптиці, механіці рідини та у багатьох інших областях, включаючи обробку зображень, аналізу кров'яного тиску, пульсу та ЕКГ, аналіз ДНК, дослідження білків, вивчення клімату, загальну обробку

сигналів, розпізнавання мови, комп'ютерну графіку і мультифрактальний аналіз.

Широке використання вейвлет-перетворень забезпечується можливістю побудувати на їх основі методи, що потребуватимуть *O(N)* операцій, на противагу методів Фур'є-перетворень, де кількість операцій не менша за *O(NlogN).*

Вибір певного виду вейвлету залежить від мети проведення аналізу. Наприклад, вейвлет «мексиканська шляпа» (див. рис.1.1)

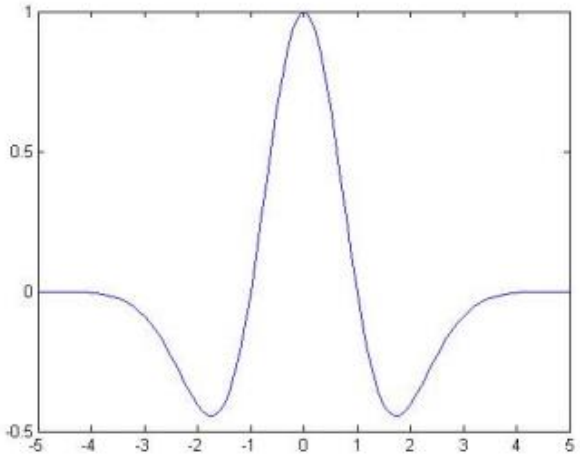


Рис. 1.1 Графік функції $\psi(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{t}{2}}$

Такі задачі потребують хорошого просторового масштабування і не вимагають спектрального масштабування [11,17].

Ще один приклад, для функції $\frac{1}{\sqrt{a}} \times e^{(-0,5 \times \frac{t^2}{a^2})} \times (t^2 - 1)$, яка залежить від часу та частоти (див. рис. 1.2)

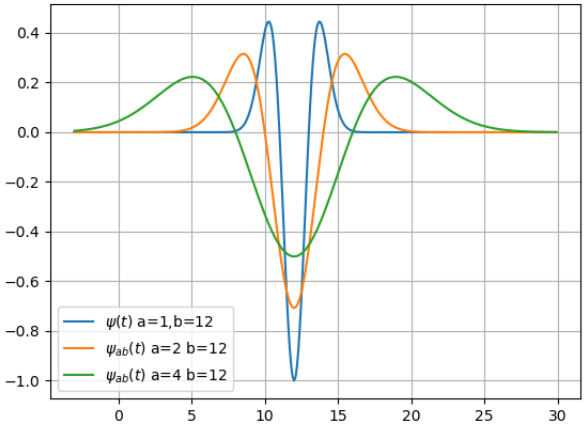


Рис. 1.2 Графік функції $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \times e^{(-0{,}5 \times \frac{t^2}{a^2})} \times (t^2 - 1)$

Теорія вейвлетів зв'язана з декількома іншими напрямами. Усі вейвлет-перетворення можуть розглядатися як різновид часово-частотного представлення і, отже відноситься до предмета гармонійного аналізу. Дискретне вейвлет-перетворення може розглядатися як різновид фільтра скінченної імпульсної відповіді. Вейвлети, що утворюють CWT підкоряються принципу невизначеності Гейзенберга і відповідно базис дискретного вейвлета також може розглядатися в контексті інших форм принципу невизначеності.

2. МЕТОДИ РІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСІВ

2.1 Метод Гальоркіна у знаходженні проекції рішення диференціальних рівнянь

У цій частині роботи ми розглянемо застосування класичного методу Гальоркіна у знаходженні проекції рішення лінійних диференціальних рівнянь на вейвлет-базис із ПГВ.

Але перш ніж перейти до вирішення диференціального рівняння методом Гальоркіна нам знадобиться інтеграл[15]:

$$\gamma^{(3)jn}_{kh} = \left\langle \frac{d^3\psi^j_k}{dx^3}, \psi^n_h \right\rangle = \int_0^1 \frac{d^3\psi^j_k}{dx^3} \overline{\psi}^n_h dx =$$

$$= 2^{-j-n+3}\pi^3 i \sum_{m_j=2^j}^{2^{j+1}-1} \sum_{m_n=2^n}^{2^{n+1}-1} m_j{}^3 e^{2\pi i\left(\frac{m_n h}{2^n} - \frac{m_j k}{2^j}\right)} \delta_{m_j,m_n}. \quad (2.1)$$

Розглянемо рівняння:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = Lu(x,t), \quad (2.2)$$

де L=L$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{dx^2}, \ldots\right)$ - лінійний диференціальний оператор. Припустимо, що ми знаходимо проекцію рішення даного рівняння на обраний нами базис у вигляді[15]:

$$P_N u(x,t) \approx a_0 +$$

$$+ \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \left\{ a^j_k(t)\psi^j_k(x) + \tilde{a}^j_k(t)\overline{\psi}^j_k(x) \right\}. \quad (2.3)$$

Прустимо, що диференцыальний оператор L має вигляд суми зростаючих похідних:

$$L = b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots = \sum_{l=1}^{p} b_l \frac{\partial^l}{\partial x^l}, \quad (2.4)$$

Тоді його проекцію можна записати на простір вейвлетів V_j:

$$P_N\left[\sum_{l=1}^{p} b_l \frac{\partial^l u}{\partial x^l}\right] = \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} a_k^j(t)\left\{P_N\left[\sum_{l=1}^{p} b_l \frac{d^l \psi_k^j}{dx^l}\right]\right\}. \quad (2.4)$$

Беручи до уваги ортогональність ПГВ на відрізку [0;1], ми можемо отримати наступний вираз:

$$\frac{da_h^m(t)}{dt} = \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} a_k^j(t)\sum_{l=1}^{p} b_l \gamma^{(l)_{kh}^{jm}}, \quad (2.5)$$

де $\gamma^{(l)_{kh}^{jm}}$ – лінійні коефіцієнти зв'язки, m=0,....,N-1; h = 0,...,2^m – 1.

Таким чином, диференціальне рівняння (2.2) можна звести до системи звичайних лінійних диференційних рівнянь з невідомим $a_k^j(t)$. Виходячи з початкових умов рівняння (2.1), при обраному рівні апроксимації N і дискретного вейвлет-перетворення можна знайти вейвлет-коефіцієнти $a_k^j(t)$ і отримати проекцію рішення $P_N u(x,t)$ на простір вейвлетів.

Тепер, щоб знайти вейвлет-коефіцієнти $a_k^j(t)$ в початковий момент часу, можна скористатися дискретним вейвлет-перетворенням Ньюленда[15,20]:

1. Інтервал [0;1] розбивається на N = 2^r рівних частин, і знаходяться дискретні значення функції u(x,0);
2. Обчислюється Фур'є-перетворення отриманих дискретних значень функцції - $\widehat{f_i}$, i=0,...,2^r- 1;
3. Використовується зворотнє перетворення Фур'є до отриманої вище послідовності $\widehat{f_i}$. Це дозволяє виписати множину коефіцієнтів $\{a_k^j\}$, які задають початкову умову звичайного диференціального рівняння.

У випадку, якщо оператор L у рівнянні (2.2) являється квадратичним видом:

$$L = b_1 u\frac{d}{dx} + b_2 u\frac{d^2}{dx^2} + \cdots, \quad (2.6)$$

Тоді у виразі (3) замісто лінійного коефіцієнта зв'язки з'явиться нелінійний коефіцієнт зв'язки $\Gamma^{(l)}_{kh}{}^{jm}$.

2.2 Вейвлет-метод Гальоркіна для рішення рівняння КдФ

В даній частині дипломної роботи ми розглянемо вейвлет рішення рівнняння КдФ за допомогою так званих періодичних гармонічних вейвлетів.Як відомо, широкий клас одновимірних нелінійних хвиль в середовищах з слабкою дисперсією (наприклад, хвилі на мілководді) описуються рівнянням КдФ[12]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{du}{dx} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{2.7}$$

де t – час, $0 < t < \infty$. Таке рівняння описує еволюцію нелінійної хвилі в системі координат, яке рухається зі швидкістю довгохвильових збурень.

Використовуючи стандартний підхід в методі Гальоркіна і вважаючи, що шукана функція може бути представлена у вигляді амплітуди, що залежить від часу, а базис – від просторової змінної, можна записати рішення рівняння (4) на інтервалі $x \in [0; 1]$ у наступному вигляді:

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{k=0}^{2^j-1} a_k^j(t)\varphi_k^j(x) \tag{2.9}$$

із заданою спеціальною початковою умовою (на відрізку [0;1]), щоб проіліструвати деякий окремий приклад з використання вейвлет-підходу для даної задачі у дисперсному середовищі:

$$u(x,0) = e^{-(15x-15/2)^2/9}. \tag{2.10}$$

Згідно з роботою [12,19], ряд (5) сходиться. Рішення рівняння КдФ (4) шукається на інтервалі $x \in [0; 1]$ для часу з області $t \in [0; 4]$, і передбачається, що воно періодично вздовж осі x. Підставляючи функцію (5) в (4), знаходимо[12]:

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{2^j-1}\frac{da_k^j}{dt}\psi_k^j + \\ +\sum_{j=0}^{r}\sum_{p=0}^{r}\sum_{k=0}^{2^j-1}\sum_{q=0}^{2^p-1}a_k^j a_q^p \psi_k^j \frac{d\psi_q^p}{dx} + \\ +\sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{2^j-1}a_k^j \frac{d^3\psi_k^j}{dx^3} = 0. \qquad (2.11)$$

Графік функції, який описує початкову умову, показаний на рисунку 2.1.

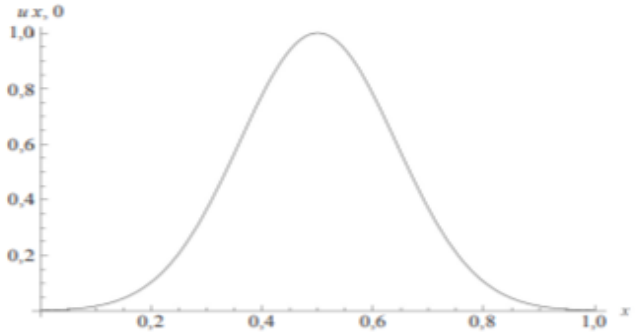


Рис. 2.1. Графік початкової умови

Для рівняння Кортевега-де Фріза

Після цього, перемножимо отримані рівняння на $\overline{\varphi_r^s}(x)$, враховуючи ортогональність базисних функцій і визначення коефіцієнтів зв'язку (8) [12] і (9) [13]:

$$L_{ks}^{jr} = \left\langle \frac{d^3\psi_k^j}{dx^3}, \psi_s^r \right\rangle = \int_0^1 \frac{d^3\psi_k^j}{dx^3}\overline{\psi_s^r}dx = \\ = 2^{\frac{j+r}{2}+3}\sum_{m_j=2^j}^{2^{j+1}-1}\sum_{m_r=2^r}^{2^{r+1}-1}(\pi m_j)^3 ie^{2\pi i\left(\frac{m_r s}{2^r}-\frac{m_j k}{2^j}\right)}\delta_{m_j,m_r}. \qquad (2.12)$$

$$N_{kqs}^{jpr} = \left\langle \psi_k^j \frac{d\psi_q^p}{dx}, \overline{\psi_s^r} \right\rangle - \\ = -\frac{2i\pi}{2^{(j+p+r)/2}}\sum_{m_j=2^j}^{2^{j+1}-1}\sum_{m_p=2^p}^{2^{p+1}-1}\sum_{m_r=2^r}^{2^{r+1}-1} m_p \cdot e^{2i\pi\left(\frac{m_j k}{2^j}+\frac{m_p q}{2^p}-\frac{m_r s}{2^r}\right)}\delta_{m_j+m_p,m_r} \qquad (2.13);$$

отримуємо вираз[12]:

$$\frac{da_r^s}{dt} + \sum_{j=0}^{r}\sum_{p=0}^{r}\sum_{k=0}^{2^j-1}\sum_{q=0}^{2^p-1}N_{kqs}^{jpr}a_k^j a_q^p + \sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{2^j-1}L_{ks}^{jr}a_k^j = 0. \qquad (2.14)$$

Цей вираз означає, що рівняння у частинних похідних звелося до звичайного диференціального рівняння.

2.3 Вирішення рівняння Бюргерса вейвлет-методом Гальоркіна

Рівняння Бюргерса [14]:

$$u_t + uu_x = vu_{xx}, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{2.15}$$

Являє собою найпростіше хвильове рівняння, яке поєднує дисипативні і нелінійні ефекти і саме тому з'являється у багатьох фізичних додатках. Не дивлячись на свою простоту, рівняння володіє досить багатою динамікою, яка пов'язана з нелінійною взаємодією різних масштабів, що виражається в утворенні упорядкованих великомасштабних структур, «всплеском» дрібномасштабних збурень і т.д.

Представимо рішення $u(x,t)$ у вигляді ряда по ортонормованій системі вейвлет функцій[16]:

$$u(x,t) = A_{Nn}(t)\varphi_{Nn}(x) = A_{Nn}(t)2^{N/2}\varphi(2^N x - n), \tag{2.16}$$

де $A_{Nn}(t)$ – це амплітуда n-ї базисної функції N-го рівня (масштаба). Тепер підставимо рішення у початкове рівняння Бюргерса (11) і використаємо стандартну прийом метода Гальоркіна, проектуємо рівняння на простір вейвлет-функцій і отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно $A_{Nn}(t)$[16]:

$$\frac{dA_{Nn}(t)}{dt} = \sum_{Mm,Ll} R_{NnMm,Ll}\, A_{Mm}A_{Ll} + v\sum_{Mm} K_{Nn,Mm}\, A_{Mm}. \tag{2.17}$$

де масив:

$$R_{NnMm,Ll} = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{Nn}(x)\varphi_{Mm}(x)\frac{d\varphi_{Ll}(x)}{dx}\,dx \tag{2.18}$$

описує нелінійні взаємодії, обумовлених конвективною похідною і матрицею:

$$K_{Nn,Mm} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{Nn}(x) \frac{d^2 \varphi_{Mm}(x)}{dx^2} dx \qquad (2.19)$$

- є уявлення лапласіана у вейвлет-просторі. (Хотілося б відмітити, що у відмінності від спектрального уявлення, матриця лапласіана не є діагональною, але для конкретних програм це не створить помітних труднощів.)

Звісно, залишається певна довільність у виборі діапазонів змінення індексів N і n. Очевидно, що максимальне значення індексу N (мінімальний масштаб) визначає просторову роздільну здатність методів; максимальний масштаб у свою чергу можна вибрати виходячи із конкретної задачі (наприклад, початкових умов). Діапазон зміни індексу n тісно пов'язаний з граничними умовами задачі. У випадку періодичного рішення число функцій даного рівня визначається з умови повноти базиса: функції шляхом зсуву повинні покривати всю окружність (очевидно, що на кожному наступному більш дрібному масштабі число базисних функцій подвоюється). Для неперіодичного локалізованого у просторі рішення, в силу того, що система вейвлет-функцій не утворює повний базис для кінцевого інтервалу, неминуче виникає проблема краєвих ефектів і отже, точно не зможе задовольнить граничні умови (хоча, в принципі, можна побудувати повний ортонормований вейвлет-базис для відрізка). Тим не менш, для функції із зручним носієм краєві задачі будуть локалізовані в околі кінців розглянутого інтервалу і в більшості випадків можна знехтувати їх впливом.[16,18]

3. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРЕМЕНТУ

В цьому розділі ми розглянемо практичне застосування вейвлет Хаара для чисельного моделювання рівняння тепла в якому спостерігається висока точність результатів.

Розглянемо одновимірне залежне від часу рівняння теплопровідності:

$$pc\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2\theta(x,t)}{dx^2}, \quad 0 < x < L \tag{3.1}$$

при заданих умовах: $\theta(x,0) = f, \theta(0,t) = g_1, \theta(L,t) = g_2$, де p, c, k, f, g_1, g_2 відомі функції.

3.1 Рішення одновимірного залежного від часу рівняння теплопровідності за домогою вейвлет Хаара для Алюмінія.

Для першого випадку ми розглянемо рівняння теплопровідності (3.1), що представляє собою алюмінієву планку довжиною 10 см. Для чисельного результату у нас є $f = 5 - \frac{1}{5}|x - 25|$, $g_1 = g_2 = 0, 0 \le x \le 10$. Питома теплоємності $c = 0{,}437$ Дж/кг · К, густина $p = 7{,}88$ г/см^3, теплопровідністю $k = 0{,}836$ Вт/(м · К) і часом $t = 500$ с. Отримані результати порівнюються з точними рішеннями.

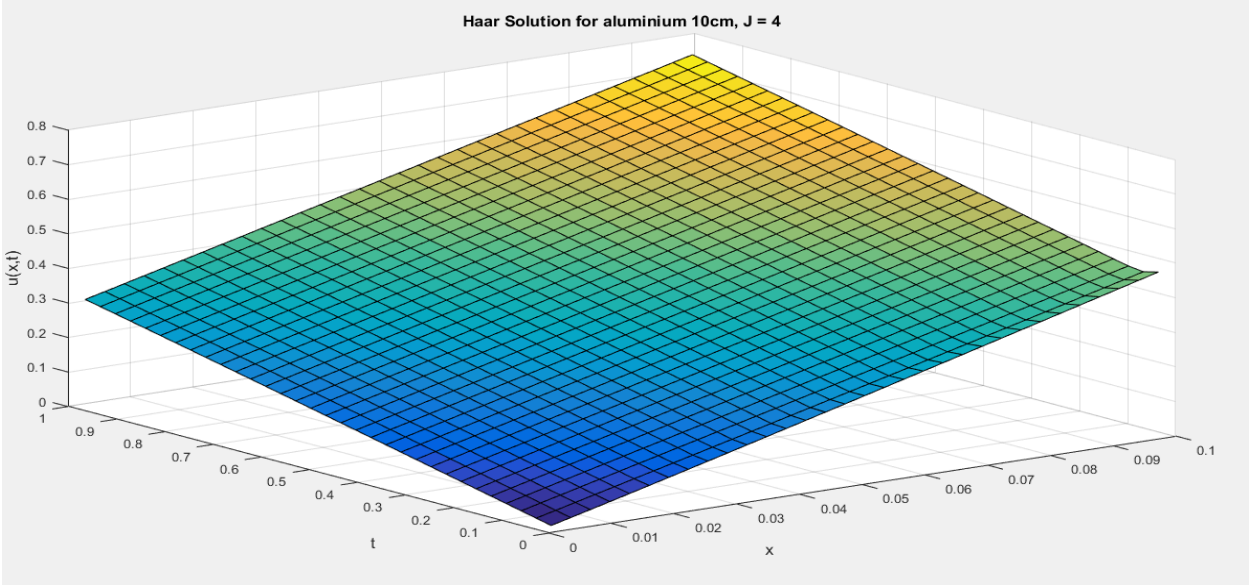


Рис. 3.1 Фізична поведінка рішення Хаара для алюмінія 10 см

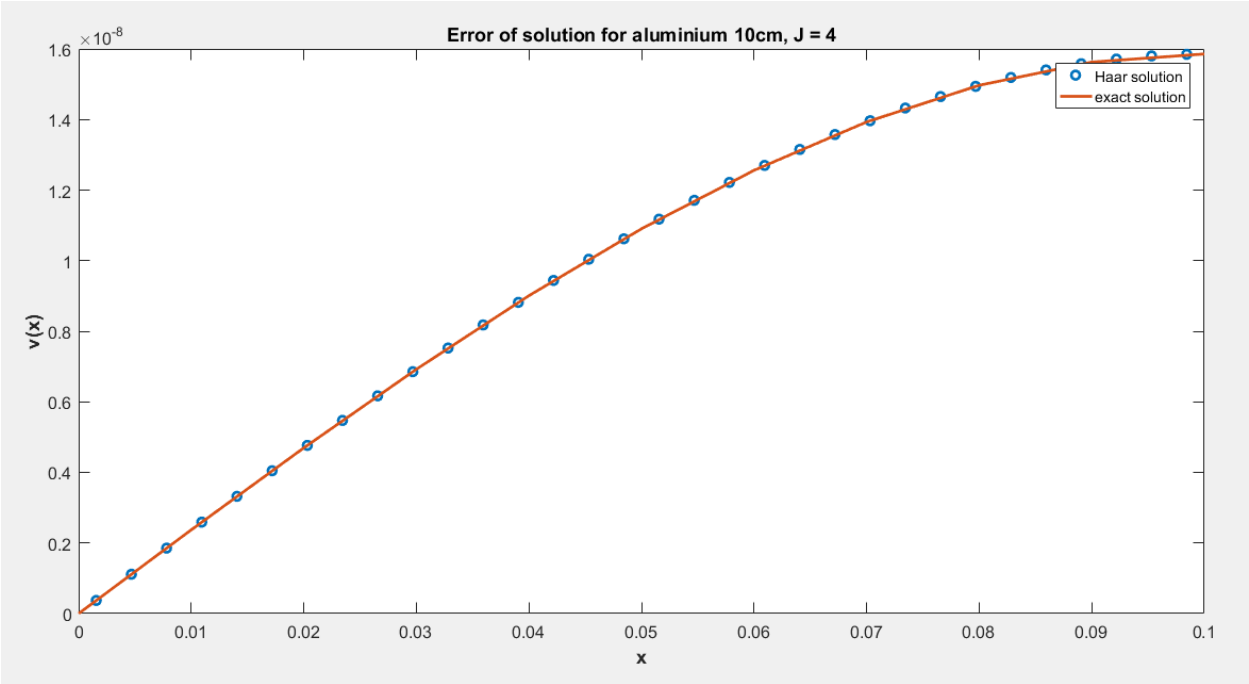


Рис. 3.2 Похибка рішення для алюмінія 10 см при $t = 500$ с

Скориставшись умовою вище, можна визначити теплопровідність для алюмінія 20 см і 30 см.

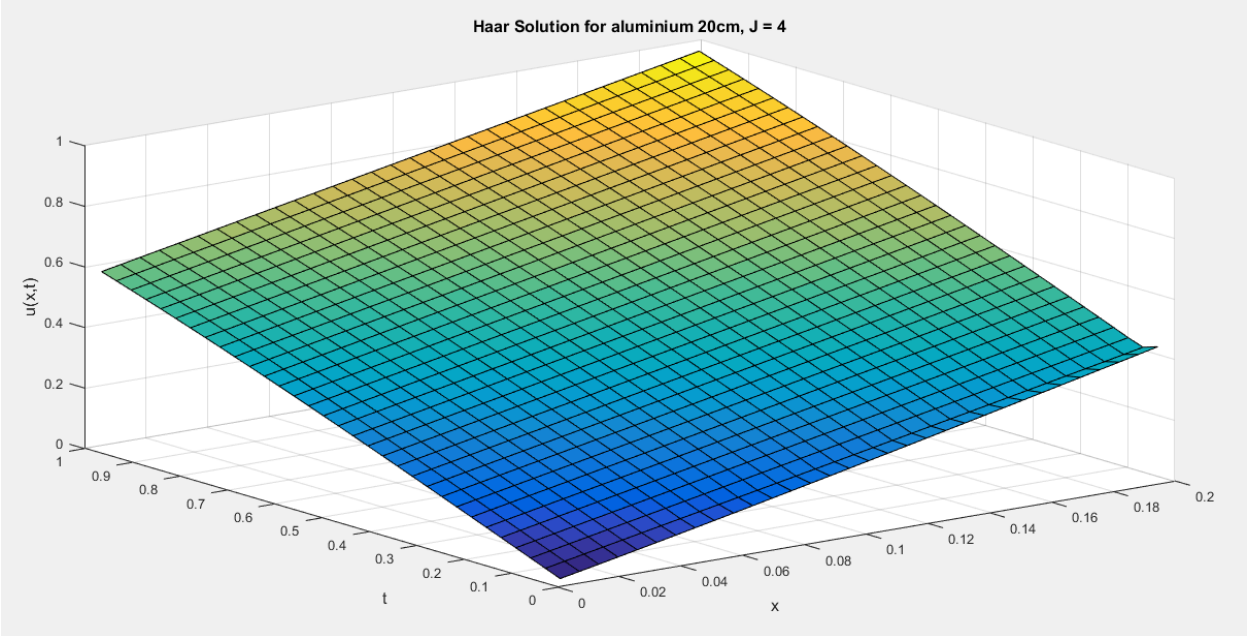


Рис. 3.3 Фізична поведінка рішення Хаара для алюмінія 20 см

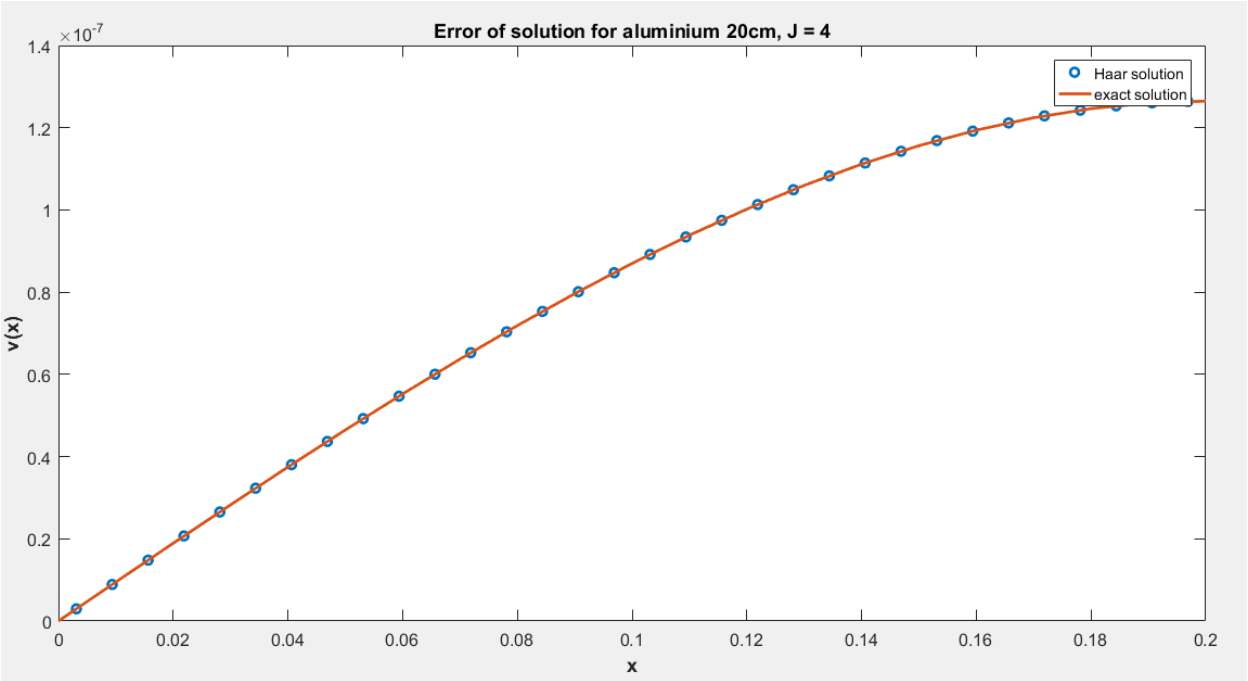


Рис. 3.4 Похибка рішення для алюмінія 20 см при $t = 500$ с

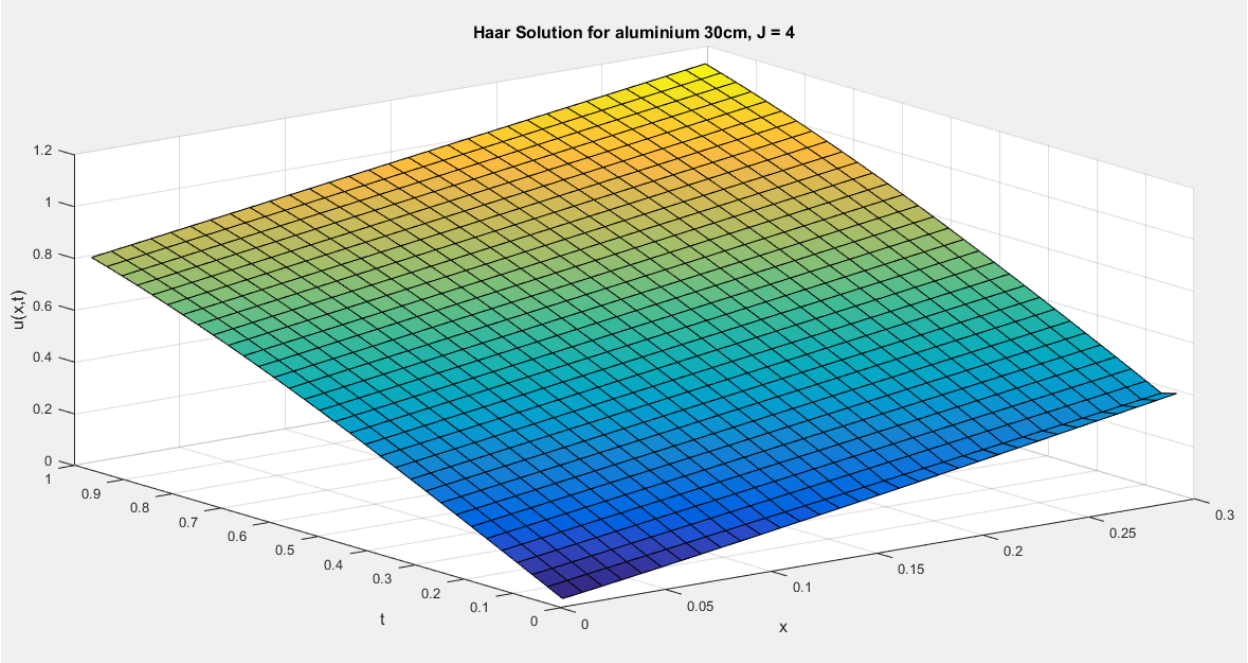


Рис. 3.5 Фізична поведінка рішення Хаара для алюмінія 30 см

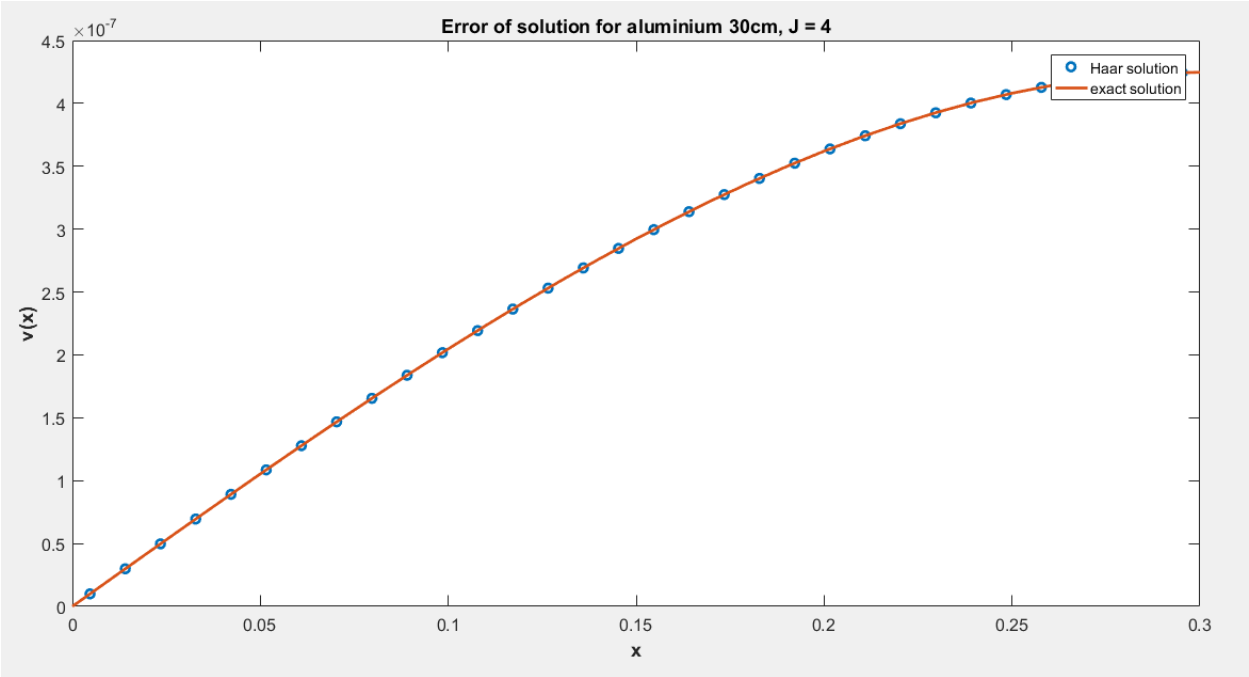


Рис. 3.6 Похибка рішення для алюмінія 30 см при $t = 500$ с

Аналізуючи графіки вище для алюмінія 10, 20 і 30 см, ще раз доводять високу точність результатів у випадку використання вейвлет Хаара.

3.2 Рішення одновимірного залежного від часу рівняння теплопровідності за домогою вейвлет Хаара для Міді.

Для другого випадку ми розглянемо рівняння теплопровідності (1), що представляє собою мідь довжиною 10 см. Для чисельного результату у нас є $\boldsymbol{f = 5 - \frac{1}{5}|x - 25|}$, $\boldsymbol{g_1 = g_2 = 0, 0 \leq x \leq 10}$. Питома теплоємності с = $\boldsymbol{0,437}$ Дж/кг · К, густина $\boldsymbol{p = 7,88}$ г/см^3, теплопровідністю $k = 0{,}836$ Вт/(м · К) і часом $t = 500$ с. Отримані результати порівнюються з точними рішеннями.

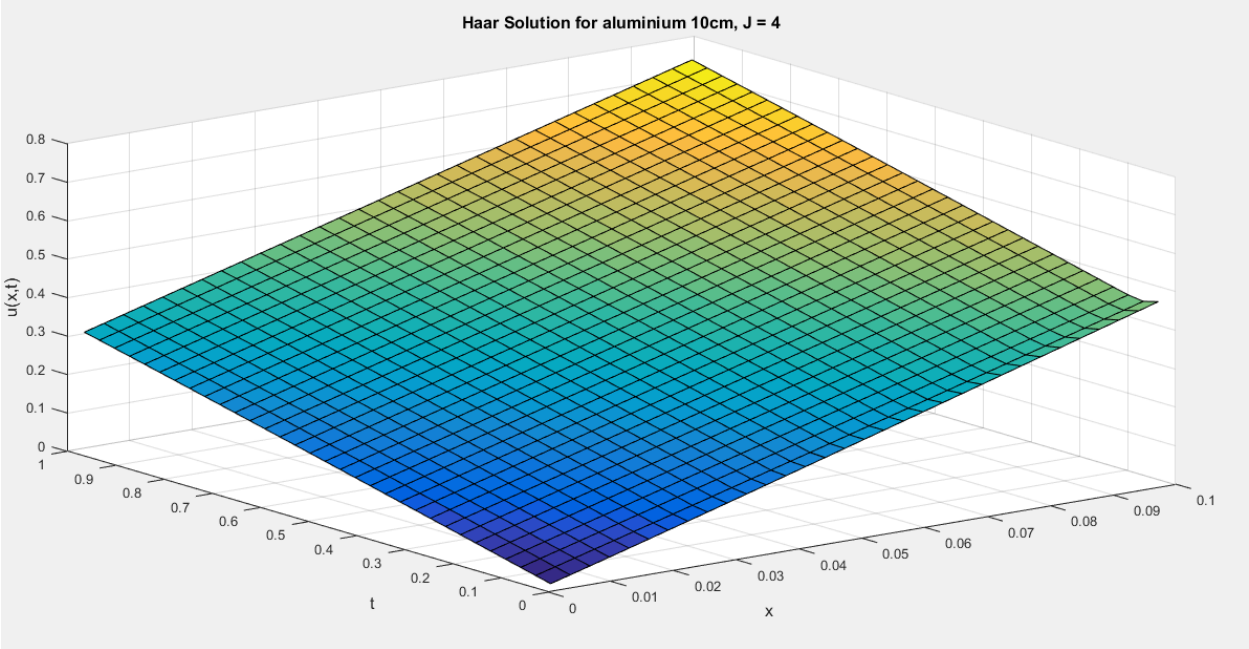


Рис. 3.7 Фізична поведінка рішення Хаара для міді 10 см

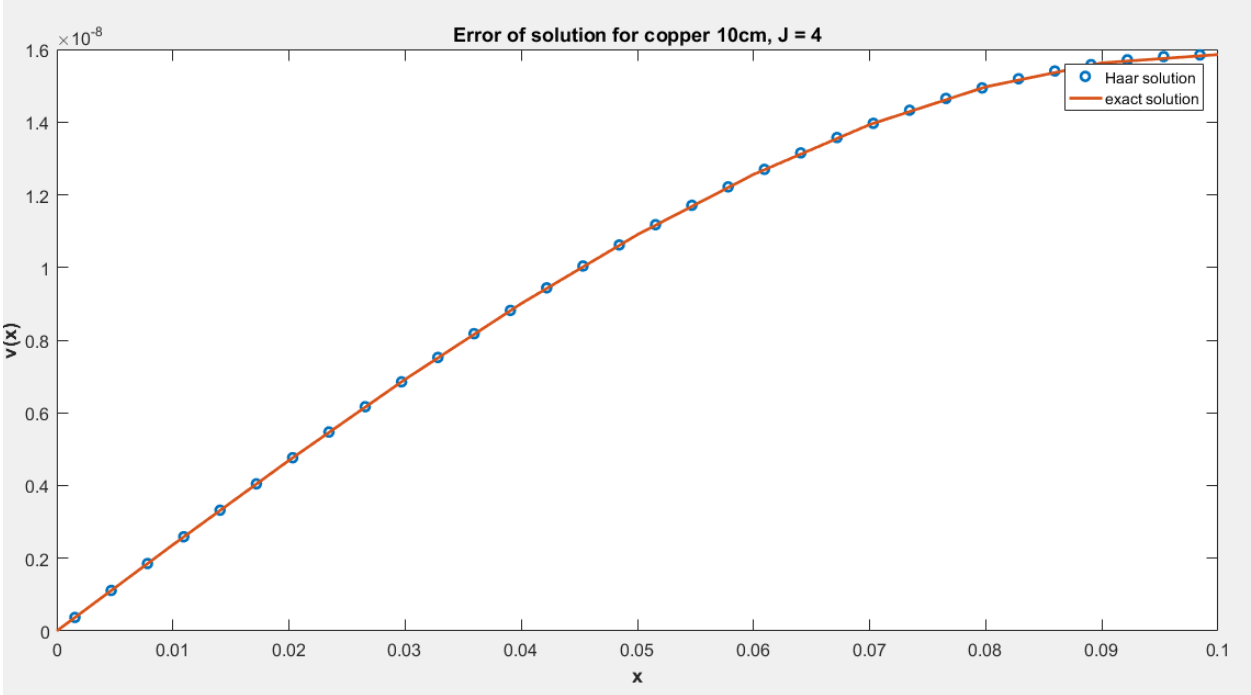


Рис. 3.8 Похибка рішення для міді 10 см при $t = 500$ с

Використовуючи умову вище, можна визначити теплопровідність для міді 20 см і 30 см.

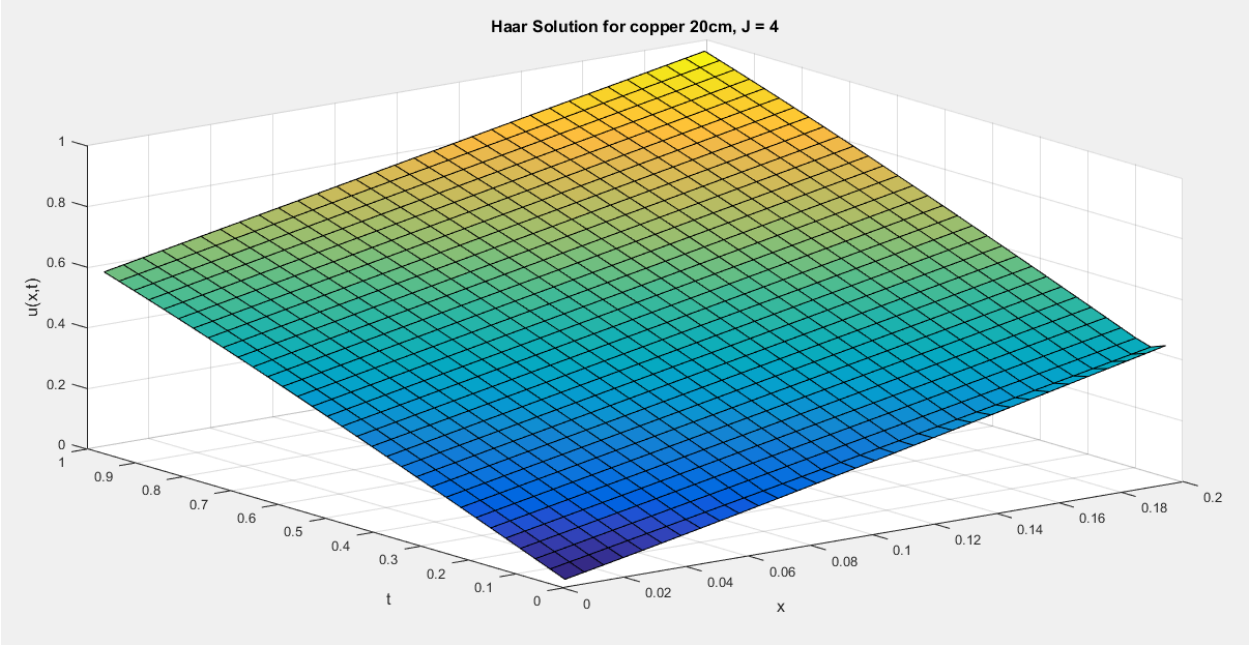


Рис. 3.9 Фізична поведінка рішення Хаара для міді 20 см

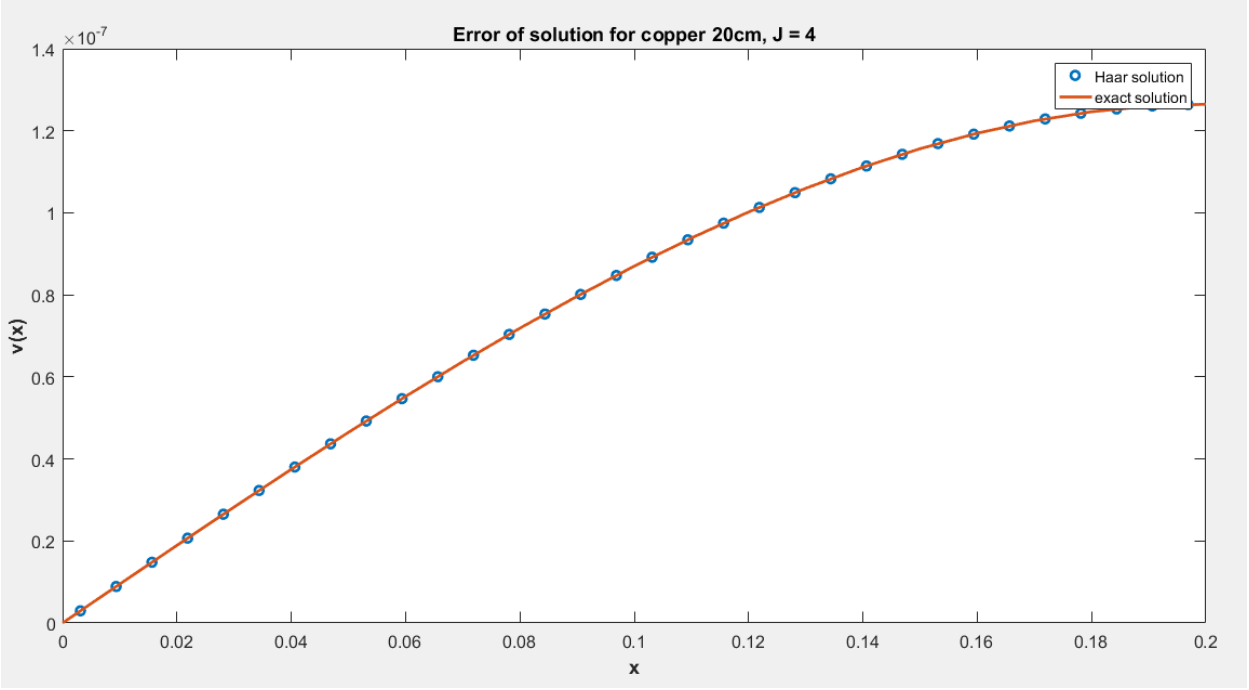


Рис. 3.10 Похибка рішення для міді 20 см при $t = 500$ с

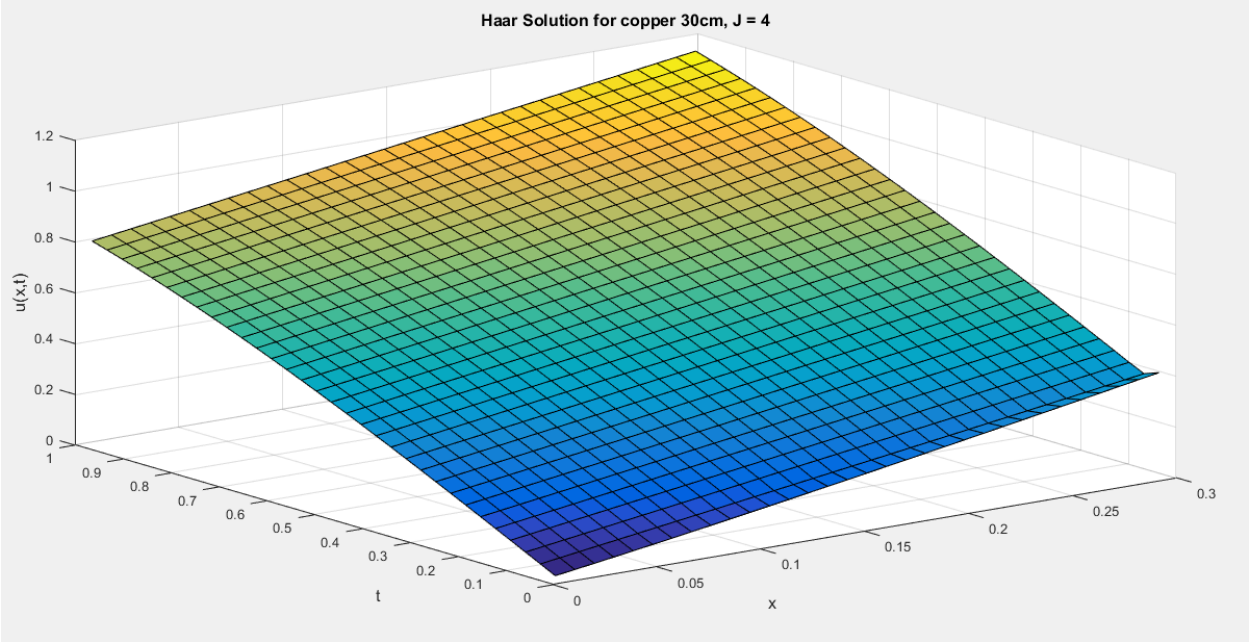


Рис. 3.11 Фізична поведінка рішення Хаара для міді 30 см

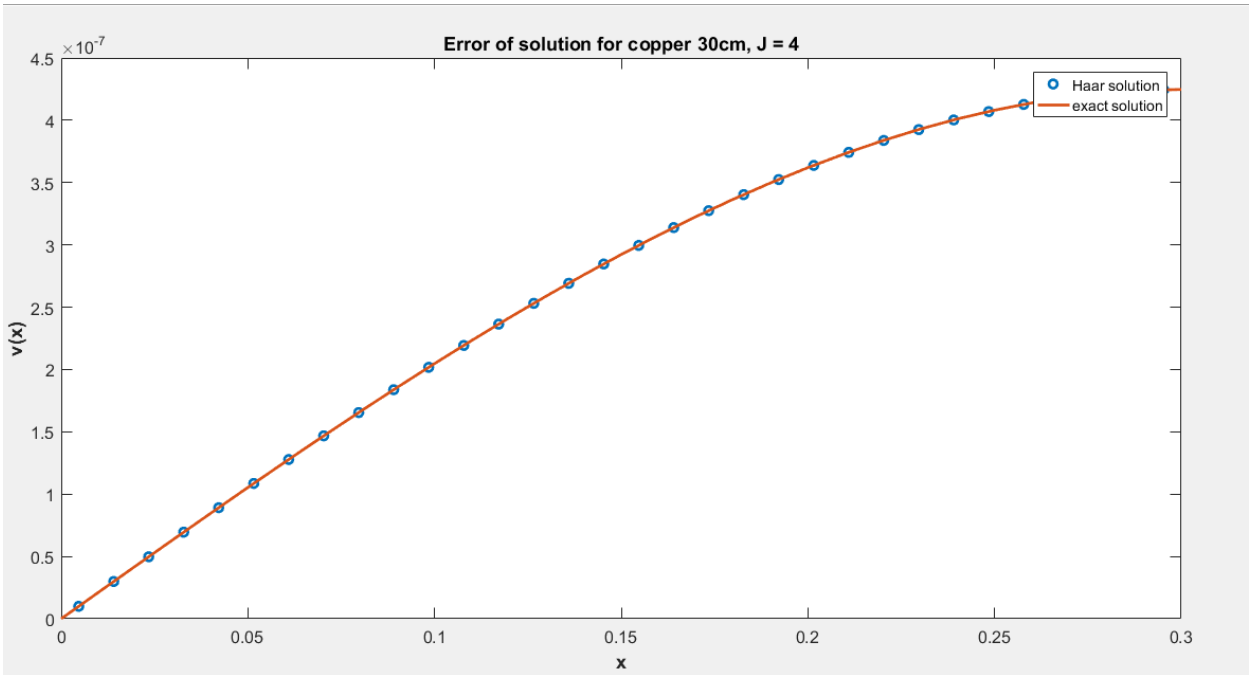


Рис. 3.12 Похибка рішення для міді 30 см при $t = 500$ с

Аналізуючи графіки вище для міді 10, 20 і 30 см, ще раз доводять високу точність результатів у випадку використання вейвлет Хаара.

3.3 Рішення одновимірного залежного від часу рівняння теплопровідності за домогою вейвлет Хаара для Сталі.

Для третього випадку ми розглянемо рівняння теплопровідності (1), що представляє собою сталь довжиною 10 см. Для чисельного результату у нас є $f = 5 - \frac{1}{5}|x - 25|$, $g_1 = g_2 = 0, 0 \leq x \leq 10$. Питома теплоємності $c = 0{,}437$ Дж/кг · К, густина $p = 7{,}88$ г/см^3, теплопровідністю $k = 0{,}836$ Вт/(м · К) і часом $t = 500$ с. Отримані результати порівнюються з точними рішеннями.

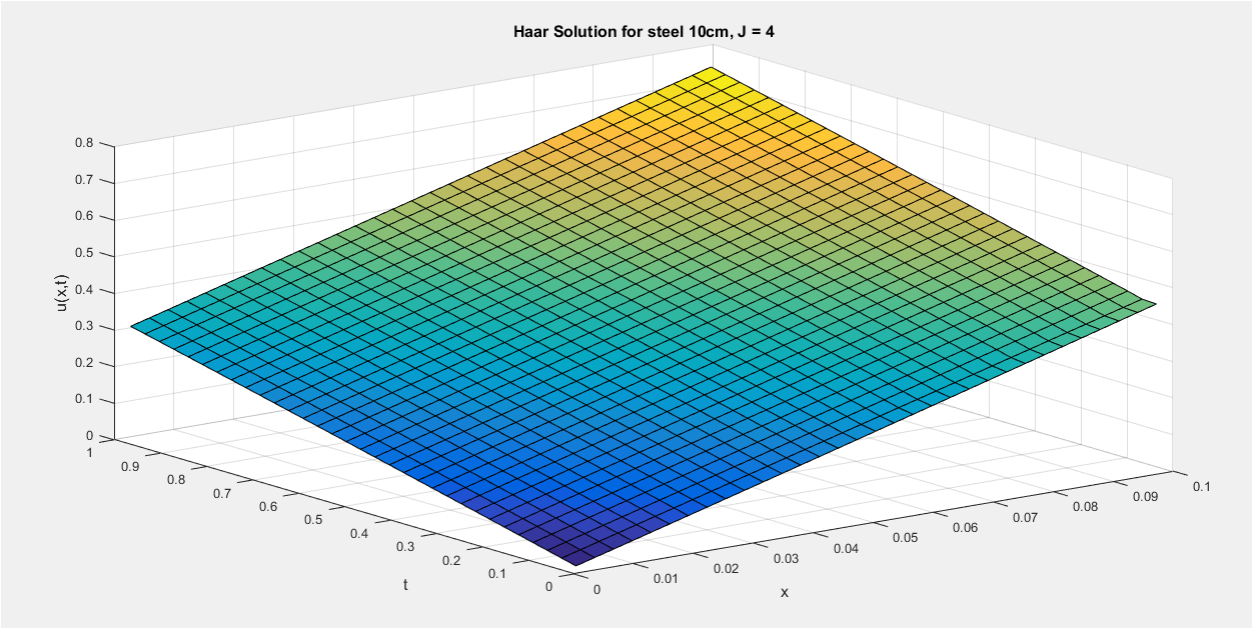


Рис. 3.14 Фізична поведінка рішення Хаара для сталі 10 см

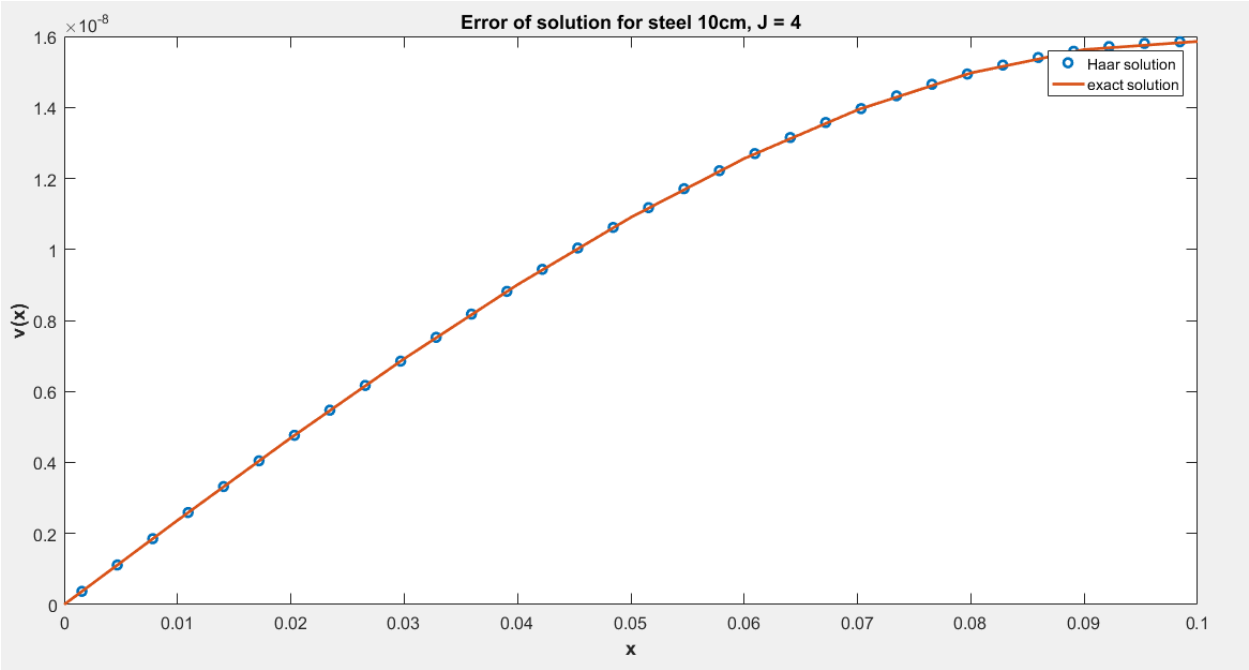


Рис. 3.15 Похибка рішення для сталі 10 см при $t = 500$ с

Скориставшись умовою вище, можна визначити теплопровідність для сталі 20 см і 30 см.

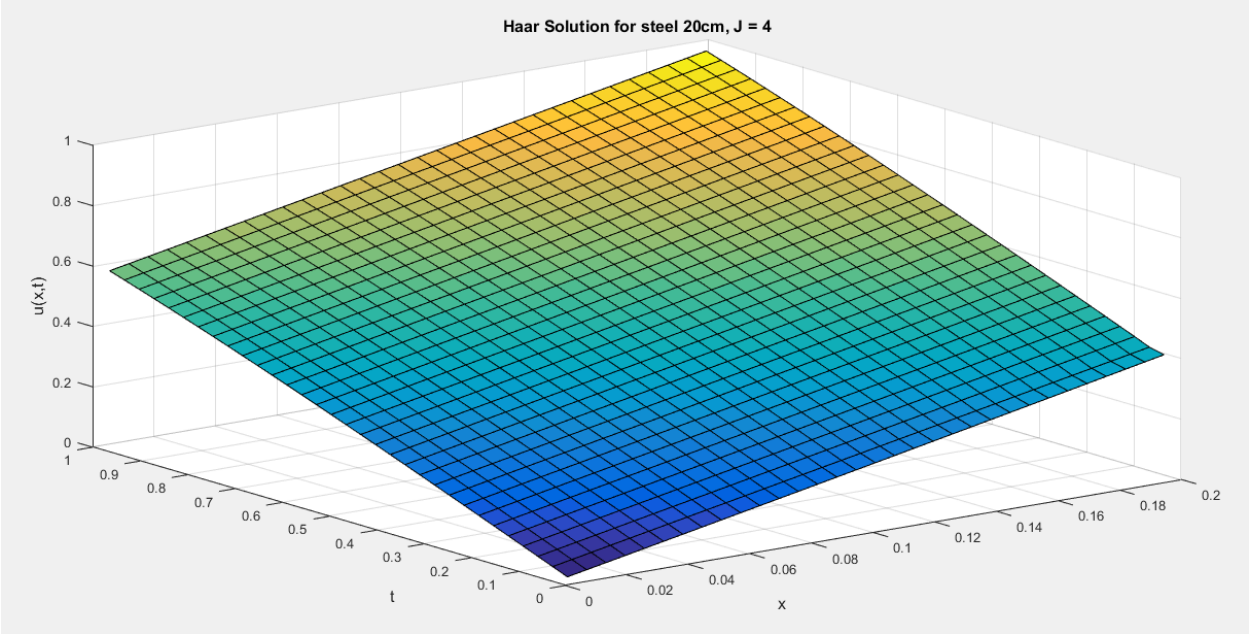


Рис. 3.16 Фізична поведінка рішення Хаара для сталі 20 см

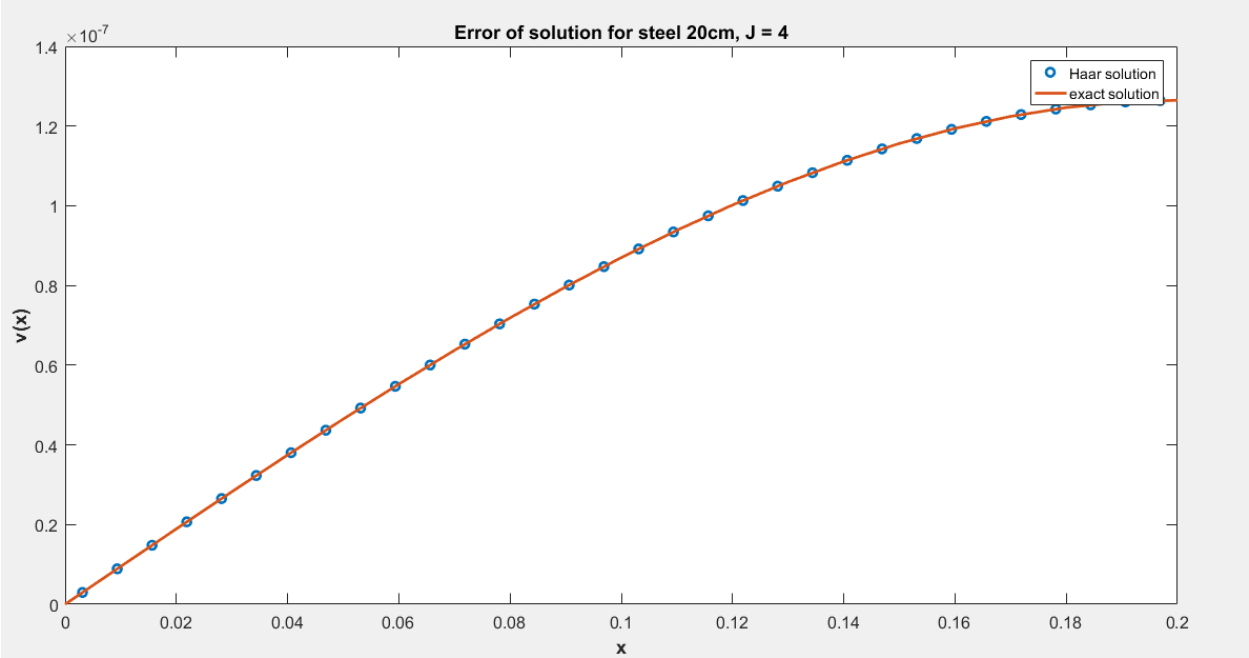


Рис. 3.17 Похибка рішення для сталі 20 см при $t = 500$ с

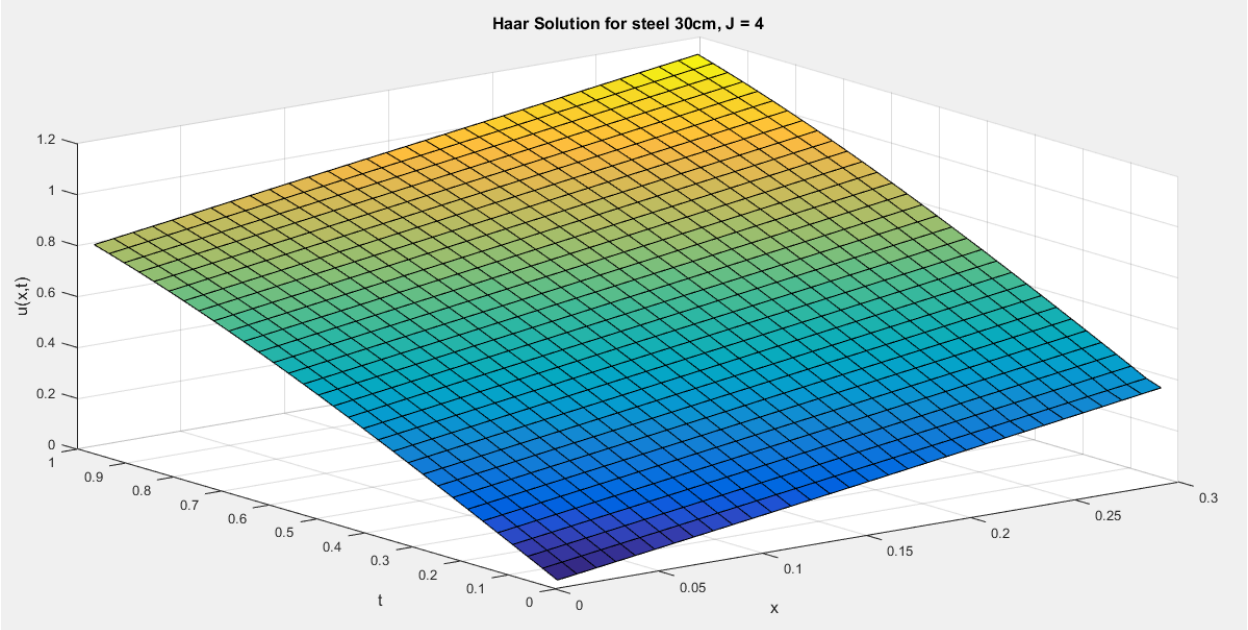


Рис. 3.18 Фізична поведінка рішення Хаара для сталі 30 см

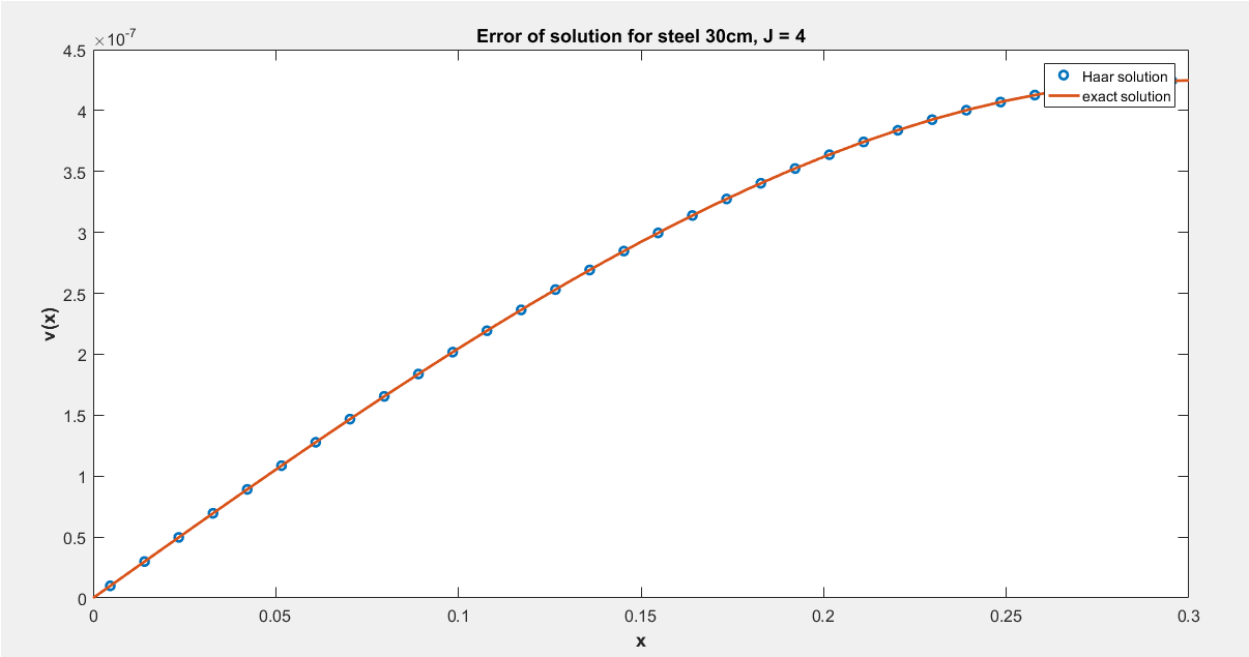


Рис. 3.19 Похибка рішення для сталі 30 см при $t = 500$ с

Аналізуючи графіки вище для сталі 10, 20 і 30 см, ще раз доводять високу точність результатів у випадку використання вейвлет Хаара.

Приклад коду з використанням вейвлет Хаара представлений у додатку А.

ВИСНОВКИ

В процесі дослідження ми поставили завдання, які реалізували в процесі написанні даної дипломної роботи.

Детально ознайомившись з теорією вейвлетів, стало зрозуміло, що їх використовують в задачах з аналізом у просторових полях зі складною широкомасштабною структурою (турбулентний потік), або тимчасових сигналів зі змінним з часом спектральним складом (сейсмічні сигнали). Основна ідея: використання базису, кожна функція якого характеризує визначену просторову (тимчасова) частоту, так і місце її локалізації в фізичному просторі (у часі). Саме цей метод підійшов для моделювання структури неоднорідних процесів.

Розібравшись із алгоритмом побудови вайвлет-систем, дійшли до висновків, що використання вейвлет-перетворення в орієнтованому базисі дозволяє отримати звичайні диференціальні рівняння. При цьому кількість обчислювальних операцій зменшується так як маємо зі спрощенням рівнянь шляхом використання лінійних комбінацій базисних фунцій.

Практичне застосування вейвлет Хаара для чисельного моделювання рівняння тепла в якому спостерігається висока точність результатів. Була створена програма на основі пакету прикладних програм для вирішення задач та технічних обчислень MatLab.

Щоб оцінити точність результатів обчислювального експерименту було взято рівняння теплопровідності для матеріалу з різною теплопровідністю (планка з алюмінію, міді та сталі) та лінійними розмірами (10 см, 20 см та 30 см).

Отримавши розрахунки за допомогою програмного забезпечення, порівняли їх з теоретичними розрахунками та оцінили похибку, можемо сказати про високу їх точність у випадку використання вейвлет Хаара.

Спосіб розрахунку за допомогою програмного забезпечення MatLab, який представлений в нашій дипломній роботі значно спрощує обчислення

фізичних задач та має перевагу перед безпосереднім обчисленням за рекурентними формулами.

Крім цього, вейвлет – перетворення широко застосовують для аналізу різного роду сигналів. Вейвлет-перетворення дає можливість максимально стискати сигнал і при цьому отримувати інформацію (зображення, текст, аудіо) високої якості при його відновленні. Такі можливості широко використовують для передачі даних на великі дистанції.

Тому в галузі використання вейвлетів, безперечно, є перспективи подальших досліджень.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Як складати і розв’язувати задачі з фізики/ А. Анісімов, Г. Редько, Г. Толпекіна. – Київ: Ред. загальнопед. газ., 2004. – 128 с.
2. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применений [Електронний ресурс]. / Н.М. Астафьева // Успехи физических наук. Т.166, №11. - Режим доступу до ресурсу: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ufn&paperid=1260&option_lang=rus
3. Вейвлет. [Електронний ресурс] .– Режим доступу до ресурсу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%B9%D0%B2%D0%BB%D0%B5%D1%82
4. Витязев В.В. Вейвлет-анализ временных рядов; Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001. – 58с.
5. Гончаренко С.У. Розв’язування навчальних задач з фізики: питання теорії і методики // [С.У. Гончаренко, Є.В. Коршак, А.І. Павленко та ін.]; за заг. ред. Є.В. Кораша. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – 185с.
6. Гончаренко С.У. Фізика: Методика розв'язування задач. - К.: Либідь, 1995. - 346 с.
7. Жук О.Ю. Головні етапи процесу розв’язання навчальної фізичної задачі з використанням педагогічних програмних засобів математичної підтримки // Наукові записки. Серія: Педагогічні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Виниченка 2001. – Вип. №34. – С. 35-39.
8. Коряк В.М. Фізичні задачі на дослідження кінцевого результату їх розв'язання // Фізика та астрономія в шк. - №6 . - 2001. - С.20-23
9. Математичне моделювання. [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B5_%D0%BC%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8E%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F
10. Моделювання. [Електронний ресурс] .– Режим доступу до ресурсу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%86%D0%B5%D1%81_%D0%BC%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8E%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F

11. Тараненко Ю. Вейвлет-анализ. Основы. [Електронний ресурс] . /Ю. Тараненко // Хабр. ком. – Режим доступу до ресурсу: https://habr.com/ru/post/449646/
12. Вестник Челябинского Государственного Университета. 2009. № 8 (146).физика. вып. 4. с. 28–31.
13. Newland, D. E. Harmonic wavelet analysis // The Royal Society. 1993. Vol. 443. P. 203–225.
14. Bergers J.M. The Nonlicar diffusion equation. Dordecht. Reidel, 1974
15. Научная статья «Гармонические вейвлеты в решении дифференциалных уравнений в частных производных», Кудрейко А.А., Мигранов Н.Г.
16. Захаров В.Г. (Пермь), Решение уравнения Бюргерса с использованием вейвлет-базисов.
17. Wavelets in Physic (Ed. J C Van den Berg) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998)
18. Спиридонов В П Компьютурра (8) (1998)
19. Torresani B, in Self-similar Systems (Eds V B Priezzhev, V P Spiridonov) (Dubna): JINR, 1999
20. Bowman C, Newell A C *Rev. Mod. Phys.* 70 289 (1998)

ДОДАТОК А

```
%Функция для вейвлет кривых;

function val = h(i,x)

global J;

A1 = 0;
B1 = 0.3;

M = 2^J;
j = floor(log2(i-1));
m = 2^j;
k = i-m-1;

mu = M/m;
dx = (B1-A1)/(2*M);


if i==1

   if x>=A1 && x<=B1
      val = 1;
   else
      val = 0;
   end

elseif i==2
   G1 = A1;
```

```
G2 = 0.5*(2*A1+B1);
   G3 = B1;

   if x>=G1 && x<G2
      val = 1;
   elseif x>=G2 && x<G3
      val = -1;
   else
      val = 0;
   end

else
   G1 = A1+2*k*mu*dx;
   G2 = A1+(2*k+1)*mu*dx;
   G3 = A1+(2*k+2)*mu*dx;

   if x>=G1 && x<G2
      val = 1;
   elseif x>=G2 && x<G3
      val = -1;
   else
      val = 0;
   end
 end
```

```
%Функция для кривых интегрирования;

function val = p(alf,i,x)

global J;

A1 = 0;
B1 = 0.3;
M = 2^J;
j = floor(log2(i-1));
m = 2^j;
k = i-m-1;

mu = M/m;
dx = (B1-A1)/(2*M);
 if i==1
    G1 = A1;
    G2 = B1;
    G3 = B1;

elseif i==2
    G1 = A1;
    G2 = 0.5*(2*A1+B1);
    G3 = B1;

else
    G1 = A1+2*k*mu*dx;
    G2 = A1+(2*k+1)*mu*dx;
    G3 = A1+(2*k+2)*mu*dx;
end

X = factorial(alf);

if x<G1
    val = 0;
elseif x>=G1 && x<=G2
    val = ((x-G1)^alf)/X;
elseif x>G2 && x<=G3
    val = ((x-G1)^alf - 2*(x-G2)^alf)/X;
else
    val = ((x-G1)^alf - 2*(x-G2)^alf + (x-G3)^alf)/X;
end
%Матрица вейвлет-коэффициентов;

function val = H_matrix(xc)

global J;

M = 2^J;

H = zeros(2*M,2*M);

for i=1:2*M

    for l=1:2*M
k = xc(l);
      H(i,l) = h(i,k);
   end
end

val = H;
end
%Операционная матрица интегрирования;


function val = P_matrix(alf,xc)
global J;
M = 2^J;
P = zeros(2*M,2*M);

xc = xc + zeros(2*M,1);

for i=1:2*M
   for l=1:2*M
      k = xc(l);
      P(i,l) = p(alf,i,k);
   end
end

val = P;
end
```

```
%Уравнение теплопроводности с помощью вейвлетов Хаара

clear;
clc;
k = 209.3;
rho = 2700;
cp = 904;
A0 = k/(rho*cp);
g = @(x) sin(pi*x);
f0 = @(t) t/2;
f01 = @(t) 1/2;
f1 = @(t) t/2;
f11 = @(t) 1/2;

global J;
global A;
global B;


A = 0;
B = 1;
A1 = 0;
B1 = 0.3;
J = 4;

M1 = 2^J;
```

```
dx = (B1-A1)/(2*M1);
M2 = 2^J;
dy = (B-A)/(2*M2);

x = zeros(2*M1+1,1);
xc = zeros(2*M1,1);
y = zeros(2*M2+1,1);
yc = zeros(2*M2,1);
%%
for i=1:2*M1+1
   x(i) = A1 + (i-1)*dx;
   if i>=2
      xc(i-1) = 0.5*(x(i-1)+x(i));
   end
end
for i=1:2*M2+1
   y(i) = A + (i-1)*dy;
   if i>=2
      yc(i-1) = 0.5*(y(i-1)+y(i));
   end
end

RHS = zeros(2*M1,2*M2);
for i=1:2*M1
   for j=1:2*M2
      RHS(i,j) = A0 - xc(i)*f11(yc(j)) - (1-xc(i))*f01(yc(j));
```

```
   end
   end

   RHS1 = zeros(1, 2*M2);
   for r=1:2*M1
      for s=1:2*M2
         beta = 2*M2*(r-1)+s;
         RHS1(1,beta) = RHS(r,s);
      end
   end
   H=zeros(2*M1,2*M1);
   P1=H;
   P2=P1;
   p2_1=zeros(2*M1);
   for i=1:2*M1
      p2_1(i)=p(2,i,1);
      for r=1:2*M1
         H(i,r)=h(i,xc(r));
         P1(i,r)=p(1,i,xc(r));
         P2(i,r)=p(2,i,xc(r));
      end
   end
   %%
   LHS1 = zeros(2*M1, 2*M2);
   for i=1:2*M1
```

```
for l=1:2*M2
    for r=1:2*M1
        for s=1:2*M2
            alpha = 2*M1*(i-1)+l;
            beta = 2*M2*(r-1)+s;
            tmp1=xc(r);
            tmp2=yc(s);
            LHS1(alpha,beta) = (P2(i,r)-xc(r)*p2_1(i))*H(l,s) - A0*H(i,r)*P1(l,s);
        end
    end
  end
end
%%
b = RHS1/LHS1;
%%
a = zeros(2*M1, 2*M2);
for i=1:2*M1
  for l=1:2*M2
    alpha = 2*M1*(i-1)+l;
    a(i,l) = b(alpha);
  end
end

u = zeros(2*M1,2*M2);
g1 = zeros(2*M1,2*M2);

for r=1:2*M1
  for s=1:2*M2
```

```
for r=1:2*M1
  for s=1:2*M2
    tmp1=xc(r);
    tmp2=yc(s);
    g1(r,s)= g(tmp1);
    u(r,s)= 0;
    for i=1:2*M1
      for l=1:2*M2
        u(r,s)= u(r,s)+ a(i,l)*(P2(i,r)-tmp1*p2_1(i))*P1(l,s);
      end
    end
    u(r,s) = u(r,s) + g1(r,s) + tmp1*(f1(tmp2)-f1(0)) + (1-tmp1)*(f0(tmp2)-f0(0));
  end
end


figure(1)
surf(xc,yc,u);
thetitle = ['Haar Solution for aluminium 30cm' ',' 'J = ' num2str(J)];
title(thetitle,'fontsize',12);
xlabel('x','fontsize',12)
ylabel('t','fontsize',12)
zlabel('u(x,t)','fontsize',12)
grid on
zlim([0 1.2])
```

```
%Погрешность;

clear;

clc;


global J;
global A;
global B;

J = 4;
A = 0;
B = 0.3;

L = B-A;

%input parameters
CS = 100;
E = 2.1e5;
q0 = @(x) 1000*sin(x);
alpha = 0;
beta = 0;

M = 2^J;
dx = (B-A)/(2*M);

x = zeros(2*M+1,1);
```

```
xc = zeros(2*M,1);

for i=1:2*M+1
    x(i) = A + (i-1)*dx;
    if i>=2
        xc(i-1) = 0.5*(x(i-1)+x(i));
    end
end

RHS = zeros(1,2*M);
RHS = RHS-(q0(xc')/(E*CS));

LHS = H_matrix(xc);

a = RHS/LHS;

y = alpha + ((beta/(E*CS)) - a*P_matrix(1,B)).*xc' + a*P_matrix(2,xc);
Y = @(x) alpha + ((beta-1000*cos(L))*x + 1000*sin(x))/(CS*E);
x = A:0.01:B;
p = plot(xc,y,'o',x,Y(x));
legend('Haar Solution','Exact solution','Location','northwest')
thetitle = ['Error of solution for aluminium 30cm'  ','  'J = ' num2str(J)];
title(thetitle,'fontsize',12)
p(1).LineWidth = 2;
p(2).LineWidth = 2;
xlabel('x','FontSize',20,'FontWeight','bold')
ylabel(['v(x)'],'FontSize',20,'FontWeight','bold')
```

```
legend('Haar solution','exact solution')
set(gca,'fontsize',12)
error = zeros(1,2*M);
for i=2:2*M
    error(i) = (y(i)-Y(xc(i)))/y(i);
end

err = norm(error,2)/(2*M);
disp(err);
```