МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАУКОВО-НАВЧАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ

Кафедра комп'ютерної фізики

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до кваліфікаційної роботи

за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр

«Комп'ютерне моделювання лопатей повітряних установок з оптимальними параметрами»

Виконав: студент 6 курсу, групи НФ-64
Сінченко Д. В.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Комп'ютерна фізика
Керівник: керівник асистент Лістрова Д.В.
Науковий консультант: д. т. н., проф. Стрельнікова О.О.
Рецензент:

Харків – 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут комп’ютерної фізики та енергетики

Кафедра комп’ютерної фізики

Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магістр

Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Костянтин НЄМЧЕНКО

підпис

“____”_____ 2025 року

ЗАВДАННЯ

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

Сінченку Демиду Володимировичу

1. Тема роботи «Комп’ютерне моделювання лопатей повітряних установок з оптимальними параметрами», керівник роботи: асистент Лістрова Дар’я Вадимівна, науковий консультант: Стрельнікова Олена Олександрівна, доктор технічних наук, професор, затверджені наказом по університету від 20 січня 2025 року №4201–5/147.

2. Строк подання студентом роботи 19.05.2025.

3. Перелік питань, які потрібно розробити:

– провести аналіз сучасного стану питання оптимального проектування оболонкових конструкцій;

– здійснити огляд публікацій, присвячених темі дослідження;

– сформулювати задачу оптимального проектування лопатей повітряних установок

– сформулювати проблему пошуку власних значень та функцій;

– провести модифікацію методу пошуку екстремуму;

– побудувати алгоритми та провести числові дослідження.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми, узгодження, а також затвердження її на кафедрі
2	Ознайомлення з літературними джерелами щодо сучасного стану проблеми комп’ютерного моделювання повітряних установок
3	Формулювання проблеми нелінійного програмування та пошуку оптимальних параметрів
4	Формулювання проблеми пошуку власних значень та функцій
5	Побудова системи базисних функцій для розв’язання задачі
6	Зведення задачі до системи гіперсингулярних інтегральних рівнянь
7	Розвинення числового методу розв'язання гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Проведення тестових розрахунків
8	Дослідження оптимальних параметрів лопатей
9	Визначення та формулювання висновків та перспектив подальшого дослідження
9	Подача науковому керівнику
10	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
11	Попередній захист
12	Захист

5. Дата видачі завдання 15 січня 2025 року

Студент _____ Демид СІНЧЕНКО

підпис

Керівник роботи _____ Дар’я ЛІСТРОВА

підпис

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ ТА АБРЕВІАТУР

КЗ – крайова задача

МГЕ – метод граничних елементів

МСЕ – метод скінченних елементів

МПа – мегапаскаль

ПЕУ – повітряна електроустановка

НДС – напружено-деформований стан

СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь

ДФП – деформований прямокутник

РЕФЕРАТ

Сінченко Демид Володимирович «Комп’ютерне моделювання лопатей повітряних установок з оптимальними параметрами»

Кваліфікаційна робота магістра з Комп'ютерної фізики. – Харків.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2025. – 116 с.

Метою даної роботи є розробка ефективних методів оптимізації ваги лопатей вітрових турбін. Запропоновано нову математичну модель на основі застосування методів граничних елементів. Для визначення динамічного тиску на лопаті використовуються гіперсингулярні інтегральні рівняння. Скінченна Адамарова частина гіперсингулярного інтеграла отримана аналітично за довільним плоским многокутником. Розроблено новий варіант методу нелінійного програмування, заснований на використанні адаптивного управління процедурами оптимізації. Адаптивний метод оптимізації застосовує групу методів - гібридієнтів. Запропоновано критерій, за яким відбираються найбільш ефективні методи-гібрідієнти для пошуку екстремуму на кожному етапі.. Цей критерій використовує інформацію, що характеризує обчислювальну ситуацію на кожному кроці. За результатами комп'ютерного моделювання за допомогою запропонованих методів отримано оптимальні параметри лопать повітряної установки. Далі розроблений підхід буде узагальнено для оптимального проектування вітрогенераторів з вертикальною віссю обертання за умови нечіткого завдання параметрів навантаження.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ЛОПАТІ ПОВІТРЯНИХ УСТАНОВОК, ГІПЕРСИНГУЛЯРНІ ТА СИНГУЛЯРНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ГІБРИДНИЙ АЛАПТИВНИЙ МЕТОД ОПТИМІЗАЦІЇ, ГЕНЕТИЧНІ АЛГОРИТМИ, ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ, ОПТИМАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ

ABSTRACT

Sinchenko Demyd Volodymyrovych "Computer modeling of air plant blades with optimal parameters"

Qualification work of the master of computer physics. – Kharkiv. – V.N. Karazin KhNU, 2025. – 116 p.

The objective of this paper is to develop effective methods of weight optimization for wind turbine blades. New mathematical model based on the application of boundary element methods is proposed. Hyper singular integral equations are used to determine the dynamic pressure on the blade. The finite Hadamard part of the hyper singular integral is received in the analytical form over an arbitrary flat polygon. A new version of the nonlinear programming method, based on the usage of adaptive management of optimization procedures, is elaborated. The proposed method of nonlinear programming consists of a group of hybrid-methods. A criterion has been specified by which the most effective methods are involved for the current search for an extremum. This criterion is based on a changing situation data. As computer simulation results, the wind turbine blade is obtained with optimal parameters. In future research the proposed approach will be used to optimization of vertical wind turbines with fuzzy loading parameters.

KEYWORDS: WIND POWER PLANT BLADES, HYPERSINGULAR AND SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS, HIBRID ADAPTIVE METHOD OF OPTIMIZATION, GENETIC ALGORITHMS, DYNAMIC CHARACTERISTICS, OPTIAL PROGRAMMING

ЗМІСТ

ВСТУП……9

1. ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОВІТРЯНИХ УСТАНОВОК……...11

1.1 Сучасний стан……11

1.2 Постановка задачі……..13

2. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ…….....14

2.1 Математичні моделі суцільного середовища…….....14

2.1.1 Основні рівняння механіки деформованого твердого тіла……14

2.1.2 Основні рівняння для розрахунку руху ідеальної нестисливої рідини……..17

2.1.3 Двобічний контакт елементу конструкції з рідиною……...19

2.2 Формулювання задачі оптимального проектування лопаті повітряної установки……..21

2.3 Визначення тиску газу на лопать за допомогою інтегральних рівнянь……....24

2.4 Визначення напруженого деформованого стану лопаті під дією заданих навантажень……..... 28

2.5 Висновки за розділом……....31

3. МЕТОДИ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ РІДИНИ……..32

3.1 Методи сингулярних інтегральних рівнянь……32

3.2 Методи гіперсингулярних інтегральних рівнянь……...35

3.3 Метод граничних елементів……38

3.4 Висновки за розділом……46

4. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ……..47

4.1 Методи нелінійного програмування в задачах безумовної оптимізації……47

4.2 Методи нелінійного програмування в задачах умовної оптимізації……..53

4.3 Гібридний адаптивний метод оптимізації……....54

4.4 Висновки за розділом……60

5. ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ…….....61

5.1 Числові та аналітичні розв’язки гіперсингулярних рівнянь……..…61

5.2 Динамічні та статичні характеристики лопаті……66

5.3 Розрахунок пружних характеристик лопаті……74

5.4 Лопать з оптимальними параметрами……..78

5.5 Висновки за розділом……79

ВИСНОВКИ…….....81

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ……....83

ДОДАТОК А Лістинг програми……91

ВСТУП

Актуальність теми: сучасний розвиток відновлюваної енергетики ставить перед нами завдання підвищення ефективності вітрових турбін. Одним із ключових аспектів цього процесу є комп'ютерне моделювання лопатей, що дозволяє створювати оптимальні аеродинамічні форми. Завдяки цифровим технологіям можна прогнозувати поведінку лопатей у різних погодних умовах, мінімізувати аеродинамічні втрати та підвищити ККД установки. Це сприяє зменшенню механічного зносу, зниженню шуму та покращенню стійкості до екстремальних вітрових навантажень. Окрім технічних переваг, оптимізація лопатей безпосередньо впливає на економічну ефективність виробництва електроенергії з відновлюваних джерел в Україні. Енергоефективні вітрові турбіни дозволяють зменшити залежність від викопного палива, скоротити викиди CO_2 та боротися зі змінами клімату, що сприяє новим можливостям, для розвитку зеленої енергетики та глобального переходу на екологічно чисті технології.

Метою даної роботи є розробка ефективних методів оптимізації ваги лопатей вітрових турбін.

Об'єкт дослідження: проектування елементів повітряних установок з оптимальними параметрами.

Предмет дослідження: методи оптимального проектування та дослідження динамічних характеристик лопатевих систем.

Методи дослідження: методи гіперсингулярних інтегральних рівнянь для знаходження тиску на лопаті повітряних установок, методи визначення напружено-деформованого стану лопатей повітряних установок, методи розв'язання задачі власних значень, методи нелінійного програмування.

Основні результати: удосконалений числовий метод розв’язання гіперсингулярних інтегральних рівнянь, модифікація методу пошуку екстремуму, визначення оптимальних параметрів лопатей.

Перелік вирішених питань: у другому розділі сформульована задача оптимального проектування лопаті мінімальної ваги, у третьому розділі удосконалено числовий метод розв’язання гіперсингулярних рівнянь, у четвертому розділі проведено модифікацію методу пошуку екстремуму, у п’ятому розділі отримано оптимальні параметри лопаті.

1. ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОВІТРЯНИХ УСТАНОВОК ТА ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

1.1 Сучасний стан проблеми

Сучасні повітряні електростанції є складними технічними комплексами, що мають значну кількість взаємодіючих вузлів, елементів і агрегатів різного призначення. Серед них основне місце займає лопатева система вітряка. Оптимальне проектування таких конструкцій потребує використання методів пошуку оптимальних параметрів, що задовольняють системі обмежень разом із забезпеченням мінімального (максимального) значення функції мети. Такі методи існують та використовуються [1], однак вони не завжди ефективні. Їх ефективність суттєво змінюється під час пошуку оптимуму, використання лише одного методу не завжди дозволяє знайти рішення із бажаною точністю. У запропонованому дослідженні використовується модифікація гібридного адаптивного методу оптимізації. Реалізація цього підходу дає змогу ефективно розв'язувати багатопараметричні задачі нелінійного програмування з урахуванням системних обмежень і функціональних лімітів [2].

На сьогодні створено цілу низку чисельних методів для оцінювання динамічних і міцнісних характеристик малих вітрових турбін [3], [4]. Під час оптимального проектування як великих, так і малих турбін зазвичай поєднують два ключові обчислювальні підходи: динамічний і міцнісний аналіз та процедури нелінійного програмування.

Для визначення напружено–деформаційного стану ефективно застосовують метод скінченних елементів [5], метод граничних елементів [6], метод скінченних об'ємів [7], а також підходи обчислювальної аеродинаміки [8], [9]. Окрім цього, варто згадати новітні чисельні методи, побудовані на підході занурювання та спрямовані на аналіз міцності й стійкості аерокосмічних конструкцій [10], а також відповідні експериментальні дослідження [11]. Сучасний стан і перспективи

нелінійного програмування висвітлено в [12], тоді як подальший розвиток ефективного чисельного методу оптимального проектування циклічно симетричних структур представлено в [13].

Варто підкреслити, що чисельна реалізація методів скінченних елементів і методу скінченних об’ємів, особливо з урахуванням моделей турбулентності, потребує значних обчислювальних ресурсів і часу. Це створює певні труднощі при проведенні оптимізаційних розрахунків, які потребують багаторазового обчислення цільової функції та перевірки виконання обмежень. У зв’язку з цим на перший план виходять методи граничних елементів [14] та інші підходи, що передбачають скорочення обчислювальної сітки [15], які дозволяють значно знизити обчислювальну складність при збереженні достатньої точності аналізу.

У теперішній час для оптимізації об’єктів різної природи використовують генетичні алгоритми. Генетичні алгоритми (ГА) — це методи оптимізації та пошуку, натхненні процесами природної еволюції. Вони належать до класу еволюційних алгоритмів і використовують механізми природного відбору, схрещування (кросинговеру) та мутації для поступового вдосконалення розв’язків задачі. ГА ефективні для складних задач, де традиційні методи (градієнтні, аналітичні) працюють погано через нелінійність або велику кількість локальних екстремумів. Одним з попередників генетичного алгоритму був гібридний адаптивний метод оптимізації.

У працях [18]–[21] подано вдосконалені процедури аналізу напружено–деформованого стану машинобудівних елементів, а в роботах [22]–[25] розвинено числові методи для розв’язання сингулярних і гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Нарешті, джерела [26]–[28] пропонують сучасні стратегії оптимального проєктування конструкцій, що розширюють можливості інженерного застосування.

У кваліфікаційній роботі застосовано два взаємодоповнювальні високоефективні чисельні підходи. Перший – це метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь у формулюванні граничних елементів [16], який дає змогу

визначати динамічні характеристики лопаті. Другий - алгоритми нелінійного програмування [17], призначені для розв’язання задач оптимізації. Поєднання цих підходів дає підґрунтя для створення нової методики оптимального проектування лопатей вітротурбіни.

1.2 Постановка задачі

На основі огляду літературних джерел можна зробити висновок, що на теперішній час недостатньо розвинені методи оптимального проектування лопатей повітряних установок під дією вітрового навантаження. Тому в дипломній роботі розвинені нові ефективні підходи до оптимального проектування лопатей, засновані на використанні гібридного адаптивного методу оптимізації та методу гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Постановка задачі, що розглядається, полягає в наступному:

– Потрібно знайти лопать мінімальної ваги за наступних умов. Під дією стаціонарного аеродинамічного навантаження та відцентрових сил нормальне переміщення w не повинно перевищувати заданої величини $[w]$, напруження – величини $[\sigma]$; на першу частоту власних коливань ω також має бути накладено обмеження.

Функція мети – маса лопаті $m = \rho V$, де ρ – густина матеріалу, V – об’єм лопаті.

2. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

У цьому дослідженні ми користуємося поняттями механіки суцільного середовища. Основні рівняння базуються на таких припущеннях:

– Властивості середовища не змінюються зі зменшенням об’єму, що розглядається. Це дозволяє використовувати граничні переходи, коли об’єм прагне до нуля, тобто ми не розглядаємо тут атомно–молекулярно структуру матеріалу. Не враховуємо квантової механіки.

– Вважаємо, що середовище однорідне, тобто не містить мікротріщин, пор та включень.

– Також вважаємо, що швидкості, що розглядаються, набагато менші за швидкість світла.

2.1 Математичні моделі суцільного середовища

Вважаємо, що середовище є деформованим. Це означає, що в процесі руху можуть змінюватися відстані між точками тіла. Для того, щоб охарактеризувати поведінку деформованого тіла, потрібно задати переміщення цього тіла у кожній точці в залежності від часу, деформації цього тіла, що характеризують відносне розтягування або стиснення елементів конструкції, а також зміну кутів. Наявність деформації викликає напруження. Компоненти переміщень, напруження та деформації характеризуються тензорами другого рангу, тобто матрицями 3x3. Ці тензори є симетричними, тобто маємо 12 невідомих, але рівнянь рівноваги лише три. Тому потрібні додаткові залежності. Перші з них пов’язують деформації та переміщення, другі з них пов’язують деформації і напруження (закон Гука).

2.1.1 Основні рівняння механіки деформованого твердого тіла

Розглянемо крайову задачу для суцільного двовимірного непружного ізотропного тіла Ω, обмеженого контуром Λ. Припустимо, що у частині межі Λ_1

задані переміщення тіла, а в частині Λ_2 – зусилля; $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$. Вважаємо, що зі збільшенням навантаження на тілі можуть розвиватися пластичні деформації, тобто зв'язок напружень і переміщень не описуватиметься законом Гука. Застосовуватимемо теорію малих пружно-пластичних деформацій.

Розв'язання задачі полягає у визначенні полів напружень, деформацій та зсувів σ_{ij}, ε_{ij}, u_j ($i, j = 1, 2$) в області Ω, що задовольняють задані граничні умови. Для знаходження зазначених функцій застосовуються такі рівняння:

– диференціальні рівняння рівноваги у напруженнях, які за відсутності об'ємних сил мають вигляд:

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad i, j = 1,2 \tag{2.1}$$

– співвідношення Коші, залежності між компонентами тензора деформацій та компонентами вектору переміщень, що визначаються формулою:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.2}$$

– фізичні рівняння, що зв'язують компоненти тензорів напружень та деформації до моменту виникнення пластичних деформацій (закон Гука):

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda \operatorname{div}\mathbf{u} + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \quad i, j = 1,2,3, \tag{2.3}$$

– де δ_{ij} – символ Кронекера

– умова плинності, при виконанні якої виникають пластичні деформації

(умова Мізеса-Генки):

$$\sigma_i(\boldsymbol{x}) = \sigma_{,T},$$

де $\sigma_i(\boldsymbol{x})$ – інтенсивність напруження; σ_T – межа плинності;

Слідуючи [18], введемо диференціальний оператор пружних напружень (оператор напружень класичної теорії пружності): $T^n\left(\partial_{x,}n(x)\right) = \left\|T_{ij}^n(\partial_{x,}n(x))\right\|_{3x3}$

$$T_{ij}^n(\partial_x, \mathbf{n}(\mathbf{x})) = \lambda n_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_j} + \mu n_j(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i} + \delta_{ij}\mu\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}$$

$$T^n\left(\delta_x, n(x)\right)u(x) = 2\mu\,\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda n div u + \mu(n \times rotu)$$

Для простоти запису будемо також використовувати наступне позначення:

$$T^{n(x)} = T^n\left(\partial_x, n(x)\right) \qquad (2.4)$$

Сформулюємо крайову задачу теорії пружності для довільного тривимірного тіла, обмеженого поверхнею **Ω**. Нехай на межі $\mathbf{\Omega}_1$ задані кінематичні умови першої крайової задачі:

$$u_i(x)=u_{il}(x),\ x\in\mathbf{\Omega}_1,\ i=1,2,3 \qquad (2.5)$$

На частини $\mathbf{\Omega}_2$ задані статичні умови навантаження, що відповідають другої крайової задачі теорії пружності:

$$X_i(x)=\sigma_{1i}\,n_1(x)+\sigma_{2i}\,n_2(x)+\sigma_{3i}\,n_3(x),\ x\in\mathbf{\Omega}_2,\quad i=1,2,3\ , \qquad (2.6)$$

де $n_i(x)=\cos(n,x_i)$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі $n(x)$ до поверхні $\mathbf{\Omega}=\mathbf{\Omega}_1\cup\mathbf{\Omega}_2$ у точці x.

З використанням (2.4) крайова умова (2.6) набуде вигляду:

$$X(x)= T^{n(x)}u(x), \qquad X(x)=(X_1(x), X_2(x), X_3(x))\ x\in\mathbf{\Omega}2$$

Приходимо до наступної крайової задачі щодо $u_i(x)$(i=1,2,3):

$$\mu\Delta u_j + (\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} = 0,\quad i=1,2,3; \qquad (2.7)$$

$u_i(x)=u_{il}(x)$, $x\in\mathbf{\Omega}1$, i=1,2,3. $T^n\left(\partial_x, n(x)\right)u(x) = X(x)$, $x\in\mathbf{\Omega}2$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (2.7) дає змогу знайти переміщення, потім за формулами (2.2) – знаходимо деформації, а за формулами (2.3) напруження у деформованому тілі.

2.1.2 Основні рівняння для розрахунку руху ідеальної нестисливої рідини (газу)

Перейдемо до формулювання початково-крайової задачі з механіки рідини. Для опису рідини використовуємо співвідношення (2.1)-(2.2). Також задається зв'язок між напруженнями та швидкостями деформацій:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \left(-p + \lambda div\vec{V}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_x & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\varepsilon}_y & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{xz} & \dot{\gamma}_{yz} & \dot{\varepsilon}_z \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

де λ та μ – перший та другий коефіцієнти в'язкості, $\vec{v}$ – вектор швидкостей рідини.

Зробимо такі припущення відносно рідкого середовища. Вважаємо, що рідина є стисливою та нев'язкою, а її рух безвихровий. Припускаємо, що збурення тиску рідини внаслідок руху пружного тіла є малими, тобто розв'язуємо зв'язану задачу в лінійному формулюванні. Використовуємо загальні закони механіки рідини, а саме: закон збереження маси (рівняння нерозривності):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div\left(\rho V_f\right) + Q, \quad (2.9)$$

де V_f – вектор швидкості; ρ – густина рідини; Q – джерела; t –час.

Далі використовуємо рівняння руху (2.1) у напруженнях (наслідок закону збереження імпульсу) з врахуванням об'ємних сил b:

$$\rho\frac{dV_f}{dt} = \rho b + div\left(\sigma_f\right)$$

Для визначення компонент тензору напружень приймаємо гіпотезу:

$$\sigma_f = -pI + T; \quad T = 2\mu\left(\dot{S} - \frac{1}{3}\left(div\, V_f\right)\right) \tag{2.10}$$

де $\dot{S}$ – девіатор швидкостей деформації.

З використанням рівняння стану з (2.9) та (2.10) маємо наближені рівності:

$$\operatorname{div}\mathbf{V}_f = -\frac{1}{\rho_0 c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q}{\rho_0}\frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{4\mu}{3\rho_0}\left(-\frac{1}{\rho_0 c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q}{\rho_0}\right) \tag{2.11}$$

Надалі вважаємо, що рідина нестислива та нев'язка, а джерела відсутні. Тоді маємо $Q = 0,\ \mu = 0,\ \rho_0 = \text{const},\quad c \to \infty$. При цьому (2.11) набувають вигляду:

$$div\, \boldsymbol{V}_f = 0, \rightleftarrows \rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{V}_f}{\partial t} = -\nabla p \tag{2.12}$$

Обчислив дивергенцію від другого співвідношення в (2.12), отримаємо, що тиск p є гармонічною функцією, тобто задовольняє рівнянню Лапласа, а саме:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \tag{2.13}$$

Саме тиск, або його перепад входить в праву частину рівнянь (2.8).

Припустимо, що має місце таке розкладення для невідомих переміщень:

$$\mathbf{u}^e(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{N} c_k(t)\mathbf{u}_k(x, y, z) \tag{2.14}$$

де $c_k(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу; $\mathbf{u}_k(x, y, z)$ – відомі базисні функції.

Функції часу $c_k(t)$ зазвичай розглядають як узагальнені координати. З огляду на (2.14), рівнянням (2.8) надаємо таку форму:

$$\sum_{k=1}^{N}\left\{\ddot{c}_k(t)\left[\mathbf{M}\mathbf{u}_k\right] + c_k(t)\left[\mathbf{K}\mathbf{u}_k\right]\right\} = \left\{\mathbf{f}_S\right\} + \left\{\mathbf{f}_{pr}\right\}. \tag{2.15}$$

Надалі використовуємо метод зважених нев'язок [13], що в даному випадку еквівалентно виконанню скалярного добутку рівнянь (2.15) послідовно на функції $\mathbf{u}_l(x,y,z)$. Отримуємо:

$$[\mathbf{M}][\ddot{\mathbf{c}}]+[\mathbf{K}][\mathbf{c}]=\{\tilde{\mathbf{f}}_S\}+\{\tilde{\mathbf{f}}_{pr}\},$$

де $[\mathbf{M}]=\{\mathbf{M}\mathbf{u}_k,\mathbf{u}_l\}$, $[\mathbf{K}]=\{\mathbf{K}\mathbf{u}_k,\mathbf{u}_l\}$.

Якщо $\{\tilde{\mathbf{f}}_S\}=\{\tilde{\mathbf{f}}_{pr}\}=0$, то маємо задачу на визначення частот та форм вільних коливань елементу конструкції без врахування приєднаних мас рідини, при лише $\{\tilde{\mathbf{f}}_S\}=0$ приходимо до задачі на визначення частот та форм вільних коливань елементу конструкції з врахуванням приєднаних мас рідини.

2.1.3 Двобічний контакт елементу конструкції з рідиною

Треба знайти праву частину в співвідношенні:

$$[\mathbf{M}][\ddot{\mathbf{c}}]+[\mathbf{K}][\mathbf{c}]=\{\tilde{\mathbf{f}}_{pr}\} \tag{2.16}$$

Якщо вивчається двобічний контакт елементу конструкції з рідиною, то на змочених поверхнях розглядається перепад тиску. Як було зазначено вище, тиск задовольняє рівнянню Лапласа (2.13). Для однозначного розв'язку цього рівняння треба сформулювати граничні умови. Вважаємо, що елемент конструкції досить тонкий, тому згідно з [15], припустимо, що граничні умови можна задавати та серединній поверхні елементу, що розглядається. Сформулюємо граничну умову непротікання, яка для нев'язкої рідини полягає у рівності нормальних складових швидкостей рідини та конструктивного елементу, тобто:

$$(\ddot{\mathbf{u}}^e,\mathbf{n})=(\mathbf{V}_f,\mathbf{n})$$

З другого з рівнянь (2.12) здобудемо:

$$\frac{\partial p^{\pm}}{\partial \mathbf{n}}=-\rho_l(\ddot{\mathbf{u}}^e,\mathbf{n})=-\rho_l\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k(t)(\mathbf{u}_k,\mathbf{n}) \tag{2.17}$$

Нормальна похідна від тиску має бути неперервною, але ж на поверхні елементу тиск має перепад, при чому функція, що описує тиск, є гармонічною.

Крім того, вказана гармонічна функція має задовольняти умові Зоммерфельда на нескінченності, а саме:

$$\nabla p\big|_{\infty} = 0$$

Як відомо, такі властивості має потенціал подвійного шару [16]:

$$p(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma(\mathbf{P})\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|}dS, \quad \mathbf{P}\in S \tag{2.18}$$

де S – область, зайнята елементом конструкції; n – одинична нормаль до поверхні S; P і P_0 – точки тривимірного простору з координатами (x,y,z) та (x_0,y_0,z_0) відповідно; $|P - P_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ – декартова відстань між P і P_0; $\Gamma(\mathbf{P})$ – густина потенціалу задана на поверхні S.

Функція, що визначена формулою (2.18), задовольняє рівнянню Лапласа (2.13), має неперервну нормальну похідну, а при перетині поверхні S вздовж нормалі має скінченний розрив, а саме [16]:

$$p^{+}(\mathbf{P}_0) - p^{-}(\mathbf{P}_0) = \Gamma(\mathbf{P}_0), \quad \mathbf{P}_0 \in S$$

Тому використовуємо подання (2.17) для визначення тиску. Зауважимо, що для визначення перепаду тиску треба знайти невідому густину $\Gamma(\mathbf{P})$ на поверхні пружного елементу. Треба задовольнити граничну умову (2.17). Це призводить до інтегрального рівняння у вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0}\frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma(\mathbf{P})\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} = -\rho_l\left(\mathbf{u}^e, \mathbf{n}\right), \quad \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 \in S \tag{2.19}$$

З рівняння (2.19) бачимо, що функція $\Gamma(\mathbf{P})$ може бути подана у вигляді такого ряду:

$$\Gamma(\mathbf{P}) = \sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k(t)\Gamma_k(\mathbf{P}),$$

де функції $\Gamma_k(\mathbf{P})$ задовольняють таким гіперсингулярним рівнянням:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0}\frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma_k(\mathbf{P})\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} = -\rho_l(\mathbf{u}_k, \mathbf{n}), \quad \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 \in S \tag{2.20}$$

Якщо ввести позначення для оператору, що дає розв'язки наведених гіперсингулярних рівнянь у вигляді:

$$\Gamma_k(\mathbf{P}) = -\rho_l \mathbf{H}_k(\mathbf{u}_k)$$

то отримаємо вираз для матриці приєднаних мас для рівняння (2.16):

$$\{\tilde{\mathbf{f}}_{pr}\} = -\rho_l[\mathbf{H}][\ddot{\mathbf{c}}], \quad [\mathbf{H}] = \{\mathbf{H}\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l\} \tag{2.21}$$

Таким чином, отримані рівняння для визначення частот та форм вільних коливань елементу конструкції при двобічному контакті з рідиною – диференціальні рівняння (2.16), в яких $\{\tilde{\mathbf{f}}_{pr}\}$ обчислюється за формулою (2.21).

Зауважимо, що для обчислення тиску рідини використовується пряме формулювання методу граничних елементів.

2.2 Формулювання задачі оптимального проектування лопаті повітряної установки

Сучасні вітроенергетичні установки - це складні технічні комплекси, що об'єднують велику кількість вузлів і агрегатів, серед яких ключову роль відіграє лопатева система вітроколеса. Оптимальне проектування таких конструкцій полягає в пошуку набору геометричних та фізичних параметрів, який, дотримуючись заданих обмежень, забезпечує найкраще значення вибраного критерію якості.

Попри широку відомість класичних алгоритмів оптимізації, їхня ефективність сильно залежить від мінливих умов пошуку, і застосування будь-

якого з них окремо не завжди дає змогу досягти необхідного результату за прийнятний час.

Тому в цій роботі використано оригінальний гібридний підхід [12], що дозволяє оперативно й надійно розв’язувати багатопараметричні задачі з урахуванням усіх граничних та функціональних обмежень.

Як правило, ці обмежувальні функції є результатом вирішення задачі аналізу, що пов'язує всі основні аспекти об'єкта, що проектується. У цьому випадку таке завдання поєднує питання форми, міцності та стійкості конструкції. До них природньо долучаються також технологічні, експлуатаційні та інші вимоги різного характеру. Вирішення зазначених питань розпадається на пошук аеродинамічних навантажень, що діють на лопать, і визначення НДС, що виникає в ній, а також частот власних коливань.

Постановка задачі. Лопать моделюється тонкостінним природньо закрученим стрижнем змінного поперечного перерізу, що має довжину L, та закріплений на колесі ПЕУ. Віднесемо його до глобальної декартової системи координат (див. Рис.2.1): Z_G – вісь поворотів перерізів; X_G збігається з віссю вітроколеса. Напрямок Y_G такий, що глобальна система координат є правою.

Геометрія лопаті представлена набором перерізів, у кожному задані такі параметри профілю: координати точок (x, y) зовнішнього контуру; товщина перерізу $h(z)$; товщина лонжерону $h_1(z)$; ширина лонжерону $l(z)$ (Рис.2.1). Передбачається, що лопать знаходиться під дією аеродинамічних навантажень та відцентрових сил. Обчислюване аеродинамічне навантаження приводиться до розподілених поперечних навантажень q_x, q_y і розподіленого крутного моменту m_z.

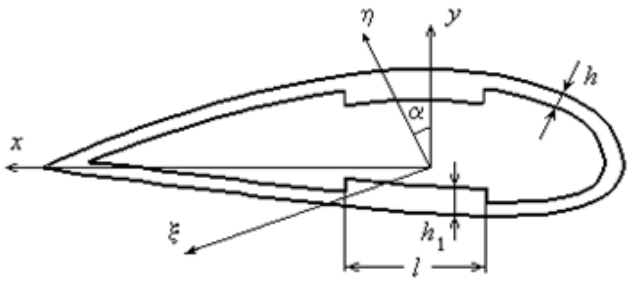


Рис.2.1. Геометрія перерізу лопаті

Повітряне середовище передбачається ідеальним, стисливим і незавихреним. Як показано в попередньому пункті, задачу обтікання лопаті можна звести до вирішення гіперсингулярного інтегрального рівняння. Вирішення цього рівняння дозволяє визначити перепад тисків, що діють на лопаті. Задача аеропружності вирішується в незв'язаній постановці вважається, що деформації та переміщення практично не впливають на аеродинамічні сили, що діють на лопать.

Для оптимального проектування конструкцій зазначеного типу необхідно використовувати процедури мінімізації (максимізації) деякої функції цілі шляхом належного вибору параметрів при заданих обмеженнях (самі обмеження є функціями вихідних параметрів).

Опишемо одне з можливих формулювань задачі оптимізації лопаті вітроколеса. Потрібно знайти лопать мінімальної ваги за наступних умов. Під дією стаціонарного аеродинамічного навантаження та відцентрових сил нормальне переміщення w не повинно перевищувати заданої величини $[w]$, напруження – величини $[\sigma]$; на першу частоту власних коливань ω також має бути накладено обмеження:

$$\left|\max w^i\right| \le [w] \ ; \ \left|\max \sigma^i\right| \le [\sigma] \ ; \ i = \overline{1,N} \ ; \ [\omega_1] \le \omega \le [\omega_2], \qquad (2.22)$$

де $[\sigma]$ позначає межу міцності; σ^i – згинальні напруження в N перерізах; $[\omega_1]$, $[\omega_2]$ – граничні значення допустимого діапазону зміни частоти.

Функція мети – маса лопаті $m = \rho V$, де ρ – густина матеріалу, V – об'єм лопаті, що визначається за формулою:

$$V = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} S(z)dz, \tag{2.23}$$

де $S(z)$ – площа поперечного перерізу; $(N-1)$ – кількість перерізів.

Параметрами, що тут варіюються, є товщини лопаті і параметри лонжерону в різних перерізах $h^i(z)$, $h_1{}^i(z)$, $l^i(z)$, $i = \overline{1,N}$ (Рис.2.1).

Таким чином, екстремальна задача, що розглядається, а саме (2.22), (2.23), фактично є завданням нелінійного програмування, коли потрібно знайти вектор:

$$X^* = \arg \operatorname*{extr}_{X \in G} F(X) \tag{2.24}$$

у допустимій області:

$$G = \left\{ X : G_i(X) \geq 0, i = \overline{1,m} \right\} \neq \varnothing \tag{2.25}$$

скінченого параметричного простору E_n, що доставляє екстремум заданої функції мети $F(X)$, визначеної в деякому розширенні $H \supset G$.

2.3 Визначення тиску газу на лопать за допомогою інтегральних рівнянь

Для визначення аеродинамічних навантажень лопать моделюється як несуча поверхня скінченних розмірів S_1. Вздовж цієї поверхні формується вихровий шар, який відривається від задньої кромки та утворює вихрову пелену S^2, що поширюється в напрямку набігаючого потоку зі швидкістю V_0. У таких умовах перепад тиску на поверхні лопаті обчислюється за рівнянням Коші–Лагранжа, яке в цьому випадку має наступну форму:

$$\frac{\Delta P}{\rho_0} = -\left(\operatorname{grad}\Gamma \cdot \mathbf{V}_R\right) \tag{2.26}$$

де ρ_0 – густина повітря; Г – циркуляція швидкості; V_R – відносна швидкість потоку $V_R = V_0 - \Omega \times r$; Ω – кутова швидкість обертання вітроколеса; r – радіус-вектор поточної точки.

Розглянемо завдання обтікання тонкої несучої поверхні потоком ідеальної стисливої рідини. Так як всюди поза тонкою несучою поверхнею S_1 і вихровим слідом S_2, за нею потік вважається безвихровим, то існує потенціал абсолютної швидкості повітряного середовища, що задовольняє всюди поза поверхнями розриву (S_1 і S_2) рівняння Лапласа:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \tag{2.27}$$

Нехай *n(x)* – позитивна нормаль до поверхні S_1 у певній точці $\boldsymbol{x}$. Позначимо через Φ^+ та Φ^- граничні значення потенціалу швидкостей при прагненні точки спостереження y до точки x вздовж n^+ та n^-, відповідно. Потрібно, щоб на несучій поверхні S_1 було виконано умову непротікання:

$$\frac{\partial \Phi^+}{\partial n} = \frac{\partial \Phi^-}{\partial n} = (\mathbf{V}_0, \mathbf{n}), \tag{2.28}$$

а на поверхні вихрового сліду S_2 – умова відсутності перепаду тисків:

$$\left(\operatorname{grad}\left(\Phi^+ - \Phi^-\right) \cdot \mathbf{V}_R\right) = 0 \tag{2.29}$$

Крім цього, необхідно задовольнити умову згасання збуджених швидкостей на нескінченності:

$$\operatorname{grad}\Phi\Big|_{\infty} = 0 \tag{2.30}$$

Будемо шукати розв'язання задачі (2.27) – (2.30) у вигляді потенціалу подвійного шару:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS_y, \tag{2.31}$$

де $S=S_1\cup S_2$; $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$ – відстань між точками $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$.

Як показано [30], потенціал подвійного шару (2.31) при переході через S зазнає розриву і має безперервну нормальну похідну. Усюди поза S потенціал (2.31) задовольняє рівняння (2.27), але в нескінченності – умові (2.30). Отже, для вирішення сформульованої вище задачі необхідно задовольнити умові (2.28) та побудувати поверхню вихрового сліду так, щоб було виконано умову (2.29).

Вважатимемо відомим місцезнаходження вихрової пелени (поверхні S_2). При цьому гранична умова (2.28) зводиться до наступного інтегрального рівняння:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma(\mathbf{y})\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right)dS_y = g(\mathbf{x}), \qquad (2.32)$$

де $g(\mathbf{x})=(\mathbf{V}_0\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}))$.

Передбачається, що Г($\boldsymbol{y}$) перетворюється на нуль на межах області $S=S_1\cup S_2$. У роботах [31, 32, 33] доведено, що рівняння (2.32) є сингулярне інтегральне рівняння з ядром типу Адамара [34]. Його розв'язок зводиться до СЛАР:

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=0}^{L} H_{ml}(M_k)C_{ml} = f(M_k),\ k=1,2... \qquad (2.33)$$

Визначення коефіцієнтів C_{ml} із цієї системи вирішує задачу відшукання невідомої функції Г, отже, і завдання визначення тиску на лопать. За формулою (2.26) знаходимо перепад тиску ΔP. За відомою функцією ΔP обчислюємо розподілені навантаження q_{x}, q_{y} та крутний момент m_{z}, що діють на лопать:

$$q_{\text{x}} = \Delta P\cos(\boldsymbol{n}x); \quad q_{\text{y}} = \Delta P\cos(\boldsymbol{n}y); \quad m_{\text{z}} = \Delta P(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}) \qquad (2.34)$$

При чисельній реалізації кількість підобластей інтегрування приймалося на S_1 N_{S1}=10×10 та N_{S2}=10×3 на S_2 (розглядався ближній вихровий слід). У кожній особливій підобласті гіпресингулярні інтеграли визначалися таким чином:

– Розіб'ємо область інтегрування S на ряд плоских трикутних і чотирикутних підобластей $S_k (k = 1,2,...,N)$. Опишемо метод граничних елементів із постійною апроксимацією густини для чисельного розв'язування рівняння (2.20). Розглянемо гіперсингулярий інтеграл по апроксимованій поверхні. Приходимо до СЛАР щодо невідомих Γ_i:

$$\sum_{k=1}^{N} H_{kj}\Gamma_k = f(\mathbf{x}_{0j}); \quad j = 1,2,...N \tag{2.35}$$

Елементи матриці H_{kj} визначаються за формулою:

$$H_{kj} = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\left([\mathbf{l}_i \times \mathbf{r}_i]\cdot \mathbf{n}\right)}{\left|[\mathbf{l}_i \times \mathbf{r}_i]\right|^2}\left[\frac{(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1})}{r_{i+1}} - \frac{(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_i)}{r_i}\right] \tag{2.36}$$

де n – нормаль до поверхні інтегрування в точці $\boldsymbol{x}_{0j}$; m – число сторін в k-му граничному елементі; вектори $\mathbf{r}_k, \mathbf{l}_i, \mathbf{n}$ задаються співвідношеннями:

$$\begin{gathered}\mathbf{r}_k = (x_k - x_0, y_k - y_0, z_k - z_0); \quad \mathbf{l}_i = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i, z_{i+1} - z_i); \\ \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3); \quad i = 1,2,...,m; \quad x_{m+1} = x_1; \quad y_{m+1} = y_1; \quad z_{m+1} = z_1; \quad r_k = |\mathbf{r}_k|.\end{gathered} \tag{2.37}$$

Точність методу граничних елементів та його збіжність залежить від вибору контрольних точок. Аналізуючи величини, що обчислюються за формулою (2.36), встановлюємо, що на межах елементів відгук звертається в мінус нескінченність, проте всередині кожного елемента є точка, в якій відгук має кінцевий максимум.

На Рис.2.2 показані лінії рівня функцій-відгуків, визначених формулою (2.36), для трикутного та чотирикутного елементів.

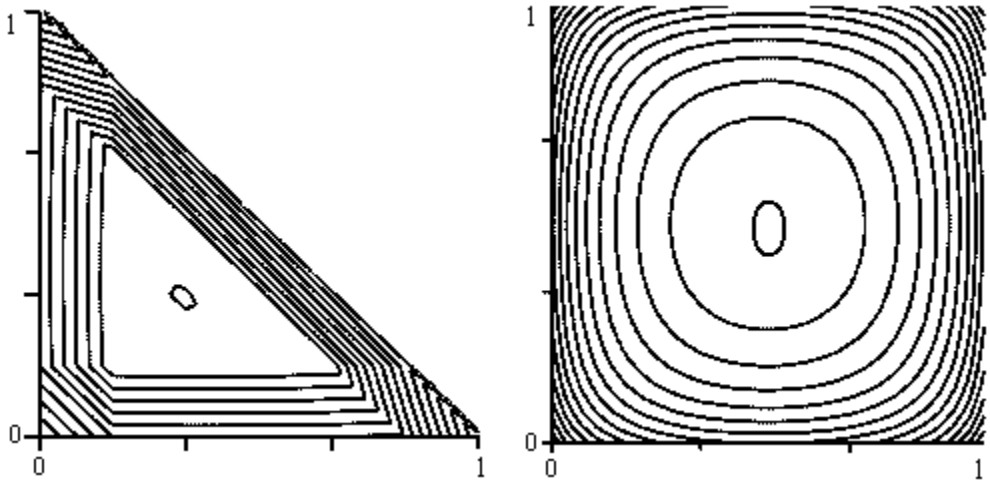


Рис.2.2. Лінії рівня функцій-відгуків від постійної густини

Проведений чисельний аналіз дозволяє зробити висновок, що відгуки для постійної густини мають кінцевий максимум у центрах тяжкості граничних елементів.

2.4 Визначення напруженого деформованого стану лопаті під дією заданих навантажень

Визначимо НДС лопаті під дією аеродинамічних і відцентрових навантажень. Тут використано методи й алгоритми, розроблені в монографіях А.П. Філіппова [35] і Ю.С. Воробйова [36] і розвинуті стосовно розрахунку аеродинамічних навантажень на лопаті ПЕУ в [37]. Переміщення поперечного перерізу можна уявити як поступальне переміщення центру вигину і поворот перерізу відносно центру вигину [36]:

$$U = u - \theta(y - y_u), V = v + \theta(x - x_u), W = w - u'x - v'y + \theta'\phi, \qquad (2.38)$$

де U, V, W – переміщення довільної точки перерізу з координатами x, y, z; u, v, w – переміщення центру ваги перерізу; θ – кутове переміщення навколо центру вигину; x_u, y_u – координати центру вигину; φ – функція депланації; $()' = d()/dz$.

Поперечним стисненням волокон і переміщеннями перерізу внаслідок зсуву нехтуємо. Значення деформацій у довільній точці (*x*, *y*, *z*) у разі використання кінематичної моделі (2.38) виражаються таким чином:

$$\varepsilon_z = w' - u''x - v''y + \theta''\varphi + \theta'\tau_0\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(\eta-\eta_u) - \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(\xi-\xi_u)\right]$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{xy} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \theta'\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\cos\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\sin\alpha - (y-y_u)\right];\ \gamma_{xz} = \theta'\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\sin\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\cos\alpha + (x-x_u)\right], \qquad (2.39)$$

де ξ,η – головні центральні осі перерізу; $\alpha(z)$ – кут закрутки (див. Рис.2.1); $\tau_0 = \alpha'$.

У роботах [35, 36] для стрижня подовженого поперечного перерізу приймається:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(\eta-\eta_u) - \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(\xi-\xi_u) = (\xi-\xi_u)^2 + (\eta-\eta_u)^2 = r_1^2. \qquad (2.40)$$

Потенційна енергія деформації стрижня виражається інтегралом:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L \iint_{F(z)} \left[E\varepsilon_z^2 + G\left(\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right)\right] dF(z)dz,$$

де *E*, *G* – модулі пружності матеріалу при розтягуванні та зсуві.

Підставляючи в цю формулу значення деформацій (2.39), з урахуванням (2.40) та інтегруючи за *F(z)*, отримуємо:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L \Big\{E\Big[F(w')^2 + J_x(v'')^2 + J_y(u'')^2 + 2J_{xy}u''v'' + J_\varphi(\theta'')^2 +$$

$$+ 2\tau_0\theta'\left(J_p w' - J_{yr}u'' - J_{xr}v''\right) + \tau_0{}^2 J_r(\theta')^2\Big] + GJ_d(\theta')^2\Big\}dz, \qquad (2.41)$$

де $J_x = \int_F y^2 dF$, $J_y = \int_F x^2 dF$, $J_{xy} = \int_F xy dF$, $J_\varphi = \int_F \varphi^2 dF$, $J_p = \int_F r_1^2 dF$, $J_{xr} = \int_F y r_1^2 dF$, $J_{yr} = \int_F x r_1^2 dF$, $J_r = \int_F r_1^4 dF$; J_d – геометрична жорсткість на кручення незакрученого стрижня.

Зауважимо, що в остаточному виразі (2.41) для енергії деформації опущені деякі доданки. Як показано в роботах [35, 36], вони не роблять істотного внеску у величину П. Робота відцентрових сил A_C визначається виразом:

$$A_C = \rho\Omega^2 \int_0^L \left[\theta J_{xy} + w(R+z)F\right] dz \ , \tag{2.42}$$

де R – радіус вітроколеса.

Варіаційне рівняння пружної рівноваги отримано на основі принципу можливих переміщень Лагранжа:

$$\delta\Pi - \delta A_C - \delta A = 0, \tag{2.43}$$

де A – робота розподілених аеродинамічних навантажень.

Під час чисельної реалізації для розв'язання задачі (2.43) застосовано МСЕ [38], використано двовузловий елемент із кубічною апроксимацією нормальних переміщень u, v і лінійною апроксимацією осьового переміщення w. Для пружного розрахунку застосовано 96 скінченних елементів.

У межах запропонованого підходу можна дослідити можливість виникнення флаттера за методом, запропонованим у [39, 40]. При цьому рівняння (2.8) внаслідок урахування швидкості потоку, що набігає, набудуть вигляду:

$$L_1(\mathbf{u}) + \lambda^2 M_1(\mathbf{u}) + \lambda M_2(\mathbf{u}) = 0; \quad M_1(\mathbf{u}) = H(\mathbf{u}); \quad M_2(\mathbf{u}) = V_0 \frac{\partial}{\partial l} H(\mathbf{u}), \tag{2.44}$$

де $H(\mathbf{u})$ визначено в (2.36).

Застосовуючи метод заданих форм і помноживши скалярно обидві частини отриманої рівності на $\mathbf{u}_k$, приходимо до проблеми дослідження коренів характеристичного рівняння відносно λ. Встановлено , що за $V_0 \le 10$ м/сек дійсні частини коренів характеристичного рівняння негативні, тобто має місце відсутність флаттера.

2.5 Висновки за розділом

У цьому розділі було наведені математичні моделі суцільного середовища, що містять основні рівняння механіки деформованого твердого тіла та основні рівняння для розрахунку руху ідеальної нестисливої рідини (газу). Розглянуто двобічний контакт елементу конструкції з рідиною. Сформульовано задачу оптимального проектування лопаті повітряної установки. Визначено тиск газу на лопать за допомогою інтегральних рівнянь. Для цього розв’язано гіперсингулярне інтегральне рівняння за допомогою методу граничних елементів. Після цього визначено напружено-деформований стан лопаті під дією заданих навантажень.

3. МЕТОДИ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ РІДИНИ

При розв’язанні крайових задач механіки рідини найбільш привабливим є розв’язок гіперсинлулярних інтегральних рівнянь, оскільки вони дають можливість суттєво зменшити розмірність задачі, що розв’язується. Це відбувається за рахунок того, що основні невідомі розподілені лише на межі області, що охоплює рідину. В точках в середині області невідомі розраховуються шляхом використання інтегральних тотожностей.

3.1 Методи сингулярних інтегральних рівнянь

Методи сингулярних інтегральних рівнянь застосовуються при розв’язанні задач гідропружності при однобічному контакті елементу конструкції та рідини. Наприклад, це може бути рідина, яка заповнює резервуар для збереження пального, питної води, палива, нафти.

Треба знайти праву частину в співвідношенні, яке описує динаміку елементу конструкції при взаємодію з рідиною [41]:

$$[\mathbf{M}][\ddot{\mathbf{c}}]+[\mathbf{K}][\mathbf{c}]=\{\tilde{\mathbf{f}}_{pr}\} \tag{3.1}$$

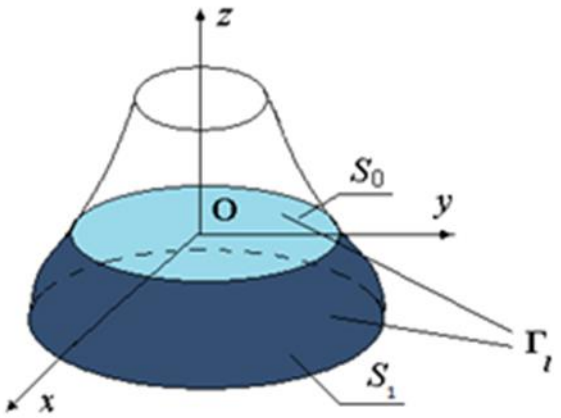


Рис.3.1. Оболонка з рідиною (однобічний контакт)

Якщо розглядається однобічний контакт елементу конструкції з рідиною (Рис. 3.1), то в рівнянні (3.1) при обчисленні $\{\tilde{\mathbf{f}}_{pr}\}$ треба використовувати саме тиск p. Ця функція задовольняє рівнянню Лапласа, для якого треба сформулювати граничні умови. Відзначимо, що в цьому випадку поверхня розрахункової області складається з двох поверхонь: змоченої поверхні σ та вільної поверхні S_0. На зволоженій поверхні ставимо умову непротікання, а саме:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\sigma} = -\rho_l\left(\ddot{\mathbf{u}}^e, \mathbf{n}\right) = -\rho_l \sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k(t)\left(\mathbf{u}_k, \mathbf{n}\right) \tag{3.2}$$

Спочатку розглянемо задачу, де не враховується сила тяжіння, тобто на вільній поверхні не відбувається хвилеутворення. Тоді динамічна гранична мова, що полягає в рівності тиску рідини на вільній поверхні, приймає вигляд:

$$p\big|_{S_0} = 0 \tag{3.3}$$

Таким чином, маємо мішану крайову задачу, (3.2),(3.3) для рівняння Лапласа. Тоді найбільш прийнятним є використання методу граничних елементів у прямому формулюванні [42] з використанням другої тотожності Гріна:

$$2\pi p(\mathbf{P}_0) = \iint_S \frac{\partial p(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} dS - \iint_S p(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} dS, \quad S = \sigma \cup S_0 \tag{3.4}$$

Функція $p(\mathrm{P}_0)$ описана рівнянням (3.4). Застосуємо до рівняння (3.4) граничні умови (3.2) та (3.3). Приходимо до такої системи сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\begin{gathered} 2\pi p(\mathbf{P}_0) + \iint_{\sigma} p(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} d\sigma - \iint_{S_0} q(\mathbf{P}) \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} dS_0 = \rho_l \iint_{\sigma} \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} \sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k(t)\left(\mathbf{u}_k, \mathbf{n}\right) d\sigma, \quad \mathbf{P}_0 \in \sigma, \\ \iint_{\sigma} p(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} d\sigma - \iint_{S_0} q(\mathbf{P}) \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} dS_0 = \rho_l \iint_{\sigma} \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} \sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k(t)\left(\mathbf{u}_k, \mathbf{n}\right) d\sigma, \quad \mathbf{P}_0 \in S_0. \end{gathered} \tag{3.5}$$

З лінійності інтегральних операторів, що фігурують в рівняннях (3.5), отримуємо:

$$p(\mathbf{P})=\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k(t)p_k(\mathbf{P}),\quad q(\mathbf{P})=\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k(t)q_k(\mathbf{P}) \tag{3.6}$$

Введемо інтегральні оператори:

$$\mathbf{A}(\sigma_1,\sigma_2)f(\mathbf{P})=\iint\limits_{\sigma_1}\frac{f(\mathbf{P})}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|}d\sigma_1,\quad \mathbf{P}_0\in\sigma_2,\quad \mathbf{B}(\sigma_1,\sigma_2)f(\mathbf{P})=\iint\limits_{\sigma_1}f(\mathbf{P})\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|}d\sigma_1,\quad \mathbf{P}_0\in\sigma_2 \tag{3.7}$$

Тоді з рівнянь (3.6) з використанням (3.7) будемо мати:

$$2\pi\mathbf{I}p_k(\mathbf{P}_0)+\mathbf{B}(\sigma,\sigma)p_k(\mathbf{P})-\mathbf{A}(S_0,\sigma)q_k(\mathbf{P})=\rho_l\mathbf{A}(\sigma,\sigma)(\mathbf{u}_k,\mathbf{n}), \tag{3.8}$$

$$\mathbf{B}(\sigma,S_0)p_k(\mathbf{P})-\mathbf{A}(S_0,S_0)q_k(\mathbf{P})=\rho_l\mathbf{A}(\sigma,S_0)(\mathbf{u}_k,\mathbf{n}).$$

Припустимо, що на поверхнях σ,S_0 розташовано M_1,M_2 граничних елементів, відповідно. Введемо такі матриці та вектори:

$$\{\mathbf{q}\}_{i=1}^{M_2}=\{q_k(\mathbf{P}_i)\},\quad \{\mathbf{p}\}_{i=1}^{M_1}=\{q_k(\mathbf{P}_i)\},\quad \{\mathbf{u}\}_{i=1}^{M_1}=\{\mathbf{u}_k(\mathbf{P}_i),\mathbf{n}\},\quad \{\mathbf{A}_{21}\}_{i=1,j=1}^{M_2,M_2}=\mathbf{A}(S_0,\sigma),$$

$$\{\mathbf{A}_{11}\}_{i=1,j=1}^{M_1,M_1}=\mathbf{A}(\sigma,\sigma),\{\mathbf{A}_{22}\}_{i=1,j=1}^{M_2,M_2}=\mathbf{A}(S_0,S_0),\quad \{\mathbf{B}_{11}\}_{i=1,j=1}^{M_1,M_1}=\mathbf{B}(\sigma,\sigma),\quad \{\mathbf{B}_{12}\}_{i=1,j=1}^{M_1,M_2}=\mathbf{B}(\sigma,S_0).$$

Отримаємо дискретну форму співвідношень (3.8):

$$(2\pi\{\mathbf{I}\}+\{\mathbf{B}_{11}\})\{\mathbf{p}\}-\{\mathbf{A}_{21}\}\{\mathbf{q}\}=\rho_l\{\mathbf{A}_{11}\}\{\mathbf{u}\}, \tag{3.9}$$

$$\{\mathbf{B}_{12}\}\{\mathbf{p}\}-\{\mathbf{A}_{22}\}\{\mathbf{q}\}=\rho_l\{\mathbf{A}_{12}\}\{\mathbf{u}\} \tag{3.10}$$

Зі співвідношення (3.10) здобудемо:

$$\{\mathbf{q}\}=\rho_l\{\mathbf{A}_{22}\}^{-1}\{\mathbf{A}_{12}\}\{\mathbf{u}\}-\{\mathbf{A}_{22}\}^{-1}\{\mathbf{B}_{12}\}\{\mathbf{p}\}$$

і підставимо отриману рівність в співвідношення (3.10). Знайдемо:

$$\left[(2\pi\{\mathbf{I}\}+\{\mathbf{B}_{11}\})+\{\mathbf{A}_{21}\}\{\mathbf{A}_{22}\}^{-1}\{\mathbf{B}_{12}\}\right]\{\mathbf{p}\}=\rho_l\left(\{\mathbf{A}_{11}\}+\{\mathbf{A}_{21}\}\{\mathbf{A}_{22}\}^{-1}\{\mathbf{A}_{12}\}\right)\{\mathbf{u}\}$$

Введемо позначення:

$$\{\mathbf{G}\}=\left[(2\pi\{\mathbf{I}\}+\{\mathbf{B}_{11}\})+\{\mathbf{A}_{21}\}\{\mathbf{A}_{22}\}^{-1}\{\mathbf{B}_{12}\}\right]^{-1}\left(\{\mathbf{A}_{11}\}+\{\mathbf{A}_{21}\}\{\mathbf{A}_{22}\}^{-1}\{\mathbf{A}_{12}\}\right) \tag{3.11}$$

та отримаємо:

$$\{\mathbf{p}\} = \rho_l \{\mathbf{G}\}\{\mathbf{u}\}$$

З використанням першої з рівностей в (3.6) знаходимо вираз для тиску рідини на змочені поверхні елементу конструкції:

$$\left\{\tilde{\mathbf{f}}_{pr}\right\} = -\rho_l [\mathbf{H}][\ddot{\mathbf{c}}], \quad [\mathbf{H}] = \{\mathbf{G}\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l\},$$

де матриця **G** визначається формулою (3.11).

Таким чином побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь для розв'язання крайової задачі з механіки рідини при однобічному контакті.

3.2 Методи гіперсингулярних інтегральних рівнянь

Гіперсингулярні інтегральні рівняння знаходять застосування в механіці суцільного середовища, в яких є розриви суцільності. Це може бути тріщини, а також тонкі поверхні, які знаходяться в рідини або в газі. Ці задачі хоча і мають різну фізичну природу, з точки зору математики описуються схожими диференціальними рівняннями.

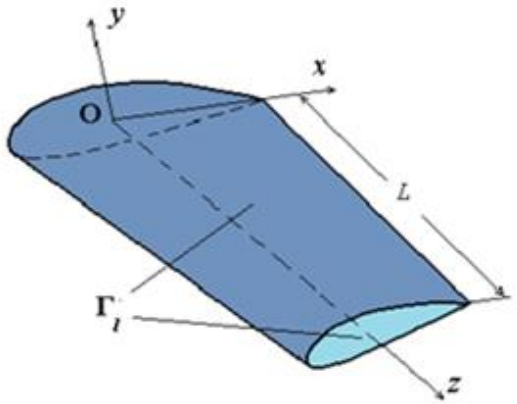


Рис.3.2. Двобічний контакт елемента конструкції з рідиною

Якщо вивчається двобічний контакт елементу конструкції з рідиною, то на змочених поверхнях розглядається перепад тиску. Як було зазначено вище, тиск задовольняє рівнянню Лапласа. Для однозначного розв'язку цього рівняння треба сформулювати граничні умови. Вважаємо, що елемент конструкції досить тонкий, тому згідно з [16], вважаємо, що граничні умови можна задавати на серединній поверхні елементу, що розглядається. Сформулюємо граничну умову непротікання, яка для нев'язкої рідини полягає у рівності нормальних складових швидкостей рідини та конструктивного елементу, тобто:

$$\left(\ddot{\mathbf{u}}^e, \mathbf{n}\right) = \left(\mathbf{V}_f, \mathbf{n}\right).$$

З умови непротікання здобудемо:

$$\frac{\partial p^{\pm}}{\partial \mathbf{n}} = -\rho_l \left(\ddot{\mathbf{u}}^e, \mathbf{n}\right) = -\rho_l \sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k(t) \left(\mathbf{u}_k, \mathbf{n}\right) \tag{3.12}$$

Нормальна похідна від тиску має бути неперервною, але ж на поверхні елементу тиск має перепад, при чому функція, що описує тиск, є гармонічною.

Крім того, вказана гармонічна функція має задовольняти умові Зоммерфельда на нескінченності, а саме:

$$\nabla p\big|_{\infty} = 0 \ .$$

Як відомо, такі властивості має потенціал подвійного шару [43]:

$$p(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} dS, \quad \mathbf{P} \in S, \tag{3.13}$$

де S – область, зайнята елементом конструкції; n – одинична нормаль до поверхні S; P і P_0 – точки тривимірного простору з координатами (x, y, z) та (x_0, y_0, z_0), відповідно; $|\mathrm{P} - \mathrm{P}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ – декартова відстань між P і P; $\Gamma(\mathbf{P})$ – густина потенціалу задана на поверхні S.

Функція, що визначена формулою (3.13), задовольняє рівнянню Лапласа, має неперервну нормальну похідну, а при перетині поверхні S вздовж нормалі має скінченний розрив, а саме [43]:

$$p^{+}(\mathbf{P}_0) - p^{-}(\mathbf{P}_0) = \Gamma(\mathbf{P}_0), \quad \mathbf{P}_0 \in S .$$

Тому використовуємо (3.12) для визначення тиску. Зауважимо, що для визначення перепаду тиску треба знайти невідому густину $\Gamma(\mathbf{P})$ на поверхні пластини. Треба задовольнити граничну умову (3.12). Це призводить до інтегрального рівняння у вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0}\frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma(\mathbf{P})\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} = -\rho_l(\mathbf{u}^e, \mathbf{n}), \quad \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 \in S \tag{3.14}$$

З рівняння (3.14) бачимо, що функція $\Gamma(\mathbf{P})$ може бути подана у вигляді такого ряду:

$$\Gamma(\mathbf{P}) = \sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k(t)\Gamma_k(\mathbf{P}), \tag{3.15}$$

де функції $\Gamma_k(\mathbf{P})$ задовольняють таким гіперсингулярним рівнянням:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0}\frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma_k(\mathbf{P})\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} = -\rho_l(\mathbf{u}_k, \mathbf{n}), \quad \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 \in S$$

Якщо ввести позначення для оператору, що дає розв’язки означених гіперсингулярних рівнянь у вигляді:

$$\Gamma_k(\mathbf{P}) = -\rho_l \mathbf{H}_k(\mathbf{u}_k),$$

то отримаємо вираз для матриці приєднаних мас для рівняння (3.12):

$$\{\tilde{\mathbf{f}}_{pr}\} = -\rho_l[\mathbf{H}][\ddot{\mathbf{c}}], \quad [\mathbf{H}] = \{\mathbf{H}\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l\} \tag{3.16}$$

Таким чином, отримані рівняння для визначення частот та форм вільних коливань елементу конструкції при двобічному контакті з рідиною – диференціальні рівняння (3.12), в яких $\{\tilde{\mathbf{f}}_{pr}\}$ обчислюється за формулою (3.16).

Зауважимо, що для обчислення перепаду тиску рідини використовується непряме формулювання методу граничних елементів.

3.3 Методи граничних елементів

Спочатку розглянемо одновимірні рівняння для того щоб з'ясувати кількість необхідних граничних елементів та тип апроксимації густини. Розглядається сингулярне інтегральне рівняння виду:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\gamma(t)}{t-x}dt = f(x), \tag{3.17}$$

в якому інтеграл розуміється в сенсі головного значення Коші, а функція *f(x)* задовольняє умові Гельдера [43]. Аналітичний розв'язок рівняння (3.17) має вигляд:

$$\gamma(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{l^2-x^2}}\left[-\int_{-l}^{l}\frac{f(t)\sqrt{l^2-t^2}}{t-x}dt + C_1\right], \tag{3.18}$$

де C_1 – постійна, що однозначно визначається з додаткових умов, що накладаються на функцію $\gamma(x)$.

Зазвичай відомо значення інтеграла від $\gamma(x)$ у межах від $-l$ до l. Тоді з (3.18) знаходимо, що:

$$C_1=\int_{-l}^{l}\gamma(x)dx, \tag{3.19}$$

оскільки має місце рівність:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{dt}{\sqrt{l^2-t^2}(t-x)}=0, |x|<l$$

Постійну C_1 можна обрати так, щоб розв'язок (3.18) був або необмеженим у точках $x=\pm l$, або обмеженим на одному з кінців відрізка $x<l$. Необмежений на обох

кінцях інтервалу розв'язок відповідає випадку безциркуляційного, а обмежений на одному з кінців – циркуляційного обтікання крила нескінченного розмаху.

Рівняння (3.17), що є одним із найпростіших сингулярних рівнянь, відіграє важливу роль у теорії крила, контактних задачах, теорії тріщин; йому присвячено багато публікацій. Одна з перших бібліографій цих робіт наведена у книзі Н.І. Мусхелішвілі [44].

Шукатимемо розв'язок рівняння (3.17), необмежений на обох кінцях відрізка інтегрування. Наслідуючи ідеологію методу граничних елементів [42, 43], розділимо відрізок $[-l, l]$ на ряд граничних елементів, на кожному з яких невідома густина $\gamma(t)$ є постійною величиною γ_i. Оберемо контрольні точки у центрах елементів. Приходимо до СЛАР щодо невідомих γ_i (i=1,2,..., N):

$$\sum_{i=1}^{N-1} a_{ij}\gamma_i = f(x_{0j}), \quad j = 1, 2, ..., N-1, \qquad \sum_{i=1}^{N} \gamma_i = 0, \tag{3.20}$$

де N – число граничних елементів; x_i (i=1,2,..., N+1) – кінці граничних елементів; x_{j0} (j=1,2,..., N) – контрольні точки (центри граничних елементів).

Елементи матриці розв'язувальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь обчислюються за формулою:

$$a_{ij} = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{x_{i+1} - x_{0j}}{x_i - x_{0j}} \right|; \quad i, j = 1,2,...N$$

Друге рівняння (3.20) є дискретним записом додаткової умови (3.19) при C_1=0. На Рис.3.3 представлені чисельні результати, отримані при рівномірній розбивці інтервалу N=20 елементів.

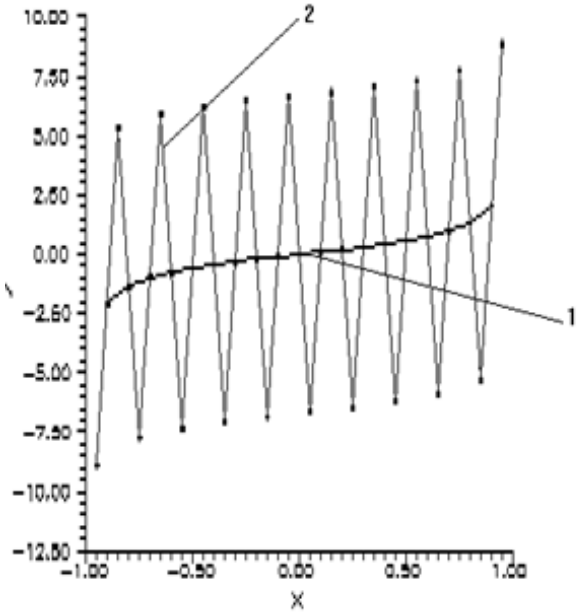


Рис.3.3. Розбіжність методу граничних елементів

Права частина (3.17) приймалася рівною $f(x)$=1, постійна C_1=0. Цифрою 1 позначено аналітичний розв'язок рівняння (3.17), цифрою 2 – чисельний розв'язок. Проаналізуємо причини розбіжності методу граничних елементів. Аналітичне обчислення інтеграла (3.17) у точці x дає:

$$g(s) = \frac{1}{\pi}\gamma(x_{ci})\ln\left|\frac{1-s}{1+s}\right|, \quad s = \frac{x_{ci} - x}{0.5\Delta x},$$

де x_{ci} – центр елемента [x_i, x_i + 1]; Δx – довжина граничного елемента [x_i, x_i+1].

На Рис.3.4 цифрами 1 і 2 позначені графіки функцій, що являють собою густину і відгук з точністю до постійного множника $\gamma(x_{ci})/\pi$.

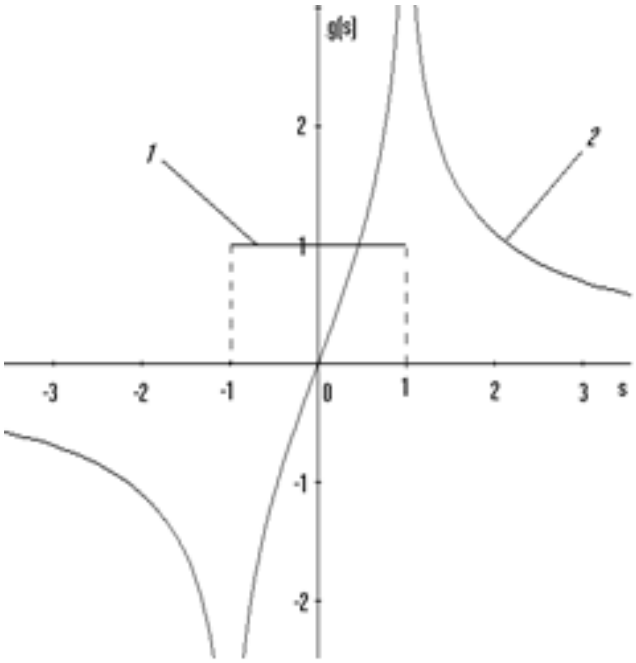


Рис.3.4. Густина та відгук при постійній апроксимації

Якщо контрольні точки розташовувати в центрах граничних елементів, відгук у цих точках дорівнює 0. При цьому дорівнюють нулю всі елементи головної діагоналі в матриці методу граничних елементів, тобто матриця погано обумовлена. Так само погано розташовувати контрольні точки поблизу кінців елементів, оскільки у цих точках відгук прагне нескінченності, що також призводить до погано обумовленої матриці СЛАР.

Результати розрахунку при N=30 на відстані $0.707\Delta x$ від центру граничного елемента представлені на Рис.3.5.

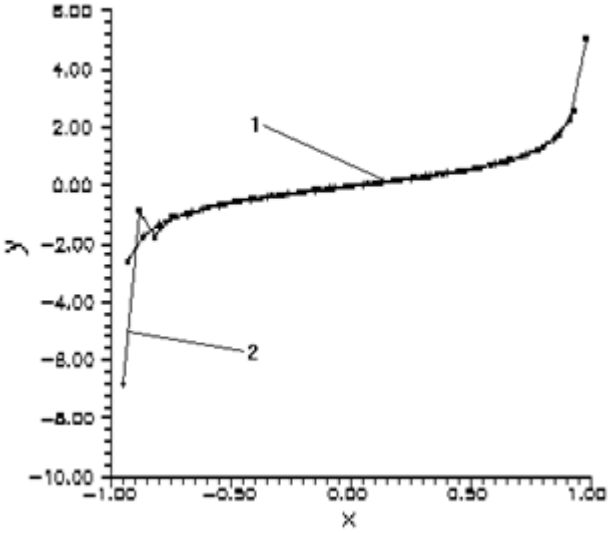


Рис.3.5. Вибір контрольної точки

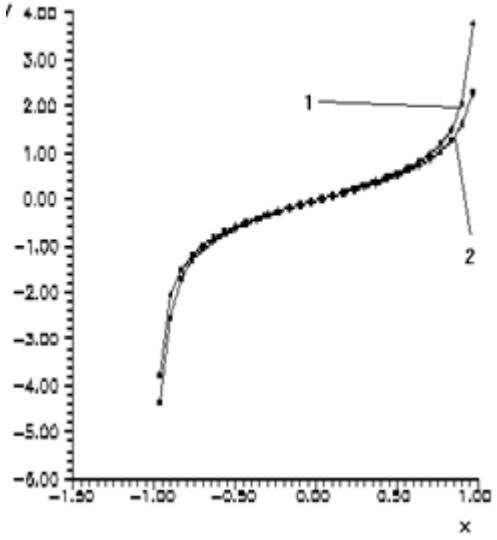


Рис.3.6. Розрахунок методом дискретних вихорів

Якщо вибрати контрольну точку з відстанню $\sqrt{2}/2 \approx 0.707\,\Delta x$ від центру граничного елемента, отримуємо непогане узгодження з аналітичним розв'язком у середині відрізка інтегрування [$-l$, l]. Однак на кінцях цього відрізка має місце осциляція. Розрахунок методом дискретних особливостей [20] при N=30 представлений на Рис.3.6. Цифрами 1 і 2 на Рис.3.5 та 3.6 позначені аналітичний

та чисельний розв’язки рівняння (3.17). Зазначимо, що метод граничних елементів дає більш точні результати всередині області інтегрування, а метод дискретних особливостей призводить до однакової похибки всередині області та на її краях. Проте точність розв’язку як і в одному, так і на іншому випадках невелика. При використанні методу граничних елементів маємо два–три правильних знаки для точок у середині області. Метод дискретних вихорів дає лише один правильний знак. У табл.3.1 для порівняння представлені результати аналітичного та чисельних розв’язків.

Таблиця. 3.1

Порівняння аналітичного та чисельних розв’язків

Аналітичний розв’язок	Метод дискретних вихорів	Метод граничних елементів
2.6940795304016	-2.3779583370097	-0.432958334563
-1.8073922282301	-1.6918588823970	-1.53768958882452
-1.1338934190276	-1.0941995448152	-1.14765094199541
-5.773502691892E-001	-5.654525043593E-001	-5.775452505673E-001
-4.865336327991E-001	-4.772258724734E-001	-4.866239874437E-001
-2.581988897472E-001	-2.539321664557E-001	-2.589783214567E-001
-1.908854288923E-001	-1.878196497454E-001	-1.908996495611E-001
-5.262242910855E-002	-5.164794107583E-002	-5.264791244771E-002
0.000000000000E+000	-2.289292887203E-016	-1.33772227203E-016

Тепер апроксимуватимемо густину на кожному елементі лінійною функцією, задовольняючи вимогу безперервності у вузлах елементів. При інтегруванні

частинами позаінтегральні члени скоротяться у вузлах, а інтеграли, що залишилися, матимуть більш слабкі особливості, ніж вихідний інтеграл. Тому, якщо діяти формально, при використанні лінійних елементів можна отримати матрицю, яка буде гірше обумовлена, ніж при використанні елементів постійної густини.

На Рис.3.7 дано графіки густини та відгуку (цифри 1 та 2).

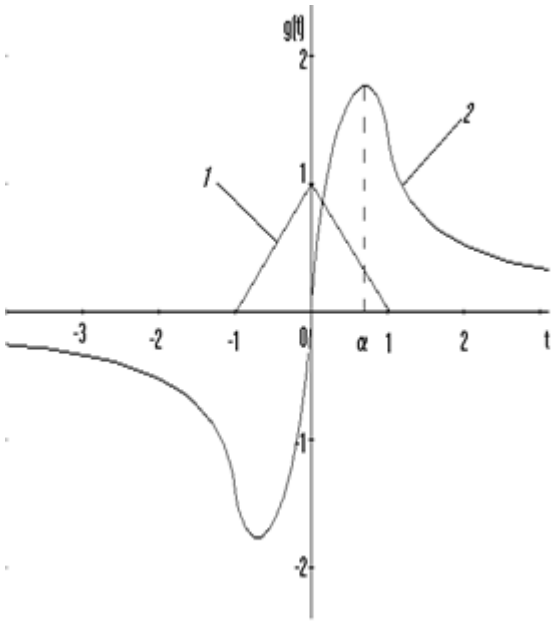


Рис.3.7. Функція форми та відгук при лінійній апроксимації

Інтеграл від функції, позначеної на малюнку цифрою 1, з точністю до постійного множника має вигляд:

$$g(t)= (t+1)\ln|t+1|-2t\ln|t|+(t-1)\ln|t-1, \qquad (3.21)$$

де $t=(xi-x)/\Delta x$.

Функція $g(t)$, визначена формулою (3.21), у точці набуває $t=\sqrt{2/2}$ максимального значення. Саме такі точки на кожному елементі бралися як контрольні x_{0i}. Зазначимо, що вибір інших точок як контрольних може призвести не тільки до менш точних результатів, а й до нестійкості розрахунку. Це пов'язано

з погіршенням обумовленості матриці системи. У разі використання лінійних елементів рівняння (3.17) зводиться до СЛАР (3.20), елементи матриці в якій обчислюються за формулами:

$$a_{ij} = \frac{1}{\pi\Delta x}\left[(s+1)\ln|s+1| - 2s\ln|s| + (s-1)\ln|s-1|\right]; s = x_i - x_{0j}; i = 1,...N; j = 1,...,N+1;$$

$$a_{N+1,j} = \Delta x; j = 1,...,N+1.$$

Для врахування характеру поведінки густини на кінцях інтервалу інтегрування введемо функції форми:

$$f_1(t)=\gamma_1/\sqrt{(t+1)}; \qquad f_N(t)=\gamma_N/\sqrt{(t+1)}$$

При цьому в матриці системи рівнянь (3.20) елементи першого і N-рядків являють собою аналітично обчислені значення інтегралів від $f_1(t)$ і $f_N(t)$.

У табл.3.2 представлені чисельні результати, отримані для лінійної апроксимації густини з урахуванням і без урахування характеру поведінки густини на кінцях інтервалу. Результати порівнюються з аналітичним розв'язком.

Таблиця 3.2

Порівняння аналітичного та чисельного розв'язку при лінійній апроксимації густини

Аналітичний розв'язок	Без врахування асимптотики	З врахуванням асимптотики
-1.807392228230128	-1.881457589977357	-1.783072279249442
-1.393746295289133	-1.445406822638564	-1.388980305480974
-1.133893419027682	-1.166859449435333	1.131967996688785
-8.006407690254357E-001	-8.178550130357992E-001	-8.004282181008811E-001
-5.803360514166090E-001	-5.934731295119865E-001	-5.803389762904504E-001

Аналітичний розв’язок	Без врахування асимптотики	З врахуванням асимптотики
-5.773502691896257E-001	-5.875658067720892E-001	-5.774458639349699E-001
-4.045199174779452E-001	-4.108093251269282E-001	-4.046539648592604E-001
-3.289758474798845E-001	-3.338578594752895E-001	-3.290989247543255E-001
-1.259881576697424E-001	-1.277082368046349E-001	-1.260426754218610E-001
-5.262242910851495E-002	-5.346772888111379E-002	-5.264992919449451E-002
0.000000000000000E+000	3.655116573991757E-017	2.551635931626745E-016

З наведеної таблиці видно, що урахування асимптотичної поведінки шуканої густини на кінцях інтервалу призводить до значного поліпшення результатів.

3.4 Висновки за розділом

У цьому розділі розглянуто застосування методів теорії потенціалу до розв’язання крайових задач механіки суцільного середовища. При цьому використовується фундаментальні та сингулярні розв’язки диференціальних рівнянь, до яких зводяться крайові задачі. Якщо розглядається однобічний контакт рідини з пружнім елементом, то крайова задача зводиться до сингулярного інтегрального рівняння. Якщо контакт з рідиною двобічний, то задача зводиться до гіпенсингулярного рівняння. Метод граничних елементів застосовується до інтегральних рівнянь обох типів. Розглянуто тестову задачу для одновимірного сингулярного рівняння. При використанні методу граничних елементів застосовані різні типи апроксимації густини. Проведено порівняння з аналітичним розв’язком та зроблено висновки відносно ефективності застосування граничних елементів з різними типами апроксимації.

4. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У цьому розділі наведені основні методи нелінійного програмування та зроблено аналіз їх ефективності.

4.1 Методи нелінійного програмування в задачах безумовної оптимізації

Задача безумовного пошуку полягає в знаходженні мінімуму або максимуму функції за відсутності будь-яких обмежень. Не дивлячись на те, що більшість задач оптимізації містить обмеження, вивчення методів безумовної оптимізації дозволить надалі зводити до них задачі оптимізації з обмеженнями. Інший клас методів базується на пошуку правильного напрямку і подальшої мінімізації вздовж цього напрямку.

Задачею багатомірної оптимізації є мінімізація функції $f(x)$ (де $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ від n змінних). Якщо на параметри $x_1, x_2, ..., x_n$ немає обмежень, то говорять про глобальну безумовну мінімізацію.

Задачі безумовної багатомірної оптимізації представляють собою математичну модель оптимізації, в якій цільова функція $f(x) \to \min$, залежить від декількох змінних $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, а на змінні $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}) \in E^n$ не накладаються ніякі обмеження.

Якщо функція $f(x)$ неперервна і диференційована, то існує її градієнт, що визначається як вектор-стовпчик, що складається із перших частинних похідних $f(x)$ по кожній із змінних. Необхідними умовами того, що x^* – точка локального мінімуму, є:

1) функція $f(x)$ диференційована в точці x^*;

2) $\nabla f(x) = 0$, тобто існує стаціонарна точка в x^*.

Достатньою умовою того, що x^* – локальний мінімум задачі, є $\nabla^2 f(x) > 0$, тобто матриця Гессе визначена додатною. Відповідні умови для максимуму ті ж,

за виключенням того, що матриця Гессе повинна бути визначеною від'ємною. Можливе існування мінімуму, який не задовольняє необхідним та достатнім умовам, однак, якщо всі достатні умови задовольняються, x^* обов'язково буде точкою мінімуму.

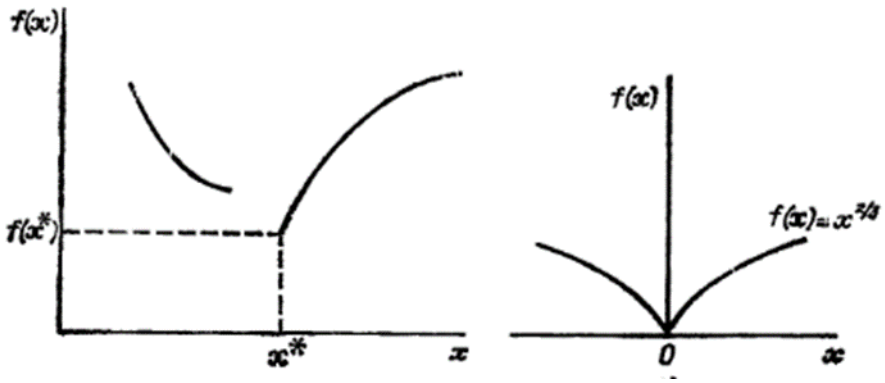


Рис.4.1. Геометричне представлення функції в задачі нелінійного програмування

Градієнтним методом (методом найшвидшого спуску) можна вирішити будь-яку нелінійну задачу. Однак при цьому знаходиться лише локальний екстремум. Тому доцільно застосовувати цей метод при розв'язку задач опуклого програмування, в яких будь-який локальний екстремум є одночасно і глобальним. В цілому градієнтні методи дозволяють отримувати точний розв'язок за нескінчену кількість кроків і лише в деяких – за скінчену, тому градієнтні методи відносять до наближених методів розв'язку.

Градієнт цільової функції $f(x)$ в будь-якій точці x – це вектор, направлений в сторону найбільшого локального збільшення $f(x)$. Відповідно, потрібно рухатися в напрямку, протилежному градієнту $f(x)$, тобто в напрямку найшвидшого спуску, оскільки від'ємний градієнт $f(x)$ в точці $x^{(k)}$ направлений в сторону найбільшого зменшення x по всіх компонентах x та ортогональний лінії рівня $f(x)$ в точці $x^{(k)}$ (Рис.4.2). В обчислювальному аспекті градієнтні методи використовують тільки перші похідні цільової функції.

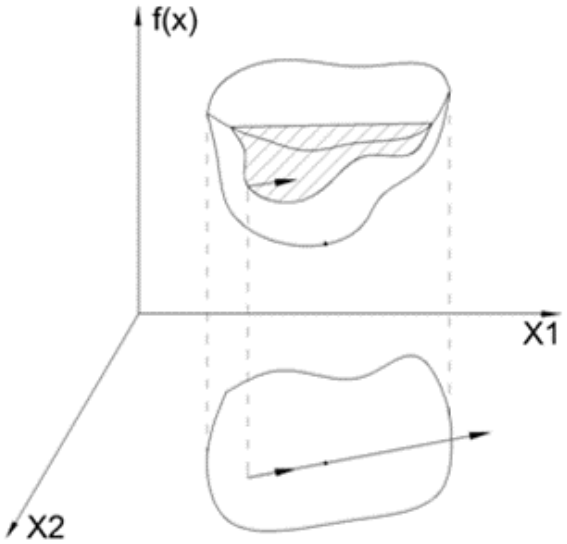


Рис.4.2. Визначення напрямку градієнта

Розглянемо задачу мінімізації нелінійної диференційованої функції $f(x)$. Сенс градієнтного пошуку точки мінімуму x^* полягає в тому, що від довільної початкової точки x_0 за допомогою градієнта, обчисленого в цій точці $\nabla f(x_0)$ визначається напрямок, в якому функція $f(x)$ збільшується з найбільшою швидкістю. Потім, зробивши крок в напрямку, протилежному знайденому, перейти в нову точку x_1 (Рис.4.3).

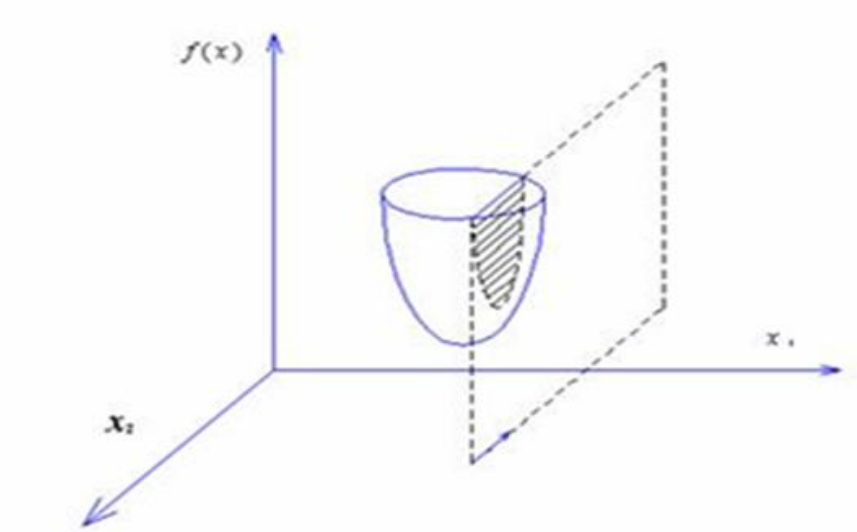


Рис.4.3. Визначення напрямку найшвидшого спуску

Внаслідок процесу переходу до наступної точки в напрямку, протилежному градієнту, будується послідовність точок $x_0, x_1, x_2, ..., x_m$, так щоб вона сходилася в точці мінімуму x^*. Тобто для послідовності виконуються умови: $f(x_0) > f(x_1) > f(x_2) > ... > f(x_m)$.

Якщо шукаємо наближений розв'язок, то пошук можна припинити за наступних умов. Після кожної серії з визначеного числа кроків порівнюють досягнуті значення цільової функції $f(x)$. Якщо після чергової серії змін $f(x)$ не перевищує деяке наперед задане число ε, пошук припиняється і досягнуте значення $f(x)$ розглядається як шуканий наближений мінімум, а x, що йому відповідає приймають за точку мінімуму x^*.

Якщо цільова функція $f(x)$ увігнута (опукла), то необхідною та достатньою умовою оптимальності точки є рівність нулю градієнта в цій точці.

Реалізація методу найшвидшого спуску передбачає розв'язок на кожній ітерації допоміжної задачі одномірної оптимізації. Як правило, метод найшвидшого спуску дає виграш в числі машинних операцій, оскільки забезпечує рух з оптимальним кроком, так як розв'язок задачі одномірної мінімізації пов'язаний з додатковими обчисленнями лише самої функції $f(x)$, тоді як основний час витрачається на обчислення її градієнта $\nabla f(x)$.

Одномірну оптимізацію можна проводити будь-яким методом одномірної оптимізації, що породжує різні варіанти методу найшвидшого спуску.

Розглянемо градієнтний метод (метод найшвидшого спуску) з використанням в якості методу одномірної оптимізації методу дихотомії.

На кожній *k*-тій ітерації відбувається лінійний перехід $x^{(k)} \to x^{(k+1)}$ вздовж прямої $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$ в напрямку, протилежному напрямку градієнта, де в точці $x^{(k+1)}$ досягається мінімальне значення функції $f(x)$.

Тут $\Delta x^{(k)} = \lambda^{(k)} \times e^{(k)}$ – вектор переходу з точки $x^{(k)}$ в $x^{(k+1)}$

$e^{(k)} = -\dfrac{\nabla f(x^{(k)})}{\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\|}$ – одиничний вектор, що задає напрямок руху;

$\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\dfrac{\partial f(x^{(k+1)})}{\partial x_i}\right]^2}$ – норма, довжина вектора;

$\lambda^{(k)}$ – скаляр, що характеризує довжину кроку.

Переміщення з точки $x^{(k)}$ в точку $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$ супроводжується зменшенням функції на величину:

$$\begin{aligned}\Delta x^{(k)} &= f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) = f(x_1^{(k+1)};...; x_n^{(k+1)}) - f(x_1^{(k)};...; x_n^{(k)}) = \\ &= f(x^{(k1)} + \lambda^{(k)}\partial f(x^{(k)})/\partial x_1;...x_n^k + \lambda^{(k)}\partial f(x^{(k)})/\partial x_n) - f(x_1^{(k)};...; x_n^{(k)})\end{aligned} \quad (4.1)$$

З виразу (4.1) видно, що приріст є функцією змінної $\lambda^{(k)}$, тобто $\Delta x^{(k)} = \varphi(\lambda_k)$. При знаходженні мінімуму функції $f(x)$ в напрямку, протилежному напрямку градієнта $\nabla f(x)$ необхідно обирати крок переміщення (скаляр $\lambda^{(k)}$), що забезпечує зменшення приросту функції $\varphi(\lambda^{(k)})$.

Таким чином оптимальна довжина кроку визначається шляхом знаходження мінімуму функції $\varphi(\lambda) = f(x^{(k)} + \lambda^{(k)} \times e^{(k)}) \to \min$ одним із методів одномірної оптимізації.

Отже, алгоритм дій при знаходженні мінімуму функції багатьох змінних за відсутності обмежень та з використанням методу дихотомії, наступний:

1) Обчислити значення функції в заданій точці;

2) Обчислити градієнт функції $\nabla f(x^{(k)})$ в заданій точці $x^{(k)}$;

3) За одним із методів одномірної оптимізації визначити мінімум функції $\varphi(\lambda) = f(x^{(k)} + \lambda^{(k)} \cdot e^{(k)}) \to \min$ і знайти для нього λ. Наприклад, застосувати метод дихотомії:

4) Ділимо відрізок (a,b) навпіл. Тобто на k-му кроці: $\lambda^{(k1)} = \frac{1}{2}\left[a^{(k1)} + b^{(k1)}\right]$, де $k1$ – перша ітерація методу дихотомії;

5) Обчислюємо значення функції $\varphi(\lambda)$ в околі $+/-\varepsilon$ точки $\lambda^{(k1)}$, тобто: $\varphi_1^{(k1)} = f\left[x^{(k)} + (\lambda^{(k1)} - \frac{\varepsilon}{2})\cdot e^{(k)}\right]$ та $\varphi_2^{(k1)} = f\left[x^{(k)} + (\lambda^{(k1)} + \frac{\varepsilon}{2})\cdot e^{(k)}\right]$.

6) Порівнюємо значення функцій $\varphi_1^{(k1)}$ та $\varphi_2^{(k1)}$ і відкидаємо одну половинку відрізка (a,b).

7) Якщо $\varphi_1^{(k1)} > \varphi_2^{(k1)}$, то $a^{(k1+1)} = \lambda^{(k1)}$; $b^{(k1+1)} = b^{(k1)}$.

8) Якщо $\varphi_1^{(k1)} < \varphi_2^{(k1)}$, то $a^{(k1+1)} = a^{(k1)}$; $b^{(k1+1)} = \lambda^{(k1)}$.

9) Критерієм завершення пошуку є $\left[b^{(k1+1)} - a^{(k1+1)}\right] < \varepsilon$, тобто поки довжина відрізку не буде менша заданої точності.

10) Після завершення поділу відрізку обчислюємо значення функції: $\lambda^* = \lambda^{(k)} = \frac{1}{2}\left[a^{(k1+1)} + b^{(k1+1)}\right]$, $f_{\min} = f(x^*)$.

11) Після визначення значення $\lambda^{(k)}$ обчислюємо наступну точку у напрямку, протилежному напрямку градієнта: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} \cdot e^{(k)}$.

12) Обчислити градієнт функції в точці $x^{(k+1)}$;

13) Якщо $\left|\nabla f(x^{(k+1)})\right| \le \gamma$, то припиняємо обчислення, якщо умова не виконується, то перейдемо на крок 3, де γ – це скаляр, що грає роль точності наближення до мінімуму функції $f(x)$;

14) Перейти до пункту 1.

4.2 Методи нелінійного програмування в задачах умовної оптимізації

Необхідно знайти вектор незалежних змінних $\bar{u}$, який належить деякій допустимій області V_u і забезпечує мінімальне (або максимальне) значення оптимізуємої функції $f(\bar{u})$ при виконанні системи нерівностей $g_j(\bar{u}) \geq 0,\ j = \overline{1,m}$ і системи рівностей $h_i(\bar{u}) = 0,\ i = \overline{m+1,s}$.

Таким чином, розв'язання задачі оптимізації зводиться до знаходження оптимального розв'язку $\bar{u}_{опт}$, яке задовольняє системі рівностей і нерівностей і забезпечує мінімальне (або максимальне) значення функції $f(\bar{u})$, яка в даному разі називається критерієм оптимізації.

Математична постановка задачі умовної оптимізації:

Задача умовної оптимізації може бути представлена в наступному вигляді:

$$
\begin{aligned}
&f(\bar{u}) \to \min_{\bar{u} \in Vu},\\
&Vu = \left\{ \bar{u} \in R^n \,\middle|\, g_j(\bar{u}) \geq 0,\ j = \overline{1,m};\quad h_i(\bar{u}) = 0,\ i = \overline{m+1,s} \right\},\\
&\text{де } \bar{u} - \text{вектор незалежних змінних};\\
&\quad f(\bar{u}) - \text{функція, що оптимізується};\\
&\quad g_j(\bar{u}) \geq 0,\ h_i(\bar{u}) = 0 - \text{обмеження типу нерівність і рівність};\\
&\quad \text{функції } f, g_j, h_i - \text{неперервні у всьому просторі } R^n.
\end{aligned}
\qquad (4.2)
$$

Загальна характеристика методів розв'язку:

Існує два основних підходи до розв'язання сформульованої задачі.

Перший полягає у безпосередньому урахуванню обмежень. Цей підхід реалізований у методах лінійного апроксимуючого програмування, можливих напрямків, проекції градієнта. Безпосереднє урахування обмежень може бути виконаний також при використанні методів прямого пошуку.

Другий полягає у зведенні початкової задачі до послідовності задач безумовної оптимізації шляхом використання функцій штрафу. Ці методи носять назви методів штрафних функцій.

Методи ШФ відрізняються простотою реалізації. Важлива їх перевага також у тому, що вони дають у розпорядження дослідника найбагатший математичний апарат безумовної оптимізації.

Штрафна функція $F(\bar{u})$ визначається виразом:

$$F(\bar{u}) = f(\bar{u}) + P(r, g(\bar{u}), h(\bar{u})), \tag{4.3}$$

де $\bar{r}$ – набір штрафних параметрів.

Функція P(.) називається штрафом.

Розрізняють два методи штрафних функцій – метод внутрішньої точки /бар'єрних функцій/ і метод зовнішньої точки.

Перетворена цільова функція може бути представлена в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} 1.F(\bar{u}) &= f(\bar{u}) - r_k \sum_{j=1}^{m1} \ln g_j(\bar{u}) + \frac{1}{r_k} \sum_{i=1}^{m2} h_i^2(\bar{u}). \\ 2.F(\bar{u}) &= f(\bar{u}) + r_k \sum_{j=1}^{m1} \frac{1}{g_j(\bar{u})} + \frac{1}{r_k} \sum_{i=1}^{m2} h_i^2(\bar{u}). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Для безумовної оптимізації використовуються градієнтні методи (наприклад, метод ДФП), або методи прямого пошуку (наприклад, Хука–Джівса). Методом розв’язання задач умовної оптимізації присвячено роботи [45, 46].

4.3 Гібридний адаптивний метод оптимізації

Методи нелінійного програмування становлять один із провідних напрямів сучасної оптимізації, що спрямований на пошук найкращого розв’язку для задач із нелінійною цільовою функцією та/або нелінійними обмеженнями. Цей підхід має широке практичне застосування в різних галузях - від економіки та інженерії

до машинобудування та системного аналізу. Зокрема, задачі нелінійного програмування є ефективним інструментом у випадках, коли необхідно раціонально розподілити ресурси, мінімізувати витрати або підвищити продуктивність виробничих систем [47, 48]. У межах даного дослідження ці методи використовуються для зниження маси лопаті вітротурбіни при збереженні її функціональних характеристик.

Головною метою нелінійного програмування є мінімізація або максимізація цільової функції за наявності, можливо, нелінійних обмежень. На відміну від лінійного програмування, де і ціль, і обмеження описуються лінійними виразами, у нелінійних задачах математична модель значно складніша й потребує спеціалізованих алгоритмів. Серед провідних підходів — градієнтні методи (у тому числі метод найшвидшого спуску), метод Ньютона, метод множників Лагранжа, а також еволюційні та інші стохастичні алгоритми. Нерідко розв’язання таких задач вимагає істотних обчислювальних ресурсів і дбайливого налаштування параметрів алгоритму. Проте прогрес у комп’ютерній техніці й розвиток сучасного програмного забезпечення значно розширили практичні можливості оптимізації нелінійних моделей, підтримуючи безперервний інтерес до цієї тематики.

Для оптимального проектування складних багатопараметричних систем, що розглядаються в цій роботі, доцільно застосувати автоматизований гібридний пошуковий алгоритм [49], розроблений для пошуку локального оптимального вектору X* при наявності умовних екстремумів. Аналіз доступних оптимізаційних процедур показує, що навіть велика бібліотека ефективних методів і діалоговий режим роботи не гарантують досягнення потрібного результату. Необхідний цілісний підхід, здатний поєднати переваги різних алгоритмів і адаптуватися до специфіки конкретної задачі - саме таку роль відіграє згаданий гібридний метод.

Це пояснюється тим, що задача, що розглядається, заздалегідь не має ознак, за якими керуюча програма (або користувач в реальному режимі) змогли б

ідентифікувати обчислювальну ситуацію і призначити найбільш ефективний метод-гібрідієнт.

Ідея методу оптимізації полягає в тому, що обрано низку методів-гібридієнтів M_i (i=1,2….,N), які складають гібридну коаліцію $\{M_i\}$. Заданий критерій, який з'ясовує в процесі вирішення, який із гібридієнтів у цій ситуації найбільш ефективно може використовуватися для досягнення поставленої мети. У критерій ситуації Q входить незалежна від методів інформація, яка характеризує ситуацію, що власне змінюється, а саме ознаки структури та метричні параметри простору, де здійснюється пошук, передісторію обчислювального процесу, за якою встановлюється можливе продовження, природу системи функцій, що визначають вирішуване завдання, і т. д. Далі вводиться керувальна функція $u=u(Q)$,, яка слугує основою для формування адаптивної стратегії активації конкретного гібридієнта з-поміж множини доступних $M_k \epsilon \{M_i\}$, i=1,…k,…s. З метою підвищення загальної ефективності оптимізації порівняно з використанням кожного методу окремо, реалізується спеціальний механізм адаптивного управління. Він забезпечує побудову мінімізувальної послідовності векторів, напрямків пошуку та розмірів кроків, які автоматично коригуються відповідно до поточного стану задачі, що дозволяє оптимізувати процес і підвищити швидкість збіжності до розв’язку.

Колективна робота гібридієнтів забезпечує досягнення мети істотно швидше й ефективніше, ніж застосування кожного з них порізно. Це стає можливим завдяки спеціальній адаптивній системі керування, яка формує мінімізувальну послідовність векторів {X}, напрями пошуку Dir і величини кроків, що автоматично підлаштовуються під поточну ситуацію.

Запропонована гібридна схема оптимізації не потребує попередніх перетворень вихідної задачі та не висуває особливих вимог ані до цільової функції F(X), ані до системи обмежень $G(X) \geq 0$. Ураховуються лише склад обраної коаліції гібридієнтів (див. п. 4.1) і заздалегідь визначений, обмежений набір типових ситуацій, які можуть виникнути у практичних задачах оптимізації.

Побудову гібридної точки на *k*-му етапі процесу визначимо таким чином:

$$X_k^r = \left(U_j^{(i)}\right)\left(X_j^{(i)} V(r)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{N} U_j^{(i)} = \sum_{j=k-r+1}^{N} V_j(r) = 1, \quad j = \overline{k-r+1, k}, \quad k \geq r$$

На кожному етапі процесу здійснюється оновлення матриць шляхом видалення найстарішого (верхнього) рядка та додавання нового (нижнього), при цьому загальна кількість рядків залишається сталою. Обрана глибина пам'яті r у гібридному методі передбачає використання інформації про r попередніх наближень, що дозволяє враховувати передісторію пошукового процесу. Водночас спеціальний стискуючий вектор виконує роль механізму поступового "забування" застарілих даних. Його компоненти змінюються відповідно до певних закономірностей, що відображають перехід від попередніх станів до поточного.

Як показано в [50, 51], запропонований гібридний підхід демонструє вищу ефективність у розв'язанні широкого спектра задач порівняно з використанням окремих гібридієнтів. Розроблена схема гібридної оптимізації для задач нелінійного програмування не потребує попередньої трансформації вихідної задачі та не накладає жорстких вимог на вигляд цільової функції чи систему обмежень. Основу алгоритму становить обрана коаліція гібридієнтів, а також заздалегідь сформований обмежений перелік типових ситуацій, які можуть виникати в реальних умовах оптимізації.

Розглянемо такі пошукові ситуації та їх ознаки:

Стаціонарні пошукові ситуації а) велика розмірність задачі; б) ступінь складності обчислення системи функцій задачі нелінійного програмування; в) наявність обмежень-рівностей; г) наявність обмежень-нерівностей; ґ) загальна кількість обмежень; д) опуклість (або увігнутість) цільової функції й обмежень; е) геометричні особливості допустимої області; є) дискретний чи безперервний

характер функцій тощо. Ці характеристики, як правило, залишаються стабільними в межах конкретної задачі.

2. Динамічні пошукові ситуації а) пологий спуск із поступовою зміною напрямку пошуку; б) різкий (крутий) спуск; в) в) прямолінійний яр із м'яким ухилом; г) вигнутий яр; ґ) спіралеподібний яр; д) еліпсоїдна западина; е) зміна кількості активних обмежень.

Ці ситуації класифікують як динамічні, оскільки вони стаціонарні лише локально: у міру просування до точки екстремуму їхня вираженість у тій самій задачі постійно змінюється.

Відповідно до наведеного переліку умов можна обрати певний набір гібридієнтів; їх кількість не обов'язково має збігатися з числом описаних ситуацій. Вибір конкретних гібридієнтів залишається за користувачем і має спиратися на очікувані сценарії перебігу оптимізації. Бажано, щоб обрані алгоритми були водночас простими у реалізації й достатньо ефективними.

У запропонованій реалізації гібридної оптимізації до складу «гібридієнтів» увійшли такі алгоритми та їхні вдосконалені варіації:

а) покроковий адаптивний градієнтний спуск [51]; б) схема Абрамова [51]; в) яружна модифікація [50]; г) метод паралельних дотичних ПАРТАН [52]; ґ)удосконалений метод ковзного допуску [51]; д) алгоритм січного руху вздовж активної межі [53]; а також кілька додаткових прийомів, орієнтованих на типові ситуації, описані раніше.

Особливу роль відіграє стратегія multistart [54]: із множини допустимих параметрів формують (випадково або детерміновано) підмножину початкових точок, і для кожної з них виконують локальний спуск до найближчого мінімуму за допомогою ефективного локального алгоритму. У нашому адаптивному гібридному підході multistart активується всякий раз, коли алгоритм переходить на нову гіперплощину пошуку (див. рис. 4.4), що істотно підвищує ймовірність знаходження кращого розв'язку.

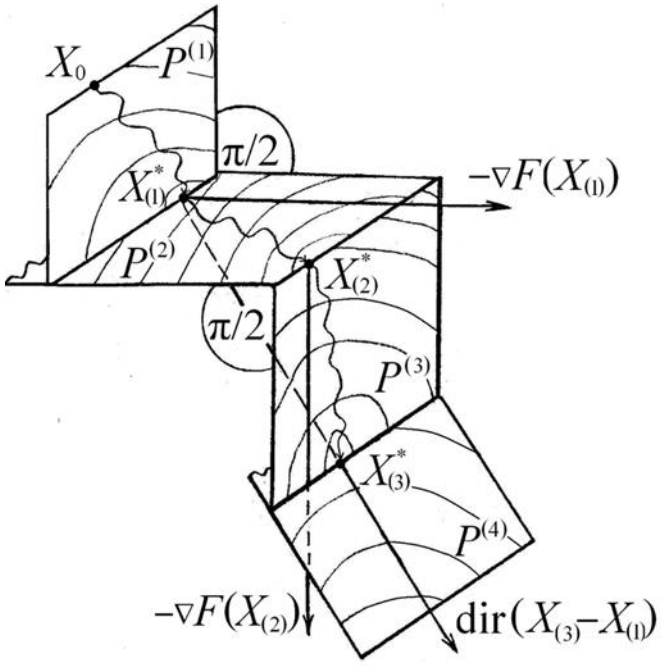


Рис.4.4. Перехід на гіперплощини в просторі пошуку

Використаний гібридний оптимізаційний метод належить до класу локальних пошукових алгоритмів, що ефективно працюють у межах обмежених областей, але не гарантують знаходження глобального екстремуму. Тому для підвищення ймовірності досягнення глобального мінімуму й була використана стратегія multistart. В її межах здійснюється серія локальних спусків, кожен із яких стартує з попередньо сформованої множини початкових точок, рівномірно розподілених по області допустимих значень змінних. Отримані точки локальних мінімумів зазвичай розміщуються поблизу різних ділянок межі допустимої області, однак значення функції у них досить близькі. Це створює умови для обґрунтованого вибору остаточного оптимального варіанту з урахуванням додаткових конструктивних критеріїв.

У підсумку, застосування запропонованої гібридної пошукової стратегії дозволило досягти зменшення маси лопаті повітряної установки, що свідчить про ефективність розробленого підходу до вирішення задачі оптимального проектування.

4.4 Висновки за розділом

У розділі проаналізовано методи умовної та безумовної оптимізації. Приведено основні характеристики гібридного адаптивного методу оптимізації, відзначено, що цей метод є більш ефективним, ніж кожний окремий гібрідієнт, що використовується. Саме цей метод і використано далі для розв’язання задачі зменшення маси лопаті повітряної установки при виконанні геометричних та механічних обмежень.

5. ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

5.1 Числові та аналітичні розв'язки гіперсингулярних рівнянь

У [55] з використанням методу Келдиша-Сєдова [56] отримано аналітичний розв'язок рівняння:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\Gamma(t)}{(t-x)^2}dt = f(x) \tag{5.1}$$

для правої частини у вигляді

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x); \\ f_1(x) &= -\sin(x)\mathrm{ch}\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos(x)\mathrm{sh}\sqrt{1-x^2}; \\ f_2(x) &= -\cos\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{ch}(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{sh}(x) \end{aligned} \tag{5.2}$$

при різних α_1 та α_2. Цей розв'язок має вигляд:

$$\Gamma(x) = \alpha_1\frac{\sin(x)\mathrm{sh}\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \alpha_2\frac{\mathrm{ch}(x)\sin\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \tag{5.3}$$

Для тестування розробленого методу граничних елементів рівняння (5.1) розв'язувалося чисельно з правою частиною у вигляді (5.2) за α_1=3; α_2 =5.

На Рис.5.1 а, б показані графіки правої частини (а) та розв'язків (б) рівняння (5.1). На Рис.5.1 б крива 1 відповідає чисельному розв'язку, отриманому з використанням 40 елементів з постійною апроксимацією густини та урахуванням асимптотичної поведінки на кінцях інтервалу інтегрування; крива 2 – аналітичному розв'язку, побудованому за формулою (5.3).

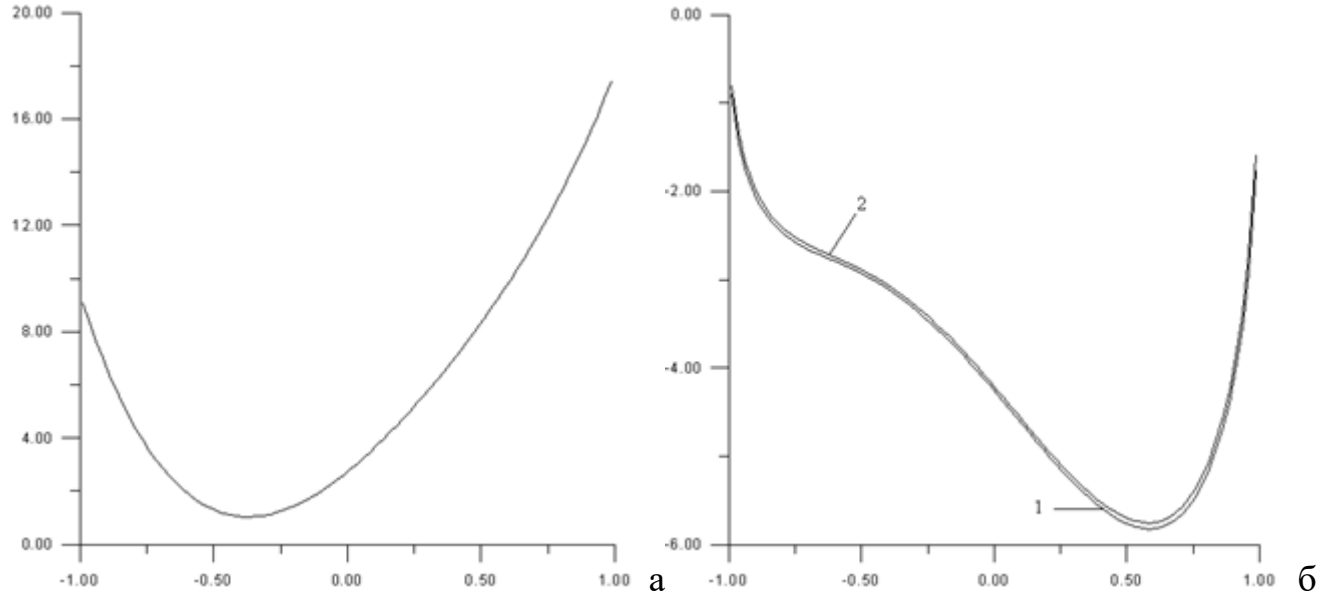


Рис.5.1. Вид правої частини (а) рівняння (5.1), чисельне та аналітичне (б) його розв'язання

У табл.5.1 представлені аналітичний і чисельні розв'язки задачі, що розглядається.

Таблиця 5.1

Порівняння аналітичного та чисельного розв’язків рівняння (5.1)

X	Аналітичний розв'язок	Постійні елементи	Кубічні елементи
–.987500	.–897868	.–803323	.–897822
–.887500	–2.119590	–2.047575	–2.119524
–.787500	–2.494537	–2.438939	–2.494565
–.687500	–2.677830	–2.628858	–2.677836
–.587500	–2.809745	–2.764089	–2.809756
–.487500	–2.951145	–2.907190	–2.951163

X	Аналітичний розв'язок	Постійні елементи	Кубічні елементи
–.387500	–3.130239	–3.087017	–3.130228
–.287500	–3.357767	–3.314605	–3.357793
–.262500	–3.422395	–3.379163	–3.422311

У першому стовпці вміщено значення аргументу, у другому для порівняння наведено дані аналітичного розв'язку, у третьому – чисельні значення, отримані з використанням 40 елементів з постійною апроксимацією густини, у четвертому – чисельні значення густини, отримані з тією самою кількістю елементів, але з кубічною апроксимацією густини. В обох випадках при чисельному розв'язку вводилися спеціальні кінцеві елементи, що описують поведінку густини.

Далі вирішено тестові завдання для криволінійних контурів. Нехай контур L є дугою кола радіуса R. Рівняння контуру задаємо у вигляді $x_1 = R\cos\varphi; \quad x_2 = R\cos\varphi; \quad \alpha \le \varphi \le \beta$. Розглянемо інтегральне рівняння:

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \Gamma(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi}\ln\frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}dL = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in L \tag{5.4}$$

У цьому випадку:

$$\mathbf{x} = (R\cos\varphi_0, R\sin\varphi_0); \quad \boldsymbol{\xi} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi); \quad \mathbf{n}_x = (\cos\varphi_0, \sin\varphi_0); \quad \mathbf{n}_\xi = (\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Підставимо ці вирази у рівність:

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi}\ln\frac{1}{r} = \frac{2(gradr, \mathbf{n}_x)(gradr, \mathbf{n}_\xi) - (\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_\xi)}{r^2}$$

Тоді рівняння (5.4) набуде вигляду:

$$(\mathbf{A}\Gamma)(\varphi_0)=\frac{1}{4\pi R}\int_{\alpha}^{\beta}\Gamma(\varphi)\frac{d\varphi}{\sin^2\dfrac{\varphi-\varphi_0}{2}}=f(\varphi_0) \tag{5.5}$$

При α=0, β=2π, R=1 рівняння (5.5) є розглянутим у книзі Ю.В. Ганделя [57] гіперсингулярним рівнянням у просторі тригонометричних поліномів. У [57] показано, що:

$$\mathbf{A}:\cos k\varphi\mapsto -k\cos k\varphi_0;\quad \mathbf{A}:\sin k\varphi\mapsto -k\sin k\varphi_0;\quad k=0,12... \tag{5.6}$$

Зі співвідношень (5.6) зрозуміло, що оператор $\mathbf{A}$ переводить функцію $\Gamma(\varphi)=1$ в $f(\varphi_0)=0$. Скористаємося формулами (5.6) для побудови аналітичних розв'язків рівняння (5.5) та тестування запропонованого алгоритму чисельного розв’язку. При чисельній реалізації передбачалося, що контур інтегрування розімкнуто (для цього приймалося α=0, β=2π–0.00001), а густина $\Gamma(\varphi)$, що шукається, обертається в нуль на межах інтервалу інтегрування. Застосовувалася шматково-постійна та кубічна апроксимація густини всередині елемента.

На Рис.5.2 а, б показані права частина (а) та розв’язок (б) рівняння (5.5). Криві 1 і 2 на Рис.5.2 б представляють аналітичний і чисельний розв’язки рівняння, що розглядається. Права частина обчислювалася за формулою $f(\varphi_0)=-3\cos(3\varphi_0)+2\sin(2\varphi_0)$. Аналітичний розв’язок внаслідок (5.6) має вигляд $\Gamma(\varphi)=\cos(3\varphi)-\sin(2\varphi)-1$. Чисельний розв’язок, показаний на Рис.5.2 б отримано з використанням 20 кубічних елементів.

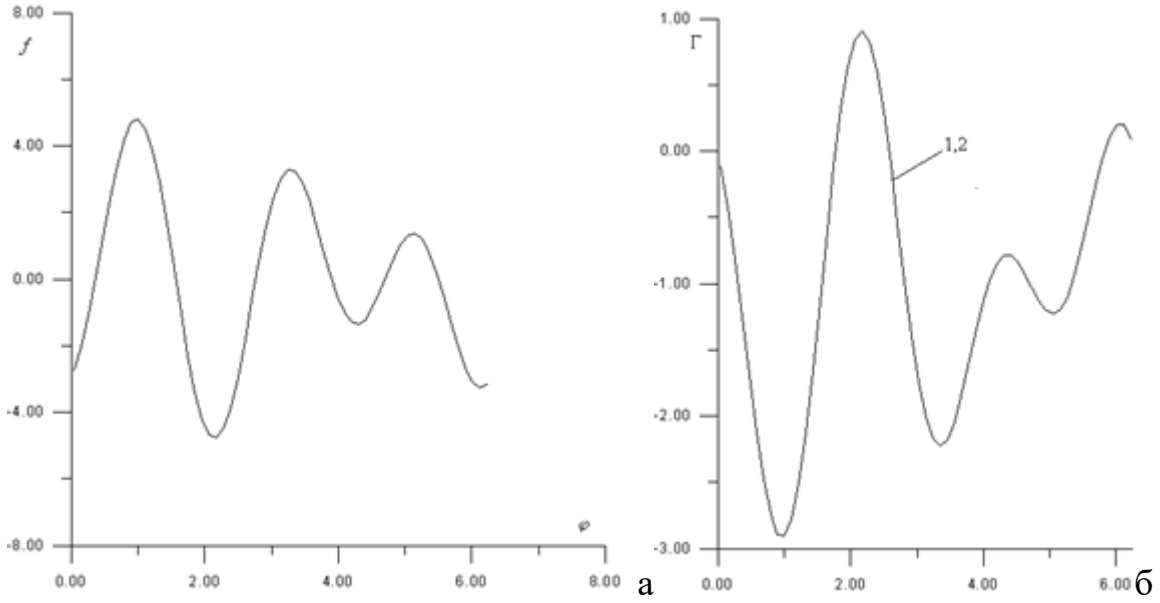


Рис.5.2. Вид правої частини (а) рівняння (5.5), аналітичне та чисельне (б) його розв'язання з використанням 20 кубічних елементів

На Рис.5.3 показана права частина рівняння (5.5), визначена за формулою $f(\varphi_0) = 8\cos(8\varphi_0) + 9\sin(9\varphi_0)$. Аналітичний (1) та чисельний (2) розв’язки показано на Рис.5.3 б. Аналітичний розв’язок обчислювався за формулою $\Gamma(\varphi) = -\cos(8\varphi) - \sin(9\varphi) + 1$. Чисельний розв’язок отримано з використанням 40 кубічних елементів. При апроксимації контуру застосовані наступні формули:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(s) \ln\left\{\left[x_1(s) - x_{10}\right]^2 + \left[x_2(s) - x_{20}\right]^2\right\} D(s) ds; D(s) = \sqrt{x_1'(s)^2 + x_2(s)^2},$$

де $D(s)$ – визначник перетворення.

$$x_1(s) = x_{10} + x_1'(s_0)(s - s_0); \qquad x_2(s) = x_{20} + x_3'(s_0)(s - s_0)$$

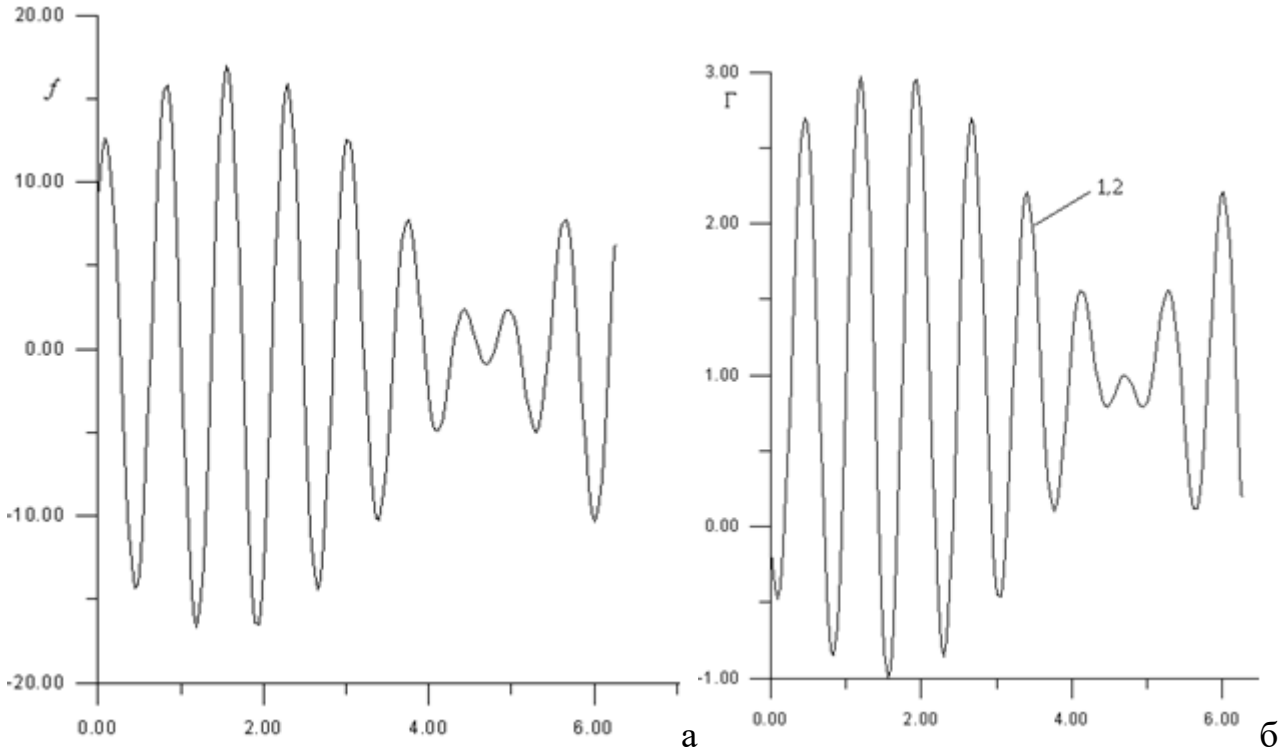


Рис.5.3. Вид правої частини (а) рівняння (5.5), аналітичне та чисельне (б) його розв'язання з використанням 40 кубічних елементів

У наведених прикладах під час використання кубічних елементів аналітичний та чисельний розв’язки збіглися з точністю $\varepsilon=10^{-4}$. При використанні граничних елементів з постійною апроксимацією густини точність $\varepsilon=10^{-3}$ була досягнута лише при застосуванні 160 елементів.

5.2 Динамічні та статичні характеристики лопаті

Лопаті ПЕУ можна розглядати як тонкі крила скінченного розмаху. Тому як тестові, далі знайдені аеродинамічні похідні для таких крил, що дозволить зробити висновки відносно достовірності отриманих результатів.

Вказані крила розглядаємо як прямокутні пластини, що на площині область $S=\{-b\le x\le b;-l\le z\le l\}$, .з одиничною нормаллю n=(0,1,0).

Для обчислення коефіцієнтів аеродинамічних похідних визначимо приєднані маси крила за такими формулами:

$$\lambda_{ik} = -2\rho \iint_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad (i,k = 1,2,...,6) \tag{5.7}$$

де ρ – густина рідини; φ_i (i=1,2,…,6) –і функції, що зникають на нескінченності, та задовольняють рівняння Лапласа з відповідними граничними граничним умовами на S:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{n}} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{n}} = 1; \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mathbf{n}} = 0; \qquad \frac{\partial \varphi_4}{\partial \mathbf{n}} = -z; \quad \frac{\partial \varphi_5}{\partial \mathbf{n}} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_6}{\partial \mathbf{n}} = x$$

Відмінними від нуля будуть лише величини λ_{22}, λ_{44}, λ_{66}, λ_{26}.

Знайдемо φ_i (i=2,4,6), з наступних гіперсингулярних рівнянь:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_i(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} dS = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{n}} \tag{5.8}$$

Внаслідок властивостей (5.7) маємо $2\varphi_k = \Gamma_k$. Коефіцієнти приєднаних мас обчислюємо таким чином:

$$k_{22} = \frac{\lambda_{22}}{\rho S b}; \quad k_{44} = \frac{\lambda_{44}}{\rho S b^3}; \quad k_{66} = \frac{\lambda_{66}}{\rho S b^3}; \quad k_{26} = \frac{\lambda_{26}}{\rho S b^2}$$

Коефіцієнти аеродинамічних знаходимо за формулами:

$$\Delta c_y^{\dot{\alpha}} = 2k_{22}; \quad \Delta m_z^{\dot{\alpha}} = 2k_{26}; \quad \Delta m_z^{\dot{\omega}_z} = 2k_{66}; \quad \Delta m_x^{\dot{\omega}_x} = -\frac{32b}{3l} k_{44}$$

Для чисельного розв'язання рівняння (5.8) невідома інтенсивність $\Gamma(x, y)$ розшукувалася у вигляді ряду (3.15). Завдання зведено до вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.35). Елементи матриці обчислювали за формулами (2.36). Число підобластей інтегрування на S приймалося рівним N_S=10×10. Для вирішення системи алгебраїчних рівнянь використовувався проекційний метод, що дозволив не пов'язувати число підобластей інтегрування з

кількістю базисних функцій. Збільшення значень N_S, n, m не призвело до суттєвої зміни результатів. Результати розрахунку представлені у табл.5.2 – 5.4.

У табл.5.2 показано порівняння розрахункових та експериментальних даних для коефіцієнта $\Delta c_y^{\dot{\alpha}}$ прямокутних пластин різного видовження, що характеризує підйомну силу при поступальних вертикальних коливаннях.

Таблиця 5.2

Порівняння розрахункових та експериментальних даних для коефіцієнта $\Delta c_y^{\dot{\alpha}}$

Відносне видовження $\lambda=l/b$	Експериментальні данні [27]	Розрахунок за методом дискретних вихорів [27]	Розрахунок за запропонованою методикою
1.0	0.87567	0.80204	0.85687
2.0	1.20045	1.15033	1.20056
3.0	1.20000	1.21078	1.30001
4.0	1.30034	1.27055	1.37056
5.0	1.41067	1.32065	1.42003
6.0	1.50044	1.38143	1.45002
7.0	–	1.3922133	1.50009
8.0	1.55000	1.39523	1.57007
9.0	–	1.41063	1.57199

Експериментальні та розрахункові значення коефіцієнтів $\Delta m_x^{\dot{\alpha}}, \Delta m_x^{\hat{\omega}_x}$ для цих пластин при кутових коливаннях дано в табл.5.3 та 5.4.

Зазначимо, що для крил нескінченного розмаху внаслідок теореми Жуковського маємо $\Delta c_y^{\dot{\alpha}} = \pi/2$. Таким чином, результати, отримані за розробленою методикою, узгоджуються з теоретичними та експериментальними даними краще, ніж розрахунки за методом дискретних особливостей.

Таблиця 5.3

Експериментальні та розрахункові значення коефіцієнта $\Delta m_x^{\dot{\alpha}}$

Відносне видовження $\lambda = l/b$	Експериментальні данні [58]	Розрахунок за методом дискретних вихорів [58]	Розрахунок за запропонованою методикою
1.0	-	-0.1334	-0.1600
2.0	-0.12	-0.1101	-0.1120
3.0	-0.11	-0.0998	-0.1101
4.0	-0.08	-0.0801	-0.0800
5.0	-0.07	-0.0697	-0.0701
6.0	-0.06	-0.0585	-0.0602
7.0	-	-0.0411	-0.0551
8.0	-	-0.0411	-0.0522
9.0	-0.05	-0.0411	-0.0501

Таблиця 5.4

Експериментальні та розрахункові значення коефіцієнта $\Delta m_x^{\dot{\omega}_x}$

Відносне видовження $\lambda=l/b$	Експериментальні данні [58]	Розрахунок за методом дискретних вихорів [58]	Розрахунок за запропонованою методикою
1.0	-0.03801	-0.03203	-0.03801
2.0	–	-0.03804	-0.04021
3.0	–	-0.03906	-0.04102
4.0	–	-0.03954	-0.04203
5.0	-0.04901	-0.03971	-0.04101
0.0	-0.05001	-0.03991	-0.04219

Аналіз чисельних результатів показав, що запропонований підхід дає задовільний збіг з результатами роботи [58] і кращий, ніж у [58] збіг з експериментальними даними.

Було також проведено чисельне дослідження впливу відносного видовження пластини (відношення l/b) на величину перепаду тисків, що виникають на пластині.

На Рис.5.4 показано результати чисельних досліджень. Цифри 1–4 відповідають відносинам розмірам платівки l/b=1, 3, 7, 12. Цифрою 5 позначено аналітичний розв’язок для задачі про безциркуляційне обтікання тонкого профілю ($l/b\to\infty$) [59]. Ці дані показують, що при $l/b\geq12$ можна скористатися результатами, отриманими для плоских завдань.

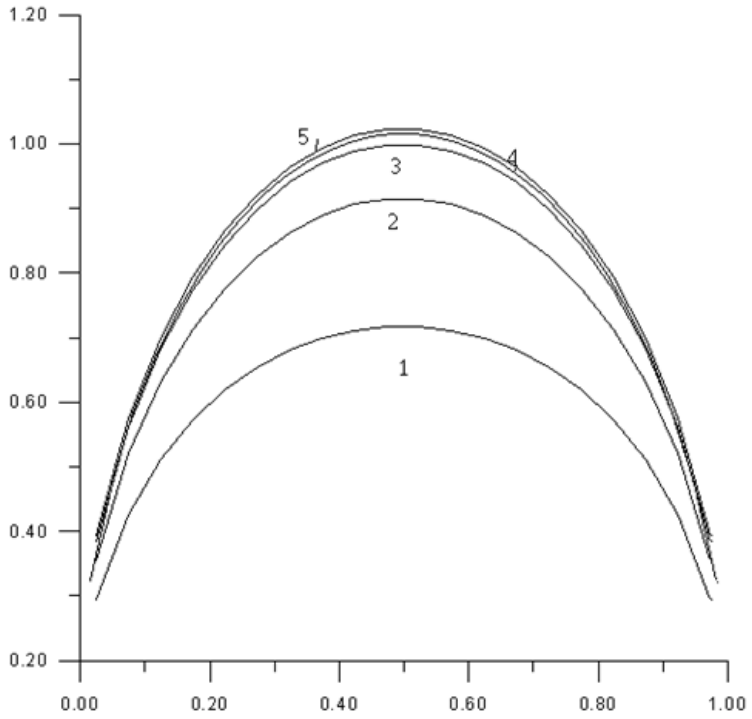


Рис.5.4. Вплив відносного видовження на величину перепаду тиску рідини

Розглянуто також завдання щодо циркуляційного обтікання вигнутих пластин великого видовження. Зокрема розглядалися профілі ЕСПЕРО різної товщини [59], а також параболічний профіль [59]. Чисельно вирішувалося рівняння (5.8) методом, описаним в розділі 3.

Кількість базисних функцій приймалося N=12 (n=0,..3, m=1,...,3), кількість підобластей інтегрування – N_{S1}=10×5 на S_1, і N_{S2}=10×3 на S_2 (розглядався найближчий вихровий слід). У розрахунках прийнято l/b=15.

У табл.5.5, 5.6 наведено розрахункові та експериментальні ([59]) значення коефіцієнта $\Delta c_y^{\dot{\alpha}}$ при різних кутах атаки для профілів ЕСПЕРО 020, ЕСПЕРО 015, ЕСПЕРО 010.

Таблиця 5.5

Розрахункові та експериментальні значення коефіцієнта $\Delta c_y^{\dot{\alpha}}$

при різних кутах атаки для профілів ЕСПЕРО 020

Кут атаки α, град	Експериментальні данні [2]	Розрахунок за запропонованою методикою
-6.0	0.03	0.03
-4.0	0.52	0.49
-2.0	0.72	0.65
0.0	0.9	0.79
2.0	1.05	0.09
4.0	1.17	1.07
6.0	1.23	1.19

Таблиця 5.6

Розрахункові та експериментальні значення коефіцієнта $\Delta c_y^{\dot{\alpha}}$

при різних кутах атаки для профілів ЕСПЕРО 015

Кут атаки α, град	Експериментальні данні [59]	Розрахунок за запропонованою методикою
-6.0	-0.1	-0.15
-4.0	-0.09	0.01
-2.0	0.22	0.21
0.0	0.42	0.42

Кут атаки α, град	Експериментальні данні [59]	Розрахунок за запропонованою методикою
2.0	0.64	0.6
4.0	0.81	0.79
6.0	0.98	0.95
8.0	1.25	1.32

Таблиця 5.7

Розрахункові та експериментальні значення коефіцієнта $\Delta c_y^{\dot{\alpha}}$

при різних кутах атаки для профілів ЕСПЕРО 010

Кут атаки α, град	Експериментальні данні [59]	Розрахунок за запропонованою методикою
-6.0	-0.1	-0.15
-4.0	-0.09	0.01
-2.0	0.22	0.21
0.0	0.42	0.42
2.0	0.64	0.6
4.0	0.81	0.79
6.0	0.98	0.95
8.0	1.25	1.32

На Рис.5.5 показані форми розподілених аеродинамічних похідних $\Delta c_y^{\dot{\alpha}}$; $\Delta m_x^{\dot{\omega}_x}$ крила кінцевого розмаху з відносним видовженням λ=1.

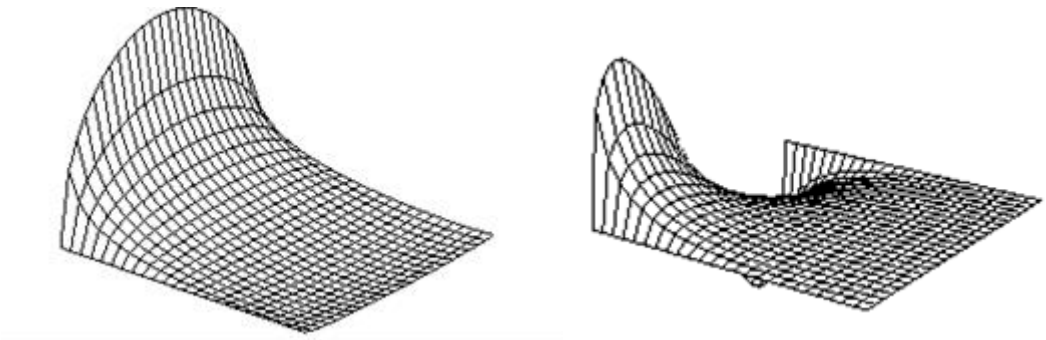


Рис.5.5. Розподілені аеродинамічні похідні для крила кінцевого розмаху (λ=1)

Аналіз чисельних результатів показує, що запропонована методика дає результати досить близькі до експериментальних даних при малих кутах атаки, коли справедливі припущення лінійної теорії. Відзначимо також, що отримані результати добре узгоджуються з класичним аналітичним розв'язком для параболічного профілю [59], коли відношення підйому стріли параболи до хорди профілю не перевищує r=0.3. У [59] передбачається, що граничні умови знесені на площину, що замінює поверхню крила. У такому припущенні у запропонованому підході отримуємо збіг з результатами [59] за будь-яких r. Але якщо не зносити граничні умови на площину, виходить якісно відмінний результат, що демонструє перевагу запропонованого підходу.

5.3 Розрахунок пружних характеристик лопаті

Наведемо результати пружного розрахунку лопаті за даними КБ «Південне» (Дніпро). Розглядається лопать, довжина якої з урахуванням подовжувача L=4 м. Пружні постійні приймалися такими: модуль пружності подовжувача $E_0=2\cdot10^5$ МПа; модуль пружності лопаті E змінювався в кореневому перерізі на краї від

$4.92 \cdot 10^4$ до $2.5 \cdot 10^4$ МПа; коефіцієнт Пуассона ν=0.18. Густина матеріалу $\rho=1.6 \cdot 10^3$ кг/м3 (матеріал алюміній). Швидкість обертання вітроколеса Ω=55 об/хв, швидкість вітру приймалася рівною 10 м/с.

Кількість перерізів лопаті приймалася рівно 65. Товщина в перерізах лопаті змінювалася в кореневому перерізі на краю від 5 до 2 мм (див. Рис.5.8), товщина в перерізі подовжувача дорівнювала 8 мм.

У процесі розв'язання задачі визначено поля переміщень і напружень у лопаті під дією аеродинамічних і відцентрових навантажень.

На Рис.5.6, 5.7 наведено графіки розподілу поперечних навантажень і крутного моменту по довжині лопаті. Максимальні переміщення *u* у площині обертання вітроколеса, нормальні до осі *OZ*, становили 25.9 см. Максимальні згинальні напруження виникають у циліндричній частині подовжувача і досягають 289.8 МПа, у кореневому перерізі лопаті напруження – 72.8 МПа.

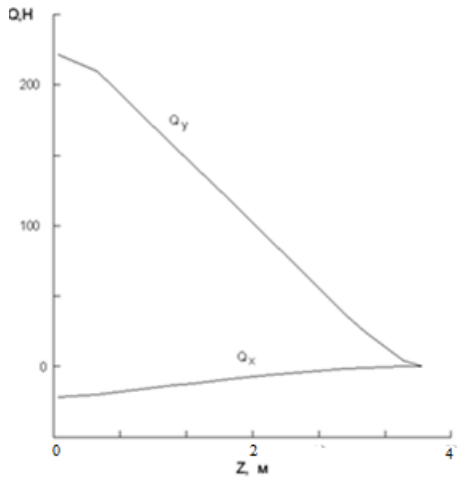


Рис.5.6. Поперечне навантаження

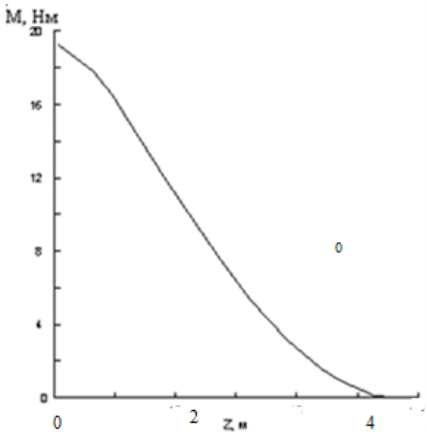


Рис.5.7. Крутний момент

Характер розподілу напружень за перерізом лопаті та вздовж осі лопаті показано на Рис.5.8, 5.9.

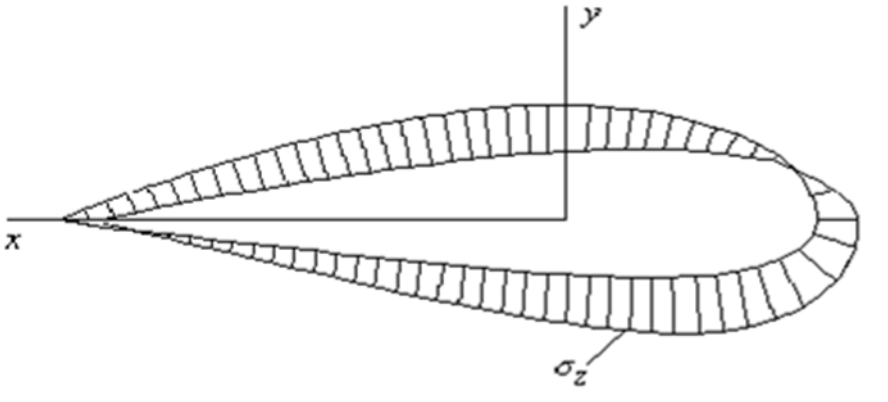


Рис.5.8. Розподіл напружень σ_z за перерізом лопаті

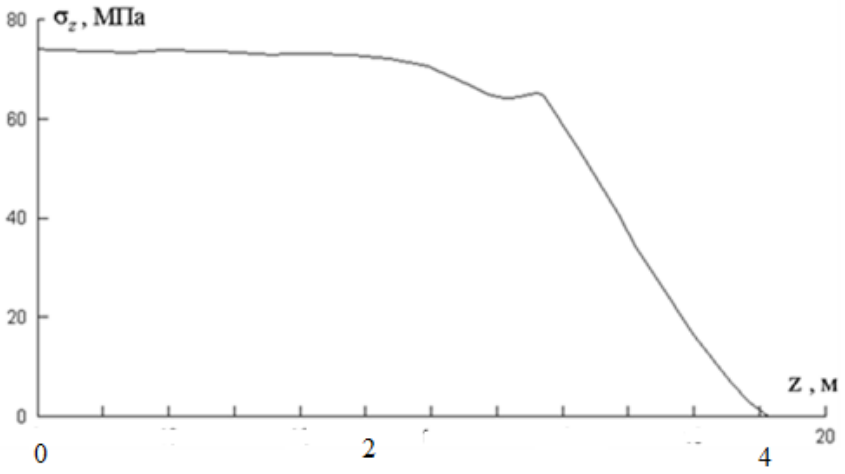


Рис.5.9. Розподіл напружень σ_z уздовж осі лопаті

На Рис.5.10 показано графіки сумарного Q_y і розподіленого навантаження q_y.

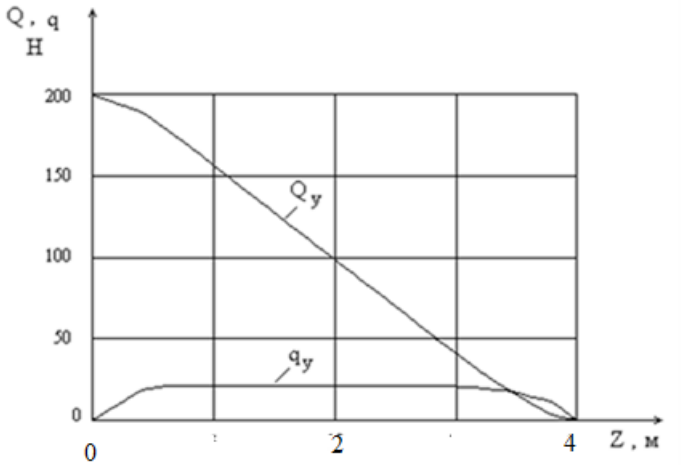


Рис.5.10. Сумарне Q_y і розподілене q_y навантаження вздовж осі лопаті

Зазначимо, що вздовж більшої частини довжини лопаті значення напруження σ_z

залишаються практично сталими. Такий результат досягнуто завдяки цілеспрямованій зміні геометричних параметрів поперечного перерізу по довжині лопаті. У цьому випадку некоректно порівнювати результати, отримані на основі припущень теорії крила нескінченного розмаху, з результатами, отриманими шляхом просторового моделювання обтікання лопаті. Це зумовлено тим, що геометрія та характеристики профілю істотно змінюються вздовж її довжини, що суттєво впливає на аеродинамічну поведінку.

У межах запропонованого підходу також можливо проаналізувати ймовірність виникнення флаттера, використовуючи методику, наведену у [39, 40]. З урахуванням впливу набігаючого потоку рівняння (2.8) набувають відповідно модифікованої форми:

$$L_1(\mathbf{u}) + \lambda^2 M_1(\mathbf{u}) + \lambda M_2(\mathbf{u}) = 0; \quad M_1(\mathbf{u}) = H(\mathbf{u}); \quad M_2(\mathbf{u}) = V_0 \frac{\partial}{\partial l} H(\mathbf{u}), \tag{5.9}$$

де $H(\mathbf{u})$ визначено в (2.36).

Застосовуючи метод заданих форм і помноживши скалярно обидві частини отриманої рівності на $\mathbf{u}_k$, доходимо до проблеми дослідження коренів характеристичного рівняння відносно λ. Встановлено , що за $V_0 \le 10$ м/с дійсні частини коренів характеристичного рівняння негативні, тобто має місце відсутність флатера.

5.4 Лопать з оптимальними параметрами

Розглядалася лопать ПЕУ, за даними КБ “Південне” (Дніпро), з наступними параметрами: L=4 м, модуль пружності E=5·10^3 МПа, коефіцієнт Пуассона ν=0.3, густина матеріалу (алюмінієвий сплав) ρ=1.6·10^3 кг/м3, кругова швидкість обертання вітроколеса Ω=20 об/хв, швидкість повітряного потоку 12 м/с, [σ]=210 МПа, діапазон частот [ω_1]=0.12 Гц, [ω_2]=12 Гц.

У цьому розрахунку передбачалося, що в перерізі лопаті відсутній лонжерон, тобто h1=h, l=0 (див. рис. 5.10). Ширина лопаті варіювалася від 1 м на основі до 0.6 м на кінці. У ході розв’язання задачі було визначено поля переміщень і напружень, що виникають у лопаті під дією аеродинамічного навантаження. Для моделювання лопаті було прийнято 28 поперечних перерізів. Максимальні переміщення u у площині обертання вітроколеса, перпендикулярній до осі OZ, становили 28.5 см. Максимальне згинальне напруження в кореневому перерізі досягало 11.8 МПа. Перша власна частота коливань лопаті становила ω=2.285 Гц.

У таблиці 5.7 подано результати розв’язання задачі оптимального проектування: для ряду поперечних перерізів лопаті Zi наведено початкові значення товщини профілю h_0, а також оптимізовані параметри h*. У початковій конфігурації маса лопаті становила 19.38 кг. У результаті проведеної оптимізації вдалося зменшити її масу до 16.64 кг.

Таблиця 5.7

Початкові та оптимальні параметри лопаті

Номер перерізу	Координата Z, м	Початкова товщина h_0, мм	Оптимальна товщина h^*, мм
1	0.800	6.0	5.04
6	1.236	5.6	4.73
11	1.818	5.0	4.21
16	2.400	4.4	3.67
21	2.836	4.0	3.25
26	3.564	3.2	2.41
28	4.000	3.0	2.19

Єдиним активним обмеженням виявилося переміщення лопаті. Власна частота коливань у процесі рахунку змінилася трохи, ця зміна не призвела до порушення заданих обмежень.

5.5 Висновки за розділом

У цьому розділі визначено аеродинамічні навантаження, що діють на лопаті вітроенергетичних установок [60].

Для перевірки методу визначення приєднаних мас чисельно визначено коефіцієнти аеродинамічних похідних тонких крил кінцевого розмаху та проведено зіставлення отриманих результатів з теоретичними та експериментальними даними інших авторів [59]. Досліджено вплив відносної довжини крила на перепад тисків, що виникають на лопаті. Встановлено межі застосування теорії крила нескінченного розмаху [60].

Для розрахунку міцності лопатей використана теорія природно-закручених стрижнів, розроблена А.П. Філіпповим та Ю.С. Воробйовим.

Метод розрахунку аеродинамічних навантажень показав високу ефективність та швидкодію, що дозволило поставити та вирішити задачу оптимізації, яка потребує багаторазового проведення перевірочних розрахунків.

ВИСНОВКИ

Побудовано математичну модель для дослідження оптимальних параметрів лопатей повітряних установок. Метод дослідження заснований на гіперсингулярних інтегральних рівняннях та пошуковому методу оптимального проектування.

Розглянуто двобічний контакт елементу конструкції з рідиною. Сформульовано задачу оптимального проектування лопаті повітряної установки. Визначено тиск газу на лопать за допомогою інтегральних рівнянь. Для цього розв’язано гіперсингулярне інтегральне рівняння з використанням методу граничних елементів. Після цього визначено напружено деформований стану лопаті під дією заданого тиску.

Розглянуто застосування методів теорії потенціалу до розв’язання крайових задач механіки суцільного середовища. При цьому використовується фундаментальні та сингулярні розв’язки диференціальних рівнянь, до яких зводяться крайові задачі. Якщо розглядається однобічний контакт рідини з пружнім елементом, то крайова задача зводиться до сингулярного інтегрального рівняння. Якщо контакт з рідиною двобічний, то задача зводиться до гіпенсингулярного рівняння. Метод граничних елементів застосовується до інтегральних рівнянь обох типів. Розглянуто тестову задачу для одновимірного гіперсингулярного рівняння. При використанні методу граничних елементів застосовані різні типи апроксимації густини. Проведено порівняння з аналітичним розв’язком та зроблено висновки відносно ефективності застосування граничних елементів з різними типами апроксимації.

Проаналізовано методи умовної та безумовної оптимізації. Приведено основні характеристики гібридного адаптивного методу оптимізації, відзначено, що цей метод є більш ефективним, ніж кожний окремий гібрідієнт, що використовується. Саме цей метод використано для розв’язання задачі зменшення

маси лопаті повітряної установки при виконанні геометричних та механічних обмежень.

Визначено аеродинамічні навантаження, що діють на лопаті вітроенергетичних установок.

Для перевірки методу визначення приєднаних мас чисельно знайдені коефіцієнти аеродинамічних похідних тонких крил скінченого розмаху та проведено зіставлення отриманих результатів з теоретичними та експериментальними даними інших авторів. Досліджено вплив відносної довжини крила на перепад тисків, що виникають на лопаті. Встановлено межі застосування теорії крила нескінченного розмаху.

Метод розрахунку аеродинамічних навантажень показав високу ефективність та швидкодію, що дозволило поставити та вирішити задачу оптимізації, яка потребує багаторазового проведення перевірочних розрахунків.

Зроблено доповідь на конференції на тему «Optimal design of wind power plant blades» на XXV Міжнародній науковій конференції “Математичні проблеми технічної механіки» – 2025 [61].

У подальшому передбачається розглянути задачу визначення тиску на лопать з урахуванням нечіткого завдання початкових умов. Запропонований підхід буде також узагальнено на аналіз міцності та динаміки вітрових турбін з вертикальною віссю обертання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1 – N. Smetankina, O. Semenets, A. Merkulova, D. Merkulov, S. Misura, “Two-Stage Optimization of Laminated Composite Elements with Minimal Mass”. In: Arsenyeva, O., Romanova, T., Sukhonos, M., Tsegelnyk, Y. (eds) Smart Technologies in Urban Engineering. STUE 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 536, 2023. Springer, Cham. doi:10.1007/978-3-031-20141-7_42.

2 – V. I., Makeev, E. A., Strelnikova, P. E. Trofimenko, et al. “Selecting Design Parameters for Flying Vehicles”. Int Appl Mech 49, 588–596, 2013. doi:10.1007/s10778-013-0592-8.

3 – L. Battisti, E Benini, A. Brighenti, S. Dell’Anna, M.R. Castelli, “Small wind turbine effectiveness in the urban environment.” Renew. Energy, vol. 129, 2018, pp. 102–113. doi: 10.1016/j.renene.2018.05.062.

4 – O. Sierikova, E. Strelnikova, K. Degtyariov, “Numerical Simulation of Strength and Aerodynamic Characteristics of Small Wind Turbine Blades”. In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds) Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering - 2022. ICTM 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, 657, 2023, Springer, Cham. doi:10.1007/978-3-031-36201-9_31.

5 – L. Kolodiazhna, Y. Bykov, “Aeroelastic Characteristics of Rotor Blades of Last Stage of a Powerful Steam Turbine.’ J. of Mech. Eng., 2023, vol. 26, no. 1, pp. 6-14. doi:10.15407/pmach2023.01.006.

6 – Q. Zang, J. Liu, L. Lu, L. Gao, “Boundary element analysis of liquid sloshing characteristics in axisymmetric tanks with various porous baffles”, Applied Ocean Research, vol. 93, 2019, 101963. doi: 10.1016/j.apor.2019.101963.

7 – A. Rusanov, A. Shubenko, O. Senetskyi, O. Babenko, R. Rusanov, “Heating modes and design optimization of cogeneration steam turbines of powerful units of combined heat and power plant.” Energetika, vol. 65(1), 2019, pp. 39-50. doi:10.6001/energetika.v65i1.3974.

8 – S. N. A. Yusof, Y. Asako, N. A. C. Sidik, S. B. Mohamed, W. Mohd, A. A. Japar, “A Short Review on RANS Turbulence Models,” CFD Letters, vol. 12(11), 2020, pp. 83-96. doi:10.37934/cfdl.12.11.8396.

9 – D. Mastrodicasa, E. Di Lorenzo, S. Manzato, P. Guillaume “Full-Field Modal Analysis by Using Digital Image Correlation Technique,” Rotating Machinery, Optical Methods & Scanning LDV Methods, vol. 6, 2022. doi:10.1007/978-3-030-76335-0_10.

10 – N. V. Smetankina, A. N. Shupikov, S. Yu. Sotrikhin, V. G. Yareschenko, “Dynamic response of an elliptic plate to impact loading. Theory and experiment”. International Journal of Impact Engineering. Vol. 34 (2).2007, pp. 264-276. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2005.07.016.

11 – N. V. Smetankina, A. N. Shupikov, S. Yu. Sotrikhin, V. G. Yareschenko, “A noncanonically shape laminated plate subjected to impact loading: Theory and experiment”, Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME Vol. 75, no. 5, 2008, 051004-1–051004-9 doi:10.1115/1.2936925.

12 – G. Sheludko, S. Ugrimov, “The localization method of extremum points for unimodal function”, Journal of Mechanical Engineering Vol. 19, no. 1, pp. 43-54, 2016. doi:10.15407/pmach2016.01.044.

13 – S. Misura, N. Smetankina, I. Misiura, “Optimal design of the cyclically symmetrical structure under static load”. In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds.) ICTM 2020. LNNS, Vol. 188. pp. 256–266. Springer, Cham, 2021. doi:10.1007/978-3-030-66717-7_21.

14 – Liu, H., Wang, F., Qiu, L., & Chi, C. “Acoustic simulation using singular boundary method based on loop subdivision surfaces: A seamless integration of CAD and CAE’’, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 158, 2024, pp. 97-106. doi: 10.1016/j.enganabound.2023.10.022.

15 – Eisa, S. A., “Nonlinear Modeling, Analysis and Simulation of Wind Turbine Control System with and Without Pitch Control as in Industry”, Advanced Control and

Optimization Paradigms for Wind Energy Systems, Power Systems, Publisher: Springer, Singapore. 2019, pp.1-40. doi:10.1007/978-981-13-5995-8_1.

16 – V. Gnitko, A. Karaiev, K. Degtyariov, I. Vierushkin E. Strelnikova, “Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis”. WIT Transactions on Engineering Sciences, Vo1. 34, pp. 67-79, 2022. doi:10.2495/BE450061.

17 – A. Rusanov, A. Shubenko, O. Senetskyi, O. Babenko, R. Rusanov, “Heating modes and design optimization of cogeneration steam turbines of powerful units of combined heat and power plant” Energetika, Vol. 65, no.1, 2019, pp. 39–50. doi:10.6001/energetika.v65i1.3974.

18 – R. Rzadkowski, V. Gnesin, & L. Kolodyazhnaya, “Aeroelasticity Analysis of Unsteady Rotor Blade Forces and Displacements in LP Last Stage Steam Turbine with Various Pressure Distributions the Stage Exit.” J. Vib. Eng. Technol. Vol. 6, pp. 333–337, 2018. doi:10.1007/s42417-018-0049-9.

19 – F. Mahmuddin “Rotor Blade Performance Analysis with Blade Element Momentum Theory” Energy Procedia, Vol. 105, 2017, pp.1123–1129. doi: 10.1016/j.egypro.2017.03.477.

20 – M. Pourmostafa, P. Ghadimi, “Applying boundary element method to simulate a high-skew Controllable Pitch Propeller with different hub diameters for preliminary design purposes” Cogent Engineering, Vol. 7, no.1, 2020, 1805857. doi:10.1080/23311916.2020.1805857.

21 – A. Rusanov, M. Chugay, R. Rusanov, “Advanced Computer Technologies in the New Flow Part Development for Reactive Type HPC Steam Turbine of T-100 Series”, In: Altenbach, H., et al. Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, 2023, Cham. doi:10.1007/978-3-031-18487-1_6.

22 – V. Gnitko, K. Degtyariov, A. Karaiev, & E. Strelnikova, “Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells”, WIT Transactions on Engineering Sciences, vol. 126, pp. 189–200, 2019, WIT Press: Southampton and Boston. doi:10.2495/BE420171

23 – A. Karaiev, E. Strelnikova, “Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics” International Journal of Modeling. Simulation, and Scientific Computing. 11(1), 2050003. 2020. doi:10.1142/S1793962320500038.

24 – S. J. Obaiys, R. W. Ibrahim, A. F, Ahmad, “Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study”, In: Andrica, D., Rassias, T. (eds) Differential and Integral Inequalities. Springer Optimization and Its Applications, Vol. 151, 2019, Springer, Cham. doi:10.1007/978-3-030-27407-8_25.

25 – A. Boujleben, A. Ibrahimbegovic, E. Lefrançois, “An efficient computational model for fluid-structure interaction in application to large overall motion of wind turbine with flexible blades”. Appl. Math. Model. Vol. 77, pp. 392–407, 2020. doi: 10.1016/j.apm.2019.07.033.

26 – K. Murawski, Rózanowski K., Krej M., “Research and Parameter Optimization of the Pattern Recognition Algorithm for the Eye Tracking Infrared Sensor.” Acta Physica Polonica Vol. A 124, 2013, pp. 513-516. doi:10.12693/APhysPolA.124.513.

27 – O. Sierikova, V. Koloskov, K. Degtyarev, O. Strelnikova, “The Deformable and Strength Characteristics of Nanocomposites Improving.” Materials Science Forum. Trans Tech Publications, Ltd, Switzerland, vol. 1038, pp. 144-153, 2021. doi:10.4028/www.scientific.net/MSF.1038.144.

28 – F. A. Khammas, K. Hussein Suffer, R. Usubamatov, & M. T. Mustaffa, “Overview of Vertical Axis Wind Turbine (VAWT) is one of the Wind Energy Application”. In Applied Mechanics and Materials Vol. 793, pp. 388–392 2015, Trans Tech Publications, Ltd. doi:10.4028/www.scientific.net/amm.793.38

29 – К.Є Лапітан та ін. “Мінімізація ваги лопаті повітряної установки адаптивним гібридним методом оптимізації” Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. № 1. 2023. doi: 10.20998/2078-9130.2023.1.282064

30 – N.M.Gunter “Potential Theory And Its Applications To Basic Problems Of Mathematical Physics” (Translated by John R. Schulenberger, Frederick Ungar Publishing Co. Inc., New York. 1968)

31 – E.Strelnikova, N. Choudhary, K. Degtyariov, D. Kriutchenko, I. Vierushkin,Boundary element method for hypersingular integral equations: Implementation and applications in potential theory, Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 169, Part B, 2024, 105999, https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2024.105999.

32 – E. Strelnikova, N. Choudhary, D. Kriutchenko, V. Gnitko, A. Tonkonozhenko, Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without baffles under horizontal and vertical excitations, Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 120, 2020, Pages 13-27, ISSN 0955-7997, https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.07.024.

33 – Makeev, V.I., Strelnikova, E.A., Trofimenko, P.E. et al. Selecting Design Parameters for Flying Vehicles. Int Appl Mech 49, 588–596 (2013). https://doi.org/10.1007/s10778-013-0592-8

34 – Yan Gu, Hongwei Gao, Wen Chen, Huijuan Wang & Chuanzeng Zhang “A general algorithm for evaluating nearly strong-singular (and beyond) integrals in three-dimensional boundary element analysis”, May 2017, Computational Mechanics 59(5), doi: 10.1007/s00466-016-1372-1

35 – Філіппов А.П. “Коливання систем, що деформуються”.-М.: Машинобудування, 1970. - 734 с.

36 – Воробйов Ю.С. “Коливання лопаткового апарату турбомашин”. - Київ: Наук. думка, 1988. – 214 с.

37 – Olena Sierikova, Elena Strelnikova, Kyryl Degtyariov “Numerical Simulation of Strength and Aerodynamic Characteristics of Small Wind Turbine Blades”, Journal: Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering - 2022 Lecture Notes in Networks and Systems, 2023, p. 357-370 Publisher: Springer Nature Switzerland, https://doi.org/10.1007/978-3-031-36201-9_31

38 – Analytical methods in the linear three-dimentional aerodynamics of a thin wing with winglets 2024 Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation 21(1):41-46 DOI:10.31429/vestnik-21-1-41-46

39 – Абрамовський Є.Р. “Аеродинаміка вітродвигунів”. - Дніпро: Дніпро. ун-т, 1987. – 220 с.

40 – Абрамовський Є.Р., Аврахов Ф.І., Урбан А.А. “Основи аеродинаміки розрахунку літальних апаратів”. -Дніпро: Дніпро. ун-т, 1990. -84 с.

41 – Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Tonkonozhenko A., “Liquid Vibrations in Cylindrical Tanks with and Without Baffles Under Lateral and Longitudinal Excitations”. International Journal of Applied Mechanics and Engineering, vol. 25(3), pp.117-132, 2020. doi:10.2478/ijame-2020-0038

42 – Brebbia, C.A., Telles, J.C.F, Wrobel, L.C.: “Boundary Element Techniques”, Springer-Verlag: Berlin and New York, (1984).

43 – Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K. “Method of discrete Vortex”.–CRC Press, 1993.–452 p.

44 – “Singular Integral Equations: Boundary Problems of Function Theory and Their Application to Mathematical Physics” Dover Books on Mathematics N. I. Muskhelishvili Courier Corporation, 2013 464 p

45 – Я. Б. Сікора, А.Й. Щехорський, Б.Л. Якимчук «Методи оптимізації та дослідження операцій». – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. Івана Франка, 2019. – 148 с.

46 – О. М. Штельма «Оптимізаційні методи та моделі»; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 38 с.

47 – Y. Hrytsyshyn, R. Kryvyy, S. Tkatchenko, Genetic Programming For Solving Cutting Problem.//Proceedings of the IXth International Conference on “The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics” CADSM 2007, Polyana, Ukraine, 2007, pp. 280-282

48 – Pyrih, Y., Kaidan, M., Tchaikovskyi, I. and Pleskanka, M. (2019), “Research of Genetic Algorithms for Increasing the Efficiency of Data Routing”, 3rd International Conference on Advanced Information and Communications Technologies (AICT), Lviv, Ukraine, pp. 157–160. DOI: 10.1109/AIACT.2019.8847814

49 – Sheludko G., Ugrimov S., 2016. The localization method of extremum points for unimodal function. Journal of Mechanical Engineering, Vol. 19, no. 1: 43-54. https://doi.org/10.15407/pmach2016.01.044.

50 – Misura S., Smetankina N., Misiura I., 2021. Optimal design of the cyclically symmetrical structure under static load. In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds.) ICTM 2020. LNNS, Vol. 188: 256–266. Springer, Cham, https://doi.org/10.1007/978-3-030- 66717-7_21.

51 – S. Zhang, S. Chen, F. Lin, X. Zhao, and G. Li, "Collaborative optimization and scheduling of source, load and storage of distribution networks considering distributed energy and load uncertainty," J. Phys.: Conf. Ser., vol. 2823, p. 012031, 2024, doi: 10.1088/1742-6596/2823/1/012031.

52 – H. Guo, R. Huang, and S. Cheng, "Scheduling optimization based on particle swarm optimization algorithm in emergency management of long-distance natural gas pipelines," PLOS ONE, vol. 20, 2025, doi: 10.1371/journal.pone.0317737.

53 – "Dynamic Optimization of Tunnel Construction Scheduling in a Reverse Construction Scenario," Systems, vol. 13, p. 168, 2025, doi: 10.3390/systems13030168.

54 – J. C. Bansal, P. Bajpai, A. Rawat, and A. K. Nagar, Sine Cosine Algorithm for Optimization, SpringerBriefs in Computational Intelligence, 2023, ISBN: 978-981-19-9721-1. doi: 10.1007/978-981-19-9722-8.

55 – Гандель Ю.В. Введення у методи обчислення сингулярних та гіперсингулярних інтегралів. - Харків: Вид. Харків. національного університету ім. В. Н. Каразіна, 2000. -92 с.

56 – Єрьоменко С.В. Квадратурні формули для інтеграла у сенсі кінцевої частини з Адамару//Вестн. Харків. держ. ун-ту. Динамічні системи. - 1989. - Вип.334. - С.104-106.

57 – Псесдорф З. Деякі класи сингулярних рівнянь. -М.: Світ, 1988. - 494 с.

58 – Belotserkovsky S.M., Skripach B.K. “Aerodynamic derivatives of an aircraft and wing in subsonic flow”. - M.: Mir, 1975. - 424 p.

59 – Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K. Method of discrete Vortex.–CRC Press, 1993.–452 p.

60 – Єсєлєва Є.В., Науменко В.В., Стрельнікова О.О. Гіперсингулярне рівняння задачі визначення аеродинамічних навантажень на лопаті вітроустановок // Пробл. машинобудування .-2000. - № 1. -С. 20-22.

61 – K. Degtyarev, V. Gnitko, O. Sierikova, D. Sinchenko, O. Strelnikova «Optimal design of wind power plant blades», тези доповідей XXV Міжнародної наукової конференції “Математичні проблеми технічної механіки» с. 54, 2025 р.

Додаток А

Лістинг програми пошуку мінімум багатьох змінних

```
КЕРУЮЧА ПРОГРАМА
$debug
      implicit real*8(a-h,o-z)
      parameter(nn=55)
      dimension x0(nn),x1(nn),x2(nn),x3(nn),xp(nn),b1(nn),b2(nn),c(nn),
     *c1(nn),c2(nn),c3(nn),c4(nn),cg(nn),d(nn),z(nn),xl(nn),
     *dir(nn),gra(nn)
      common/gr/gr/h/h/s/s/nf/nf/ng/ng/ib/ib/n1/n1/m/m/icz/icz
     */iz/iz1,iz2/ipd/ipd/iAOPT/iAOPT
      common/es/ff1,ff2,umax,smax,smin
     COMMON /RIS/XRIS(11),YRIS(11)
      CHARACTER*3 LFILE
      CHARACTER*10 LFILD,LFILS
      WRITE(*,800)
  800 FORMAT(1X,' NAME OF DATA FILE')
C      READ(*,500) LFILE
  500 FORMAT(A)
C      LFILD=LFILE//'.DAT'
C      LFILS=LFILE//'.LST'
      open (5,file='A.dat')
      open (6,file='A.rez')
      open (7,file='V2.rez')
     open(11,file='forma.TXT')
C      OPEN(5,FILE=LFILD)
C      OPEN(6,FILE=LFILS)
      ipd=0
      iaopt=1
      read (5,*)n,m,ibas
   1  format(3i2)
      read (5,*)(x0(kk),kk=1,n)
   2  format(10f8.3)
      read (5,*)e,h0
C       read (5,*)ff1,ff2,umax,smax,smin
   7  format(e7.1,f10.7)
      write(*,3)n,m
      write(6,3)n,m
   3  format(1x,'NUMBER OF PARAMETERS n=',i3,'NUMBER OF RESTRICT.m=',i3)
      write(*,8) ibas
      write(6,8) ibas
   8  format(1x,'OUTPUT SIGN ibas=',i2)
      write(*,4)
      write(6,4)
   4  format(30x,'INITIAL PARAMETERS OF OPTIMIZATION')
      write(*,5)x0
      write(6,5)x0
   5  format(1x,'x0',5f20.8)
      write(*,70)
      write(6,70)
  70  format(10x,'INITIAL OPTIMIZATION DATA')
      write(*,71) e, h0
      write(6,71) e, h0
```

```
  71  format(5x,'e=',e7.1,10x,'h0=',f5.2)
      m=m+n
      m1=m+1
      n1=n+1
      nf=0
      ng=0
      ib=1
      WRITE(*,*) '   START OF OPTIMAL SEARCH   '
C      call dem2
      WRITE(*,*) '   HELLO ! '
      call shell(x0,x1,x2,x3,xp,b1,b2,c,c1,c2,c3,c4,cg,d,z,xl,dir,
     *gra,m1,n,e,h0,ibas)
      write(*,3)n,m1
      write(6,3)n,m1
      write(*,8) ibas
      write(6,8) ibas

     DO 665 I =1,11
     write (11,*)xris(i),yris(i)
 665 continue
      stop
      end
```

$debug

ГОЛОВНА ПРОЦЕДУРА

```
      SUBROUTiNE SHELL(X0,X1,X2,X3,XP,B1,B2,C,C1,C2,C3,C4,CG,D,Z,XL,
     *DiR,GRA,M1,N,E,H0,iBAS)
      iMPLiCiT REAL*8(A-H,O-Z)
      DiMENSiON X0(M1),X1(M1),X2(M1),X3(M1),XP(M1),B1(M1),B2(M1),C(M1),
     *C1(M1),C2(M1),C3(M1),C4(M1),CG(M1),D(M1),Z(M1),XL(M1),
     *DiR(N),GRA(N)
      COMMON/GR/GR/H/H/S/S/NF/NF/NG/NG/iB/iB/N1/N1/M/M/iCZ/iCZ
      COMMON/AA1/AA1/BB1/BB1/AA2/AA2/BB2/BB2/ND/ND
     */iZ/iZ1,iZ2 /iAOPT/iAOPT
      ABS(X)=DABS(X)
      SQRT(X)=DSQRT(X)
      EXP(X)=DEXP(X)
      AiNT(X)=iDiNT(X)
      sin(x)=dsin(x)
      sign(y,x)=dsign(y,x)
```

```
      helij=m-n-0.5d0
      a1=(1.0+sign(1.0d0,helij))*0.5d0
      em=e
      h0r=h0
  600 do 1 i=1,n
      xp(i)=x0(i) +e*(1+sign(1.0d0,ng-1.5))*0.5d0
c      xp(i)=x0(i)
    1 continue
      if(m.eq.n) go to 3
      call bound(xp,m1)
      if (iaopt.eq.1) write(6,*)'sh1: xp=',xp
      do 2 i=n1,m
c      if(xp(i))100,2,2
      if(xp(i))100,600,2
    2 continue
    3 ii=0
      jj=0
      iy=0
      iy1=0
      icma=0
      nf=0
      ng=0
      icb=0
      iz1=1
      iz2=1
      iz3=1
      iz4=1
      ir=1
      ir0=1
```

```
      h=h0
      h1=h0
      hmr=h0*0.25
      hm=e*0.25
      wf=e
      e1=1.0d-3
      icz=0
      ns=m1*(m1-3)/2+n-1
      s=100.0*h0
      n2=s
      s=(s-n2)*1000.0
      nr=s
      rk1=wf*exp(0.1*hm)
      rk2=n*exp(-0.2*hm)/wf
c     xl(m1)=1.0e10
      xl(m1)=1.0d20
         write(7,*)'nr',nr,s,n2
      call f(xl,xp,m1)
      if(iaopt.eq.1)write(6,'(a/(20f16.7))')'sh2: xp=',(xp(kk),kk=1,m1)
c     if (iaopt.eq.1) write(6,*)'sh2-1: xp=',xp
      x0(m1)=xp(m1)
    4 p=xp(m1)
      do 5 i=1,n
      xp(i)=xp(i)+wf
      call f(xl,xp,m1)
      dir(i)=(p-xp(m1))/wf
      gra(i)=dir(i)
      xp(i)=xp(i)-wf
    5 continue
```

```
      xp(m1)=p
      call norma(dir,n)
      if(s.lt.e) go to 999
      gr=s
      jj=jj+1
      if(jj.ne.1) go to 32
      do 6 i=1,m1
      b1(i)=xp(i)
      x1(i)=xp(i)
      x2(i)=xp(i)
    6 continue
  111 if(iz1.eq.1) go to 8
      v1=0.0
      v2=0.0
    8 call norma(dir,n)
      if(h.lt.hmr.and.h1.lt.hmr.or.s.lt.e) go to 9
      go to 11
    9 do 10 i=1,m1
      xp(i)=x2(i)
   10 continue
      go to 888
   11 do 12 i=1,n
      xp(i)=x2(i)+h*dir(i)
      x3(i)=xp(i)
   12 continue
      if(m.eq.n.or.ib.eq.-1) go to 15
      call bound(xp,m1)
      do 13 i=n1,m
      x3(i)=xp(i)
```

```
   13 continue
      do 14 i=n1,m
      if(xp(i)) 666,14,14
   14 continue
   15 ii=ii+1
      call f(xl,xp,m1)
c     if((nf.ge.m1).and.(nr.ne.ns)) goto 505
      if (iaopt.eq.1) write(6,73)h,iz1,iz2,iz3,iz4
   73 format(19x,'h=',f20.10,10x,'iz1=',i2,10x,'iz2=',i2,10x,'iz3=',i2,
     *10x,'iz4=',i2)
      if(iaopt.eq.1)write(6,'(a/(20f16.7))')'sh2: xp=',(xp(kk),kk=1,m1)
c     if (iaopt.eq.1) write(6,*)'sh2-2: xp=',xp
      if(ib.eq.-1.and.xp(m1).eq.0.0)goto 101
      x3(m1)=xp(m1)
      if(xp(m1).gt.x2(m1)) goto 123
      if(iz1.eq.5.and.iz2.eq.4.and.iz3.eq.1
     *.and.2.0*abs(x1(m1)-x2(m1)).lt.abs(x2(m1)))goto 25
c      h=h0r*(2.0d0-(.66666666666667d0)**ii+0.1d0*ii*idint(ii/5.0d0))
      h=h0r*(2.-(2./3.)**ii+0.1*ii*idint(ii/5.0d0))
      if(ii-1)16,18,16
   16 do 17 i=1,m1
      x1(i)=x2(i)
   17 continue
   18 do 19 i=1,m1
      x2(i)=x3(i)
   19 continue
      goto 111
  123 h1=h
          if(nf.gt.10000) goto 505
```

```
    if(jj.ne.1) goto 555
    if(ii-1)28,20,28
 20 do 27 i=1,n
    xp(i)=x1(i)-h*dir(i)*0.5
    x1(i)=xp(i)
 27 continue
    if(m.eq.n)goto 275
    call bound (xp,m1)
    do 276 i=n1,m
    if(xp(i))666,276,276
276 continue
275 call f(xl,xp,m1)
    if(ib.eq.-1.and.xp(m1).eq.0.0) goto 101
    x1(m1)=xp(m1)
 28 call par(xl,x1,x2,x3,xp,m1,n)
    if(ib.eq.-1.and.xp(m1).eq.0.0) goto 101
    if(iaopt.eq.1)write(6,'(a/(20f16.7))')'sh3: xp=',(xp(kk),kk=1,m1)
    if(m.eq.n.or.ib.eq.-1) goto 29
    call bound(xp,m1)
 29 do 30 i=1,m1
    b2(i)=xp(i)
    x1(i)=xp(i)
    x2(i)=xp(i)
    c(i)=x3(i)
30  continue
    ii=0
    goto 4
 32 s=0.0
    p=0.0
```

```
    do 36 i=1,n
    s=s+(b1(i)-x3(i))**2
    p=p+dir(i)*(b1(i)-x3(i))
36  continue
    v1=p/sqrt(s)
    if(abs(1.0-abs(v1)).gt.rk1*exp(-0.1*h)) goto 111
    iz0=1
    goto 200
555 if(ii-1)37,38,37
 37 goto(31,22,33,34,35),iz2
 38 goto(21,22,23,24,25,26),iz1
 31 s=1.0e-10
    p=0.0
    do 39 i=1,n
    dir(i)=x2(i)-b1(i)
    s=s+(b2(i)-x2(i))**2
    p=p+dir(i)*(b2(i)-x2(i))
 39 continue
    v2=p/sqrt(s)
    do 40 i=1,m1
    c(i)=xp(i)
    b1(i)=b2(i)
    x1(i)=x2(i)
    b2(i)=x2(i)
 40 continue
    fi=exp(0.5*(v2-v1))
    v1=v2
    h=fi*h1
    iz1=1
```

```
   iz2=1
   iz3=2
   iz4=1
   icma=icma+1
   if(icma-3)45,44,45
44 icma=0
   iy1=0
45 ii=0
   go to 111
21 do 46 i=1,m1
   d(i)=xp(i)
46 continue
   ii=1
   iz2=2
   p=0.0
   s=0.0
   do 47 i=1,n
   s=s+(c(i)-d(i))**2
   p=p+(c(i)-x2(i))**2
47 continue
   s=sqrt(s)
   p=sqrt(2.0*p)
   if(p-s)48,50,50
48 do 49 i=1,n
   c(i)=2.0*x2(i)-c(i)
49 continue
   call f(xl,c,m1)
   if(m.eq.n.or.ib.eq.-1) go to 50
   call bound(c,m1)
```

```
50 if(c(m1).eq.d(m1)) go to 57
   elena=c(m1)-d(m1)
   u=sign(1.0d0,elena)
   u1=(1.0-u)*0.5
   u2=(1.0+u)*0.5
   do 54 i=1,n
   dir(i)=(d(i)-c(i))*u
54 continue
   do 56 i=1,m1
   x1(i)=u1*d(i)+u2*c(i)
   x2(i)=u1*c(i)+u2*d(i)
56 continue
   iz1=2
   iz3=2
   iz4=2
   go to 111
57 do 58 i=1,m1
   x1(i)=c(i)
   x3(i)=d(i)
58 continue
   do 59 i=1,n
   xp(i)=(x1(i)+x3(i))*0.5
   x2(i)=xp(i)
59 continue
   call f(xl,xp,m1)
   x2(m1)=xp(m1)
   if(m.eq.n.or.ib.eq.-1) go to 22
   call bound(xp,m1)
   do 60 i=n1,m
```

```
   x2(i)=xp(i)
60 continue
22 call par(xl,x1,x2,x3,xp,m1,n)
   if(ib.eq.-1.and.xp(m1).eq.0.0) go to 101
   do 65 i=1,m1
   d(i)=xp(i)
   c(i)=x3(i)
65 continue
   if(xp(m1).le.b2(m1)) go to 69
66 do 67 i=1,n
   dir(i)=c(i)-d(i)
67 continue
   do 68 i=1,m1
   x1(i)=b2(i)
   x2(i)=b2(i)
68 continue
   ii=0
   iz1=3
   iz2=3
   iz3=2
   iz4=1
   go to 111
69 do 80 i=1,m1
   b1(i)=b2(i)
   b2(i)=xp(i)
   x1(i)=xp(i)
   x2(i)=xp(i)
   c(i)=x3(i)
80 continue
```

```
      do 87 i=1,n
      dir(i)=xp(i)-b1(i)
   87 continue
      ii=0
      iz1=1
      iz2=1
      iz3=2
      iz4=3
      go to 111
c ???      go to 999
   23 do 300 i=1,n
      dir(i)=-dir(i)
  300 continue
      do 301 i=1,m1
      x1(i)=x3(i)
  301 continue
      ii=0
      iz1=4
      iz2=3
      iz3=2
      iz4=1
      go to 111
c ???      go to 999
   33 call par(xl,x1,x2,x3,xp,m1,n)
      if(ib.eq.-1.and.xp(m1).eq.0.0) go to 101
   88 do 89 i=1,n
      dir(i)=xp(i)-d(i)
   89 continue
      do 90 i=1,m1
```

```
      x1(i)=d(i)
      x2(i)=xp(i)
   90 continue
      ii=0
      iz1=2
      iz2=2
      iz3=4
      iz4=1
      h=0.33*h
      go to 111
c ???      go to 999
   24 call par(xl,x1,x2,x3,xp,m1,n)
      if(ib.eq.-1.and.xp(m1).eq.0.0) go to 101
      if(iaopt.eq.1)write(6,'(a/(20f16.7))')'sh4: xp=',(xp(kk),kk=1,m1)
      s=0.0
      do 95 i=1,n
      s=s+(b2(i)-xp(i))*(b2(i)-xp(i))
   95 continue
      if(s-e)888,888,88
  888 s=0.0
      do 1000 i=n1,m
      if(xp(i))1001,1000,1000
 1000 continue
      go to 1006
 1001 do 1003 i=1,m1
      x0(i)=xp(i)
 1003 continue
      go to 100
 1006 go to (1002,1004,1002),ibas
```

```
 1002 do 96 i=1,n
      s=s+(x0(i)-xp(i))**2
   96 continue
      s=sqrt(s)
      if(s.lt.e) go to 999
      go to (1005,1005,1004),ibas
c 1004 if(abs(x0(m1)-xp(m1)).le.(abs(x0(m1))+abs(xp(m1)))*e) go to 999
1004  if (nf.gt.10000) goto 999
 1005 ir=ir+1
      ir0=ir
      if(ir.gt.sqrt(0.25+rk2*exp(0.2*h))-1.5)ir0=1
      h0r=h0/ir
      p=0.5*abs(xp(m1)-x0(m1))
      if(p.lt.30.0)hmr=hm*exp(p)
      if(p.lt.30.0) go to 304
      hmr=h0r*0.25
   304 if(hmr.ge.h0r)hmr=h0r*0.25
      if(hmr.le.hm)hmr=hm
      if (iaopt.eq.1) write(6,74)ir,s,h0r,hmr,nf,ng
    74 format(1x,'new hyperplane r=',i5,7x,'s=',e9.3,7x,'h0r=',e9.3,7x,
     *'hmr=',e9.3,7x,'nf=',i6,7x,'ng=',i6)
      if(iaopt.eq.1)write(6,'(a/(20f16.7))')'sh5: xl=',(xl(kk),kk=1,m1)
      h=h0r
      h1=h
      iz1=1
      iz2=1
      iz3=1
      iz4=1
      ii=0
```

```
   jj=0
   iy=0
   iy1=0
   icma=0
   icz=0
   iy6=0
   do 97 i=1,m1
   x0(i)=xp(i)
97 continue
   go to 4
25 call zas(xl,cg,x1,c3,m1,n)
   iz5=1
   go to 201
81 call zas(xl,cg,xp,c4,m1,n)
   iz6=1
   go to 202
91 call dix(xl,c4,xp,z,m1,n)
   go to 205
26 call zas(xl,cg,xp,c3,m1,n)
   iz5=2
   go to 201
82 call dix(xl,c3,xp,z,m1,n)
   do 98 i=1,m1
   c4(i)=c3(i)
   c3(i)=c2(i)
98 continue
   h=h*0.5
   go to 205
34 do 99 i=1,n
```

```
    if(b1(i).ne.b2(i)) go to 31
 99 continue
    do 102 i=1,m1
    b1(i)=b2(i)
    b2(i)=x2(i)
    c(i)=xp(i)
    x1(i)=x2(i)
102 continue
    do 103 i=1,n
    dir(i)=b2(i)-cg(i)
103 continue
    ii=0
    iz1=1
    iz2=1
    iz3=2
    go to 111
 35 do 302 i=1,m1
    c(i)=x3(i)
    x1(i)=x2(i)
302 continue
    do 303 i=1,n
    dir(i)=x2(i)-cg(i)
303 continue
    ii=0
    iz1=1
    iz2=1
    iz3=2
    goto 111
666 iy=iy+1
```

```
      if (iaopt.eq.1) write(6,75)h,iz1,iz2,iz3,iz4
   75 format(1x,'в®зє  cg'10x,'h='f20.10,10x,'iz1=',i2,10x,'iz2=',i2,
     *10x,'iz3=',i2,10x,'iz4=',i2)
      if(iaopt.eq.1)write(6,'(a/(20f16.7))')'sh6: xp=',(xp(kk),kk=1,m1)
c     if (iaopt.eq.1) write(6,*)'sh6: xp=',xp
      if(jj.eq.1) go to 222
      go to 105
   62 jj=jj+1
      ii=0
      do 104 i=1,m1
      b2(i)=x2(i)
      x1(i)=x2(i)
      cg(i)=xp(i)
  104 continue
      iz1=5
      iz2=4
      iz3=1
      ii=0
      go to 111
  105 if(ii)107,106,107
  106 go to (51,52,53,41,55),iz3
  107 if(iy-1)109,108,109
  108 go to (41,42,43),iz4
  109 do 110 i=1,n
      dir(i)=x2(i)-cg(i)
  110 continue
      do 112 i=1,m1
      x1(i)=x2(i)
      cg(i)=x3(i)
```

```
112 continue
    iz1=5
    iz2=5
    iz3=3
    ii=0
    go to 111
 41 do 113 i=1,n
    dir(i)=x2(i)-b1(i)
113 continue
    do 114 i=1,m1
    cg(i)=xp(i)
    x1(i)=x2(i)
114 continue
    iz1=5
    iz2=1
    iz3=3
    ii=0
    go to 111
 42 if(b2(m1)-x2(m1))115,117,117
115 do 116 i=1,m1
    d(i)=x2(i)
116 continue
    goto 66
117 do 118 i=1,n
    dir(i)=x2(i)-b2(i)
118 continue
    do 119 i=1,m1
    x1(i)=x2(i)
    cg(i)=xp(i)
```

```
119 continue
    iz1=5
    iz2=1
    iz3=3
    ii=0
    go to 111
 43 if(ii.eq.1) goto 52
    goto 41
 51 do 120 i=n1,m
    if(abs(x1(i)).le.e1.or.abs(x2(i)).le.
   *e1.or.abs(x3(i)).le.e1)go to 500
120 continue
    go to 53
500 do 121 i=1,n
    dir(i)=cg(i)-x1(i)
121 continue
    call norma(dir,n)
    do 122 i=1,m
    cg(i)=x3(i)
122 continue
    do 124 i=1,n
    xp(i)=x1(i)-h1*dir(i)
124 continue
    call bound(xp,m1)
    do 125 i=n1,m
    if(xp(i))909,125,125
125 continue
    do 126 i=1,m1
    c3(i)=x1(i)
```

```
126 continue
    iz5=3
    goto 201
 83 call zas(xl,x3,xp,c4,m1,n)
    iz6=2
    go to 202
 92 call dix(xl,c4,xp,z,m1,n)
    goto 263
909 call dix(xl,xp,x1,d,m1,n)
    do 127 i=1,m1
    c2(i)=x1(i)
127 continue
    call zas(xl,x3,d,c1,m1,n)
    call dix(xl,c1,d,z,m1,n)
    h=h*0.5
    do 901 i=1,n
    dir(i)=gra(i)
901 continue
    do 902 i=1,m1
    x1(i)=z(i)
    x2(i)=z(i)
902 continue
    iz1=1
    iz2=1
    iz3=1
    iz4=1
    go to 111
 52 call zas(xl,xp,c,c3,m1,n)
    iz5=4
```

```
   go to 201
 84 call zas(xl,xp,x2,c4,m1,n)
   iz6=3
   go to 202
 93 call dix(xl,c3,x1,z,m1,n)
   go to 205
 53 iz5=5
   call zas(xl,cg,x1,c3,m1,n)
   go to 201
 85 iz6=4
   call zas(xl,x3,x1,c4,m1,n)
   go to 202
 94 call dix(xl,c4,x1,z,m1,n)
   go to 205
 55 iz5=6
   call zas(xl,xp,z,c3,m1,n)
   go to 201
 86 call dix(xl,c3,z,z,m1,n)
   do 128 i=1,m1
   x2(i)=z(i)
128 continue
   go to 109
201 if(icz.le.2)goto(81,82,83,84,85,86),iz5
   if(c3(m1).lt.c2(m1))goto 877
   goto(81,82,83,84,85,86),iz5
202 if(icz.le.2)goto(91,92,93,94),iz6
   if(c4(m1)-c3(m1))131,131,129
129 do 130 i=1,m1
   c1(i)=c2(i)
```

```
      c2(i)=c3(i)
      c3(i)=c4(i)
  130 continue
      go to 877
  131 goto(91,92,93,94),iz6
  205 do 1333 i=n1,m
      if(abs(z(i))-1.e-15)132,1333,1333
 1333 continue
      go to 134
  132 do 133 i=1,m1
      x1(i)=z(i)
  133 continue
      go to 500
  134 do 135 i=1,m
      cg(i)=xp(i)
  135 continue
      s=0.0
      do 136 i=1,n
      s=s+(c3(i)-c4(i))**2
  136 continue
      s=sqrt(s)
      if(s.lt.e)goto 264
  263 elena=c3(m1)-c4(m1)
      u=sign(1.0d0,elena)
      u1=(1.0+u)*0.5
      u2=(1.0-u)*0.5
      do 137 i=1,n
      dir(i)=(c4(i)-c3(i))*u
  137 continue
```

```
    do 138 i=1,m1
    c1(i)=u1*c3(i)+u2*c4(i)
    c2(i)=u2*c3(i)+u1*c4(i)
138 continue
 63 do 139 i=1,m1
    x1(i)=z(i)
    x2(i)=z(i)
139 continue
    iz1=6
    iz2=1
    iz3=5
    ii=0
    go to 111
264 call zas(xl,cg,z,c2,m1,n)
    do 140 i=1,m1
    c1(i)=c4(i)
140 continue
877 call xop(xl,c1,c2,c3,c4,xp,b2,d,gra,m1,n)
    if (iaopt.eq.1) write(6,76) xp
 76 format(1x,'arЂ§rЂ«мв в  ївa®єбё¬ жёё',20f18.10)
    do 141 i=n1,m
    if(xp(i).lt.0.0d0) goto 267
141 continue
266 go to 888
267 call zas(xl,xp,b2,xp,m1,n)
    do 142 i=n1,m
    if(xp(i).lt.0.0d0) goto 268
142 continue
    goto 888
```

```
268 call dix(xl,xp,b2,xp,m1,n)
    goto 888
200 do 144 i=1,n
    if(dir(i))143,144,143
143 es=dir(i)
    k=i
    go to 146
144 continue
    do 145 i=1,n
    dir(i)=1.0
145 continue
    go to 148
146 s=0.0
    do 147 i=1,n
    p=(aint((n-ir0)*2.0d0/n)-aint(2.0d0*(ir0-1.0d0)/n))*
    s=-s
    dir(k)=s/es
148 call norma(dir,n)
    if(iz0.eq.1)v1=0.0
    go to(111,62,63,64),iz0
222 do 149 i=1,n
    dir(i)=1.0d0+(sign(1.0d0,i-ir+n*
   * aint((ir-1.0d0)/n)+0.50d0)-
   * sign(1.0d0,i-ir+n*aint((ir-1.0d0)/n)-0.5d0))*((1.0d0+
   + aint((ir-1.0d0)/n))*(1.0d0-2.0d0*(ir-1-2*aint((ir-1.0d0)*
   * 0.5d0)))+ (ir-1.0d0-2*
   * aint((ir-1.0d0)*0.5d0))*(0.70d0*
   * abs(sin(aint((ir-1.0d0)/n)))-n))*0.50d0
149 continue
```

```
   call norma(dir,n)
   s=0.0
   do 150 i=1,n
   s=s+dir(i)*gra(i)/gr
150 continue
   if(1.0-abs(s)-1.0e-3)151,62,62
151 ir=ir+1
   go to 222
100 ib=-1
   e=1.0e-4
   if (iaopt.eq.1) write(6,'(a)') '    з «м п в®зє  ўг ®ў« бвё'
   go to 3
101 ib=1
   e=em
   if (iaopt.eq.1) write(6,78)
 78 format(10x,'а вгїґам  зё гвбп ¬ёё¬ё§ жёп дгєжёё жг«ё')
   do 152 i=1,m
   x0(i)=xp(i)
152 continue
   go to 3
999 if(ib+1)505,153,505
153 icb=icb+1
   if(icb.ge.3)go to 505
   iz0=4
   go to 200
 64 do 154 i=1,n
   x0(i)=xp(i)+5.0*h0*dir(i)
154 continue
   go to 600
```

```
c  505 if (iaopt.eq.1) then
  505 continue
   79   format(10x,'hello, people, final')
        write(6,72)xl
        write(*,700)nf,ng
        write(6,700)nf,ng
  700   format(20x,'nf='i10,10x,'ng='i10)
         72 format(1x,'xp=',20f16.7)
       return
       end
```