МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАУКОВО-НАВЧАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ

Кафедра комп'ютерної фізики

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр

«Дослідження коливань рідини в резервуарах та паливних баках з урахуванням поверхневого натягу»

Виконала: студентка 2 курсу, групи НФ-64
Караєва Є.О.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Комп'ютерна фізика
Керівник: к. ф.-м. н., доц. Лісіна О.Ю.

Рецензент:

Харків – 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра комп'ютерної фізики
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магістр
Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Костянтин НЄМЧЕНКО
підпис

"____"_____2022 року

З А В Д А Н Н Я

НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ

Караєва Елизавета Олександрівна

1.Тема роботи «Дослідження коливань рідини в резервуарах та паливних баках з урахуванням поверхневого натягу» керівник роботи: Лісіна Ольга Юліївна, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
затверджені наказом по університету від "21" грудня 2021 року №0210-05/2288

2. Строк подання студентом роботи: 12 травня 2022 року.

3. Перелік питань, які потрібно розробити:

1) Отримати систему рівнянь ідеальної рідини в гравітаційному полі з урахуваннях сил поверхневого натягу;

2) Знайти розв’язок отриманої системи у вигляді гравітаційно-капілярних хвиль у замкненому резервуарі;
3) Отримати аналітичне розв’язання задачі у випадку прямого циліндра;
4) Знайти спосіб числового розв’язання отриманої системи рівнянь;
5) Розв’язати систему для різних форм аксіально-симетричних резервуарів.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми, узгодження, а також затвердження її на кафедрі
2	Робота над літературою та іншими джерелами
3	Затвердження теми на кафедрі
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6	Написання третього розділу
7	Завершення написання дипломної роботи (висновки та література)
8	Подача науковому керівнику
9	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
10	Попередній захист
11	Захист

5.Дата видачі завдання

Студент _____ Елизавета КАРАЄВА
підпис

Керівник роботи _____ Ольга ЛІСІНА
підпис

РЕФЕРАТ

Єлизавета Караєва «Дослідження коливань рідини в резервуарах та паливних баках з урахуванням поверхневого натягу»

Кваліфікаційна робота магістра з прикладної фізики. – Х.: ХНУ імені В. Н.Каразіна, 2022. – 44с.

Коливання палива або окислювача в паливних баках ракет може призвести до серйозних наслідків та навіть втрати стійкості ракети-носія. Досліджувались нелінійні коливання рідини та їх вплив на пружні оболонки, плескання рідини в умовах мікрогравітації, поперечні хвилі, обертові коливання рідини, ефекти параметричного резонансу та інші.

В ході дослідження було отримано повну систему рівнянь ідеальної рідини в гравітаційному полі із впливом сили поверхневого натягу. Отримані розв’язки даної системи у вигляді гравітаційно-капілярних хвиль.

Для чисельного моделювання гравітаційно-капілярних хвиль використано метод граничних елементів, що є дискретною моделлю сингулярних інтегралів з третьої формули Гріна.

Отримані формули та метод було протестовано для знаходження частот прямого циліндра, а також циліндричних та конічних резервуарів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ІДЕАЛЬНА РІДИНА, ГІДРОДИНАМІКА, ПОВЕРХНЕВИЙ НАТЯГ, КАПІЛЯРНІ ЕФЕКТИ, ГРАВІТАЦІЙНО-КАПІЛЯРНІ ХВИЛІ, МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ.

ABSTRACT

Yelyzaveta Karaieva “Investigation of fluid oscillations in tanks and fuel tanks with including effects of surface tension”

Qualification work of the master of applied physics. – Kharkiv. – V.N. Karazin KhNU, 2020. – 44 p.

Fluctuations in fuel or oxidant in rocket fuel tanks can lead to serious consequences and even loss of stability of the launch vehicle. Nonlinear fluid oscillations and their influence on elastic shells, fluid splashing under microgravity conditions, transverse waves, rotational fluid oscillations, parametric resonance effects and others were studied.

The study obtained a complete system of equations of an ideal fluid in a gravitational field under the influence of surface tension. Solutions of this system in the form of gravitational-capillary waves are obtained.

For numerical modeling of gravitational-capillary waves, the boundary element method is used, which is a discrete model of singular integrals from the third Green's formula.

The obtained formulas and method were tested to find the frequencies of a straight cylinder, as well as cylindrical and conical tanks.

KEYWORDS: PERFECT FLUID, FLUID DYNAMICS, SURFACE TENSION, CAPILLARITY EFFECTS, BOUNDARY ELEMANT METHOD.

ЗМІСТ

ВСТУП 7

1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ 11

1.1 Рівняння ідеальної рідини в гравітаційному полі з урахуванням сил поверхневого натягу 11

1.2 Кінематичне рівняння на вільній поверхні рідини 17

1.3 Система рівнянь для потенціалу швидкості 19

2. ВІЛЬНІ ГРАВІТАЦІЙНО-КАПІЛЛЯРНІ АКСІАЛЬНО СИМЕТРИЧНІ ХВИЛІ 22

2.1 Постановка задачі 22

2.2 Розкладання за гравітаційними стаціонарними станами 23

2.3 Аналітичний розв’язок у випадку прямого циліндра 28

3. МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ 30

3.1 Інтегральний вид рівняння Лапласа 30

3.2 Метод граничних елементів 32

4. ПЕРЕВІРКА ЗАПРОПОНОВАНОГО МЕТОДУ 39

ВИСНОВКИ 42

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 43

ВСТУП

Коливання палива або окислювача в паливних баках ракет може призвести до серйозних наслідків та навіть втрати стійкості ракети-носія. Вивчення динаміки польоту та коливань рідини почалось з 1960-х років 20 сторіччя. Досліджувались нелінійні коливання рідини та їх вплив на пружні оболонки, плескання рідини в умовах мікрогравітації, поперечні хвилі, обертові коливання рідини, ефекти параметричного резонансу та інші [1].

Проблему поздовжніх коливань рідинних ракет-носіїв досліджено в [2-19]. Небезпека цього явища ускладнена унікальною будовою кожної ракети, зміною під час польоту прискорення ракети, регулювання тяги двигуна, зменшення рівня палива в баках та інших параметрів.

В літературі розглянуті й інші небезпечні коливання, які впливають на стійкість космічного корабля [20]. Космічний апарат Falcon 1 сімейства ракет-носіїв SpaceX під час місії Demo 2 у березні 2007 року зазнав деякі технічні аномалії під час польоту, наприклад, аномалії системи управління другої ступені. Починаючи з 265 секунди польоту з’явились коливання, що стало причиною нестабільності, яка зростала з часом до 474 секунди польоту по вісям тангажу та рискання, а також викликала відхилення від курсу та завадила виходу ракети на орбіту. Плескання рідини на борту космічних апаратів впливають на успішне проведення маневрів, таких як стикування апаратів з рідким вантажем на борту, що потребують міліметрової точності або наведення супутників спостереження [21, 22]. Повідомляється, що причиною переходу в небезпечний режим літального апарату NEAR та втратою контролю над ним (місія 1996-2001 років за програмою NASA) при виконанні орбітальних маневрів могли стати плескання палива [19].

Дослідження мікрогравітації є особливо актуальними. Вивчення даного питання проводиться більше п’яти десятирічь провідними вітчизняними та закордонними вченими. Наукові роботи з цієї тематики присвячені дослідженням фізики рідини в умовах мікрогравітації. Вивчення поведінки рідкого палива у баках космічних апаратів в умовах нульової гравітації було розпочато з дослідження поверхні розподілу рідина-газ у [23].

У статті [24] розглядаються гідропружні коливання рідини у резервуарах з гнучким днищем. Вільна поверхня рідини в циліндричному резервуарі приймає непласку сферичну форму, яка залежить від значення кута контакту поверхні рідини зі стінкою контейнера. В [25] досліджено гармонічні коливання рідини після аксіального збудження і визначено прискорення та швидкісні характеристики вільної поверхні рідини в умовах мікрогравітації. Деякі аналітичні підходи до динаміки рідини в умовах мікрогравітації подані у роботі [26].

До числа найбільш важливих праць відносяться роботи Луковського І. О.[27], Мікішева Г. М. та Рабіновича Б. І.[28], Мойсеєва М. М. та Румянцева В. В. [29].

Вивченню динаміки рідини у оболонках обертання в умовах мікрогравітації присвячені також наукові роботи професора машинобудування Рауфа Ібрагіма [30] та засновника метода граничних елементів Карлоса Бреббіа [31], що включають результати проведених аналітичних та експериментальних досліджень, а також всебічний аналіз динамічної поведінки рідин у резервуарах.

Аналіз динамічної поведінки частково заповнених рідиною оболонок обертання подано в наукових роботах [32-38]. Розглядаються сумісні коливання пружної оболонки обертання та рідини в умовах мікрогравітації з урахуванням сили тяжіння, а вирішення даної задачі зведено до розв’язку системи сингулярних інтегральних рівнянь. При вирішенні задачі про вільні

коливання пружної, заповненої рідиною циліндричної оболонки враховуються як плескання рідини, так і пружні коливання оболонки [32].

Таким чином, плескання рідини в паливних баках є причиною багатьох катастрофічних наслідків в історії рідинних ракет-носіїв. Коливання можуть призвести до втрати стійкості під час польоту, тому є предметом багатьох наукових досліджень, починаючи з середини минулого століття. Через складність природи коливань їх негативний вплив може проявитись навіть після успішних випробувань та експлуатації.

Проаналізовані роботи, присвячені вивченню поведінки рідини з врахуванням впливу різних факторів за допомогою комп'ютерних алгоритмів та числових методів. Розглянуті наукові роботи з дослідження динаміки вільної поверхні рідини з використанням методів скінченних, граничних елементів, методів, основаних на їх сумісному застосуванні, аналітичних та інших числових методів.

Актуальність теми. Тонкостінні оболонки широко використовуються в різних галузях сучасної техніки, зокрема, в суднобудуванні, хімічній та аерокосмічній промисловості. В аерокосмічному будівництві паливні баки ракет-носіїв розглядаються як складні оболонки, частково заповнені рідиною. Однією з основних задач в ракето-космічної галузі є дослідження пколивань конструкцій ракет-носіїв, що можуть призвести до значних навантажень на конструкцію, порушення її цілісності та, як наслідок, до аварійних ситуацій. Особливістю ракет-носіїв є наявність значних об'ємів рідкого палива на борту, вага яких більш ніж в тридцять разів перевищує масу корисного навантаження, а також інтенсивний вплив на рух літального апарату зовнішніх факторів. Виникають коливання вільної поверхні рідини, на характер яких впливає значна кількість чинників, таких як рівень гравітації, глибина наповнення баків та їх форма, параметри зовнішнього впливу та інші. Методами математичного моделювання отримують форми та частоти

коливань вільної поверхні в резервуарах, що частково заповнені рідиною. Оскільки натурні випробовування викликають труднощі, часто пов’язані з неможливістю їх проведення в наземних умовах, небезпечністю, а також значними фінансовими затратами. Застосування методів математичного моделювання дозволяє уникнути подібних витрат. Розроблення нових та вдосконалення існуючих методів розрахунків оболонкових конструкцій, що дозволяють враховувати різні фактори, такі як рівень заповнення, рівень гравітації, поверхневий натяг, капілярні ефекти є складовою у забезпеченні стійкості руху рідинних ракет-носіїв. Вивчення цього питання є актуальним та необхідним.

1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

1.1 Рівняння ідеальної рідини в гравітаційному полі з урахуванням сил поверхневого натягу

Ідеальною вважається рідина, позбавлена в'язкості і теплопровідності та процесів, пов'язаних з ними. Для опису руху такої рідини використовується система рівнянь, що складається з рівняння неперервності та рівняння Ейлера, який, в свою чергу, є наслідком другого закону Ньютона

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_l}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_l \vec{v} = 0 \\ \rho_l \left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} \right) = -\nabla P + \vec{F}_{1V} \end{cases} \tag{1.1}$$

де $\rho_l = \rho_l(\vec{r}, t)$ – густина рідини, $\vec{v}$ – швидкість рідини за Ейлером (швидкість рідини у обраній точці простору), $\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ – оператор «набла» (оператор просторової похідної у тривимірному просторі), P – тиск, $\vec{F}_{1V}$ – поле зовнішньої сили, що діє на об'єм рідини.

Розглянемо випадок нестисливої рідини із потенціальним рухом. Тобто

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_l}{\partial t} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{v} = 0 \end{cases}$$

У такому випадку система рівнянь (1.1) трансформується

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \rho_l \left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} \right) = -\nabla P + \vec{F}_{1V} \end{cases} \tag{1.2}$$

Оскільки рух рідини є потенціальним, перейдемо від ейлерового вектора швидкості до потенціалу швидкості $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$

$$\vec{v} = \nabla\varphi \tag{1.3}$$

Перепишемо рівняння Ейлера, використовуючи цей факт. Крім того будемо вважати, що єдиною зовнішньою силою, що діє на рідину є гравітаційна сила (сила тяжіння). $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння (гравітаційний потенціал.

$$\rho_l \left(\frac{\partial \nabla\varphi}{\partial t} + (\nabla\varphi, \nabla)\nabla\varphi \right) = -\nabla P + \rho_l \vec{g}$$

Другий член цього рівняння можна переписати через градієнт квадрата модуля швидкості. Дійсно

$$\nabla v^2 = \nabla(\vec{v}, \vec{v}) = 2(\vec{v}, \nabla)\vec{v} \Rightarrow (\vec{v}, \nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2$$

Гравітаційний потенціал $\vec{g}$ можна теж представити у вигляді градієнта

$$\left(\nabla(\vec{g}, \vec{r})\right)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(g_k x_k) = g_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = g_k \delta_{ik} = g_i$$

Усі отримані співвідношення підставимо у рівняння Ейлера

$$\rho_l \left(\frac{\partial \nabla\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 \right) = -\nabla P + \rho_l \nabla(\vec{g}, \vec{r})$$

Отримане співвідношення вказує на те, що можна виконати градієнтну заміну

$$\nabla \left(\rho_l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\rho_l}{2} v^2 + P - \rho_l(\vec{g}, \vec{r}) \right) = 0$$

Ми отримали рівняння, в якому градієнт деякої функції дорівнює нулю. Це означає, що даний вираз не залежить від координати, а може бути лише функцією часу.

$$\rho_l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\rho_l}{2} v^2 + P - \rho_l(\vec{g}, \vec{r}) = C(t)$$

Це рівняння називається рівнянням Бернуллі.

Невідому функцію від часу можна включити в потенціал звичайним перетворенням $\varphi \to \varphi - C(t)$

$$\rho_l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\rho_l}{2} v^2 + P - \rho_l(\vec{g}, \vec{r}) = 0$$

Розглянемо вільну поверхню рідини. Якщо в задачі необхідно враховувати сили поверхневого натягу, то капілярні ефекти розраховуємо згідно до закону Юнга-Лапласа.

$$P = P_0 - 2\sigma H$$

P_0 – атмосферний тиск, H – середня кривизна поверхні.

Атмосферний тиск можна врахувати у потенціал, як це було зроблено із невідомою функцією часу Бернуллі. Тоді це рівняння перетворюється у наступне

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 - \frac{2\sigma}{\rho_l} H - (\vec{g}, \vec{r}) = 0$$

Перейдемо у конкретну систему координат. Нехай гравітаційне поле направлено проти вісі Z $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Тоді

$$(\vec{g}, \vec{r}) = -gz$$

В загальному випадку середня кривизна поверхні розраховується як дивергенція вектора нормалі до вільної поверхні, в нашому випадку до вільної поверхні рідини

$$H = -\operatorname{div}\vec{n}(\vec{r})$$

Оберемо циліндричні координати. Нехай вільна поверхні рідини є аксіально-симетричною та залежить лише від відстані до вісі Z $\zeta = \zeta(\rho, t)$.

Запишемо рівняння дотичної до вільної поверхні у будь-якій точці

$$z - z_0 = k(\rho - \rho_0)$$

Як відомо, кутовий коефіцієнт прямої виражається через похідну у даній точці

$$k = \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}$$

Тоді рівняння дотичної до вільної поверхні у загальному випадку виглядає наступним чином

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}(\rho - \rho_0) - (z - z_0) = 0$$

З аналітичної геометрії ми знаємо, що коефіцієнти при координатах і є координатами вектора нормалі

$$\vec{N} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}, -1\right)$$

Одинична нормаль, в свою чергу

$$\vec{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2}} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}, -1\right)$$

Оберемо таку орієнтацію нормалі, при якій її компонента за віссю Z збігається за напрямом із самою віссю. Обчислимо дивергенцію цього вектора

$$H = -\operatorname{div}\vec{n} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho n_\rho) - \frac{\partial n_z}{\partial z} = \frac{1}{2\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2}}\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2}}\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2}}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2} - \right.$$

$$\left. - \rho\frac{1}{\left(1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2}}\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \right.$$

$$\left. + \rho\frac{1}{\left(1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2\right)\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2}}\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho\frac{1}{\left(1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}\right)$$

Тоді загальне рівняння Бернуллі на вільній поверхні рідини матиме наступний вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^2+g\zeta-\frac{2\sigma}{\rho_l}\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2}}\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}+\rho\frac{1}{\left(1+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right)=0$$

де $\lambda_c^2=\frac{\sigma}{\rho_l g}$ – капілярна довжина хвилі.

Розглянемо випадок малих збурень та майже плоского меніску рідини. У цьому наближенні можна знехтувати квадратами похідних та застосувати спрощення

$$\begin{cases} v^2 \to 0 \\ \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2 \to 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\zeta-\lambda_c^2\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}+\rho\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right)=0$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\zeta-\lambda_c^2\Delta\zeta=0 \qquad (1.4)$$

1.2 Кінематичне рівняння на вільній поверхні рідини

Для отримання кінематичного рівняння на вільній поверхні необхідно отримати зв’язок між потенціалом ейлеровой швидкості $\varphi(\vec{r},t)$ та вільною поверхнею рідини $\zeta=\zeta(\rho,t)$. Нехай $\vec{r}_L(t)$ – лагранжева координата точки на вільній поверхні. Під лагранжевою координатою маємо на увазі координату

конкретної точки рідини, за якою ведеться спостереження, тобто координати точки у відомій нам механічній моделі Ньютона. Тоді $\vec{v}_L(t)$ – лагранжева швидкість даної точки; тобто швидкість частинки, що знаходиться в даній точці, частинки, за якою ведеться спостереження тощо. Перейдемо від лагранжевих координат до ейлеревих, тобто будемо слідкувати не за за кожною конкретною точкою та її поведінкою з часом, а за зміною швидкості в нескінченно малому об'ємі на вільній поверхні рідини.

Нагадаю, що у представленій моделі ми використовуємо циліндричні координати з наявною аксіальною симетрією. Лагранжева координата точки визначається як похідна за часом від радіус-вектора точки

$$\vec{v}_L(t) = \frac{d\vec{r}_L}{dt}$$

На вільній поверхні координати радіус-вектора точки $\vec{r} = (\rho(t), \zeta(\rho(t), t))$.

Спроектуємо лагранжеву швидкість на вісь зед

$$v_z = \frac{d\zeta(\rho(t), t)}{dt}$$

Так як сама координат ρ залежить явно від часу, то таку похідну необхідно обчислювати за правилами взяття повної, або, як її ще називають у гідродинаміці, субстаціонарної похідної

$$v_z = \frac{d\zeta(\rho(t), t)}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\frac{d\rho}{dt}$$

$\frac{d\rho}{dt}$ є компонентою швидкості за координатою ρ.

$$v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_\rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}$$

Перейдемо від вектора швидкості до потенціалу швидкості

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}$$

Виразимо звідси похідну за часом від координати

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}$$

Останній вираз можна представити у матричній формі

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2} \begin{pmatrix} n_\rho & n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \varphi = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2} (\vec{n}, \nabla)\varphi$$

У випадку малого відхилення вільної поверхні від плоскої отримаємо наступну кінематичну умову на вільній поверхні

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\zeta = \zeta(\rho, t)} \tag{1.5}$$

1.3 Система рівнянь для потенціалу швидкості

У контексті потенціального руху рівняння неперервності приймає вигляд рівняння Лапласа

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \nabla \varphi = \Delta \varphi = 0$$

Повна система рівнянь для потенціалу буде складатися з рівняння неперервності (рівняння Лапласа), кінематичного рівняння (1.5) та рівняння Бернуллі (1.4).

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} \\ \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} + \zeta - \lambda_c^2\Delta\zeta = 0 \end{cases}$$

Ця система не є замкненою відносно потенціалу, тому спробуємо знайти замкнене рівняння. Для цього продиференціюємо рівняння Бернуллі за часом

$$\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)}\right) + \frac{\partial\zeta}{\partial t} - \lambda_c^2\Delta\frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0$$

Розпишемо окремо першу похідну

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\partial t}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)}\frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

Використаємо кінематичну умову

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\partial t}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)}$$

Другий член у даному рівнянні як бачимо є нелінійним, тому він відноситься до малого другого порядку, яким можна знехтувати.

Отже, похідна за часом від рівняння Бернуллі має наступний вигляд

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} + \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} - \lambda_c^2\Delta_p\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} = 0$$

У рівнянні вище використано оператор Δ_p, що є «плоским» лапсасіаном. Це зумовлено тим, що функція $\zeta = \zeta(\rho, t)$ є двомірною, а функція φ тривимірна. Цей оператор можна представити наступним чином

$$\Delta_p = \Delta - (\vec{e}_z(\vec{e}_z, \nabla), \nabla)$$

Отримана система для потенціалу вже є замкненою

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \left.\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} - \lambda_c^2\Delta_p\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Розв’язавши дану систему з конкретними граничними умовами для конкретної геометрії можна знайти розподіл потенціалу швидкості.

2. ВІЛЬНІ ГРАВІТАЦІЙНО-КАПІЛЯРНІ АКСІАЛЬНО СИМЕТРИЧНІ ХВИЛІ

2.1 Постановка задачі

Розглянемо рідину, що знаходиться в гравітаційному полі та має плоску вільну поверхню. Нехай під дією зовнішніх сил вільна поверхня зазнає невеликих збурень, тобто точки вільної поверхні починають рухатися під дією зовнішньої постійної сили. Цей рух вільної поверхні буде описуватися та спостерігатися у вигляді хвиль, які називаються гравітаційно-капілярні хвилі.

Розповсюдження гравітаційно-капілярних хвиль розглядається у жорских циліндричних резервуарах із аксіальною симетрією. На Рис. 1 зображено профіль поверхні. Нехай S_1 бокові стінки циліндричної поверхні, вільна поверхня позначена як S_0. Введемо декартову систему координат та розташуємо незбурену вільну поверхню на відстані $z = h$.

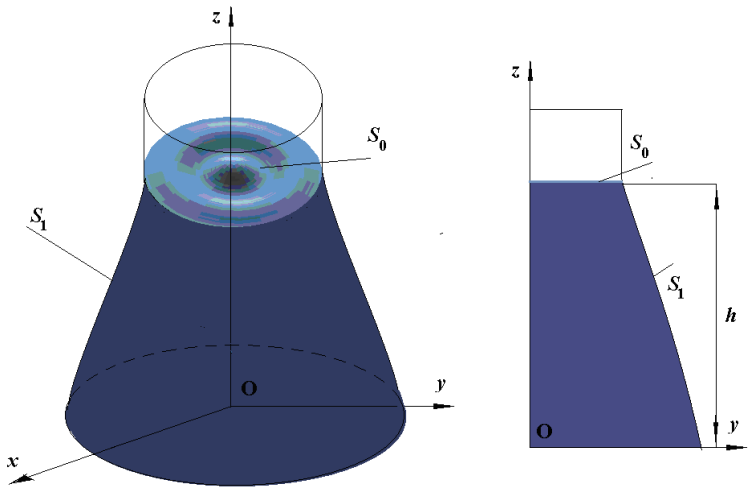


Рис. 1. Циліндричний резервуар із рідиною та його осьовий переріз

Спробуємо знайти потенціал швидкості з рівнянь (1.6) для даної задачі.

2.2 Розкладання за гравітаційними стаціонарними станами

Окрім системи (1.6) у розглянуту задачу необхідно додати умову не протікання. Це означає, що нормальна компонента швидкості на поверхні S_1 має дорівнювати нулю, а у контексті потенціалу це означає, що нормальна похідна потенціалу на бокових стінках резервуара буде дорівнювати нулю.

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} - \lambda_c^2\Delta_p\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{S_1} = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Друге рівняння містить поверхневий лапсасіан від нормальної похідної потенціалу, тому відомими методами розв’язати цю задачу складно. Розділимо задачу на дві частини та спробуємо знайти стаціонарні стани чисто гравітаційної задачі. Знаючи гравітаційні стаціонарні стани підставимо їх у загальне рівняння та із нього знайдемо гравітаційно-капілярні хвилі.

Розклад за гравітаційними стаціонарними станами означає, що ми представляємо потенціал швидкості у вигляді наступного ряду

$$\varphi(\vec{r},t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k^{(g)}(\vec{r}) e^{i\omega_k t} \tag{2.2}$$

де α_k – невідомі коефіцієнти, ω_k – невідомі частоти гравітаційно-капілярної задачі, $\psi_k^{(g)}$ – стаціонарні стани суто під дією гравітаційного поля, без урахування ефектів поверхневого натягу. Невідомі гравітаційні функції $\left\{\psi_k^{(g)}(\vec{r})\right\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняють наступній системі рівнянь

$$\begin{cases} \Delta\psi_k^{(g)} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial\psi_k^{(g)}}{\partial n}\right|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} = \dfrac{\omega_k^{(g)2}}{g}\psi_k^{(g)} \\ \left.\dfrac{\partial\psi_k^{(g)}}{\partial n}\right|_{S_1} = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Друге рівняння системи отримуємо якщо представимо гравітаційний потенціал у вигляді

$$\varphi_k^{(g)}(\vec{r},t) = \psi_k^{(g)}(\vec{t})e^{i\omega_k^{(g)}t}$$

Підставимо цей потенціал у суто гравітаційне рівняння

$$\frac{1}{g}\left.\frac{\partial^2\varphi_k^{(g)}}{\partial t^2}\right|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} + \left.\frac{\partial\varphi_k^{(g)}}{\partial n}\right|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi_k^{(g)}(\vec{r},t)}{\partial t} = i\omega_k^{(g)}\psi_k^{(g)}(\vec{t})e^{i\omega_k^{(g)}t}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_k^{(g)}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -\omega_k^{(g)2}\psi_k^{(g)}(\vec{t})e^{i\omega_k^{(g)}t}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_k^{(g)}}{\partial n}\right|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} = \left.\frac{\partial\psi_k^{(g)}}{\partial n}\right|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} e^{i\omega_k^{(g)}t}$$

Підставимо розкладання (2.1) у систему (2.2), враховуючи умови (2.3)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left[-\frac{\omega_k^2}{g}\psi_k^{(g)}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} + \frac{\omega_k^{(g)2}}{g}\psi_k^{(g)} - \lambda_c^2\frac{\omega_k^{(g)2}}{g}\Delta_p\,\psi_k^{(g)}\Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)}\right]e^{i\omega_k t} = 0$$

Помножимо рівняння вище скалярно на іншу гравітаційну функцію $\psi_l^{(g)}$. Отримаємо наступний вираз

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[-\frac{\omega_k^2}{g} \left(\psi_k^{(g)}, \psi_l^{(g)} \right) + \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} \left(\psi_k^{(g)}, \psi_l^{(g)} \right) - \right.$$
$$\left. - \lambda_c^2 \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} \left(\Delta_p \psi_k^{(g)}, \psi_l^{(g)} \right) \right] e^{i\omega_k t} = 0$$

Система стаціонарних функцій $\left\{ \psi_k^{(g)}(\vec{r}) \right\}_{k=1}^{\infty}$ є ортогональною (що буде показано нижче на конкретному прикладі), тому

$$\left(\psi_k^{(g)}, \psi_l^{(g)} \right) = \delta_{lk} \left\| \psi_l^{(g)} \right\|^2$$

$$\alpha_l \left[-\frac{\omega_k^2}{g} \left\| \psi_l^{(g)} \right\|^2 + \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} \left\| \psi_l^{(g)} \right\|^2 \right] e^{i\omega_l t} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \lambda_c^2 \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} \left(\Delta_p \psi_k^{(g)}, \psi_l^{(g)} \right) e^{i\omega_k t}$$

Розглянемо окремо поверхневий лапсасіан. У циліндричних координатах він виглядає наступним чином

$$\Delta_p = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta_p \psi_k^{(g)} = \Delta \psi_k^{(g)} - \frac{\partial^2 \psi_k^{(g)}}{\partial z^2}$$

Нагадаємо, що власні частоти є гармонічними функціями $\Delta \psi_k^{(g)} = 0$

$$\Delta_p \psi_k^{(g)} = -\frac{\partial^2 \psi_k^{(g)}}{\partial z^2}$$

Збурену вільну поверхню представимо у вигляді

$$\zeta(\rho, t) = h + \zeta^{(1)}(\rho, t)$$

Функція $\zeta^{(1)}(\rho, t)$ є малою функцією першого порядку. Підставимо це у рівняння Бернуллі (1.4)

$$\zeta^{(1)}(\rho, t) - \lambda_c^2 \Delta \zeta^{(1)}(\rho, t) = -h - \frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Як було сказано вище, ми розглядаємо функцію малою, а отже систему (2.3) можна розв'язувати на незбуреній поверхні $\zeta(\rho, t) \approx h$. Знаючи цей потенціал можна знайти функцію збуреної поверхні із рівняння вище.

Повернемося до плоского лапсасіана. На незбуреній вільній поверхні вектор нормалі є постійним

$$\vec{n}|_{z=h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тому

$$\left.\frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial n}\right|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} \approx \left.\frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial n}\right|_{z=h} = \left.\frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial z}\right|_{z=h}$$

$$\left.\frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial z}\right|_{z=h} = \frac{\omega_k^{(g)2}}{g}$$

Розпишемо тепер поверхневий лапсасіан

$$\Delta_p \psi_k^{(g)} = -\frac{\partial^2 \psi_k^{(g)}}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial z}\right) = -\frac{\omega_k^{(g)2}}{g}\frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial z} = -\frac{\omega_k^{(g)4}}{g^2}\psi_k^{(g)}$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \lambda_c^2 \frac{\omega_k^{(g)2}}{g}\left(\Delta_p \psi_k^{(g)}, \psi_l^{(g)}\right) e^{i\omega_k t} = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \lambda_c^2 \frac{\omega_k^{(g)6}}{g^3}\left(\psi_k^{(g)}, \psi_l^{(g)}\right) e^{i\omega_k t} =$$

$$= -\alpha_l \lambda_c^2 \frac{\omega_l^{(g)6}}{g^3}\left\|\psi_l^{(g)}\right\|^2 e^{i\omega_l t}$$

$$\alpha_l\left[-\frac{\omega_k^2}{g}\left\|\psi_l^{(g)}\right\|^2 + \frac{\omega_k^{(g)2}}{g}\left\|\psi_l^{(g)}\right\|^2\right] e^{i\omega_l t} = -\alpha_l \lambda_c^2 \frac{\omega_l^{(g)6}}{g^3}\left\|\psi_l^{(g)}\right\|^2 e^{i\omega_l t}$$

Розділимо отриманий вираз на спільні множники та отримаємо вираз для обчислення гравітаційно-капілярних частот.

$$\frac{\omega_k^2}{g} = \frac{\omega_k^{(g)2}}{g}\left[1 + \lambda_c^2 \frac{\omega_l^{(g)4}}{g^2}\right] \tag{2.4}$$

Тобто, знаючи моди чисто гравітаційних збурень $\omega_k^{(g)}$ можна знайти моди гравітаційно-капілярних хвиль ω_k.

$$\omega_k = \omega_k^{(g)}\sqrt{1 + \lambda_c^2 \frac{\omega_l^{(g)4}}{g^2}}$$

Підставимо отримані результати у рівняння (2.2).

$$\varphi(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k^{(g)}(\vec{r}) e^{i\omega_k t}$$

$$\zeta^{(1)}(\rho,t) - \lambda_c^2 \Delta\zeta^{(1)}(\rho,t) = -h + \frac{\mathrm{i}}{g}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k \psi_k^{(g)}(\vec{r}) e^{i\omega_k t}$$

2.3 Аналітичний розв'язок у випадку прямого циліндра

Розглянемо прямий циліндр із стінками $\rho = R$. У цьому випадку чисто гравітаційна задача представляється у наступному вигляді

$$\begin{cases} \Delta\psi_k^{(g)} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial\psi_k^{(g)}}{\partial n}\right|_{z=h} = \dfrac{\omega_k^{(g)2}}{g}\psi_k^{(g)} \\ \left.\dfrac{\partial\psi_k^{(g)}}{\partial n}\right|_{z=0} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial\psi_k^{(g)}}{\partial n}\right|_{\rho=R} = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Як ми знаємо, рівняння Лапласа в аксіально симетричному випадку має наступний загальний розв'язок

$$\psi_k^{(g)}(\rho,z) = \big(AJ_0(\lambda\rho) + BY_0(\lambda\rho)\big)(C\,\mathrm{sh}(\lambda z) + D\,\mathrm{ch}(\lambda z))$$

$$\psi_k^{(g)}(0,z) \neq \infty \Rightarrow B = 0$$

$$\psi_k^{(g)}(\rho,z) = AJ_0(\lambda\rho)\,\mathrm{sh}(\lambda z) + BJ_0(\lambda\rho)\,\mathrm{ch}(\lambda z)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi_k^{(g)}}{\partial\rho} = -A\mu J_1(\lambda\rho)\,\mathrm{sh}(\lambda z) - B\mu J_1(\lambda\rho)\,\mathrm{ch}(\lambda z) \\ \dfrac{\partial\psi_k^{(g)}}{\partial z} = A\lambda J_0(\lambda\rho)\,\mathrm{ch}(\lambda z) + B\lambda J_0(\lambda\rho)\,\mathrm{sh}(\lambda z) \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial z}\right|_{z=0} = A\lambda J_0(\mu\rho) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\psi_k^{(g)}(\rho, z) = BJ_0(\lambda\rho)\,\mathrm{ch}(\lambda z)$$

$$\left.\frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = -B\mu J_1(\lambda R)\,\mathrm{ch}(\lambda z) = 0$$

$$J_1(\lambda R) = 0 \Rightarrow \lambda_k = \frac{\mu_k}{R}$$

μ_k – корені функції Бесселя першого порядку.

Аналітичний розв'язок системи рівнянь, що буде використовуватися далі для порівняння із числовими методами наступний

$$\psi_k^{(g)}(\rho, z) = BJ_0\left(\frac{\mu_k}{R}\rho\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\mu_k}{R}z\right) \tag{2.6}$$

$$B\lambda J_0(\lambda\rho)\,\mathrm{sh}(\lambda z) = \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} BJ_0(\lambda\rho)\,\mathrm{ch}(\lambda z)$$

$$\frac{\omega_k^{(g)2}}{g} = \frac{\mu_k}{R}\mathrm{th}\left(\frac{\mu_k}{R}h\right)$$

$$\frac{\omega_k^2}{g} = \frac{\mu_k}{R}\mathrm{th}\left(\frac{\mu_k}{R}h\right)\left[1 + \lambda_c^2\frac{\mu_k^2}{R^2}\mathrm{th}^2\left(\frac{\mu_k}{R}h\right)\right] \tag{2.7}$$

3. МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

3.1 Інтегральний вид рівняння Лапласа

Як було показано у попередніх розділах, для знаходження частот гравітаційно-капілярних хвиль у випадку малих збурень та малого відхилення вільної поверхні від плоскої необхідно знайти частоти та моди коливань виключно гравітаційної задачі та застосувати отримані результати для визначення частот загальної гравітаційно-капілярної задачі. Отже, необхідно розв'язати наступну систему рівнянь (2.3)

$$\begin{cases} \Delta\psi_k^{(g)} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial\psi_k^{(g)}}{\partial n}\right|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} = \dfrac{\omega_k^{(g)2}}{g}\psi_k^{(g)} \\ \left.\dfrac{\partial\psi_k^{(g)}}{\partial n}\right|_{S_1} = 0 \end{cases}$$

Знайдені власні функції є власними функціями загальної гравітаційно-капілярної задачі.

Перше рівняння даної системи є звичне для нас рівняння Лапласа. Нагадаємо, що у цього рівняння є інтегральний аналог, який називається третьою тотожністю Гріна. Знайти це інтегральне рівняння нескладно, для початку треба визначити функцію Гріна.

$$\Delta u^* = -4\pi\delta\left(\vec{\xi} - \vec{r}\right)$$

Як ми знаємо з теорії потенціалу, розв’язком цього рівняння є кулонівський потенціал, який ми і будемо називати функцією Гріна рівняння Лапласа

$$u^*(\vec{\xi},\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{\xi}-\vec{r}|}$$

Розглянемо звичне нам рівняння Лапласа

$$\Delta\psi = 0$$

Помножимо його на функцію Гріна та зробимо елементарні диференціальні перетворення

$$u^*\Delta\psi = u^*\,\mathrm{div}\,\nabla\psi = \mathrm{div}(u^*\nabla\psi) - (\nabla u^*,\nabla\psi) = \\ = \mathrm{div}(u^*\nabla\psi) - \mathrm{div}(\psi\nabla u^*) + \psi\Delta u^* = 0$$

$$4\pi\delta(\vec{\xi}-\vec{r})\psi = \mathrm{div}(u^*\nabla\psi) - \mathrm{div}(\psi\nabla u^*)$$

Проінтегруємо отримане рівняння за об'ємом та застосуємо формулу Гаусса-Остроградського

$$\int_V 4\pi\delta(\vec{\xi}-\vec{r})\psi(\vec{r})dV(\vec{r}) = \oint_S u^*(\vec{\xi},\vec{r})\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})}dS(\vec{r}) - \oint_S \psi(\vec{r})\frac{\partial u^*(\vec{\xi},\vec{r})}{\partial n(\vec{r})}dS(\vec{r})$$

Введемо позначення

$$q^*(\vec{\xi},\vec{r}) = \frac{\partial u^*(\vec{\xi},\vec{r})}{\partial n(\vec{r})}$$

Явний вигляд цієї функції буде наступним

$$q^*(\vec{\xi},\vec{r}) = \frac{\partial u^*(\vec{\xi},\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} = \left(\vec{n}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{1}{|\vec{\xi}-\vec{r}|}\right) = n_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|\vec{\xi}-\vec{r}|} = n_k \frac{1}{|\vec{\xi}-\vec{r}|^2} \frac{\xi_k - x_k}{|\vec{\xi}-\vec{r}|} =$$
$$= \frac{(\vec{n}, \vec{\xi}-\vec{r})}{|\vec{\xi}-\vec{r}|^3}$$

За визначенням дельта-функції

$$\int_V 4\pi\delta(\vec{\xi}-\vec{r})\psi(\vec{r})dV(\vec{r}) = 4\pi C(\vec{\xi})\psi(\vec{\xi})$$

Константа $C(\vec{\xi})$ залежить від положення точки $\vec{\xi}$ відносно розглянутого об'єму. Вона дорівнює одиниці, якщо точка знаходиться всередині об'єму, ½ якщо точка на границі об'єму та 0, якщо точка поза розглянутим об'ємом.

Отримане інтегральне рівняння і є третьою тотожністю Гріна

$$4\pi C(\vec{\xi})\psi(\vec{\xi}) + \oint_S q^*(\vec{\xi},\vec{r})\psi(\vec{r})dS(\vec{r}) = \oint_S u^*(\vec{\xi},\vec{r})\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})}dS(\vec{r})$$

Для розв'язку цього рівняння використаємо дискретизацію, що і лежить в основі методу граничних елементів.

3.2 Метод граничних елементів

Перш ніж проводити класичну дискретизацію розділимо границю та потенціал на ній на дві групи.

$$\psi(\vec{r}) = \begin{cases} \psi_0(\vec{r}), \vec{r}\epsilon S_0 \\ \psi_1(\vec{r}), \vec{r}\epsilon S_1 \end{cases}$$

Отримаємо два інтегральні рівняння на границі

$$2\pi\psi_0(\vec{\xi}) + \oint\limits_{S_0} q^*(\vec{\xi},\vec{r})\psi_0(\vec{r})dS(\vec{r}) + \int\limits_{S_1} q^*(\vec{\xi},\vec{r})\psi_1(\vec{r})dS(\vec{r}) =$$
$$= \int\limits_{S_0} u^*(\vec{\xi},\vec{r})\frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})}dS(\vec{r})$$

$$2\pi\psi_1(\vec{\xi}) + \oint\limits_{S_0} q^*(\vec{\xi},\vec{r})\psi_0(\vec{r})dS(\vec{r}) + \int\limits_{S_1} q^*(\vec{\xi},\vec{r})\psi_1(\vec{r})dS(\vec{r}) =$$
$$= \int\limits_{S_0} u^*(\vec{\xi},\vec{r})\frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})}dS(\vec{r})$$

В аксіально симетричному випадку

$$\oint\limits_{S} f(\vec{r})dS(\vec{r}) = \oint\limits_{\Gamma} \rho d\Gamma \int\limits_0^{2\pi} f(\vec{r})d\alpha$$

Використаємо це

$$2\pi\psi_0(\vec{\xi}) + \int\limits_{\Gamma_0} \psi_0(\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) \int\limits_0^{2\pi} q^*(\vec{\xi},\vec{r})d\alpha +$$
$$+ \int\limits_{\Gamma_1} \psi_1(\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) \int\limits_0^{2\pi} q^*(\vec{\xi},\vec{r})d\alpha =$$
$$= \int\limits_{\Gamma_0} \frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})}\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) \int\limits_0^{2\pi} u^*(\vec{\xi},\vec{r})d\alpha$$

$$2\pi\psi_1(\vec{\xi}) + \int_{\Gamma_0} \psi_0(\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) \int_0^{2\pi} q^*(\vec{\xi},\vec{r})d\alpha +$$
$$+ \int_{\Gamma_1} \psi_1(\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) \int_0^{2\pi} q^*(\vec{\xi},\vec{r})d\alpha =$$
$$= \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})}\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) \int_0^{2\pi} u^*(\vec{\xi},\vec{r})d\alpha$$

Розіб’ємо границю вільної поверхні на m граничних елементів, а загальну кількість граничних елементів позначимо як n. Інтеграли від функції Гріна та її нормальної похідної за кутом позначимо як $\tilde{u}^*$ та $\tilde{q}^*$. Тоді інтеграл за всією границею розпадається на n інтегралів за граничними елементами.

$$2\pi\psi_0(\vec{\xi}) + \sum_{k=1}^{m} \int_{\Gamma_k} \psi_0(\vec{r})\tilde{q}^*(\vec{\xi},\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) +$$
$$+ \sum_{k=m+1}^{n} \int_{\Gamma_k} \psi_1(\vec{r})\tilde{q}^*(\vec{\xi},\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \int_{\Gamma_k} \frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})}\tilde{u}^*(\vec{\xi},\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r})$$

$$2\pi\psi_1(\vec{\xi}) + \sum_{k=1}^{m} \int_{\Gamma_k} \psi_0(\vec{r})\tilde{q}^*(\vec{\xi},\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) +$$
$$+ \sum_{k=m+1}^{n} \int_{\Gamma_k} \psi_1(\vec{r})\tilde{q}^*(\vec{\xi},\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \int_{\Gamma_k} \frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})}\tilde{u}^*(\vec{\xi},\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r})$$

Невідомими є лише значення потенціалу, тому скористаємось теоремою про середнє та винесемо потенціал у деяких точках за знак інтегралу.

$$2\pi\psi_0(\vec{\xi}) + \sum_{k=1}^{m} \psi_0(\vec{r}_k) \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{\xi},\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) +$$
$$+ \sum_{k=m+1}^{n} \psi_1(\vec{r}_k) \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{\xi},\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) =$$
$$= \frac{\omega^2}{g} \sum_{k=1}^{m} \psi_0(\vec{r}_k) \int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{\xi},\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r})$$

$$2\pi\psi_1(\vec{\xi}) + \sum_{k=1}^{m} \psi_0(\vec{r}_k) \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{\xi},\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{n} \psi_1(\vec{r}_k) \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{\xi},\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) =$$

$$= \frac{\omega^2}{g} \sum_{k=1}^{m} \psi_0(\vec{r}_k) \int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{\xi},\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r})$$

Оберемо на кожному граничному елементі т.з. точку колокації і створимо систему алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих значень потенціалу.

Введемо позначення

$$Q_{ik}^{00} = \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i,\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) \,, \vec{r}_i \epsilon S_0, \vec{r}_k \epsilon S_0$$

$$Q_{ik}^{01} = \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i,\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) \,, \vec{r}_i \epsilon S_0, \vec{r}_k \epsilon S_1$$

$$Q_{ik}^{10} = \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i,\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) \,, \vec{r}_i \epsilon S_1, \vec{r}_k \epsilon S_0$$

$$Q_{ik}^{11} = \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i,\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) \,, \vec{r}_i \epsilon S_1, \vec{r}_k \epsilon S_1$$

$$U_{ik}^{00} = \int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{r}_i, \vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}), \vec{r}_i \epsilon S_0, \vec{r}_k \epsilon S_0$$

$$Q_{ik}^{10} = \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}), \vec{r}_i \epsilon S_1, \vec{r}_k \epsilon S_0$$

Система лінійних рівнянь у матричній формі має наступний вигляд

$$2\pi\delta_{ik}\psi_{0k} + Q_{ik}^{00}\psi_{0k} + Q_{ik}^{01}\psi_{1k} = \frac{\omega^2}{g}U_{ik}^{00}\psi_{0k}$$

$$2\pi\delta_{ik}\psi_{1k} + Q_{ik}^{10}\psi_{0k} + Q_{ik}^{11}\psi_{1k} = \frac{\omega^2}{g}U_{ik}^{10}\psi_{0k}$$

Виражаємо ψ_{1k} із другого рівняння

$$\psi_{1k} = (2\pi\delta_{ik} + Q_{ik}^{11})^{-1}\left(\frac{\omega^2}{g}U_{ik}^{10} - Q_{ik}^{10}\right)\psi_{0k}$$

Підставимо цей вираз у перше рівняння

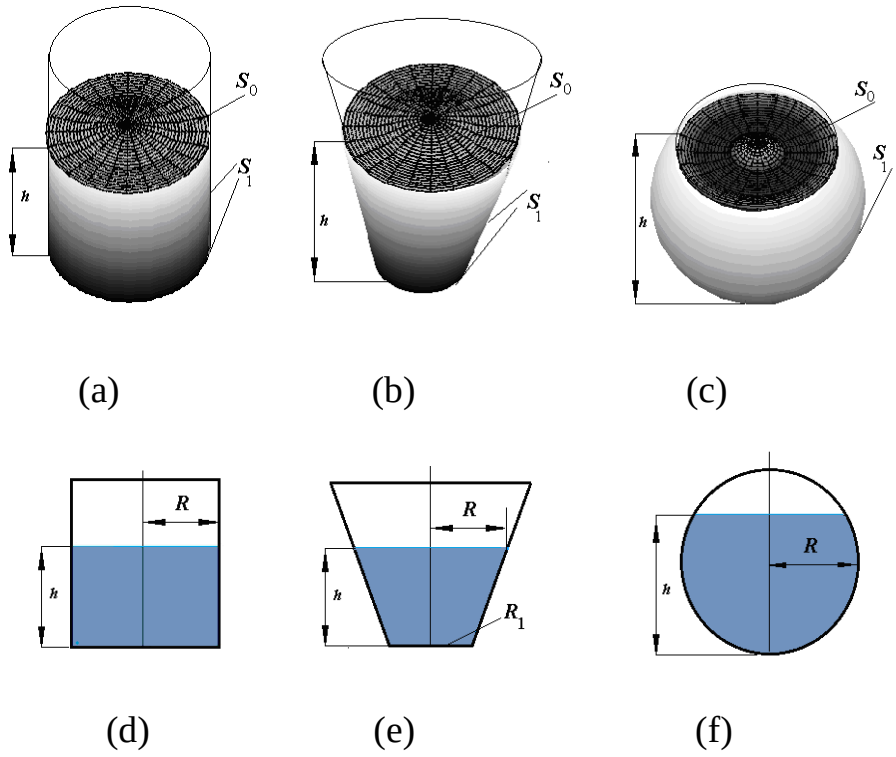
$$\left(2\pi\delta_{ik} + Q_{ik}^{00}\right)\psi_{0k} + \frac{\omega^2}{g}Q_{ik}^{01}(2\pi\delta_{ik} + Q_{ik}^{11})^{-1}U_{ik}^{10}\psi_{0k} -$$
$$- Q_{ik}^{01}(2\pi\delta_{ik} + Q_{ik}^{11})^{-1}Q_{ik}^{10}\psi_{0k} = \frac{\omega^2}{g}U_{ik}^{00}\psi_{0k}$$

Звідси отримуємо задачу на власні вектори та власні значення, з якої і находимо частоти та потенціал.

$$\left(2\pi\delta_{ik} + Q_{ik}^{00} - Q_{ik}^{01}(2\pi\delta_{ik} + Q_{ik}^{11})^{-1}Q_{ik}^{10}\right)\psi_{0k} =$$
$$= \frac{\omega^2}{g}\left(U_{ik}^{00} - Q_{ik}^{01}(2\pi\delta_{ik} + Q_{ik}^{11})^{-1}U_{ik}^{10}\right)\psi_{0k}$$

4. ПЕРЕВІРКА ЗАПРОПОНОВАНОГО МЕТОДУ

Аксіально-симетричні гравітаційні функції стану та їх частоті були отримані числовим методом для циліндричних, конічних та сферичних резервуарів в постійному гравітаційному полі з урахуванням гравітаційно-капілярних ефектів. Для всіх розглянутих типів резервуарів рівень заповнення позначено як h.



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

Рис.2. Частково заповнені аксіально-симетричні резервуари з рідиною

Чисельні розв’язки обчислені використовуючи метод граничних елементів, що був описаний вище. В даному дослідженні для циліндричних та конічних резервуарів було використано 100 граничних елементів на дні, та 100 граничних елементів уздовж лінії вільної поверхні. Для сферичних резервуарів використано 200 елементів уздовж сферичної частини та 150 елементів на

вільній поверхні. Подальше збільшення кількості граничних елементів не приводило до суттєвих змін результатів.

Для перевірки запропонованого методу було проведено порівняння з аналітичним розв'язком (2.6), (2.7).

Порівняння аналітичного та числового розв'язків представлено у Таблиці 1.

Метод	Частота ω_k^2 / g				
	Порядок моди k				
	1	2	3	4	5
Запропонований МГЕ	3.884	7.365	10.235	15.703	20.956
Аналітичний розв'язок	3.888	7.361	11.226	15.689	20.939

Таблиця 1. Порівняння числового та аналітичного розв'язків

Подалі ми розглядали плескання в конічних резервуарах. Ми розглядали наступні параметри геометричної форми: R = 1m, h = 1 m.

У Таблиці 2 та Таблиці 3 наведено частотні параметри для конічних резервуарів з урахуванням та без урахування капілярних ефектів.

Метод	Частота $\omega_k^{(g)2} / g$				
	R_1, m				
	0.8	0.6	0.4	0.2	0.1
[19]	3.386	3.386	3.382	3.139	2.187
МГЕ	3.389	3.390	3.391	3.192	2.200

Таблиця 2. Частоти для конічних резервуарів без урахування капілярних ефектів

Частота $\omega_k^{(g)2} / g$				
R_1, m				
0.8	0.6	0.4	0.2	0.1
3.428	3.429	3.430	3.225	2.211

Таблиця 3. Частоти для конічних резервуарів з урахування капілярних ефектів

Сферичні плескання представлені в таблицях 4 і 5.

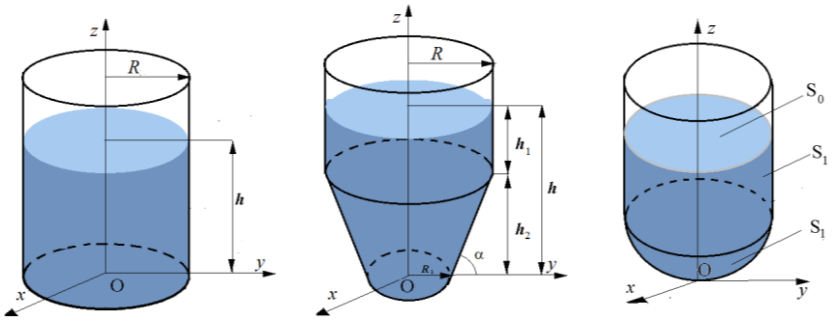
k	Метод	Частота $\omega_k^{(g)2} / g$
		Рівень заповнення h, m

		0.2	0.6	1.0	1.8	1.99
1	[20]	3.8261	3.6501	3.7451	6.7641	29.2151
	BEM	3.8314	3.6510	3.7456	6.7665	29.1811
2	[20]	9.2561	7.2659	6.9763	12.1139	52.0467
	BEM	9.2686	7.2684	6.9780	12.1205	52.0255

Таблиця 4. Частоти аксіально-симетричних плескань в сферичному резервуарі

k	Метод	Частота $\omega_k^{(g)2}/g$				
		Рівень заповнення *h*, *m*				
		0.2	0.6	1.0	1.8	1.99
1	BEM	3.4201	3.6997	3.7981	7.0763	54.0299
2	BEM	10.0648	7.6524	7.3178	13.9011	192.8405

Таблиця 5. Частоти аксіально-симетричних плескань в сферичному резервуарі



(a) (b) (c)

Рис. 3. Різні типи резервуарів с рідиною

ВИСНОВКИ

У ході даного дослідження було отримано рівняння ідеальної рідини в постійному гравітаційному полі з урахуванням сил поверхневого натягу. Сили поверхневого натягу враховані як додатковий тиск за законом Лапласа-Юнга, що суттєво коригують рівняння Бернуллі та робить його суттєво нелінійним. Отримана повна система рівнянь для потенціалу швидкості в гравітаційному полі з урахуванням поверхневого натягу.

Для обчислення вільних коливань гравітаційно-капілярних хвиль було використано розкладання потенціалу швидкості за стаціонарними станами суто гравітаційної задачі. Після знаходження суто гравітаційних частот отримана формула зв’язку між загальними частотами гравітаційно-капілярної задачі та частот виключно гравітаційної задачі. У випадку прямого циліндра отримано аналітичний розв’язок, який використовувався в подальшому для валідації результатів.

Для чисельного моделювання гравітаційно-капілярних хвиль використано метод граничних елементів, що є дискретною моделлю сингулярних інтегралів з третьої формули Гріна.

Отримані формули та метод було протестовано для знаходження частот прямого циліндра, а також циліндричних та конічних резервуарів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Черток Б. Е. Ракеты и люди. В 4 т. Т. 2 / Б. Е. Черток. – 2-е издание – М. : Машиностроение, 1999. – 416 с.

2. Б.И. Рабинович Неустойчивость жидкостных ракет и космических аппаратов. ИКИ РАН, Москва, 2006, режим доступу: http://www.iki.rssi.ru/books/2006rabinovich.pdf

3. Longitudinal instability of liquid rockets due to propulsion feedback /POGO/. SHELDON RUBIN Journal of Spacecraft and Rockets 1966 3:8, 1188-1195

4a. R.L. GOLDMAN, ELIMINATION OF THE POGO INSTABILITY FROM THE GEMINI LAUNCH VEHICLE, Editor(s): GEORGE HERRMANN, Dynamic Stability of Structures, Pergamon, 1967, Pages 157-166, ISBN 9781483198217, https://doi.org/10.1016/B978-1-4831-9821-7.50014-4. (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781483198217500144)

4б G.F. Mcdonough, Stability problems in the control of Saturn launch vehicles, editor(S): George Herrmann, Dynamic Stability of Structures, Pergamon, 1967, Pages 113-127, ISBN 9781483198217, https://doi.org/10.1016/B978-1-4831-9821-7.50012-0.
(https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781483198217500120)

4. Goerner E.E. LOX prevalve to prevent on POGO effect on Saturn5 // Space/ Aeronautics. 1968. V. 7. N° 50. P. 72–74

5. Rich R.L. Sanurn 5 POGO and solution // AIAA Structural Dynamics and Materials Conf. New Orleans Louisiana, Apr. 1969. P. 32–41.

6. Von Pragenau, G. L. Stability of constant-gain systems with vector feedback Marshall Space Flight Center NASA-TN-D-5714, M208 933-50-00-00-00 , Washington, March. 1970. 38 pages

7. Application of Remote Sensing to the Chesapeake Bay Region. A Conference Held At Coolfont Conference Center, Berkeley Springs, West Virginia. Volume 2: Proceedings (NASA CONFERENCE PUBLICATION, NO. 6), Apr. 12-15. 1977. 404 pages. P. 443–469.

8. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М., «Машиностроение», 1975, 416 с.

9. Fenwick, J. (Spring 1992). POGO. Threshold: Pratt & Whitney Rocketdyne's Engineering Journal of Power Technology. http://www.engineeringatboeing.com/articles/pogo.htm

10. Нариманов Г. С. Динамика деформируемых систем. – М. : Военная арт. инж. академия им. Ф.Э. Дзержинского, 1958. – 175 с.

11. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью М.: Машиностроение, 1968. – 532 с.

12. Абгарян К. А., Калязин Э. Л., Мишин В. П. и др. под общ. ред. Мишина В. П. Динамика ракет: Учебник для студентов вузов / - 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1990. – 464 с.

13. Микишев Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М. : Машиностроение, 1978. – 248 с.

14. Натанзон М. С. Продольные автоколебания жидкостной ракеты / М. С. Натанзон. – М. : Машиностроение, 1977. – 208 с.

15. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов / Б. И. Рабинович. – М. : Машиностроение, 1983. – 296 с.

16. Dotson K. Mitigating Pogo on Liquid-Fueled Rockets / K. Dotson // Crosslink. Aerospace Corporation magazine of advances in aerospace technology. – 2003. – Winter. – P. 26 – 29.

17.Raji, R & Jancy, Rose & Murali, P & Neetha, R. (2019). POGO Stability Analysis of a typical Launch vehicle for studying the effectiveness of POGO

corrector in cryo stage. Journal of Physics: Conference Series. 1355. 012020. 10.1088/1742-6596/1355/1/012020.

18. Lock M. Active Suppressor of POGO on the Space Shuttle / M. Lock, S. Rubin. – San Diego : Aerospace Corporation, NASA, 1974. – 87 p.

19. Oppenheim B. W. Advanced Pogo Stability Analysis for Liquid Rockets / B. W. Oppenheim, S. Rubin // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1993. – Vol. 30, No. 3. – P. 360 – 373.

20 B. Bjelde, P. Capozzoli, G. Shotwell, The SpaceX Falcon 1 Launch Vehicle Flight 3 Results, Future Developments, and Falcon 9 Evolution, 59th International Astronautical Congress, Paper nr. IAC08.D2.1.3.

21. Определение параметров колебаний топлива в баках космических ступеней ракет-носителей перед повторными запусками маршевого двигателя при малых уровнях заполнения / А.Д. Николаев, И.Д. Башлий // Техническая механика. — 2013. — № 3. — С. 10-20. — Бібліогр.: 18 назв. — рос. URI: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/88399

22. Belew, Leland F. & Stuhlinger, Ernst. & George C. Marshall Space Flight Center. (1973). Skylab a guidebook. [Huntsville, Ala.] : George C. Marshall Space Flight Center, National Aeronautics and Space Administration, http://purl.access.gpo.gov/GPO/LPS70430

23. Bauer, H. & Eidel, W.. (1993). Hydroelastic Vibrations in a Circular Cylindrical Container With a Flexible Bottom in Zero Gravity. Journal of Fluids and Structures - J FLUID STRUCTURE. 7. 783-802. 10.1006/jfls.1993.1046.

24. Bauer, H.F. & Eidel, W.. (1991). Axial response of an amphora-type liquid column. Acta Astronautica. 25. 699–707. 10.1016/0094-5765(91)90046-8.

25. Bauer H. F. (1993), Theoretical micro-gravity fluid dynamics, Proc. Symp. Aerospace and Fluid Science, Inst. Fluid Sci., Tokyo University, 30–49.

26. R.J. Hung, C.C. Lee, F.W. Leslie, Similarity rules in gravity jitterrelated spacecraft liquid propellant slosh waves excitation, Journal of Fluids and Structures,

Volume 6, Issue 4, 1992, Pages 493-522, ISSN 0889-9746, https://doi.org/10.1016/0889-9746(92)90028-2.

27. Луковский И. А., Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. Киев: Наукова думка, 1990. 296 с.

28. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И., Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Москва: Машиностроение, 1968. 532 с.

29. Моисеев Н. Н., Румянцев В .В., Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. Москва: Наука, 1965. 439 с.

30. R.A. Ibrahim, Liquid Sloshing Dynamics. Cambridge University Press, New York, 2005. Ibrahim, R. (2005). Dynamics of rotating fluids. In Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications (pp. 693-751). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511536656.013

31. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C., Boundary Element Techniques. Springer-Verlag: Berlin and New York, p. 462, 1984.

32. Strelnikova, E. & Gnitko, Vasyl & Naumemko, Vitaly & Degtyarev, K.. (2018). Free vibrations of an elastic cylindrical shell coupled with liquid sloshing. Вісник Харківського національного університету. № 1156. 2015. С. 63-75.

33. Gnitko, V., Naumemko, Y., Strelnikova E. Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles, //International Journal of Applied Mechanics and Engineering 22 (4), pp.867-881, 2017.

34. Degtyarev K., Gnitko V., NaumenkoV., Strelnikova E., Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. //Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences, V1, No1, 14-27, 2016.

35. Strelnikova E.,Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid, Proc. of XXXII

Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. V.50, pp. 203-211, 2010.

36. Gnitko V., Degtyariov K., Naumenko V., Strelnikova E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. //Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements, V 5, No 3, pp. 317-328, 2017.

37. Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnyk U., BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank. // Engineering Analysis with Boundary Elements, V 67, pp. 13-25, 2016.

38. Gnitko V., Degtyariov K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM And FEM Analysis of Fluid-structure Interaction in Dual Compartment Tanks //Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements, V 6, No 6, pp. 976-988, 2018.