МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАУКОВО-НАВЧАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ та ЕНЕРГЕТИКИ

Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр

«Математична модель розвитку COVID-19 в Україні»

Виконав: студент 6 курсу, групи НФ-63
Чучко Д.Є
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма:
Прикладна фізика енергетичних систем
Керівник: док. ф.-м. наук, професор
Кокодій М.Г.
Рецензент:

Харків – 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра інформаційних технологій у фізико-енергетичних системах
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магістр
Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Руслан СУХОВ
підпис
"____"_____2021 року

ЗАВДАННЯ
НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ

Чучко Дмитро Євгенович

1. Тема роботи «Математична модель розвитку covid-19 в Україні» керівник роботи: Кокодій Миколай Григорович доктор фізико-математичних наук, професор.

Затверджено наказом по університету від "06" листопада 2021 року №0210-05/2147.

2. Строк подання студентом роботи 25.11.2021
3. Перелік питань, які потрібно розробити:
    1) Огляд літератури. Математичні моделі, які описують хід епідемії, зокрема – хід епідемії COVID-19. Методи аналізу моделей.
    2) Математична модель COVID-19 на основі функції Гауса. Перевірка моделі з використанням статистичних даних.
    3) Прогноз протікання епідемії з застосуванням математичної моделі.
4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми
2	Затвердження теми на кафедрі
3	Робота над літературою та іншими джерелами
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6	Написання третього розділу
7	Завершення написання дипломної роботи(висновки та література)
8	Подача науковому керівнику
9	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
10	Попередній захист
11	Захист

5. Дата видачі завдання

Студент _____ **Д.Є. ЧУЧКО**

підпис

Керівник роботи _____ **М.Г. КОКОДІЙ**

підпис

РЕФЕРАТ

Дмитро Чучко «Математична модель розвитку COVID-19 в Україні» Кваліфікаційна робота магістра прикладної фізики. - М.: ХНУ імені В. Н.Каразіна, 2021. - ___ с.

В даний час питання прогнозування епідемії мають велике значення і привертають увагу фахівців з різних областей. В даній роботі була розроблена математична модель епідемії для прогнозування піку епідемії та кількості захворівших людей. Побудовано прогноз розвитку епідемічної ситуації з оцінкою тривалості спалаху епідемії та оцінкою загального числа хворих. Проведено імітаційне моделювання процесу поширення захворювання. У результаті дослідження створено графіки, у яких відображено результати моделювання. Наведено порівняльний аналіз моделей, отриманих у процесі підбору параметрів. На основі моделі отримано варіанти прогнозів можливого розвитку епідемії COVID-19 в Україні.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: COVID-19, МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗ, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЕПІДЕМІЇ

РЕФЕРАТ

Дмитрий Чучко "Математическая модель развития COVID-19 в Украине" Квалификационная работа магистра прикладной физики. – М.: ХНУ имени В. Н.Каразина, 2021. – ___ с.

В настоящее время вопросы прогнозирования эпидемии имеют большое значение и привлекают внимание специалистов из разных областей. В данной работе была разработана математическая модель эпидемии для прогнозирования пика эпидемии и количества заболевших. Построен прогноз развития эпидемической ситуации с оценкой продолжительности вспышки эпидемии и оценкой общего числа больных. Проведено имитационное моделирование процесса распространения заболевания. В результате исследования созданы графики, в которых отражены результаты моделирования. Представлен сравнительный анализ моделей, полученных в процессе подбора параметров. На основе модели были получены варианты прогнозов возможного развития эпидемии COVID-19 в Украине.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: COVID-19, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ПРОГНОЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭПИДЕМИИ

ABSTRACT

Dmitry Chuchko “Mathematical model of COVID-19 development in Ukraine

” Qualification work of the master of applied physics. – Kharkiv. – V.N. Karazin KhNU, 2021. – ___ p.

Currently, the issues of forecasting the epidemic are of great importance and attract the attention of experts in various fields. In this paper, a mathematical model of the epidemic was developed to predict the peak of the epidemic and the number of sick people. The forecast of development of an epidemic situation with an estimation of duration of outbreak of epidemic and an estimation of total number of patients is constructed. Simulation of the process of disease spread is carried out. As a result of the study, graphs were created, which reflect the results of modeling. The comparative analysis of the models received in the course of selection of parameters is resulted. Based on the model, variants of forecasts of possible development of the COVID-19 epidemic in Ukraine are obtained.

KEY WORDS: COVID-19, MATHEMATICAL SIMULATION, FORECAST, MATHEMATICAL MODEL OF THE EPIDEMIC

ЗМІСТ

ВСТУП……..8

РОЗДІЛ 1. Теорія систем. Системний аналіз. Система і види систем……...9

1.1 Основні етапи математичного моделювання……...……12

РОЗДІЛ 2. Логістична модель Ферхюльста……...…….18

2.1Диференціальні рівняння теорії епідемій(Модель Бейлі)……...….20

2.2Модель розвитку епідемії в ізольованій системі…….…..25

РОЗДІЛ 3.Математична модель covid-19 в Україні……...……28

3.1 Модель епідемії коронавірусу в Асвтрії……...……28

3.2 Модель розвитку епідемії covid-19 в Україні……..……29

ВИСНОВКИ……...…32

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ……...……..33

ДОДАТКИ……..34

ВСТУП

Актуальність теми.

Моделювання є відображення дійсності з використанням заздалегідь вибраної описової мови. В результаті такої діяльності до аналізу включаються лише ті аспекти реальної системи, які входять до мети дослідження, інші ж у більшості випадків вважаються несуттєвими і не розглядаються у межах конкретної моделі. В даний час весь світ перебуває на карантині. Тому вміння аналізувати статистичні дані про хід епідемії covid-19 та прогнозувати їх є актуальною темою.

Методи дослідження. В даній роботі було розроблено математичну модель, основану на статистичних даних.

Мета роботи. Мета роботи полягає у розробці математичної моделі розповсюдження covid-19 та прогнозування її в майбутньому.

1. Теорія систем. Системний аналіз. Система і види систем

При вивченні різноманітних явищ у природі, фізичних, економічних та екологічних процесів фахівці різних галузей науки поряд із спеціальними методами дослідження використовують загальні підходи до досліджуваних явищ. Сукупність таких загальних підходів описана в рамках єдиної теорії - теорії систем. Загальна теорія, що вивчає складні зв'язки між елементами об'єктивної реальності, називається теорією систем. Застосування загальної теорії систем до вивчення реальних систем відкриває шлях до створення математичних моделей, що описують різні системи в термінах математичних рівнянь. Сукупність методів дослідження реальних систем за допомогою математичних моделей називається системним аналізом. Досліджувані об'єкти в теорії систем відносяться до поняття системи. Система є частиною об'єктивної реальності, обмеженою низкою умов. Він складається з менших одиниць, елементів, пов’язаних між собою різноманітними зв’язками. Представляємо досліджувану систему у вигляді замкнутої області (рисунок 1.1). Елементи системи показані у вигляді окремих блоків, з'єднаних між собою стрілками, що виражають зв'язки між елементами. Все, що знаходиться поза системою, називається середовищем. Система і середовище розділені оболонкою - кордоном системи. Вплив навколишнього середовища на систему та зворотний вплив системи показано стрілками, спрямованими всередину та назовні від області. Поняття системи, межі системи та середовища є умовними і формуються дослідником у моменті постановки проблеми системного аналізу.

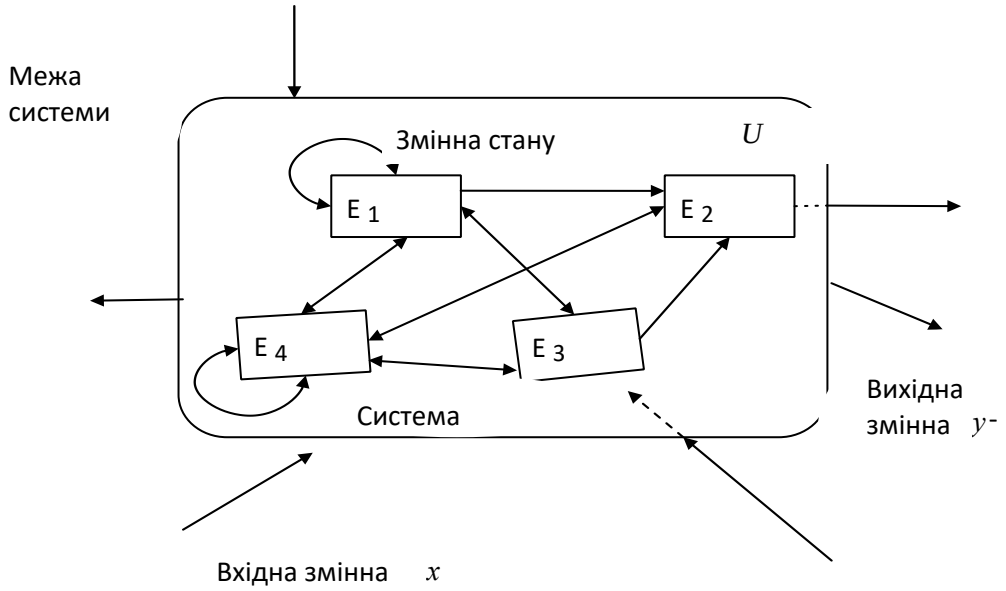


Рис.1.1. Схематичне зображення системи

Характеристики складних систем. Основним об'єктом досліджень в екології є екосистеми, що належать до розряду складних систем. Складні системи характеризуються наступними властивостями**:**

1. Складність. Розрізняють статичну (структурну) та динамічну складність. Структурна складність полягає в тому, що кількість та різноманітність елементів та видів зв'язків між елементами системи, а також між системою та навколишнім середовищем, дуже велика. Динамічна складність проявляється для систем із малою кількістю елементів, але зі складною поведінкою у часі.

2. Цілісність. Властивості системи є простою сумою властивостей елементів. Система може мати відмінні від властивостей окремих елементів, які стають явними тільки в результаті взаємодії її окремих елементів.

3. Багатомірна стійкість. Це здатність системи підтримувати свою структуру більш менш стабільною протягом деякого відрізка часу. Так, стійкість для

екосистем – це збереження числа видів та його кількісного співвідношення у цьому співтоваристві.

4. Спостережуваність. Інформацію про попередній стан системи можна отримати, виходячи з її нинішнього стану.

5. Керованість. Система може переходити з одного стану до іншого протягом певного проміжку часу. Система називається керованою, якщо її можна надавати цілеспрямоване вплив.

Структура екосистем. При моделюванні з урахуванням внутрішнього опису систем аналізується їх структура. Структура екосистем характеризується:

1 – фізичними умовами (розподіл простору, світлові та енергетичні умови), хімічними умовами;

2 – біологічними умовами (трофічний рівень, екологічні спектри);

3 – тимчасовою структурою (сукцесії та еволюція системи).

Аналіз структури системи дозволяє виділити основні елементи системи, кількісні характеристики яких слід включити до математичної моделі. Зв'язки між елементами екосистем, а також між екосистемою та навколишнім середовищем визначаються циркуляцією речовини, енергії та інформації. При аналізі системи для кількісного вираження перенесення речовини та енергії вводяться різні змінні (рис.1.2). Змінні U_i , що вводяться для кількісного вираження внутрішніх властивостей системи, називаються змінними станами.

Вплив навколишнього середовища на систему визначається через вхідні змінні x_i (біологічні, хімічні, метеорологічні умови, географічне положення тощо). До змінних, що обурюють d_i відносять випадкові впливи навколишнього середовища. Змінні стани, які визначає дослідник, а також вплив системи на навколишнє середовище, відносять до вихідних змінних y_i.

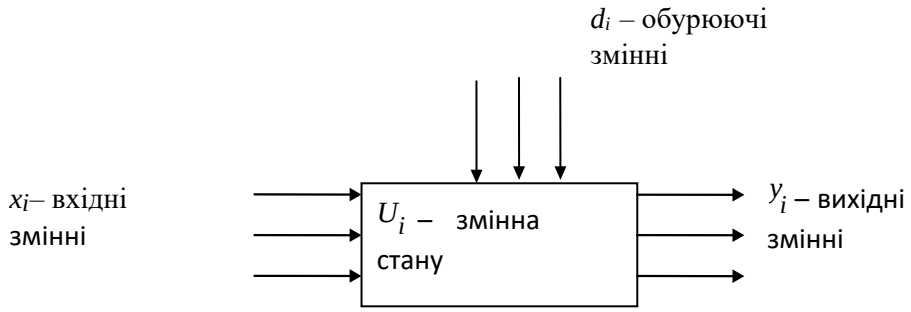


Рис.1.2

1.1Основні етапи математичного моделювання.

Загальна схема етапів математичного моделювання подано на рис. 1.1. Математичне моделювання систем починається із вибору реальної системи. До реальних систем в екології відносяться - водоймище, лісова екосистема, повітряне середовище міста, економіка міста, епідемії тощо. Вибір системи для моделювання залежить від багатьох причин – об'єктивних та суб'єктивних. Вирішення не всіх екологічних проблем потребують математичного моделювання. Велика кількість природоохоронних завдань може бути вирішена без залучення математики, лише на основі очевидних практичних дій у різних екосистемах, промисловості, міському господарстві тощо. У той же час існує велика кількість важливих екологічних проблем, які не можуть бути вирішені без попереднього математичного моделювання. Неабиякою мірою постановка завдання математичного моделювання залежить від рівня розвитку економіки країни та рівня ставлення суспільства до екологічних проблем.

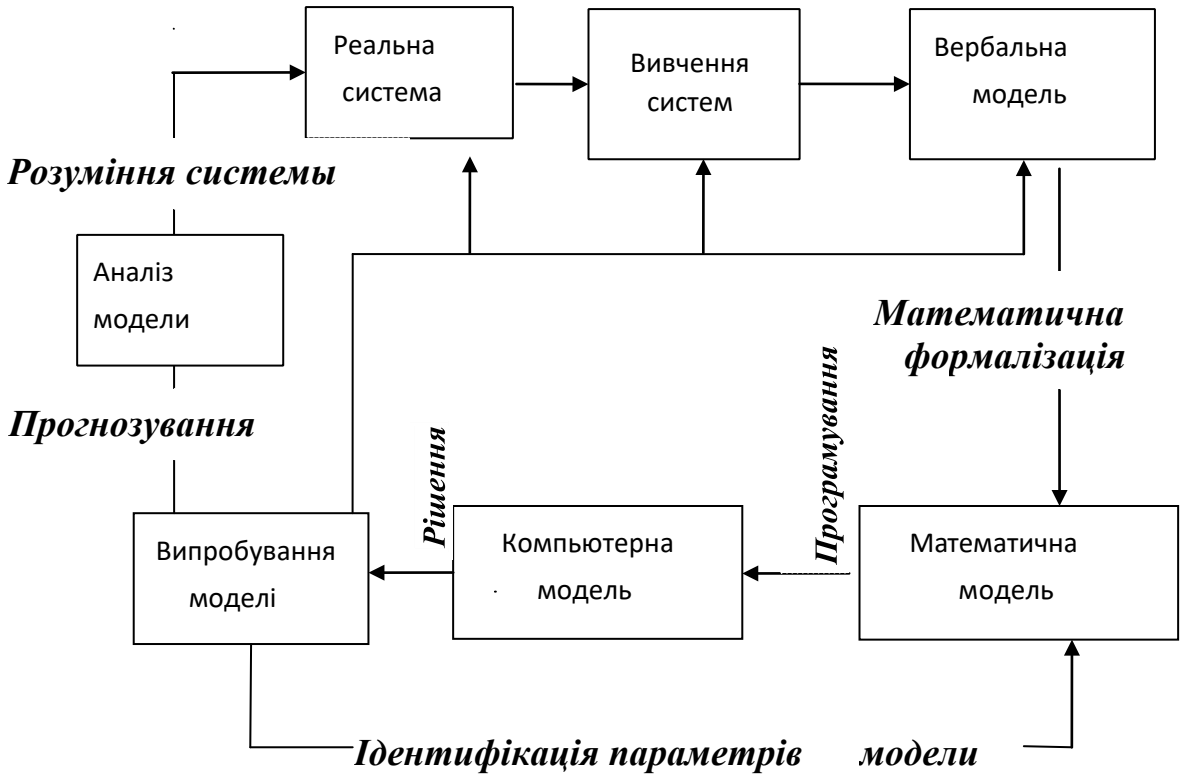


Рис.1.1. Основні етапи математичного моделювання

Після того, як поставлено мету – моделювання тієї чи іншої реальної системи, першим етапом стає вивчення системи. Він включає збір попередньої інформації про моделювану систему: результати попередніх досліджень (літературні дані, дані від замовника і т.п.), постановка власних експериментів. Виконання першого етапу призводить до створення вербальної моделі – словесної моделі системи, що досліджується (описовий звіт, описова наукова стаття). Вербальна модель може давати досить повне уявлення про систему. Багато досліджень предметних фахівців – біологів, екологів, хіміків обмежуються створенням вербальної моделі системи. Але будь-яка словесна модель навіть за дуже великому обсязі важливої та корисної інформації має суттєве обмеження – вона дозволяє прогнозувати динаміку системи та коректно виявляти управляючі на систему з метою оптимізації її функціонування. Тож сучасних наук, зокрема й екології, наступним важливим етапом стає створення математичної моделі системи. Воно починається з математичної формалізації. Це уявлення у вигляді математичних змінних кількісних характеристик елементів системи

(чисельність популяції, концентрація забруднень, швидкість рідини у водоймищі, кількість продукції тощо). Поряд із змінними визначаються параметри, що характеризують інтенсивність різних екологічних, біологічних, хімічних та інших процесів в екосистемі (коефіцієнт народжуваності, коефіцієнт передачі інфекції, константа швидкості хімічної реакції тощо). Параметри можуть бути константами, а також функціями часу, просторових змінних та змінних систем. Математичну формалізацію та створення математичної моделі можна визначити як два кроки – аналіз та синтез. Аналіз систем: розкладання досліджуваної системи на підсистеми та елементи, виділення зв'язків між елементами та процесів у системі. Синтез: формулювання математичних рівнянь на основі вираження зв'язків змінних системи із законів збереження та гіпотез. Результатом синтезу стає математична модель. Математична модель – рівняння чи система рівнянь з урахуванням висловлювання зв'язків змінних через закони збереження (балансові співвідношення) чи гіпотез (припущення функціонування елементів системи). Математичні моделі в екології характеризуються комбінацією рівнянь, що виражають фізичні закони про взаємодію елементів у системі, та математичних гіпотез про характер залежності динаміки екологічних змінних від різних процесів. Так, наприклад, математична модель процесів у водойомі включає систему рівнянь гідродинаміки для опису руху рідкого середовища, рівняння конвективної дифузії з джерельними членами, що описують поширення і фізико-хімічну трансформацію антропогенних забруднень, а також рівняння для динаміки біотичних компонент у водоймі. Рівняння гідродинаміки є системою рівнянь у приватних похідних, що виражають закони збереження маси, імпульсу та енергії в одиниці об'єму водного середовища. Рівняння динаміки популяцій базуються на гіпотезах про взаємодію різних біотичних компонентів. Більшість математичних моделей реальних екосистем є системою з кількох рівнянь (наприклад, диференціальних), рішення якої аналітичними методами неможливе. І тут слід застосовувати методи обчислювальної математики.

Тому далі постає завдання реалізації математичної моделі, саме створення комп'ютерної програми вирішення рівнянь, що описують систему. Програмування – реалізація чисельного методу розв'язання системи рівнянь, що описують систему, за допомогою мови програмування або стандартного математичного пакета. Сучасний високий рівень розвитку обчислювальної математики характеризується наявністю великої кількості стандартних бібліотек програм різними мовами програмування, інтегрованих математичних пакетів (Mathematica, MatLab, Marple, MathCad тощо.). Окрім цього, наразі розвинені спеціальні програми розрахунку для різних предметних областей. Зокрема, такі пакети розв'язання задач механіки рідини та газу, так звані CFD (Computational Fluid Dynamics – Обчислювальна гідродинаміка) пакети (FLUENT, StarCD, CFX та ін.). Використання зазначених сучасних програмних можливостей суттєво полегшує вирішення задач математичного моделювання, зокрема й у екології. Після реалізації математичної моделі – створення власної комп'ютерної програми чи програми серед стандартного чи спеціалізованого пакета, ключовим стає питання достовірності реалізованої моделі. Настає етап, який можна назвати випробуванням моделі – етап перевірки адекватності створеної математичної моделі. Перевірка правильності розвиненої моделі починається з оцінки правдоподібності результатів, отриманих після розрахунку моделі. Розраховані значення змінних системи повинні відповідати умовам фізичної та математичної правдоподібності: чисельність популяції має бути позитивною величиною, межі зміни змінних повинні відповідати фізичним межам тощо. Помилки в моделі, що призводять до неправдоподібних результатів, зазвичай легко усуваються. Але правдоподібності розрахункових результатів, звичайно, недостатньо для того, щоб говорити про достовірність моделі. Основним способом перевірки математичної моделі є порівняння з результатами інших розрахункових робіт та з експериментальними даними. Реалізована математична модель може бути також протестована для деяких окремих випадків, коли можливі аналітичні рішення завдання. Загальною

рекомендацією тут може бути побажання порівнювати отримане рішення з усіма даними, з якими можливо, - будь-яке порівняння з позитивним результатом посилює впевненість у достовірності моделі, а також розуміння моделі та самої системи, що моделюється. Нерідко результати порівнянь з експериментом і з даними інших розрахункових робіт виявляються спочатку негативними, спостерігаються кількісні або навіть якісні розбіжності. Для виявлення причин цього слід критично проаналізувати усі попередні етапи моделювання. Створена модель може не враховувати якихось суттєвих процесів. При первинному формуванні моделі непросто виділити найважливіші та несуттєві процеси. Такий критичний аналіз якраз і є однією з цілей математичного моделювання. Наступним ключовим моментом є достовірність параметрів моделі. Рівняння моделі можуть бути придатними для опису низки однотипних процесів (наприклад, рівняння хімічної кінетики). Застосування різних значень параметрів описи конкретних процесів робить математичну модель цілком певної моделлю конкретної системи. І вибір правильних значень параметрів моделі відіграє важливу роль адекватності моделі реальної системи. Значення параметрів моделі зазвичай відомі з результатів наукових досліджень про конкретні процеси – взаємодії популяцій, хімічних реакцій, динаміки атмосфери тощо. І це значення визначаються з різною точністю. Крім того, параметри можуть бути функціями змінних системи (температури, густини популяції і т.д.), для вираження яких використовуються апроксимації, придатні в певних межах зміни. Таким чином, ці параметри можуть містити помилки, суттєві для результатів моделювання. До розходження з експериментальними даними можуть призвести помилкові гіпотези про характер взаємодії популяцій та неправильне написання рівнянь, що описують різні процеси. Джерелом помилок моделі може бути обраний чисельний алгоритм розв'язання рівнянь моделі. Залежно від типу рівнянь та характеру зміни змінних системи можуть вибиратися різні чисельні методи: методи кінцевих різниць, кінцевих обсягів чи кінцевих елементів. Усі чисельні методи базуються на сіточному розбиття

розрахункової галузі. Правильне сіткове розбиття є необхідною умовою отримання сталого чисельного рішення. Отже, всі етапи моделювання можуть вносити в модель неточності та відповідальними за достовірність результатів. Тому за наявності розбіжностей у розрахунку та експерименті слід критично поставитися до цих етапів формування моделі та проаналізувати їх знову. Найчастіше час, витрачений на доведення математичної моделі, може перевищувати час створення початкової моделі. Після того, як математична модель та її комп'ютерна реалізація починають давати достовірні результати, дослідник отримує віртуальний інструмент для дослідження системи. Одиночний розрахунок за створеною програмою означає реалізацію того чи іншого сценарію у реальній системі. Програма містить набір вхідних і вихідних параметрів, варіювання яких дозволяє реалізовувати безліч різних сценаріїв для системи, що моделюється. Залежно від часу одиничного розрахунку дослідник може проводити багаторазові параметричні дослідження чи поставити завдання оптимізації.

2. Логістична модель Ферхюльста

Одна з найпоширеніших математичних моделей для опису динаміки населення та поширення епідемій заснована на логістичному рівнянні (звичайному диференціальному рівнянні першого порядку), запропонованому бельгійським математиком П'єром Ферхюльстом(2.1):

$$\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{rN}(1 - \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}_\infty}) \quad (2.1)$$

де N(t) – кількість хворих людей при епідемії, N_∞ – максимально можливе число хворих людей і r – швидкість зростання епідемії (частота захворюваності). Математично, це рівняння добре досліджено. Його рішення тривіально перебуває у вигляді:

$$N(t) = \frac{\mathrm{N}_0\mathrm{N}_\infty exp(rt)}{\mathrm{N}_\infty + \mathrm{N}_0[exp(rt) - 1]} \quad (2.2)$$

де N_0 - початкова кількість хворих людей і t - час, що відраховується від початку епідемії.

На рис. (2.1) показано зростання кількості хворих з часом: якщо в початковий момент часу зараженими є 0,1% від числа населення, що може перехворіти (червона суцільна лінія), 1% населення (синя штрихова лінія) і 10% населення (коричнева штрихпунктирна лінія). Зрозуміло, що зі збільшенням кількості спочатку заражених людей епідемія поширюється швидше і швидше. На початковому етапі $N_0/N_\infty << 1$ крива (2.2) трансформується в експоненту:

$$N(t) = N_0 exp(rt) \quad (2.3)$$

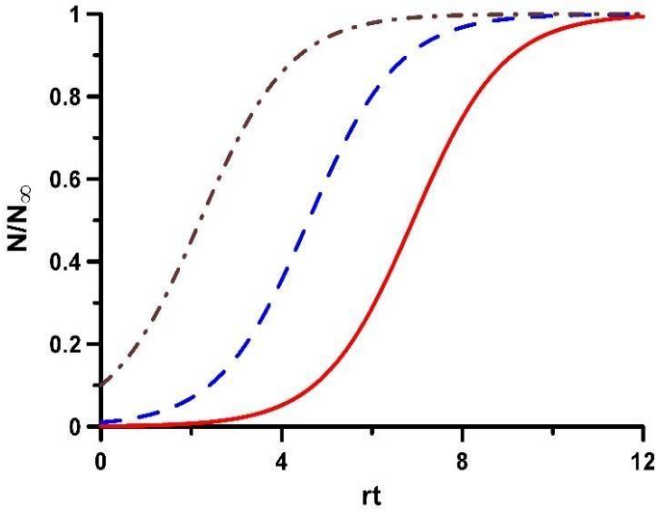


Рис. 2.1 Зростання числа хворих від часу, якщо в початковий момент часу зараженими є 0,1% населення (суцільна лінія), 1% населення (штрихова лінія) та 10 % населення (штрихпунктирна лінія)

Ця модель містить дві константи N_∞ і r, які, взагалі кажучи, невідомі

для епідемії, спричиненої вірусом нового типу. Вірусологи, проводячи досліди та аналізуючи колишні дані, можуть визначати ці коефіцієнти дуже грубо. На початковому етапі розвитку епідемії, використовуючи щоденні дані про кількість хворих людей, можна з (2.1) оцінити N_0 та r вже досить точно. Однак важливу характеристику максимальної кількості хворих N_∞ і тривалість епідемії в цей період знайти неможливо. Саме тому оцінки загальної кількості хворих людей та тривалості епідемії так різняться у різних джерелах. Зрештою, важливо відзначити роль адміністративних заходів у зменшенні епідемії. Так, закриття кордонів країн чи територіальних утворень дозволяє зменшити початкову кількість інфікованих хворих на N_0, а самоізоляція (карантин) – швидкість зростання епідемії r, що «розтягує» тривалість епідемії та дає можливість лікарям допомогти хворим. Для підготовки медичних закладів до роботи під час епідемії важливо знати кількість хворих на добу, що легко диференціюється (2.2):

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N_0 N_\infty (N_\infty - N_0) r\, exp(rt)}{(N_\infty + N_0[exp(rt) - 1])^2}, \quad (2.4)$$

і ця крива немонотонна (рис. 3.4) з максимумом:

$$max(\frac{dN}{dt}) = \frac{rN_\infty}{4}, \quad (2.5)$$

який припадає на якийсь час (пік епідемії):

$$T = \frac{1}{r} ln \frac{N_\infty - N_0}{N_0}, \text{ (2.6)}$$

Рівняння (3.4) навіть важливіше, ніж вихідне рівняння (2.1), оскільки знаючи параметри логістичної кривої, можна розрахувати час настання піку епідемії та кількість необхідних ліжок у лікарнях.

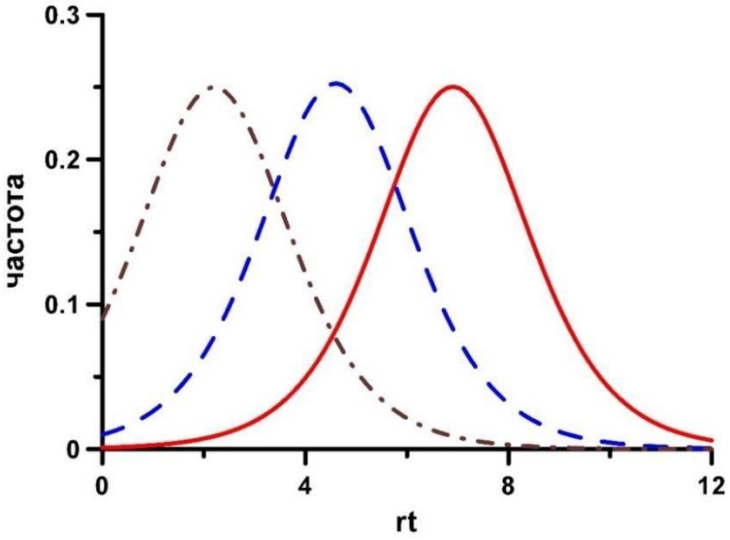


Рис.2.2 Залежність кількості хворих на добу – безрозмірна частота d(N/N_∞)/(rdt) (криві відповідають різному числу початкових інфікованих людей: 0,1% населення (суцільна лінія), 1% населення (штрихова лінія) та 10% населення (штрихпунктирна лінія))

2.1Диференціальні рівняння теорії епідемій(Модель Бейлі).

Розглянемо задачу про поширення епідемії інфекційного захворювання у межах однієї популяції. Нехтуючи неоднорідністю розподілу популяції по простору, введемо дві функції x(t) та y(t), що характеризують число незаражених і заражених осіб у момент часу t. У початковий час t=0 відомі x(0)=n и y(0)=a.

Щоб сформулювати математичну модель, скористаємося гіпотезою: інфекція передається під час зустрічі заражених осіб із незараженими, тобто кількість незаражених буде зменшуватися з часом пропорційно кількості зустрічей між тими та іншими, тобто. xy. На підставі прийнятого припущення висловимо спад Δx незаражених осіб за проміжок часу Δt у вигляді:

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = -\beta xy\Delta t \text{ (2.1.1)}$$

Величина β є коефіцієнт пропорційності. Перейдемо до (2.1.1) до межі при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{n\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=-\beta xy \quad (2.1.2)$$

Для замикання моделі вважатимемо, що хвороба не призводить до

смертності, отже, можна написати умову балансу:

$$a + n = x + y = \text{const} \quad (2.1.3)$$

Враховуючи (4.3) перепишемо (4.2):

$$\frac{dx}{dt}=-\beta x(n+a-x) (2.1.4)$$

$$x(0)=n \quad (4.5)$$

Формули (2.1.4), (2.1.5) являють собою математичну модель динаміки незаражених осіб. Коефіцієнт β пропорційності в моделі характеризує можливість передачі інфекції під час зустрічі. В загальному виді значення параметра β залежить від виду особи та типу хвороби. Вважаючи β постійною величиною, знайдемо рішення звичайного диференціального рівняння (2.1.4). Розділивши змінні (2.1.4), можемо переписати його у вигляді:

$$\frac{dx}{x(n+a-x)}=-\beta dt (2.1.6)$$

Розкладемо ліву частину (4.6) на прості дроби та проінтегруємо:

$$\frac{1}{n+a}\left(\frac{dx}{x}+\frac{dx}{n-x+a}\right)=-\beta dt$$

$$\frac{1}{n+a}(\ln x-\ln(n-x+a))=-\beta t+C$$

Потенціюючи останній вираз, прийдемо до рівності:

$$\frac{x}{n-x+a}=C_e^{-\beta(n+a)t} \quad (2.1.7)$$

Враховуючи початкову умову (2.1.5) з (2.1.7) отримаємо остаточний вираз для шуканої функції:

$$x(t)=\frac{n(n+a)}{n+ae^{\beta(n+a)t}} \quad (2.1.8)$$

При відомому x(t) число y(t) заражених осіб визначиться з умови балансу (2.1.3):

$$y = a + n - x \text{ (2.1.9)}$$

Приклади графіків функцій x(t) та y(t), обчислені за формулами (2.1.8, 2.1.9) при кількох значеннях параметра β наведено на рис. 2.1.1–2.1.2. Початкові значення числа незаражених та заражених особин прийняті рівними n=200, a=100. При збільшенні β швидкість передачі інфекції збільшується, і чисельність незаражених осіб падає швидше.

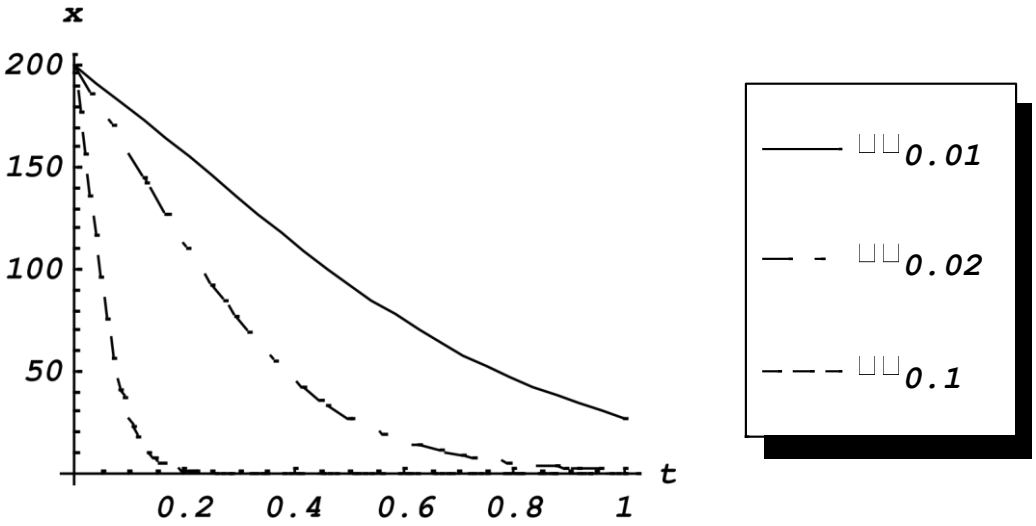


Рис. 2.1.1

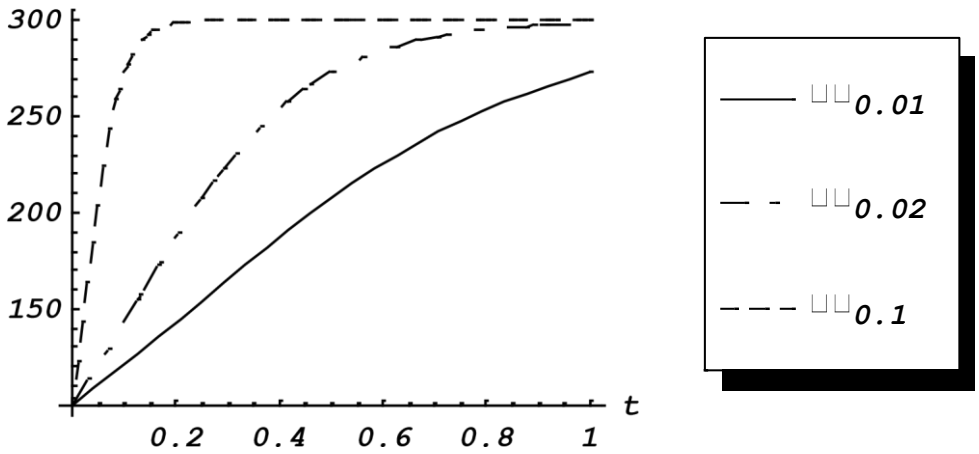


Рис. 2.1.2

Змінимо наведену модель, додаючи до неї ще один процес – одужання хворих осіб. Для цього введемо нову функцію z(t), що виражає число одужалих осіб. Нова математична модель може бути представлена системою рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta xy \\ \frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y \\ \frac{dz}{dt} = \gamma y \end{cases} (4.10)$$

де параметр γ характеризує ступінь одужання та визначається видом хвороби та типом особини. Число одужалих особин у початковий момент часу дорівнює нулю, тому початкові умови системи (4.10) приймуть вигляд:

$$x(0) = n, y(0) = a, z(0) = 0 \text{ (2.1.11)}$$

Умова балансу (4.3) перепишеться як:

$$x + y + z = n + a(2.1.12)$$

Розділивши друге рівняння (4.10) на перше, прийдемо до рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = -1 + \frac{\gamma}{\beta}\frac{1}{x}(2.1.13)$$

рішення якого з урахуванням початкових умов (4.11) запишеться так:

$$y + x - \frac{\gamma}{\beta} ln\, x = a + n - \frac{\gamma}{\beta} ln\, n(2.1.14)$$

Виключаючи y з (4.12) та (4.14) отримаємо зв'язок x та z у вигляді:

$$x = ne^{-\frac{\beta}{\gamma}z} \text{ (2.1.15)}$$

Виразивши за допомогою рівнянь (2.1.12), (2.1.14) та (2.1.15) зв'язок y через z та підставивши до третього рівняння (4.10), прийдемо до рівняння:

$$\frac{dz}{dt} = \gamma\left[n + a - z - ne^{-\frac{\beta}{\gamma}z}\right] \text{ (2.1.16)}$$

Результати розв'язання рівняння (4.16) з урахуванням початкової умови (2.1.11) при різних коефіцієнтах одужання наведено на рис. 2.1.3 - 2.1.5.

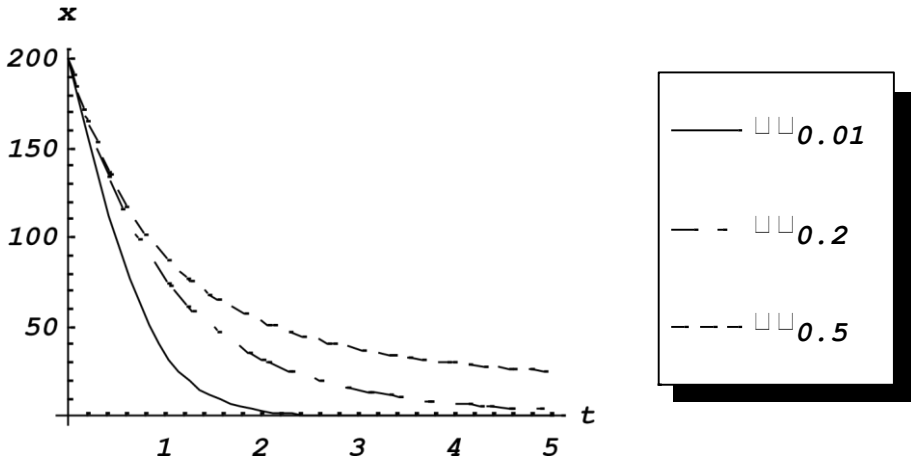


Рис. 2.1.3. Динаміка чисельності незаражених осіб за моделлю (2.1.10) для n=200; a=100, β=0.01

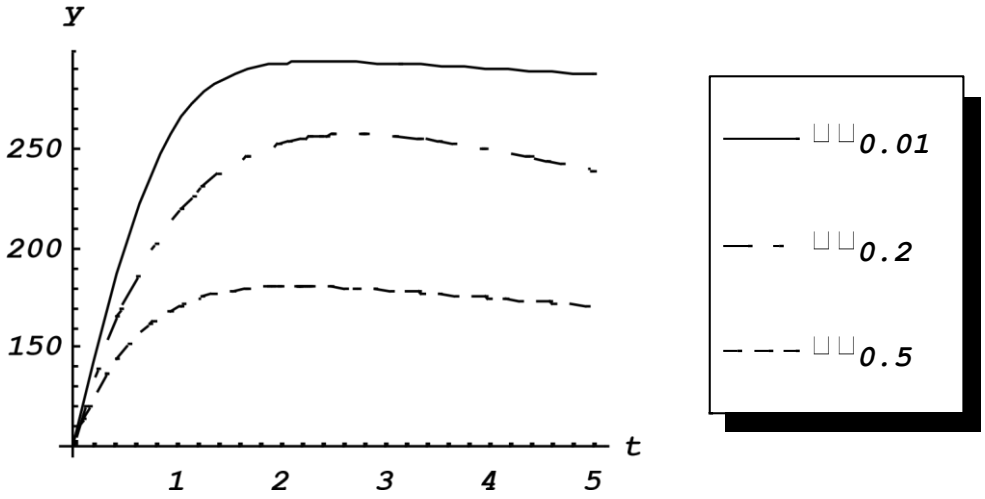


Рис. 2.1.4. Динаміка чисельності заражених осіб за моделлю (2.1.10) для n=200; a=100 , β=0.01

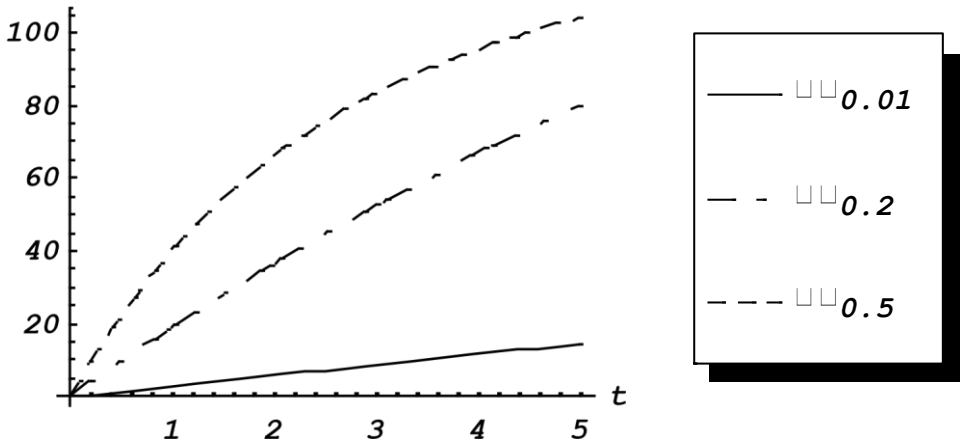


Рис. 2.1.5 Динаміка чисельності осіб, що одужали, за моделлю (2.1.10) для n=200; a=100 , β=0.01

2.2 Модель розвитку епідемії в ізольованій системі

Існують медичні проблеми, що стосуються розповсюдження хвороб. Припустимо у момент t = 0 в ізольованому населеному пункті виникла епідемія. При цьому x_0 - кількість людей здорових, але потенційно схильних до захворювання, а y_0 - кількість людей хворих що є носіями інфекції, z_0 - кількість людей що залишилися (ізольовані, померлі або такі, що видужали і стали несприйнятливими до захворювання). Вважаємо, що захворювання передається при контакті хворих із здоровими. Тому число нових захворювань буде пропорційне як числу джерел інфекції y, так і числу сприйнятливих індивідуумів x. Якщо n - частота контактів між ними, то число хворих за час t буде:

$$\Delta x = - \omega \, x \, \Delta t. \quad (2.2.1)$$

Отже, швидкість поширення захворювання дорівнює:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega x y \quad (2.2.6)$$

Знак мінус у рівнянні (5.1) стоїть тому, що число людей, які сприйнятливі до хвороби з часом зменшується. Швидкість зміни числа хворих дорівнює отриманій вище швидкості захворювання ωxy без врахування швидкості одужання хворих, яка тим вище, чим більше число хворих, тобто:

$$\frac{dy}{dt} = \omega x y - \frac{1}{\tau} y \quad (2.2.7)$$

де τ - середній час одужання.

Швидкість зміни числа людей, що перехворіли, дорівнює швидкості їх одужання із зворотним знаком:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\tau} y \quad .(2.2.8)$$

Таким чином, процес епідемії описується системою рівнянь (2.2.6) - (2.2.8) і початковими умовами:

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0, \qquad z(0) = z_0. \quad (2.2.9)$$

Рішення цих рівнянь у додатку А(програма MathCade) приведено нижче.

Приведемо декілька графіків з програми:

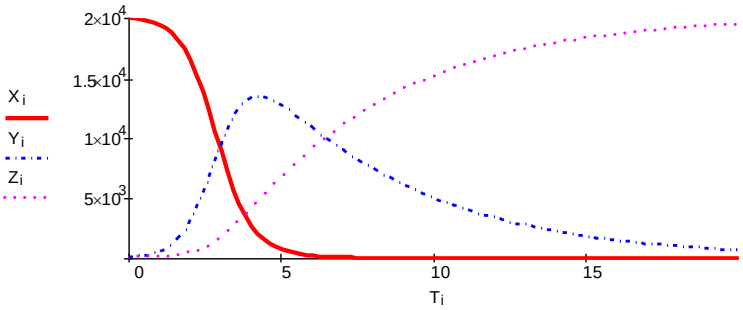


Рис. 2.2.1 а (де X - число здорових, Y - число хворих, Z - число видужавших)

Тут ми можемо побачити як пряма здорових стрімко падає (суцільна червона лінія), а число хворих зростає (синя штрих пунктирна лінія). Далі змінимо декілька початкових параметрів, де буде збільшена кількість початкових хворих осіб (рис 2.2.1 б) тривалість хвороби (2.2.1 в) та частота контакту між людьми (рис 2.2.1г):

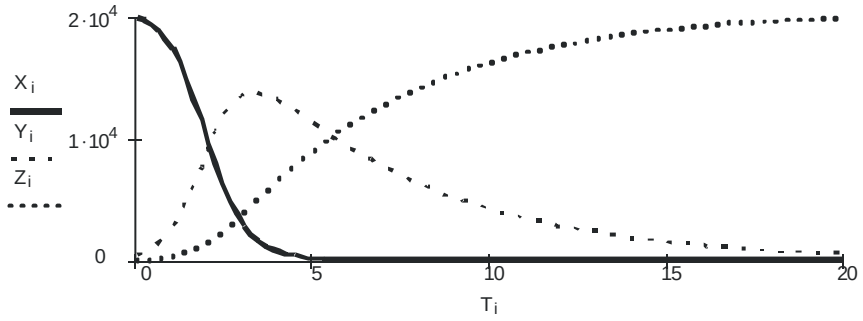


Рис. 2.2.1 б (де $\omega = 0{,}0001$; $\tau = 5$; $y_0 = 500$)

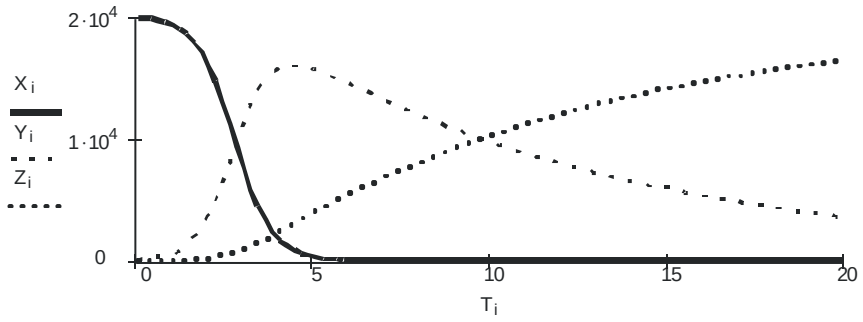


Рис. 2.2.1в (де $\omega = 0{,}0001$; $\tau = 10$; $y_0 = 100$)

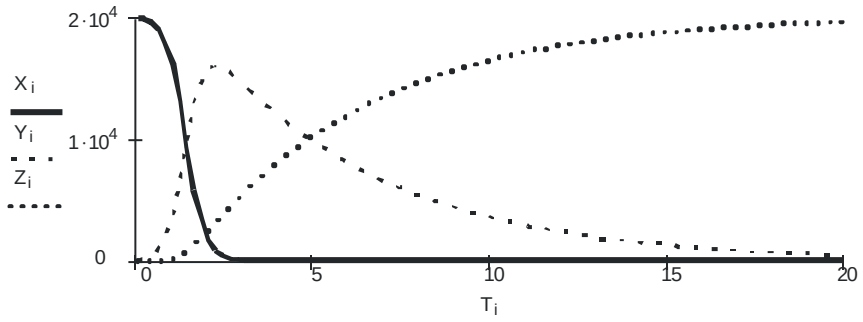


Рис. 2.2.1 г (де ω = 0,0002; τ = 5; y_0 = 100)

Набагато суттєво впливає збільшення ймовірності передачі захворювання при контакті між людьми. При ω = 0,0002 відбувається різке зростання числа хворих - максимум припадає на другий день, і його величина досягає 16000 чол. (рис. 2.2.1г).

Таким чином, навіть з простої математичної моделі видно, наскільки важливо зменшення контакту між хворими і здоровими людьми під час епідемії.

3. Математична модель covid-19 в Україні

Більшість моделей використовують систему диференціальних рівнянь, що враховують загальну кількість жителів S, зміна в часі числа хворих I, одужали і загиблих R - наприклад, моделі SIR, SEIR та ін. Недоліками цих моделей та інших, аналогічних їм, є:

- Необхідність чисельного розв'язання систем диференціальних рівнянь. Неможливість отримання формул, що описують процеси, що ускладнюються, сильно ускладнює аналіз отриманих результатів.

- При вирішенні необхідно підбирати значення кількох параметрів. Це часто призводить до неоднозначності одержаних результатів.

Нижче запропонована математична модель, перевірена на даних про епідемію коронавірусу в Австрії та використана для опису перебігу епідемії коронавірусу в Україні. У процесі дослідження статистичних даних про епідемію коронавірусу у різних країнах виявився несподіваний факт. Виявилося, що залежність числа хворих від часу добре описується функцією Гаусса:

$$f(t) = A\exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Була випробувана ця математична модель.

3.1 Модель епідемії коронавірусу в Асвтрії

Для перевірки працездатності моделі були використані статистичні дані про перебіг епідемії коронавірусу в Австрії за період з 26 лютого по 25 травня 2020 року. Результати моделювання показано на рис. 1.

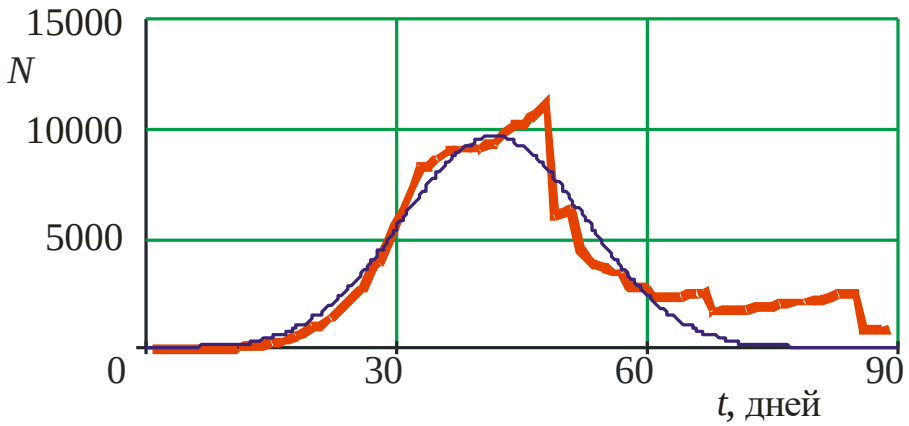


Рис. 1. Епідемія коронавіруса в Австрии

По осі абсцис відкладено дні. Один великий поділ – 1 місяць. Товста лінія – статистичні дані, тонка лінія – апроксимація шляхом найменших квадратів функцією Гаусса. Згідно з апроксимацією максимум епідемії настав на 42-й день (7 квітня). Кількість хворих у цей день – 9626 чол. Фактично максимум настав на 48-й день (13 квітня) при числі хворих цього дня – 11101 чол. Це непогана згода між статистичними та розрахунковими даними. Крива на спаді описує перебіг епідемії негаразд добре, як у підйомі. Це може бути обумовлено стрибками на статистичній кривій. Мабуть, реальна ситуація відображена неточно.

Було проведено чисельний експеримент із прогнозування перебігу епідемії: на основі даних за перші 30 днів зроблено припущення про розвиток епідемії надалі. Результати показано на рис. 2.

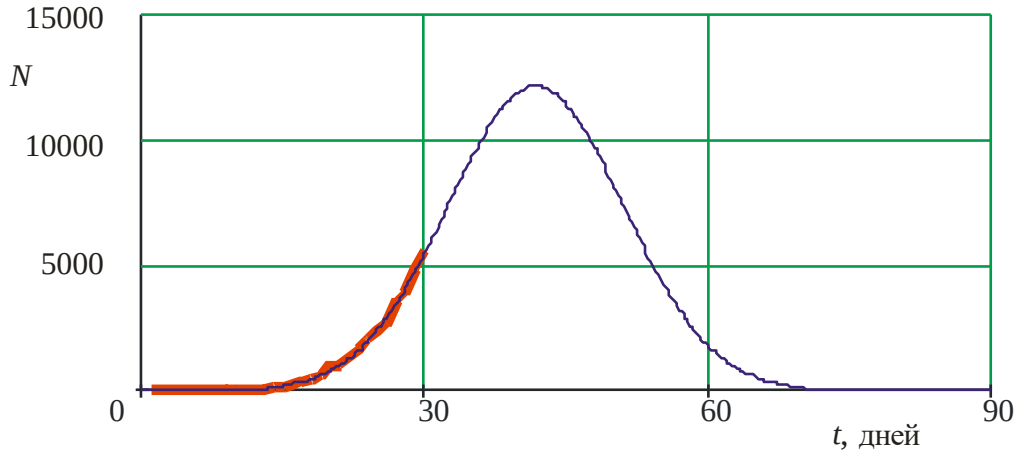


Рис. 2. Прогноз розвитку епідемії в Австрии

Згідно з прогнозом, максимум настане на 42-й день. Число хворих цього дня - 12097 осіб. Це цілком задовільно збігається із статистичними даними.

3.2 Модель розвитку епідемії covid-19 в Україні

Результати використання досліджуваної математичної моделі стосовно України показано на рис. 3.2.1 (період з 17 липня до 25 листопада). Рішення цієї задачі приведено у додатку Б(програма MathCade) Згідно з нею на 110 день настає максимум, що узгоджується з повідомленнями медиків.

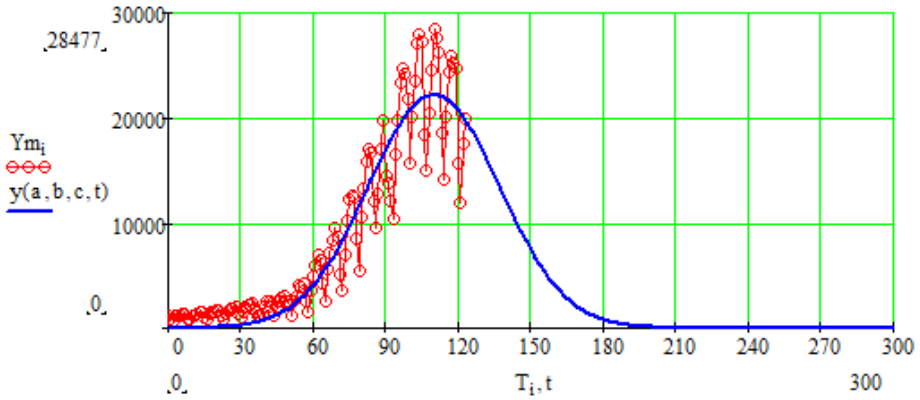


Рис. 3.2.1 Епідемія коронавірусу в Україні

Розвиток епідемії в Україні відбувається значно повільніше, ніж в Австрії. Там максимум був на 48-й день, в Україні – значно пізніше (за прогнозом моделі – на 110-й день, 12 жовтня). Число хворих у максимумі в обох країнах згідно з математичними моделями приблизно однаково – приблизно 10000 чол. в Австрії та 22243 чол. в Україні. Але оскільки населення України більше, то відсоток хворих у ньому менший. Можливо, це результат діяльності керівництва країни та медиків. Число хворих суттєво зменшиться до кінця листопаду.

На рис. 3.2.2 показано, як змінювалося кількість хворих на 1 день. Негативні значення показують, що у цей день хворих було менше, ніж попереднього.

Згладжена крива показує, що кількість хворих за 1 день почала зменшуватися, починаючи зі 111 дня.

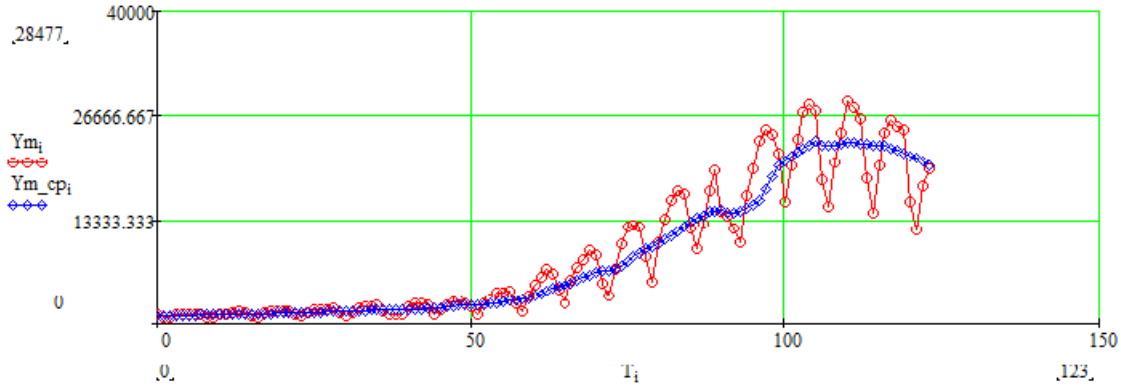


Рис. 3.2.2. Число хворих на 1 день (Україна)

Щоб переконатися у точності математичної моделі, було проаналізовано прогнози поведінки епідемії, кожні 14 днів. Тобто робився прогноз, виходячи, зі статистичних даних кожні 14 днів (2 тижні) додаток В (рис. 3.2.3-3.2.4):

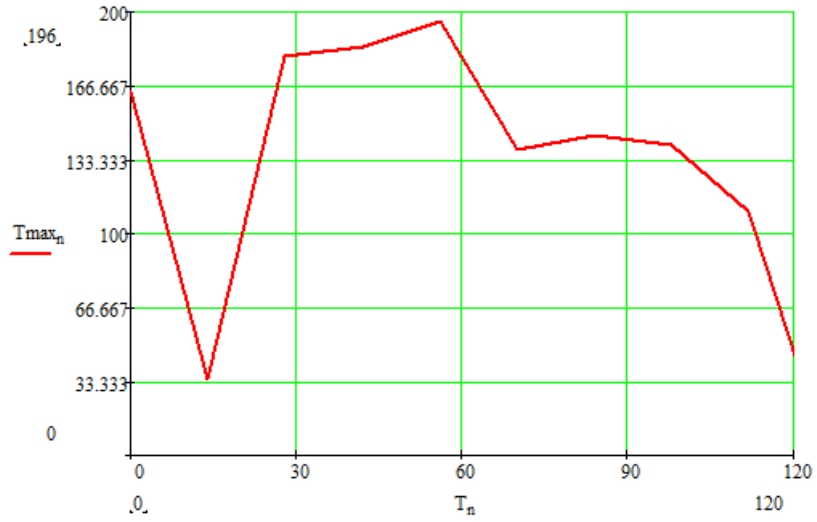


Рис. 3.2.3. Крива прогнозів в залежності від днів даних

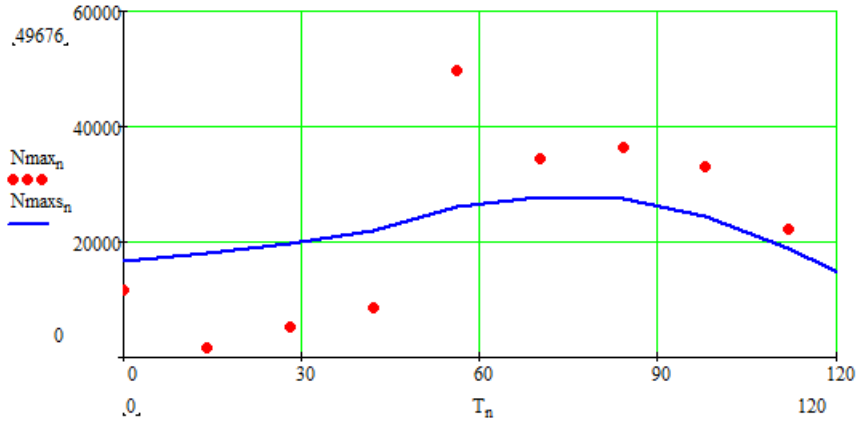


Рис. 3.2.4. Кількість хворих в день, залежна від кількості днів даних

Аналізуючи графік, можна зрозуміти, що на початку експерименту, коли даних було мало, прогноз був не дуже точний максимум епідемії прилягав на 160-ий день. Але з оновленням даних можна побачити, що пряма прогнозів почала вирівнюватися (140-130 днів). То можна зробити висновок, що математична модель є більш-менш точна.

Висновки

В даній роботі було розроблено математичну модель, яка описує перебіг епідемії коронавірусу. Основа моделі – апроксимація функцією Гауса. Модель дозволяє прогнозувати перебіг епідемії на основі відомостей про початкову тимчасову ділянку. Аналіз перебігу епідемії в Україні дає можливість визначити кількість хворих і час максимуму та час виходу з епідемії.

Параметри моделі епідемічної ситуації можна розділити на дві групи: постійні значення яких не змінюються і варіативні значення яких залежать від стадії епідемічного процесу. Для побудови адекватної моделі епідемічної ситуації на кожному етапі її розвитку необхідно заново обчислювати оцінки варіативних параметрів.

Частота контактів є постійним параметром. Одного разу побудована оцінка цього параметра може бути використана для моделювання та прогнозування епідемічної ситуації.

До варіативних параметрів відносяться агресивність зовнішніх ризиків, що визначає інтенсивність зараження від зовнішніх джерел, та ефективність профілактичних заходів, що характеризує рівень популяційного імунітету, сформованого внаслідок профілактики.

Управління епідемічною ситуацією може здійснюватися шляхом впливу на варіативні параметри за допомогою лікувально-профілактичних та санітарно-гігієнічних заходів(карантин, обмеження контакту між людьми, соціальна дистанція)

Перелік посилань

1. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. Пер. с англ. Е.Г. Коваленко. Москва: Мир; 1970.
2. Авилов К. Математическое моделирование в эпидемиологии как задача анализа сложных данных.
3. Бароян О.В., Рвачев Л.А. Математика и эпидемиология.
4. Боев. Б.В. Современные этапы математического моделирования процессов развития и распространения инфекционных заболеваний // Эпидемиологическая кибернетика: модели, информация, эксперименты.
5. Колесин И.Д., Житкова Е.М. Математические модели эпидемий.
6. Кащенко И.С., Кащенко С.А. Динамика уравнения с двумя запаздываниями, моделирующего численность популяции // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27. № 2. С. 21-38.
7. Gurtin M., MacCamy R. Nonlinear age-dependent population dynamics
8. Емельянов В.В., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Теория и практика эволюционного моделирования. М.: Физматлит, 2003. 432 с
9. Кокодій М.Г., Тіманюк В.О., Пєнкін Ю.М., Рижов О.А., Жук В.А. Комп'ютерне моделювання в курсах фізики і біофізики. Х.: Вид-во НФаУ, 2009. - 522 с.

Додаток А

Епідемія в ізольованій системі

$\omega = 0.0001$ - частота контактів між здоровими і хворими

$\tau = 5$ - тривалість хвороби (час видужання)

Початкові умови:

$$y := \begin{pmatrix} 20000 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Де 20000 – кількість здорових людей, 100 – кількість хворих, 50 – кількість людей, які не сприятливі до хвороби

$t_{min} = 0$ -початок періоду спостереження

$t_{max} = 20$ - кінець періоду спостережень

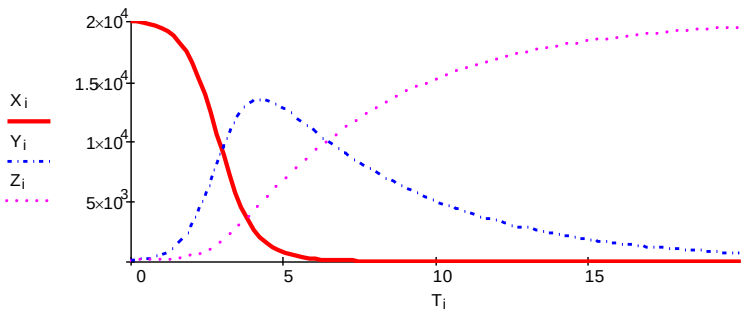
N=100 - кількість точок, в яких знаходиться рішення рівнянь

Рішення рівнянь методом Рунге-Кутта

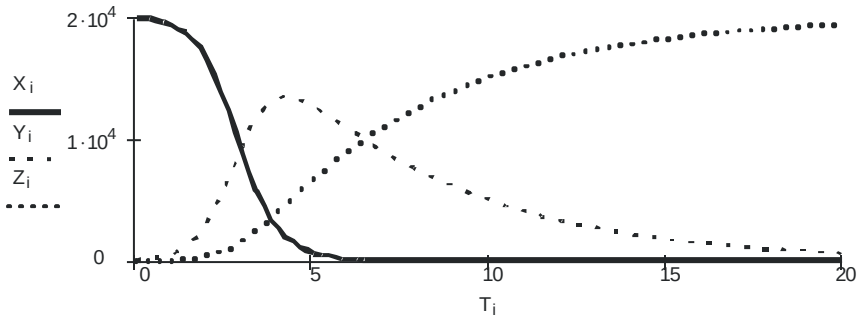
$$D(t, y) := \begin{pmatrix} -\omega \cdot y_0 \cdot y_1 \\ \omega \cdot y_0 \cdot y_1 - \frac{1}{\tau} \cdot y_1 \\ \frac{1}{\tau} \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

$U := rkfixed\ (y, tmin, tmax, N - 1, D)$

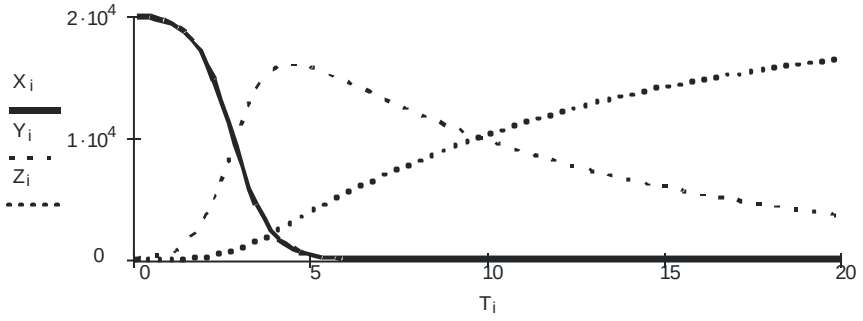
$T := U^{\langle 0 \rangle}\ X := U^{\langle 1 \rangle}\ Y := U^{\langle 2 \rangle}\ Z := U^{\langle 3 \rangle}\ i := 0..N - 1$



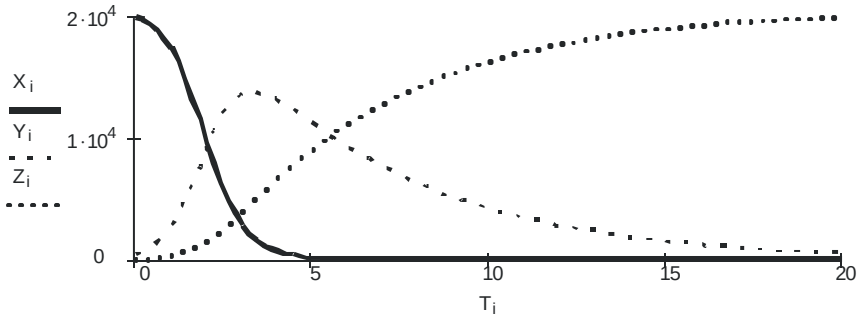
X - число здорових, Y - число хворих, Z - число видужавших



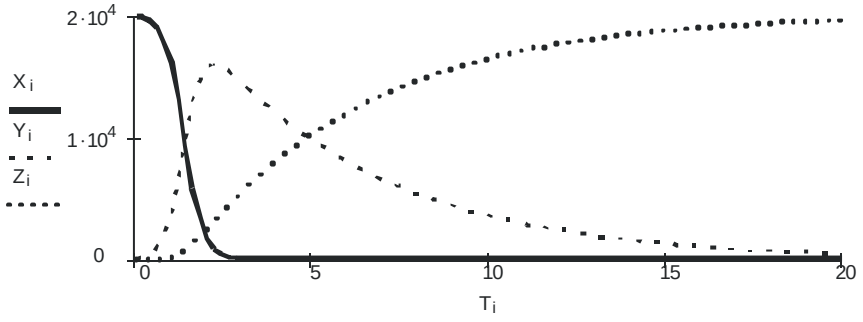
а) ω = 0,0001; τ = 5; y_0 = 100



б) ω = 0,0001; τ = 10; y_0 = 100



в) ω = 0,0001; τ = 5; y_0 = 500



г) ω = 0,0002; τ = 5; y_0 = 100

Рис. 5.1 Епідемія в ізольованій системі

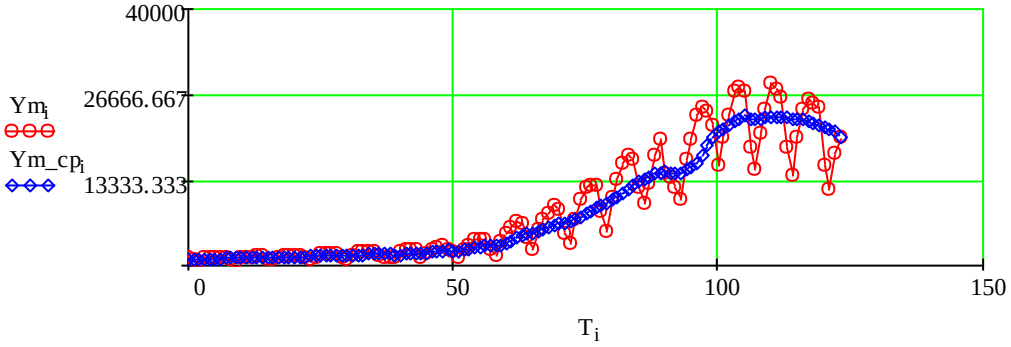
Додаток Б

M := READPRN("Ukraine_2021_124_wave.txt")

$T := M^{\langle 0 \rangle}$ imax := last(T) = 123 i := 0.. imax

$Ym := M^{\langle 1 \rangle}$ $Ym_cp := M^{\langle 2 \rangle}$

$T_i := i$



$y(a,b,c,t) := a \cdot e^{-b \cdot (t-c)^2}$

$S(a,b,c) := \sum_i \left(y\left(a,b,c,T_i\right) - Ym_i \right)^2$

a := 30000 b := 0.000 c := 100

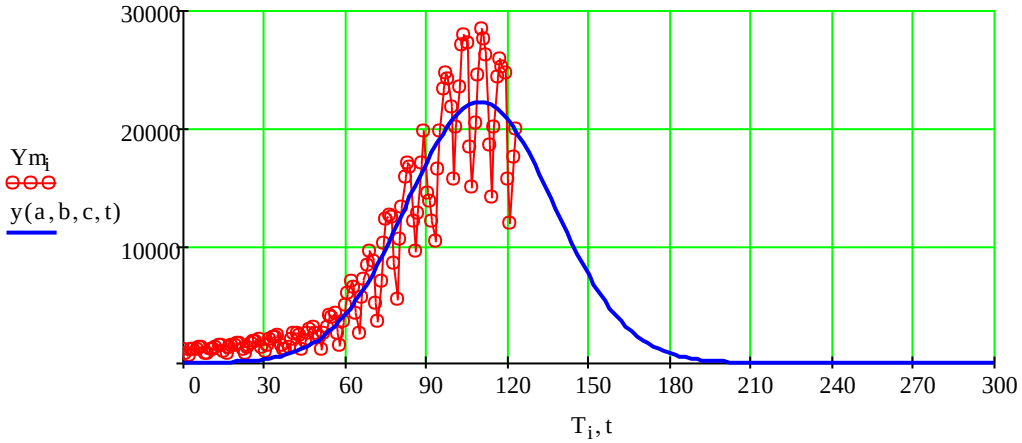
$V := \text{Minimize}(S,a,b,c) = \begin{pmatrix} 2.224 \times 10^4 \\ 6.787 \times 10^{-4} \\ 109.984 \end{pmatrix}$

$a := V_0 = 2.224 \times 10^4$

$b := V_1 = 6.787 \times 10^{-4}$

$c := V_2 = 109.984$

$t := 0, 2.. 300$


30000
20000
10000
Ym_i
y(a, b, c, t)
0
30
60
90
120
150
180
210
240
270
300
T_i, t

Додаток В

$n := 0..23$

$T_n := 1 \cdot 14n$

$T_n =$

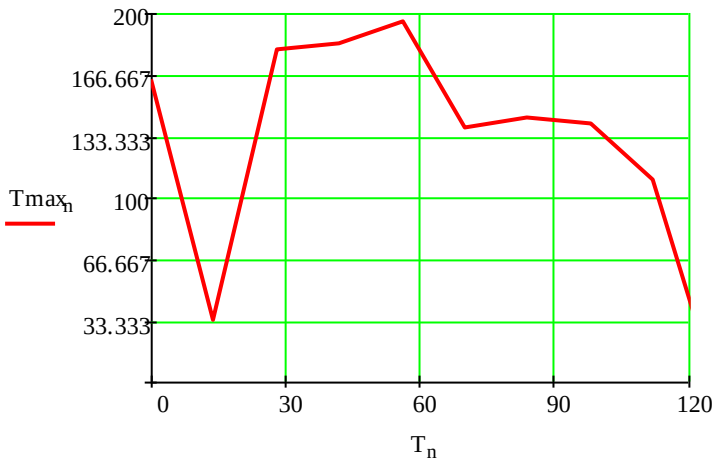
0
14
28
42
56
70
84
98
112
126
140
154
168
182
196
...

$Tmax_n :=$

164
34
180
184
196
138
144
140
110

$Nmax_n :=$

11759
1600
5150
8735
49676
34326
36323
33181
22243



$Nmaxs := supsmooth(T, Nmax)$

