Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра теплофізики, молекулярної фізики та енергоефективності

"ЗАТВЕРДЖУЮ"

Проректор з науково-педагогічної роботи

Антон ПАНТЕЛЕЙМОНОВ

"__" ______________ 20__ р.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Н. КАРАЗІНА
КОД 02071205

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

рівень вищої освіти	перший(бакалаврський)
галузь знань	10 Природничі науки
спеціальність	105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма	«Прикладна фізика енергетичних систем» «Комп'ютерна фізика»
вид дисципліни	обов'язкова
ННІ	комп'ютерної фізики та енергетики

2020 / 2021 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження Вченою радою Навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики
"__30__" __червня___ 2020_ року, протокол №_6-2/20

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ:
Ольга ЛІСІНА, доцент кафедри теплофізики, молекулярної фізики та енергоефективності, канд. физ.-мат. наук.

Програму схвалено на засіданні кафедри теплофізики, молекулярної фізики та енергоефективності

Протокол від "30" червня 2020 року

Завідувач кафедри теплофізики, молекулярної фізики та енергоефективності

_______________ __Юрій МАЦЕВИТИЙ.__
(підпис) (прізвище та ініціали)

Програму погоджено з гарантами освітніх програм (керівниками проектних груп)

Прикладна фізика енергетичних систем ____________Руслан СУХОВ

Комп'ютерна фізика ____________ Світлана РОГОВА

Програму погоджено методичною комісією Навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики

Протокол від "30" червня 2020 року № 6/20

Голова методичної комісії Навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики

____________ Ольга ЛІСІНА

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “Методи математичної фізики” складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалаврів

спеціальність: 105 Прикладна фізика та наноматеріали

освітня програма: «Прикладна фізика енергетичних систем»
«Комп’ютерна фізика»

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета викладання навчальної дисципліни

Мета і завдання курсу – дати студентам знання основ теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП), навчити їх складати математичні моделі різних явищ природи, які приводять до задач Коші, мішаних та крайових задач для ДРЧП, знаходити розв’язки отриманих задач та давати їх фізичну інтерпретацію, вміти проводити дослідження реальних процесів на основі вивчення якісних властивостей побудованих математичних моделей.

1.2. Основні завдання вивчення дисципліни

Основними завданнями вивчення дисципліни є створення практичної основи для розуміння студентами математичного апарату теоретичної та прикладної фізики.

1.3. Кількість кредитів — 8

1.4. Загальна кількість годин — 240

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Нормативна	
Вид кінцевого контролю (семестровий екзамен або залік) Семестровий екзамен	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
3-й	3-й
Семестр	
5,6-й	-й
Лекції	
64 год.	год.
Практичні, семінарські заняття	
64 год.	год.
Лабораторні заняття	
	год.
Самостійна робота	
112 год.	год.
у тому числі індивідуальні завдання	
год.	

1.6. Заплановані результати навчання

Згідно з вимогами освітньо-професійної (освітньо-наукової) програми студенти повинні досягти таких результатів навчання:

знати: Геометричне зображення комплексних чисел, виконання дій над комплексними числами, правила обчислення границь, похідної; основні елементарні функції та їх властивості; означення інтеграла та його властивості і обчислення; інтегральну формулу Коші; основні типи ДРЧП другого порядку, їх канонічні форми та способи інтегрування; фізичні процеси, які приводять до

ДРЧП; методи побудови розв'яз-ківзадач Коші, мішаних та крайових задач для ДРЧП та їх обґрунтування;

вміти: Зображувати комплексне число на площині, виконувати дії над комплексними числами; досліджувати функцію на неперервність, диференціювати її; обчислювати інтеграл від функції комплексної змінної, розкладати в степеневий ряд та в ряд Лорана; обчислювати лишки та застосовувати до обчислення інтегралів від функції дійсної змінної; зводити ДРЧП другого порядку до канонічного вигляду; будувати розв'язки інтегровних типів ДРЧП; будувати математичні моделі фізичних процесів, які приводять до ДРЧП; знаходити розв'язки задач Коші, мішаних та крайових задач для ДРЧП другого порядку.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. **Основи аналізу функцій комплексної змінної**

Тема 1. Комплексні числа Комплексні числа.

Означення, модуль та аргумент комплексного числа. Зображення комплексних чисел. Тригонометрична та показникова форми комплексного числа. Основні операції над комплексними числами та поле комплексних чисел. Алгебраїчна замкненість поля комплексних чисел. Невпорядкованість комплексних чисел. Послідовності комплексних чисел. Граничні точки. Нескінченно віддалена точка та компактифікація поля комплексних чисел. Стереографічна проекція. Література [1–5]

Тема 2. Функції комплексної змінної.

Неперервні функції. Одно- та багатозначні функції. Приклади елементарних однозначних і багатозначних функцій: лінійна, степенева, корінь n-го степеня. Збіжність функціональних і степеневих рядів з комплексними членами. Теорема Коші — Адамара. Показникова, тригонометричні та гіперболічні функції комплексної змінної. Логарифмічна функція. Інтеграл від функції комплексної змінної вздовж спрямлюваної (кусково-гладкої) кривої та його властивості. Формула зведення обчислення від інтеграла від функції комплексної змінної до інтеграла Рімана. Література [1–5]

Тема 3. Похідна функції комплексної змінної: означення та приклади.

Формальні правила обчислення похідних. Теорема про диференційовність функції комплексної змінної. Умови Коші — Рімана в декартових і полярних координатах. Приклади застосування умов Коші — Рімана для встановлення диференційованості елементарних функцій. Формула обчислення уявної частини диференційованої функції комплексної змінної через відому дійсну частину. Література [1–5]

Тема 4. Означення та властивості аналітичних функцій

Поняття аналітичної функції. Означення та основні властивості аналітичних функцій. Два різних способи означення аналітичної функції — через диференційовність і через суму збіжного степеневого ряду. Геометрична інтерпретація аналітичної функції. Означення однолисткової функції. Приклади однолисткових функцій та їх геометрична інтерпретація. Поняття конформного відображення. Література [1–5]

Тема 5. Інтегрування аналітичних функцій

Інтеграл вздовж замкненого контура від аналітичної функції в одно- та багатозв'язній областях. Інтегральна формула Коші. Теорема про середнє значення. Теорема про максимум модуля. Формула Коші для похідної аналітичної функції. Оцінки модуля похідної аналітичної функції. Нескінченна диференційовність аналітичної функції. Способи означення аналітичної функції. Теорема Ліувіля. Література [1-5]

Тема 6. Ряди Лорана та класифікація особливих точок

Аналітичні функції та їх степеневі ряди. Нулі аналітичної функції. Єдиність задавання аналітичної функції. Аналітичне продовження. Зображення рядом Лорана однозначної функції. Класифікація особ ливих точок однозначних аналітичних функцій. Цілі функції. Мероморфні функції. Поведінка однозначної аналітичної функції в околі полюса та суттєво особливої точки. Література [1–5]

Розділ 2. Застосування функцій комплексної змінної
Тема 1. Конформні відображення
Означення та властивості конформних відображень. Основна задача теорії конформних відображень. Теорема Рімана. Дробово-лінійні конформні відображення та їх властивості. Формула знаходження дробово-лінійного відображення за трьома точками. Конформне відображення комплексної півплощини та круга в півплощину або круг. Відображення многокутників. Інтеграл Крістофеля–Шварца. Література [1–5]
Тема 2. Основи теорії лишків та її застосування
Означення лишка. Методи обчислення лишка однозначної аналітичної функції. Обчислення лишка в полюсі. Лишок у нескінченно віддаленій точці. Основна теорема теорії лишків. Обчислення контурних інтегралів. Обчислення невласних інтегралів дійсного аналізу за допомогою теорії лишків. Логарифмічний лишок. Література [1–5]
Тема 3. Гармонічні функції та їх застосування
Гармонічні функції. Аналітичні та спряжені гармонічні функції. Побудова гармонічної функції за спряженою. Інваріантність оператора Лапласа відносно конформних відображень. Задача Діріхле. Розв'язання задачі Діріхле за допомогою функції ґріна. Функція ґріна задачі Діріхле: означення, фізичний зміст. Формула ґріна. Побудова функції ґріна для півплощини та круга. Розв'язання задачі Діріхле для круга. Формула Пуасона. Розв'язання задачі Діріхле для півплощини. Формула Шварца. [1–5]
Розділ 3. Класифікація диференціальних рівнянь в частинних похідних [6–9]
Тема 1. Основні поняття та означення теорії ДРЧП
Тема 2. Диференціальні рівняння в частинних похідних другого порядку із двома незалежними змінними та їх класифікація.
Тема 3. Зведення до канонічного вигляду рівнянь в частинних похідних другого порядку.
Тема 4. Класифікація рівнянь в частинних похідних другого порядку у випадку багатьох незалежних змінних.
Розділ 4. Рівняння гіперболічного типу [6–9]
Тема 1. Найпростіші задачі, що приводять до рівнянь гіперболічного типу. Виведення рівняння малих поперечних коливань струни. Рівняння поздовжніх коливань стержнів та струн. Енергія коливання струни.
Тема 2. Виведення рівнянь електричних коливань у дротах. Поперечні коливання мембрани. Рівняння гідродинаміки та акустики.
Тема 3. Формулювання основних крайових задач для рівняння коливання струни. Фізична інтерпретація граничних і початкових умов. Редукція загальної задачі до більш простих задач. Теорема про єдиність розв'язку першої крайової задачі.
Тема 4. Задача Коші для однорідного рівняння коливання струни. Формула Даламбера та її фізична інтерпретація. Задача Коші для неоднорідного рівняння коливання струни. Тема 5. Неперервна залежність розв'язку задачі Коші для однорідного рівняння коливання струни від початкових умов. Поняття про коректність постановки задач математичної фізики.
Тема 6. Метод продовжень для напівобмеженої струни. Задача для обмеженої струни. Тема 7. Метод відокремлення змінних для рівняння вільних коливань струни. Фізична інтерпретація розв'язку. Метод відокремлення змінних для неоднорідного рівняння. Коливання струни з рухомими кінцями. Змушені коливання струни. Тема 8. Загальна перша крайова задача рівняння коливання струни. Крайова задача із стаціонарними неоднорідностями. Задача без початкових умов.
Тема 9. Загальна схема методу відокремлення змінних.
Тема 10. Вільні коливання мембрани. Коливання прямокутної та круглої мембрани.
Розділ 5. Рівняння параболічного типу [6–9]
Тема 1. Лінійна задача про поширення тепла. Виведення рівняння теплопровідності.
Тема 2. Рівняння дифузії. Задача про поширення тепла в просторі.
Тема 3. Формулювання крайових задач для рівняння теплопровідності.

Тема 4. Принцип максимального значення для рівняння теплопровідності. Основні наслідки із принципу максимального значення. Теорема про єдиність розв'язку першої крайової задачі рівняння теплопровідності. Теорема про єдиність розв'язку для нескінченної прямої.
Тема 5. Метод відокремлення змінних для однорідного рівняння теплопровідності. Функція температурного впливу миттєвого точкового джерела тепла.
Тема 6. Метод відокремлення змінних для неоднорідного рівняння теплопровідності. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності.
Тема 7. Поширення тепла на нескінченній прямій. Виведення формули для фундаментального розв'язку рівняння теплопровідності.
Тема 8. Крайові задачі для рівняння теплопровідності у випадку напівобмеженої прямої.
Тема 9. Перетворення рівняннь в задачах теплопровідності. Задача без початкових умов для рівняння теплопровідності. Метод подібності в теорії теплопровідності.
Тема 10. Задача Штурма-Ліувілля
Розділ 6. Рівняння еліптичного типу [6–9]
Тема 1. Задачі пов'язані з рівнянням Лапласа. Стаціонарне теплове поле. Потенціальна течія рідини. Потенціал стаціонарного потоку рідини і електростатичного поля. Крайові задачі для рівняння Лапласа: задачі Дирихле, Неймана, мішана задача.
Тема 2. Рівняння Лапласа в криволінійній ортогональній системі координат. Коефіцієнти Ляме. Рівняння Лапласа в сферичній та циліндричній системах координат. Фундаментальні розв'язки рівняння Лапласа в просторі та на площині.
Тема 3. Задача Дирихле для прямокутника, круга, кільця. Інтеграл Пуассона.
Тема 4. Функція джерела для рівняння Лапласа та її основні властивості.
Розділ 7. Спеціальні функції та їх застосування [6–9]
Тема 1. Гамма-функція. Дельта-функція Дірака.
Тема 2. Рівняння Беселя. Властивості функцій Беселя першого роду.
Тема 3. Циліндричні функції інших типів. Їхні властивості.
Тема 4. Модифіковане рівняння Бесселя. Функція Макдональда та функція Томсона.
Тема 5. Відокремлення змінних в рівнянні Лапласа в сферичній системі координат.
Тема 6. Рівняння і поліноми Лежандра. Приєднані функції Лежандра.
Тема 7. Кульові функції Лапласа і сферичні функції. Просторова задача Діріхле для кулі.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	Денна форма						Заочна форма					
	Усього	у тому числі					Усього	у тому числі				
		лк	п	лб	інд	ср		лк	п	лб	інд	ср
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1. Основи аналізу функцій комплексної змінної												
Разом – Розділ 1	60	**16**	**16**			**28**						
Розділ 2. Застосування функцій комплексної змінної												
Разом – Розділ 2	60	**16**	**16**			**28**						
Розділ 3. Класифікація диференціальних рівнянь в частинних похідних												
Разом – Розділ 3	**10**	**4**	**4**			**2**						
Розділ 4. Рівняння гіперболічного типу												
Разом – Розділ 4	**30**	**10**	**10**			**10**						
Розділ 5. Рівняння параболічного типу												
Разом – Розділ 5	**30**	**10**	**10**			**10**						
Розділ 6. Рівняння еліптичного типу												
Разом – Розділ 6	**30**	**8**	**8**			**4**						
Розділ 7. Спеціальні функції та їх застосування												
Разом – Розділ 7.	**20**	**4**	**4**			**2**						

УСЬОГО ГОДИН	**240**	**64**	**64**			**112**							

4. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Комплексні числа та дії над ними. Множина точок на комплексній площині.	4
2	Функції комплексної змінної	6
3	Диференціювання функції комплексної змінної. Умови Коші – Рімана аналітичності функції. Гармонічні функції.	2
4	Конформні відображення, що даються елементарними функціями комплексної змінної. Конформні відображення областей	4
5	Інтеграл в С. Інтегральна формула Коші і її застосування.	2
6	Нулі аналітичних функцій. Ізольовані особливі точки однозначного характеру і їх класифікація Інтегральні лишки та методи їх обчислення	4
7	Ряди в С. Розвинення аналітичних функцій в ряд Тейлора і ряд Лорана	2
8	Застосування інтегральних лишків до обчислення інтегралів Теорема Коші про лишки	4
9	Операційний метод і його застосування	4
10	Квазілінійні ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними, їх класифікація та зведення до канонічного вигляду.	2
11	Канонічні форми лінійних ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами.	2
12	Класифікація ДРЧП другого порядку з багатьма незалежними змінними.	2
13	Інтегровні типи ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними. Метод характеристик.	3
14	Вільні коливання нескінченої струни. Метод поширення хвиль (метод характеристик). Фізична інтерпретація розв’яз-ку задачі Коші для рівняння вільних коливань струни.	3
15	Мішані задачі для напівобмеженої струни: метод характеристик, метод відбиттів.	2
16	Мішані задачі для рівняння коливань струни. Метод відокремлення змінних (метод Фур’є).	3
17	Мішані задачі для рівняння коливань прямокутної мембрани. Метод відокремлення змінних.	2
18	Мішані задачі для рівнянь параболічного типу. Метод Фур’є.	3
19	Задачі Коші для рівняння теплопровідності. Поширення тепла в напівобмеженому стержні з теплоізольованою бічною поверхнею.	3
20	Крайові задачі для рівнянь Лапласа і Пуассона в прямокутних областях. Метод відокремлення змінних.	2
21	Крайові задачі для рівнянь Лапласа і Пуассона в кругових областях. Метод Фур’є.	3
22	Функція Ґріна оператора Лапласа та її застосування. Інтегрування крайових задач для рівнянь еліптичного типу за	2

	допомогою потенціалів.	
	Усього	**64**

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Згадати теми з комплексними числами та дії над ними. Множина точок на комплексній площині. Функції комплексної змінної	8
2	Вивчити диференціювання функції комплексної змінної. Умови Коші – Рімана аналітичності функції	8
3	Вивчити інтегральну формула Коші і її застосування	8
4	Розкласти аналітичні функції в ряд Тейлора і ряд Лорана	8
5	Вивчити конформні відображення, що даються елементарними функціями комплексної змінної. Конформні відображення областей	8
6	Застосування інтегральних лишків до обчислення інтегралів Теорема Коші про лишки	8
7	Вивчити крайові задачі для звичайних диференціальних рівняннь 2-го порядку.	8
8	Вивчити одновимірну задачу Штурма-Ліувілля.	8
9	Ознайомитись з розв’язуванням мішаних крайових задач для одновимірних рівняннь гіперболічного та параболічного типів.	8
10	Ознайомитись з постановками спектральних задач. Задача Штурма-Ліувілля без (і з) особливої точки.	8
11	Вивчити матеріал лекцій (на два семестри)	8
12	Виконанати практичних робіт (на два семестри)	12
13	Підготовка до екзамену (на два семестри)	8
	Разом	**112**

Приклади та задачі до розділу 1

1. Інтегральна формула Коші: випадок трикутного контура, загальний випадок.

2.Представити число $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{1+i}$ в алгебраїчній формі.

3.Розв'язати рівняння: $z^2 - iz + 2 = 0$.

4.Відновити аналітичну в околі точки π функцію $f(z)$ за заданою дійсною частиною $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ та умовою $f(\pi)=\frac{1}{\pi}$.

5.Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=3}\frac{z^9}{z^{10}-1}dz$.

6. Знайти відображення верхньої півплощини на себе таке, що $w(0)=1, w(i)=2i$.

7. Розв'язати рівняння $\sin z = \pi i$.

Приклади і задачі до розділу 2

1. Лишки. Теорема Коші про лишки. Лишок в нескінченно віддаленій точці.

2.Визначити характер особливих точок $z_1=0, z_2=-1$ для функції $f(z)=\frac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$.

3. Розкласти функцію в ряд Лорана в околі точки $z_0=-1$ та знайти область збіжності: $f(z)=\cos\frac{z}{z+1}$.

4. Обчислити $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$.

5. Знайти лишки функції $f(z)=\frac{e^z}{z^2\left(z^2+9\right)}$.

6.Знайти ізольовані особливі точки і визначити їх характер для функції $f(z)=\frac{z^7\sin(z+2)}{\left(z^2-4\right)^3\cos\frac{1}{z-2}}$.

Приклади та задачі до розділу 3

Визначити тип та звести до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку:

1. $u_{yy}+4e^{2y}u_{xy}+u_y-u_x(x,y)-e^x=0.$
2. $\left(1+x^2\right)u_{xx}+\left(1+y^2\right)u_{yy}+xu_x+yu_y(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$
3. $\sin^2 yu_{xx}-e^{2x}u_{yy}+3u_x-5u(x,y)=0.$
4. $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}-5u_y+u_x(x,y)=0.$
5. $u_{xx}+6u_{xy}+9u_{yy}-5u_y+u_x(x,y)=0.$
6. $u_{xx}+6u_{xy}-5u_y+u_x-4u(x,y)=0.$

Зінтегрувати ДРЧП:

7. $(x-y)u_{xy}-u_x+u_y(x,y)=0.$
8. $x^3u_{xx}+2x^2u_x-2xu(x,y)=0.$
9. $2u_{xx}+6u_{xy}+4u_{yy}+u_x+u_y(x,y)=0.$
10. $x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+xu_x+yu_y(x,y)=0, \quad y\neq 0.$

Знайти розв'язок задачі Коші:

11. $u_{xy}+u_x=0; \quad u(x,x)=e^{-x}, \quad u_y(x,x)=0.$
12. $2u_{xy}-u_{xx}=0; \quad u(-y,y)=5y, \quad u_x(-y,y)=e^{-y}.$
13.

$$yu_{xx}-(x+y)u_{xy}+xu_{yy}+\frac{x+y}{y-x}\left(u_x-u_y\right)=0 \quad (x\neq y); \quad u(x,0)=x^3, \quad u_y(x,0)=0.$$

$u_{xy}+u_{xx}=12; \quad u(1,y)=0, \quad u_x(1,y)=0.$

Зобразити графічно процес вільних коливань однорідної нескінченої струни, якщо:

15. Початкова швидкість точок струни рівна нулеві, а початкове відхилення опи-сується функцією

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & |x|>4,\\ 8-2x, & 0<x\leq 4,\\ 8+2x, & -4\leq x\leq 0.\end{cases}$$

16. У початковий момент часу струна перебувала в спокої, а швидкість її точок була рівна

$$\psi(x)=\begin{cases}0{,}02a, & 0\leq x\leq 10,\\ 0, & x\notin[0;10].\end{cases}$$

За допомогою фазової площини знайти узагальнений розв'язок задачі Коші для рівняння вільних коливань струни та записати формули для заданих значень $t=t_0$, $x=x_0$:

17. $u_{tt}=9u_{xx}, \quad t>0, \quad x\in R;$

$$u(0,x)=\begin{cases}9-x^2, & |x|\leq 3,\\ 0, & |x|<3.\end{cases}$$

$u_t(0,x)=0, \quad x\in R.$

$t_0=6, \; x_0=-2.$

18. $u_{tt}=4u_{xx}, \quad t>0, \quad x\in R;$

$u(0,x)=0, \quad x\in R;$

$$u_t(0,x)=\begin{cases}2\sin 2x, & 0\leq x\leq 2\pi,\\ 0, & x\notin[0;2\pi].\end{cases}$$

$t_0=\pi/4, \; x_0=3\pi.$

19. Знайти закон вимушених коливань однорідної нескінченої струни, якщо по-чаткові відхилення та швидкість рівні нулеві, а інтенсивність зовнішніх сил рівна $24tx$.
20. Знайти закон вільних коливань однорідної нескінченої мембрани, якщо по-чаткова швидкість точок струни рівна нулеві, а початкове відхилення описується функцією $6xy$.
21. Вивчити коливання звукових хвиль у просторі, якщо задані початкові значення потенціалу швидкостей і його похідної за часом:

$u(0,x,y,z)=0, \quad u_t(0,x,y,z)=z.$

Приклади і задачі до розділу 4

Методом характеристик розв'язати наступні мішані задачі для напівобмеженої струни:

22. $$u_{tt}=0{,}25u_{xx}, \quad t>0, \quad x>0,$$
$$u(0,x)=x, \quad u_t(0,x)=0, \quad x\ge 0,$$
$$u_x(t,0)=\cos t, \quad t\ge 0.$$

23. $$u_{tt}=a^2u_{xx}+t, \quad t>0, \quad x>0,$$
$$u(0,x)=0, \quad u_t(0,x)=0, \quad x\ge 0,$$
$$u(t,0)=0, \quad t\ge 0.$$

Накреслити профіль однорідної ($a=1$) напівобмеженої струни при $t=1,2,3,4,$ якщо:

24. Кінець струни нерухомо закріплений, а коливання відбуваються тільки за рахунок початкового відхилення її точок, яке рівне
$$\varphi(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0;3)\bigcup[5;+\infty), \\ x-3, & 3\le x<5, \\ 5-x, & 4\le x<5. \end{cases}$$

25. Кінець струни вільний, а коливання відбуваються тільки за рахунок початкової швидкості її точок, яка відмінна від нуля тільки на проміжку $[3;5]$, де набуває значення $Q=const$.

26. Вивчити вимушені поперечні коливання однорідної струни, яка закріплена на кінці $x=0$, а на кінці $x=l$ піддається дії збурюючої гармонічної сили, що викликає зміщення, рівне $A\sin\omega t, \ A,\omega-const$. Початкове відхилення та початкова швидкість точок струни рівні нулеві, а сумарна інтенсивність зовнішніх сил рівна $x^2\omega^2l^{-2}\cos 2\omega t$. Дати фізичну інтерпретацію одержаного розв'язку.

Зінтегрувати мішані задачі для рівняння коливань струни. Дати фізичну інтерпретацію поставлених задач:

27. $$u_{tt}=16u_{xx}+e^{-t}\sin\tfrac{7\pi}{10}x, \quad t>0, \quad x\in(0;5),$$
$$u(0,x)=0, \quad u_t(0,x)=0, \quad x\in[0;5],$$
$$u(t,0)=0, \quad u_x(t,5)=0, \quad t\ge 0.$$

28. $$u_{tt}=u_{xx}-\tfrac{\pi}{3}u_t, \quad t>0, \quad x\in(0;3),$$
$$u(0,x)=0, \quad u_t(0,x)=2, \quad x\in[0;3],$$
$$u_x(t,0)=0, \quad u(t,3)=2t, \quad t\ge 0.$$

29. $$u_{tt}=a^2u_{xx}-6, \quad t>0, \quad x\in(0;l),$$
$$u(0,x)=0, \quad u_t(0,x)=0, \quad x\in[0;l],$$
$$u(t,0)=0, \quad u(t,l)=0, \quad t\ge 0.$$

30. $$u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad t>0, \quad 0<x<l,$$
$$u(0,x)=x^2(x-l)^2, \quad u_t(0,x)=0, \quad 0\le x\le l,$$
$$u_x(t,0)=0, \quad u_x(t,l)=0, \quad t\ge 0.$$

Приклади і задачі до розділу 5

За допомогою формули Пуассона знайти розв'язки задач Коші для рівняння теплопровідності:

31. $u_t = a^2 u_{xx} + \sin 2x, \quad t > 0, \quad x \in R;$
$u(0, x) = 0, \quad x \in R.$

32. $u_t = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in R;$
$u(0, x) = e^{-0,5(x+1)^2}, \quad x \in R.$

Знайти розв'язки мішаних задач для напівобмеженого стержня з теплоізольованою бічною поверхнею:

33. $u_t = 0{,}25 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$
$u(0, x) = e^{-x^2} - 1, \quad x \geq 0,$
$u(t, 0) = 0, \quad t \geq 0.$

34. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$
$u(0, x) = A = const, \quad x \geq 0,$
$u_x(t, 0) = 0, \quad t \geq 0.$

35. В однорідному ізотропному стержні довжини l обидва кінці та бічна поверхня теплоізольовані, а початкова температура стержня стала й рівна U_0. Тепло-обмін вільний. Знайти розподіл температури в стержні при $t > 0$.

Зінтегрувати мішані задачі для рівняння теплопровідності. Дати фізичну інтерпретацію поставлених задач:

36. $u_t = 0{,}25 u_{xx} + 2 \sin t \cos 6\pi x, \quad t > 0, \quad x \in (0; 2),$
$u(0, x) = 0, \quad x \in [0; 2],$
$u_x(t, 0) = 0, \quad u_x(t, 2) = 0, \quad t \geq 0.$

37. $u_t = a^2 u_{xx} + 16 A x^2 \cos 4t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{1}{2} \quad (A = const),$
$u(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$
$u(t, 0) = 0, \quad u\left(t, \frac{1}{2}\right) = A \sin 4t, \quad t \geq 0.$

38. $u_t = a^2 u_{xx} - 12 l x, \quad t > 0, \quad x \in (0; l),$
$u(0, x) = 0, \quad x \in [0; l],$
$u_x(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = 0, \quad t \geq 0.$

39. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in (0; l),$
$u(0, x) = x^2 - 2l, \quad 0 \leq x \leq l,$
$u(t, 0) = 0, \quad u_x(t, l) = 0, \quad t \geq 0.$

Приклади і задачі до розділу 6

40. Знайти функцію $u = u(x, y)$, гармонічну всередині прямокутника $0 \leq x \leq a,$ $0 \leq y \leq b,$ яка на контурі набуває заданих значень:

$$u(x, 0) = B \sin \tfrac{\pi}{a} x, \quad u(x, b) = 0, \quad x \in [0, a]; \quad u(0, y) = Ay(b - y), \quad u(a, y) = 0 \quad y \in [0, b],$$

де $A, B - const$.

41. У півсмузі $x \geq 0$, $0 \leq y \leq b$ знайти розв'язок $u(x, y)$ рівняння Лапласа, який справджує крайові умови:

$$u_y(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad x \geq 0;$$
$$u(0, y) = A\left(y^2 - b^2\right), \quad \lim_{x \to \infty} u(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b.$$

42. Знайти розв'язок задачі Неймана для рівняння Лапласа в крузі $x^2 + y^2 = R^2$ за крайової умови $u_\rho(R,\varphi) = f(\varphi)$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

43. Знайти розв'язок рівняння Пуассона $\Delta u(x,y) = 12\left(x^2 - y^2\right)$ в кільці $a < \rho < b$, якщо

$$u(a,\varphi) = 0, \quad u_\rho(b,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

44. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці $0 \le x \le a, \ \ 0 \le y \le b,$ всередині якої діють джерела тепла інтенсивності $2x(x-a),$ якщо краї $x = 0$ та $x = a$ пластинки підтримуються при нульовій температурі, а інші два краї теплоізольовані.

45. Визначити прогин мембрани, яка має форму півкруга радіуса *a*, якщо прямолінійний край мембрани нерухомо закріплений, а на дузі задане відхилення $A\sin 4\varphi$, де $A = const.$

46. Розв'язати задачу Штурма-Ліувілля:

$$\Delta u(x,y) + \lambda u(x,y) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$
$$u(0,y) = 0, \quad u_x(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b,$$
$$u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a.$$

6. Індивідуальні завдання

Індивідуальні завдання не передбачені

7. Методи навчання

У процесі викладання дисципліни використовуються основні методи навчання:

- Пояснювально-ілюстративний метод (викладання лекційного, пояснювального практичного матеріалів, Zoom-конференції);
- Проблемні методи (розв'язання проблемних задач, дискусії, самостійне вивчення літератури студентами, Zoom-конференції);
- Репродуктивний метод (виконання завдань на базі зразка, система Moodle);
- Частково-пошуковий (робота студентів на практичних заняттях у дошки)

Передбачено робота у рамках практичних занять та лекцій. Основна увага – на виконання домашніх завдань щодо закріплення матеріалу лекцій та практичних занять та виконання підсумкової контрольної роботи.

Передбачено дистанційний курс у системі Moodle, Zoom-конференції, Telegram-чат.

8 Методи контролю

Навчальні досягнення студентів з дисципліни оцінюються за модульно-рейтинговою системою, в основу якої покладено принцип поопераційної звітності, обов'язковості модульного контролю, накопичувальної системи оцінювання рівня знань, умінь та навичок, розширення кількості підсумкових балів до 100.

У процесі оцінювання навчальних досягнень студентів застосовуються такі методи:

- Методи усного контролю: індивідуальне опитування, фронтальне опитування, співбесіда, залік.

- Методи письмового контролю: розрахунково-графічні роботи, залік.

- Методи самоконтролю: уміння самостійно оцінювати свої знання, самоаналіз.

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Кількість балів за роботу з теоретичним матеріалом, на практичних заняттях, під час виконання самостійної роботи залежить від дотримання таких вимог:

- систематичність відвідування занять;
- своєчасність виконання навчальних і індивідуальних завдань;
- повний обсяг їх виконання;
- якість виконання навчальних і індивідуальних завдань;
- самостійність виконання;
- творчий підхід у виконанні завдань;
- ініціативність у навчальній діяльності;
- виконання тестових завдань.

Загальна максимальна бальна оцінка за екзамен складатиме 40 балів. Мінімальний підсумковий бал складатиме 50 балів, а максимальний – 100 балів. Підсумкова оцінка визначається шляхом переводу підсумкового балу з дисципліни у традиційну академічну оцінку національної шкали ("відмінно", "добре", "задовільно", "незадовільно" за шкалою, що наведено у попередньому пункті робочої програми за шкалою:

— **"відмінно"** (90 та вище балів) заслуговує студент, який виявив всебічне і глибоке знання програмового матеріалу, вміння вільно виконувати завдання, передбачені програмою, засвоїв основну і ознайомився з додатковою літературою, розуміє взаємозв'язок головних понять дисципліни та їх значення для майбутньої професії;

— **"добре"** (82-89 балів) заслуговує студент, який виявив повне знання програмного матеріалу, успішно виконує передбачені програмою завдання, засвоїв основну літературу рекомендовану програмою, виявив систематичний характер знань з дисциплін і здатний до самостійного доповнення, але під час відповіді допустив деякі неточності;

— **"добре"** (70-81 балів) заслуговує студент, що виявив не цілком повне знання програмного матеріалу, не завжди успішно виконує передбачені програмою завдання, частково засвоїв основну літературу, рекомендовану програмою, виявив не систематичний характер знань з дисциплін і не завжди здатний до їх самостійного доповнення і під час відповіді допускає деякі неточності;

— **"задовільно"** (61-69 балів) заслуговує студент, що виявив знання основного програмного матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка "задовільно" виставляється студентам, що допустили помилки у відповіді на екзамені та при виконанні екзаменаційних завдань, але які володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача;

— **"задовільно"** (50-60 балів) заслуговує студент, що виявив часткове знання основного програмового матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, не завжди вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий лише частково з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка "достатньо" виставляється студентам, що допустили грубі помилки у відповіді на екзамені та при виконанні екзаменаційних завдань, але які частково володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача.

— **"незадовільно"** (40-49 балів) виставляється студенту, який виявив суттєві прогалини в знаннях основного програмового матеріалу, допустив принципові помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

— **"незадовільно"** (1-39 балів) виставляється студенту коли протягом семестру він допустив грубі помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

При виставленні оцінки можуть враховуватися результати навчальної роботи студента протягом семестру.

Передбачаються бали за:

- експрес-контроль на лекції – 8;
- виконання контрольної роботи – 36;
- виконання практичних робіт – 16;
- іспит – 40 балів.

Систему рейтингових балів для різних видів контролю та порядок їх переведення у національну (4-бальну) та європейську (ECTS) шкалу подано нижче у таблицях.

7. Схема нарахування балів

<table>
<tr><td colspan="8">Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання</td><td rowspan="2">Екзамен</td><td rowspan="2">Сума</td></tr>
<tr><td colspan="3">Розділ 1-3</td><td colspan="2">Розділ 4-5</td><td>Контрольні роботи, передбачена навчальним планом</td><td>Індивідуальне завдання</td><td>Разом</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td><td>6</td><td>1*36</td><td>-</td><td>60</td><td>40</td><td>100</td></tr>
</table>

Схема нарахування балів на іспиті.

Кожне питання екзаменаційного білету оцінюється наступним чином (максимальна кількість балів за теоретичне питання - 5):

5 балів – студент повністю відповів на питання;

4 балів – у загалому правильна відповідь, робота з певною кількістю помилок ;

3 балів - відповів на питання, але з великою кількістю недоліків;

2 балів – допущені грубі помилки у відповіді, але студент частково володіє необхідними знаннями;

1 балів - студент відповів на питання з грубими помилками та продемонстрував відсутність володіння базовими знаннями;

0 балів – студент зовсім не відповів на питання.

Кожна задача екзаменаційного білету оцінюється наступним чином (максимальна кількість балів за питання – 10 або 20 відповідно):

10 або 20 балів – студент повністю розв’язав задачу без помилок;

8 або 15 балів – у загальному правильний розв’язок з певною кількістю незначних помилок ;

6 або 10 балів – розв’язав задачу за правильним алгоритмов, але з великою кількістю недоліків;

2 або 5 балів – студент позначив хід розв’язання задачі, але не вирішив її;

0 балів – студент зовсім не розв’язав задачу.

Шкала оцінювання

<table>
<tr><td rowspan="2">Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру</td><td colspan="2">Оцінка</td></tr>
<tr><td>для чотирирівневої шкали оцінювання</td><td>для дворівневої шкали</td></tr>
</table>

		оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

10. Рекомендована література

Основна

1.Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1982. — 488 с.

2.Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. — М.: Наука, 1985. — 336 с.

3.Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплекс ного переменного. — М.: Наука, 1987. — 688 с.

4.Гольберг А. А., Шеремета М. М., Заблоцький М. В., Скасків О. Б. Комплексний аналіз. — Львів: Афіша, 2002. — 204 с.

5.Грищенко А. Е., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П. Теория функций комплексной переменной. Решение задач. — К.: Вища шк., 1986. — 336 с.

6.Білоколос Є. Д., Шека Д. Д. Збірник задач з комплексного аналізу. — К., 2004. — 58 с.

7. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.

8. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1975. – 128 с.

9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 724 с.

Допоміжна

1. Бицадзе А.В., Калиниченко Б.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985. – 310 с.
2. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Физматлит, 2003. – 688 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
4. Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики. – М.: МГУ, 1986. – 160 с.

8. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

немає