МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ
Кафедра фізики нетрадиційних енерготехнологій та екології

Пояснювальна записка
до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем «магістр»

# «Застосування методу кінцевих елементів для розрахунків теплопровідності»

Виконав студент 6 курсу,
групи НФ-61 Кулинич Б.А.
Спеціальність: 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»
Освітня програма: «Прикладна фізика енергетичних систем»
Керівник:
доцент, кандидат фізико-математичних наук, Кудрявцев І.М

Харків 2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
ННІ Комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра Фізики нетрадиційних енерготехнологій та екології
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магістр
Спеціальність 105 — прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

**Завідувач кафедри**

**_____О.П. Кулик**
підпис ініціали, прізвище

"____"_____20___року

# З А В Д А Н Н Я
# НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ (ПРОЕКТ)

Кулиничу Богдану Анатолійовичу
(прізвище, ім'я, по батькові студента)

1. Тема роботи «Застосування методу кінцевих елементів для розрахунків теплопровідності»

керівник роботи: кандидат фізико-математичних наук, доцент Кудрявцев І.М.
( прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від "___"_____20__року №___

2. Строк подання студентом роботи_____
3. Перелік питань, які потрібно розробити)
*4. План роботи*

| № з/п | Назви етапів роботи |
|---|---|
| 1. | Вибір теми, узгодження, закріплення за кафедрою |
| 2. | Робота над літературою та іншими джерелами |
| 3. | Розробка математичної моделі |
| 4. | Моделювання повітряного теплообмінювача |
| 5. | Написання дипломної роботи |
| 6. | Захист |

5. Дата видачі завдання_____

**Студент** _____ Кулинич Б.А
підпис ініціали, прізвище

**Керівник роботи** _____ Кудрявцев І.М
підпис ініціали, прізвище

# ЗМІСТ

**1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ СТИСЛИВОГО, В'ЯЗКОГО І ТЕПЛОПРОВІДНОГО ГАЗУ** ..... 4

Вступ ..... **Ошибка! Закладка не определена.**

1.1 Система основних рівнянь ..... 7

Модель турбулентності $k-\omega$ SST ..... 9

**2. РІЗНИЦЕВА СХЕМА РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ РУХУ ГАЗУ** ..... 10

2.1 Різницева схема Годунова ..... 10

2.2 Задача розпаду розриву ..... 10

2.3 Розрахункова модель для одновимірних задач газодинаміки ..... 17

3. **ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ПЕРЕНОСУ** ..... 19

3.1 Коефіцієнт динамічної в'язкості ..... 19

3.2 Коефіцієнт теплопровідності ..... 20

3.3 Коефіцієнт дифузії ..... 20

3.4 Визначення коефіцієнтів динамічної в'язкості та теплопровідності на основі потенціалів Леннарда-Джонса ..... 20

**4. ПОБУДОВА СІТОК ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЧИСЛОВИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ** ..... 21

**5. МОДЕЛЮВАННЯ ПОВІТРЯНОГО ТЕПЛООБМІННИКА** ..... 24

5.1 Постановка проблеми ..... 24

5.2 Розрахунок теплового потоку ..... 24

5.3 Результати розрахунку параметрів потоку газоподібного азоту в трубі ..... 26

5.4 Результати аналізу зі зміненими граничними умовами ..... 30

**ВИСНОВКИ** ..... 32

**ЛІТЕРАТУРА** ..... 33

# 1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ СТИСЛИВОГО, В'ЯЗКОГО І ТЕПЛОПРОВІДНОГО ГАЗУ

## Вступ

Нестаціонарний тривимірний потік в'язкого і теплопровідного газу можна описати системою диференціальних рівнянь, що відображають закони збереження маси, імпульсу і енергії. Цю концепцію реалізує метод Ейлера, згідно з яким досліджується поведінка рідини у фіксованій точці простору.

Повна система рівнянь газодинаміки являє собою досить складну систему диференціальних рівнянь з частинними похідними. У загальному випадку це нелінійна система змішаного типу з невідомою формою перехідної поверхні (де рівняння змінюють свій тип) та «рухомими границями», тобто граничні умови задачі визначаються на поверхнях, які визначаються в процесі обчислень.

В результаті ставиться пряма задача на знаходження рішення системи диференціальних рівнянь, що задовольняють деяким заданим початковим і граничним умовам в тривимірній області, обмеженій утворюючими циліндра, а також ділянками потоку на вході і виході. На сьогоднішній день в літературі відсутня строга математична постановка таких завдань. Крім того, математичні труднощі вивчення таких задач пов'язані з нелінійністю рівнянь, а також з великою кількістю незалежних змінних.

Необхідність розв'язання задачі вимагає застосування новітніх чисельних методів з використанням вже відомих алгоритмів. При цьому оцінка точності чисельного рішення сформульованої задачі може бути зроблена як математично, так і шляхом порівняння з фізичним експериментом. Кількісне порівняння розрахунку з експериментом показує, наскільки прийнята модель близька до реальних умов.

Існує два способи опису таких потоків. У першому встановлюється структура ознак, що дозволяє формулювати граничні умови. Розв'язок розглядається як система гладких функцій, що задовольняють диференціальним

рівнянням газової динаміки в окремих областях, обмежених спеціальними лініями, при цьому на розривах задовольняються умови сумісності.

Для більшості потоків, які зустрічаються в практичних застосуваннях, конфігурація та навіть орієнтоване положення поверхонь розриву наперед не відомі. Ця обставина ускладнює використання методів, які передбачають виділення всіх поверхонь, віддаючи перевагу методам, які дозволяють так званий "прямий" розрахунок.

Для дослідження трансзвукових і надзвукових газових потоків в проточних порожнинах зазвичай використовують протипотокові різницеві схеми . Для того щоб пояснити місце цих схем серед інших, необхідно коротко зупинитися на деяких поширених в даний час чисельних методах розрахунку газодинамічних потоків.

При визначенні стаціонарних аеродинамічних характеристик тіл широко використовуються чисельні методи розв'язування стаціонарних рівнянь газодинаміки, тобто методи інтегральних співвідношень, скінченних різниць, характеристик, «частинок у комірках».

Метод інтегральних співвідношень, запропонований А.А. Дородніциним і розвинений О.М. Білоцерківським, є узагальненням відомого чисельного методу прямих. Система диференціальних рівнянь з частинними похідними, записана в дивергентній формі, інтегрується уздовж смуг, на які поділяється область інтегрування, і зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь. Метод інтегральних відношень застосовується до рівнянь різних, але постійних типів і використовується в основному при розрахунку зовнішніх надзвукових потоків .

В даний час метод скінченних різниць є найбільш розвиненим і широко використовуваним для вирішення як лінійних, так і нелінійних рівнянь гіперболічного, еліптичного і параболічного типів-метод кінцевих різниць. Область інтегрування розбивається на рахункові комірки за допомогою фіксованої сітки. Похідні функцій у всіх напрямках апроксимуються скінченними різницями, причому частіше використовуються неявні різницеві

схеми, і тоді на кожному кроці необхідно вирішувати систему алгебраїчних рівнянь, що містить сотні тисяч невідомих. Для розв'язування стаціонарних і нестаціонарних рівнянь газової динаміки використовуються скінченно-різницеві схеми, широко використовуються формулювання Ейлера і Лагранжа.

Метод характеристик застосовується тільки для вирішення рівнянь гіперболічного типу. Рішення обчислюється за допомогою характеристичної сітки, яка будується в процесі підрахунку. Відмінною рисою в порівнянні з іншими різницевими методами є мінімальне використання операторів інтерполяції і пов'язане з цим найбільш точне врахування сфери впливу системи диференціальних рівнянь. Застосування цього методу доцільно при розрахунку стаціонарних надзвукових потоків.

Метод Харлоу «частинки в комірках» поєднує в собі переваги лагранжіанского і ейлеровского підходів. Область розв'язку розбита фіксованою (ейлерівською) сіткою. Безперервне середовище розглядається дискретною моделлю – розглядається сукупність «частинок» фіксованої маси (лагранжіанська сітка частинок), які рухаються через ейлерову решітку комірок. Частинки використовуються для визначення параметрів самої рідини (маса, енергія, швидкість), а ейлерова сітка використовується для визначення параметрів поля (тиску, щільності, температури). Метод «частинки в комірках» дозволяє вивчати складні явища в динаміці багатокомпонентних середовищ, але він має ряд недоліків, головним з яких є обчислювальна нестабільність.

Математичні труднощі, пов'язані зі зміною типу стаціонарної системи рівнянь при вивченні трансзвукових потоків, викликали необхідність розрахунків різними методами в різних областях потоку. Такий підхід, однак, не набув широкого поширення через складну логіку алгоритму і некоректності «склеювання» рішень в дозвуковій і трансзвуковій області.

Наступним етапом розвитку чисельних методів, який був продиктований ускладненням практичних завдань і збільшенням потужності ЕОМ(електронні обчислювальні машини), стало створення нестаціонарних схем і використання методу встановлення для вирішення стаціонарних завдань аеродинаміки.

Основною перевагою перехідного методу визначення є зведення задачі змішаного потоку до задачі з вихідними даними незалежно від швидкостей потоку. Наприклад, розроблені нестаціонарні схеми методу інтегральних відношень, методу характеристик, схеми біжучого рахунку, які дають можливість «контролювати» розриви. Однак саме ця обставина ускладнює їх реалізацію на електроних обчислювальних машинах через складну логіку розрахунку особливостей, що робить недоцільним використання подібних методів для розрахунку багатовимірних потоків. При розрахунку складних багатовимірних потоків перевага віддається консервативним схемам, які є різницевими аналогами законів збереження і дозволяють проводити наскрізний підрахунок переривчастих потоків ідеального газу.

Метод, запропонований С.К. Годуновим, спочатку розроблений для розв'язання нестаціонарних задач, а пізніше поширений на випадки плоских і просторових стаціонарних надзвукових потоків, отримав широке застосування в розрахунках задач внутрішньої газодинаміки. Різницева схема «розпаду розриву», що лежить в основі цього методу, є фізичною, досить простою в реалізації на ЕОМ, і успішно використовується багатьма авторами для вирішення різних завдань стаціонарної і нестаціонарної газодинаміки.

## 1.1 Система основних рівнянь

Рух в'язкого газу описується системою рівнянь Нав'є-Стокса в поданні Рейнольдса [1-4]

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial(E\xi_x+F\xi_y+G_z)}{\partial \xi}+\frac{\partial(E\eta_x+F\eta_y+G\eta_z)}{\partial \eta}+$$

$$+\frac{\partial(\mathrm{E}\zeta_\mathrm{x}+\mathrm{F}\zeta_\mathrm{y}+\mathrm{G}\zeta_\mathrm{z})}{\partial \zeta}=0 \qquad (1.1)$$

де $Q$ - вектор консервативних змінних; $E$, $F$, $G$ - узагальнені вектори, що визначають потоки маси, імпульсу та енергії; $\xi$, $\eta$, $\zeta$- одиничні вектори в узагальненій системі координат.

Вектор $Q, E, F, G$ визначаються як

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{bmatrix},$$

де $\rho$ - щільність газу;

$u$ - складова вектора швидкості в напрямку осі OX;

$v$ - векторна складова швидкості в напрямку осі OY;

$w$ - векторна складова швидкості в напрямку осі OZ;

$$E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ (E_t + p)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} + q_x \end{bmatrix};$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ (E_t + p)v - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} + q_y \end{bmatrix};$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ (E_t + p)w - u\tau_{xz} - v\tau_{yz} - w\tau_{zz} + q_z \end{bmatrix};$$

$\tau_{ij} = \tau_{mij} + \tau_{Tij}$; $\tau_{mij} = 2\mu_m\left(S_{ij} - S_{nn}\delta_{ij}/3\right)$;

$\tau_{Tij} = 2\mu_T\left(S_{ij} - S_{nn}\delta_{ij}/3\right) - 2\rho k\delta_{ij}/3$; $\lambda = \lambda_m + \lambda_T = c_P\left(\frac{\mu_m}{Pr_m} + \frac{\mu_T}{Pr_T}\right)$;

$\tau_{mij}, \tau_{Tij}, \tau_{ij}$ - Ламінарні, турбулентні та ефективні тензори в'язких напружень $\mu_{mij}, \mu_{Tij}, \mu_{ij}$ -Молекулярні, турбулентні та ефективні коефіцієнти в'язкості $\lambda_{mij}, \lambda_{Tij}, \lambda_{ij}$-Молекулярні, турбулентні та ефективні коефіцієнти теплопровідності;

$E_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$ - Щільність повної енергії газу.

Система рівнянь (1.1) замикається рівнянням стану

$$\frac{\mathrm{p}}{\rho} = \mathrm{RT} \tag{1.2}$$

і система диференціальних рівнянь, що моделюють турбулентність. У даній роботі використовуються моделі турбулентності $k-\omega$ BSL і $k-\omega$ SST, які забезпечують прийнятні результати розрахунків.

**Модель турбулентності $k-\omega$ SST**

Рівняння для турбулентної моделі Menter SST у $k-\omega$ формулюванні декартової системи координат можна записати наступним чином

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial R_i}{\partial x_i} = G - D + L, \tag{1.3}$$

де $U = \begin{bmatrix}\rho k \\ \rho\omega\end{bmatrix}$; $R_i = \begin{bmatrix}\rho k - (\mu + \sigma_k \mu_t)\frac{\partial k}{\partial x_i} \\ \rho k - (\mu + \sigma_\omega \mu_t)\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\end{bmatrix}$; $G = \begin{bmatrix}\tau_{ij} S_{ij} \\ \gamma \frac{\omega}{k}\tau_{ij} S_{ij}\end{bmatrix}$;

$D = \begin{bmatrix}\beta^* \rho\omega k \\ \beta\rho\omega^2\end{bmatrix}$;

$$L = \begin{bmatrix}0 \\ 2(1-F_1)\frac{\rho\sigma_{\omega 2}}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_i}\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\end{bmatrix},$$

де $k$ - кінетична енергія турбулентності; $\omega = \frac{\varepsilon}{k\beta^*}$ - Питома швидкість розсіювання: $\mu_t = \frac{\rho k/\omega}{max[1;\Omega F_2/(a_1\omega)]}$; $x_i$ - Одиничні вектори в декартовій системі координат.

Функції змішування $F_1$ і $F_2$ Виглядають вони так

$$F_1 = tanh[[min(A_1; A_2)]^4];\ A_1 = max(B_1; B_2);\ A_2 = \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}k}{CD_{k\omega}y^2};$$
$$CD_{k\omega} = max\left(2\frac{\rho\sigma_{\omega 2}}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_i}\frac{\partial \omega}{\partial x_i}; 10^{-20}\right);\ F_2 = tanh[[max(2B_1; B_2)]^2];$$
$$B_1 = \frac{\sqrt{k}}{\beta^*\omega y};\ B_2 = \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega}.$$

Коефіцієнт ефективної в'язкості визначається як сума молекулярних і турбулентних коефіцієнтів в'язкості $\mu = \mu_m + \mu_t$.

Вектор констант $\varphi = [\sigma_k;\ \ \sigma_\omega;\ \ \beta;\ \ \gamma]$ - в моделі SST можна записати в наступному вигляді $\varphi = F_1\varphi_1 + (1 - F_2)\varphi_2$, де $\varphi_1$ вектор в $k - \omega$ моделі і $\varphi_2$ в $k - \varepsilon$ записаний $k - \omega$ формулюванні. Константи моделі визначаються як:

$\sigma_{k1} = 0{,}31$(постійна Бредшоу); $\sigma_{k1} = 0{,}85$ (або, за іншими даними, 1,176); $\sigma_{k2} = 1{,}0$; $\sigma_{\omega1} = 0.5$ (або 2,0); $\sigma_{\omega2} = 0{,}856$ (або 1 168);

$\beta^* = 0{,}09$; $\beta_1 = 0{,}075$; $\beta_2 = 0{,}0828$; $\gamma_1 = 0{,}553$; $\gamma_2 = 0{,}44$.

# 2. РІЗНИЦЕВА СХЕМА РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ РУХУ ГАЗУ

## 2.1 Різницева схема Годунова

Розглянемо систему диференціальних рівнянь, що описують потік ідеального газу, що залежить від часу $t$ і одної декартової координати $x$, записаної в диференціальній формі відповідно до

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial\left(p+\rho\cdot u^2\right)}{\partial x} = 0, \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial\rho\left(e+{u^2}/{2}\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left[\rho u\left(e+{u^2}/{2}\right)+pu\right]}{\partial x} = 0,$$

$$e = \frac{p}{(k-1)\rho}.$$

## 2.2 Задача про розпад розриву

Далі розглянемо проблему розпаду розриву. Надалі він відіграватиме значну роль у побудові різницевої схеми.

Припустимо, що існує середовище (газ), для якого термодинамічні величини: тиск-$p$, густота-$\rho$, внутрішня енергія одиниці маси газу $e$ - підпорядковуються біноміальному рівнянню стану

$$e = \frac{p+k\cdot p_0}{(k-1)\rho} - \frac{{c_0}^2}{k-1}, \qquad (2.2)$$

де $p_0 = \frac{1}{k}\rho_0 \cdot {c_0}^2$; де $k$,$\rho_0$,$c_0$ - деякі константи. Ідеальний газ є окремим випадоком. ($c_0 = 0$)

Припустимо, що в початковий момент часу $t = 0$ середовище для лівого півпростору $x < 0$ середовище значеннями параметрів $p_I$ , $\rho_I$, $u_I$, а для правого півпростору $x > 0$, - значеннями $p_{II}$, $\rho_{II}$ ,$u_{II}$ .

Наприклад, якщо зіткнутися з двома масами газу(якщо об`єднати дві маси газу), стисненого до різного тиску, і усунути перегородку між ними (наприклад, миттєве відкриття впускного клапана при екстреному гальмуванні), то поверхня їх контакту буде поверхнею розриву в початковому розподілі тиску. Важливо відзначити, що стрибки розриву можуть бути абсолютно довільними. При цьому відомо, що на поверхні розривів, які можуть існувати у вигляді стійких утворень, повинні дотримуватися певні співвідношення. Тому очевидно, що якщо ці необхідні умови не будуть виконані при початковому розриві, то він не може існувати як такий і повинен розпастися на кілька розривів, які з часом будуть віддалятися один від одного. Схематично самоподібна картина виникаючого потоку на площині $x, t$ зображується однією з можливих конфігурацій, показаних на рис. 1.

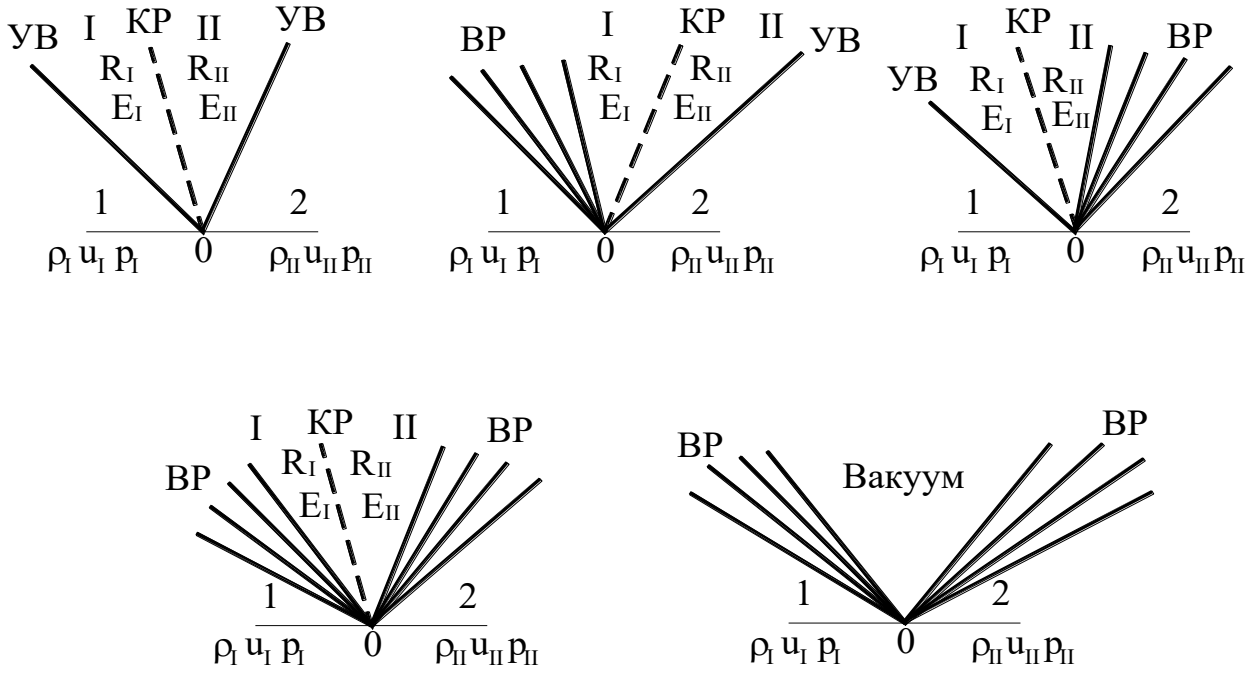



Рисунок 2.1 – Можливі конфігурації стійких розривів

Перші чотири з них містять контактний розрив КР, позначений пунктирною лінією, на якому є стрибок щільності, а складова тиску і поперечної швидкості безперервні. Їх однакові постійні значення в областях ліворуч і праворуч від контактної щілини позначаються $P$ і $U$ ,а різні значення

густини, а отже, і внутрішньої енергії, $R_I$, $E_I$,-для лівої і $R_{II}$ $E_{II}$ - для правої області. У свою чергу, ці області відокремлені від незбурених областей з параметрами $(p_I, \rho_I, u_I)$ зліва, і $(p_{II}, \rho_{II}, u_{II})$ справа або ударною хвилею УХ, або хвилею розрідження ХР, яку для стислості умовно можна назвати «правою» і «лівою». Остання конфігурація являє собою граничний випадок, де в результаті «розсіювання» створюється область вакууму, в якій щільність знижується до величини $\rho = 0$ в двох хвилях розрідження, прилеглих до області вакууму праворуч і ліворуч. Далі математичний опис цієї задачі. На ударній хвилі повинні бути виконані співвідношення, що пов'язують швидкість ударної хвилі $Dv$ і величини перед її фронтом і позаду неї. З них легко отримати рівність як наслідок

$$E - e - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right)(p + P) = 0, \qquad (2.3)$$

де $(p, \rho, e)$ - величини перед ударною хвилею, $(P, R, E)$ - знаходиться позаду фронту ударної хвилі. Виключивши з нього $e$ і $E$ скориставшись рівнянням стану, отримаємо адіабатику Гугоніо

$$R = \rho \frac{(k+1)(P+p_0)+(k-1)(p+p_0)}{(k-1)(P+p_0)+(k+1)(p+p_0)}. \qquad (2.4)$$

Введемо масову швидкість

$$a_I = \rho_I(u_I - D_I) = R_I(U - D_I), \qquad (2.5)$$

З співвідношень, виписаних для лівої ударної хвилі (якщо вона такою є), отримаємо

$$U - u_I + \frac{P - p_I}{a_I} = 0, \qquad (2.6)$$

$$a_I = \sqrt{\rho_I\left[\frac{k+1}{2}(P + p_0) + \frac{k-1}{2}(p_I + p_0)\right]}. \qquad (2.7)$$

Аналогічно для правої ударної хвилі (якщо це є ударна хвиля) після введення масової швидкості

$$a_{II} = \rho_{II}(D_{II} - u_{II}) = R_{II}(D_{II} - U) \qquad (2.8)$$

з цих же співвідношень отримуємо

$$U - u_{II} + \frac{P-p_{II}}{a_{II}} = 0, \tag{2.9}$$

$$a_{II} = \sqrt{\rho_{II}\left[\frac{k+1}{2}(P+p_0) + \frac{k-1}{2}(p_{II}+p_0)\right]}. \tag{2.10}$$

У разі хвилі розрідження необхідно скористатися умовами безперервності рімановых інваріантів

$$[u] \pm \frac{2}{k-1}[c] = 0, [\sigma(S)] = 0, \tag{2.11}$$

Де $c$ - швидкість звуку, $S$ -ентропія. Квадратні дужки вказують на різницю між постійними значеннями відповідних значень в областях, прилеглих до хвилі розрідження ліворуч і праворуч. Знак плюс в першому з рівнянь приймається для лівої хвилі розрідження, знак мінус - для правої хвилі.

Для рівняння стану величини $c$, $\sigma(S)$ обчислюються за формулами

$$c = \sqrt{k\frac{p+p_0}{\rho}}, \sigma(S) = \frac{k(p+p_0)}{\rho^k}.$$

Це дозволяє писати для лівої хвилі розрідження

$$U - u_I - \frac{2}{k-1}c_I\left[1 - \left(\frac{P+p_0}{p_I+p_0}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\right] = 0, \tag{2.12}$$

і для правої хвилі розрідження у вигляді

$$U - u_{II} + \frac{2}{k-1}c_{II}\left[1 - \left(\frac{P+p_0}{p_{II}+p_0}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\right] = 0. \tag{2.13}$$

Надамо співвідношенням таку ж форму, як і у випадку з ударними хвилями. Для цього введемо умовні масові швидкості за такими формулами

$$a_I = \frac{k-1}{2k}\rho_I c_I \frac{1-\frac{P+p_0}{p_I+p_0}}{1-\left(\frac{P+p_0}{p_I+p_0}\right)^{\frac{k-1}{2k}}}, \tag{2.14}$$

$$a_{II} = \frac{k-1}{2k}\rho_{II} c_{II} \frac{1-\frac{P+p_0}{p_{II}+p_0}}{1-\left(\frac{P+p_0}{p_{II}+p_0}\right)^{\frac{k-1}{2k}}}. \tag{2.15}$$

Після цього ітераційний процес будується наступним чином, за методикою, запропонованою академіком Годуновим.

Усунемо частоту контактного розриву $U$. Перейдемо до наступного рівняння для тиску $P$:

$$F(P) \equiv f(P, p_I, \rho_I) + f\left(P, p_{II,} \rho_{II}\right) = u_I - u_{II}, \tag{2.16}$$

де для $i = I, II$

$$f(P, p_i, \rho_i) = \begin{cases} \frac{P - p_i}{\rho_i \cdot c_i \sqrt{\frac{k+1}{2k}\pi_i + \frac{k-1}{2k}}}, & если \quad P \geq p_i, \\ \frac{2}{k-1} c_i \left(\pi_i^{\frac{k-1}{2k}} - 1\right), & если \quad P < p_i, \end{cases} \tag{2.17}$$

де, $\pi_i = \frac{P + p_0}{p_i + p_0}$, $c_i = \sqrt{k \frac{p_i + p_0}{\rho_i}}$.

Обчислимо першу та другу частинні похідні $f(P, p_i, \rho_i)$ функції за змінною $P$:

$$f'(P, p_i, \rho_i) = \begin{cases} \frac{(k+1)\pi_i + (3k-1)}{4k \cdot \rho_i \cdot c_i \sqrt{\left(\frac{k+1}{2k}\pi_i + \frac{k-1}{2k}\right)^3}}, & если \quad P \geq p_i, \\ \frac{1}{k(P+p_0)} c_i \cdot \pi_i^{\frac{k-1}{2k}}, & если \quad P < p_i, \end{cases} \tag{2.18}$$

$$f``(P, p_i, \rho_i) \begin{cases} -\frac{(k+1)\left[(k+1)\pi_i + (7k-1)\right]}{16k \cdot {\rho_i}^2 \cdot {c_i}^2 \sqrt{\left(\frac{k+1}{2k}\pi_i + \frac{k-1}{2k}\right)^5}}, & если \quad P \geq p_i, \\ -\frac{k+1}{2k^2 (P+p_0)^2} c_i \cdot \pi_i^{\frac{k-1}{2k}}, & если \quad P < p_i. \end{cases} \tag{2.19}$$

Значення функції $F(P)$ в точках $P = -p_0$, $p_I$, $p_{II}$ ще до того, як рівняння (2.16) буде вирішено, можна визначити, яка з наведених на рис. 2.1, відбувається, коли розрив розпадається. Ці значення такі:

$$F(p_{II}) = U_{уд} = \frac{p_{II} - p_I}{\sqrt{\rho_I \left[\frac{k+1}{2}(p_{II} + p_0) + \frac{k-1}{2}(p_I + p_0)\right]}}, \tag{2.20}$$

$$F(p_I) = U_{раз} = -\frac{2c_{II}}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p_I + p_0}{p_{II} + p_0}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\right], \tag{2.21}$$

$$F(-p_0) = U_{вак} = -\frac{2(c_I+c_{II})}{k-1}. \quad (2.22)$$

Залежно від значення $u_I - u_{II}$ можливі такі ситуації:

1. $u_I - u_{II} > U_{уд}$. Тоді $P > p_{II}$ , а отже , $P > p_I$.Ударні хвилі поширюються вправо і вліво.

2. $U_{роз} < u_I - u_{II} < U_{уд}$. Потім $p_I < P < p_{II}$. Ліворуч-ударна хвиля, праворуч - хвиля розрідження.

3. $U_{вак} < u_I - u_{II} < U_{роз}$. Потім $-p_0 < P < p_I$відбуваються дві хвилі розрідження.

4. $u_I - u_{II} < U_{вак}$. Виникає область вакууму, в якій слід припустити, $P = -p_0, R = 0$.

При розгляді граничних випадків, коли $u_I - u_{II}$ дорівнює одному з чисел $U_{уд}$ , $U_{роз}$ , $U_{вак}$ то очевидно, що P буде відповідно дорівнювати $p_{II}, p_I - p_0$.

Найбільш доцільним ітераційним процесом знаходження $P$ є метод дотичних по Ньютону.

Якщо $P^{(j-1)}$ перше наближення значення кореня, то припустим,

$$P^{(j)} = P^{(j-1)} - \frac{f\left(P^{(j-1)},p_I,\rho_I\right)+f\left(P^{(j-1)},p_{II},\rho_{II}\right)-(u_I-u_{II})}{f'\left(P^{(j-1)},p_I,\rho_I\right)+f'\left(P^{(j-1)},p_{II},\rho_{II}\right)}. \quad (2.23)$$

Рекомендується вибирати початкове наближення так, щоб виконувалась умова

$$F\left(P^{(0)}\right) < u_I - u_{II}. \quad (2.24)$$

Тоді послідовні наближення сходяться до шуканого кореня знизу, монотонно збільшуючись.

Як один з можливих алгоритмів розрахунку початкового наближення $P^{(0)}$ рекомендується використовувати «звуковий розпад розриву». Таким чином, замість нелінійного рівняння (2.16) в даному випадку розглядається результат його лінеаризації:

$$\frac{P-p_I}{\rho_I \cdot c_I} + \frac{P-p_{II}}{\rho_{II} \cdot c_{II}} = u_I - u_{II}, \quad (2.25)$$

з якого визначається

$$P^{(0)} = \frac{p_I \cdot \rho_{II} \cdot c_{II} + p_{II} \cdot \rho_I \cdot c_I + (u_I - u_{II})\rho_I \cdot c_I \cdot \rho_{II} \cdot c_{II}}{\rho_I \cdot c_I + \rho_{II} \cdot c_{II}}. \quad (2.26)$$

Щоб завершити опис алгоритму розв'язання задачі розпаду щілин, потрібно отримати формули для інших величин, що описують можливі

конфігурації, наведені на рис. 2.1. Всі їх можна знайти після розрахунку тиску $P$ на контактному розриві. Формула для визначення швидкості $U$ контактний розрива визначається наступним чином:

$$U = \frac{a_I u_I + a_{II} u_{II} + p_I - p_{II}}{a_I + a_{II}} \tag{2.27}$$

де $a_I$ $a_{II}$ - масові швидкості, обчислені на останній ітерації.

Знайдемо швидкості ударних хвиль і швидкості крайніх характеристик, що обмежують хвилі розрідження, а також густину.

Якщо ліва хвиля є ударною, її швидкість визначається як

$$D_I = u_I - \frac{a_I}{\rho_I}, \tag{2.28}$$

а щільність $R_I$ обчислюється з адіабату Гугоніо:

$$R_I = \rho_I \frac{(k+1)(P+p_0)+(k-1)(p_I+p_0)}{(k-1)(P+p_0)+(k+1)(p_I+p_0)} = \frac{\rho_I \cdot a_I}{a_I - \rho_I(u_I - U)}. \tag{2.29}$$

Якщо ліва хвиля є хвилею розрідження, то швидкості крайніх характеристик, що обмежують її, обчислюються за формулами

$$D_I = u_I - c_I, \qquad D_I{}^* = U - c_I{}^*, \tag{2.30}$$

де $c_I{}^* = c_I + \frac{k-1}{2}(u_I - U)$, а щільність $R_I$ в області зліва від контактного розриву - за формулою

$$\mathrm{R_I} = \mathrm{k}\frac{\mathrm{P}+\mathrm{p_0}}{(\mathrm{c_I}^*)^2}. \tag{2.31}$$

Аналогічно можна отримати формули для правої хвилі. Якщо вона є ударна, то

$$D_{II} = u_{II} + \frac{a_{II}}{\rho_{II}}, \; R_{II} = \frac{\rho_{II} \cdot a_{II}}{a_{II} + \rho_{II}(u_{II} - U)}, \tag{2.32}$$

А якщо хвилею розрідження, то

$$D_{II} = u_{II} + c_{II}, \; c_{II}{}^* = c_{II} - \frac{k-1}{2}(u_{II} - U), \tag{2.33}$$

$$D_{II}{}^* = U + c_{II}{}^*, \; R_{II} = k\frac{P+p_0}{(c_{II}{}^*)^2}. \tag{2.34}$$

Таким чином, повністю визначено алгоритм побудови узагальненого розв'язку газодинамічної задачі розпаду початкового розриву.

## 2.3 Розрахункова модель для одновимірних задач газодинаміки

Нехай в початковий момент часу $t = t_0$ газ розділяється на шари за допомогою нерухомих вузлів сітки з координатами $x_j$. Довжина інтервалів для просторової змінній визначається як $x_j - x_{j-1} = h_{j-1/2}$. У межах кожного шару величини $u,\ \rho,\ p,\ e = e(p,\rho)$ є постійними, і для шару $j - 1/2$ ,укладені між вузлами $x_{j-1}$ і $x_j$, їх значення позначаються $(u,\rho,p,e)_{j-1/2}$. Так як швидкості і тиски в сусідніх шарах $j - 1/2,\ j + 1/2$ можуть бути не однаковими, то на границі між ними, тобто в точці $x = x_j$, буде розпад розриву. Побудована таким чином обчислювальна сітка показана на рис. 2.2.

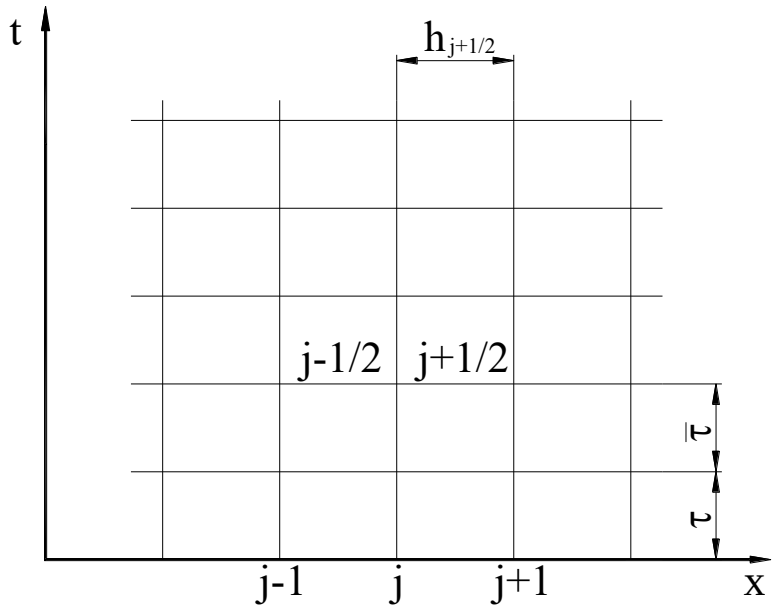



Рисунок 2.2 – Сітка для розрахунку параметрів газу за методом Годунова

Таким чином, параметри на вертикальних лініях мають цілочисельні індекси, а параметри в комірках - напівцілі індекси, що визначаються як напівсума індексів ліній, що обмежують комірку.

Зміна фізичних величин при цьому розпаді буде описано автомодельним рішенням рівнянь газодинаміки наступного вигляду

$$u = u(\xi),\ \rho = \rho(\xi),\ p = p(\xi),\ e = e(\xi),$$

де автомодельна змінна $\xi = \frac{x - x_j}{t - t_0}$. Значення $u,\ \rho,\ p,\ e$ в точці $x = x_j$ будуть зберігатися рівними деяким константам, які ми позначимо $U_j,\ R_j,\ P_j,\ E_j$ , до тих пір, поки в точку $x = x_j$ не прийдуть хвилі, що утворилися під час розпаду розривів у сусідніх вузлах , $x = x_{j-1}$ та $x = x_{j+1}$ . Тому розглянемо описаний процес протягом короткого проміжку часу $\tau$ такого, щоб значення $U_j,\ R_j,\ P_j,\ E_j$

у всіх вузлах $j$ можна вважати незмінними. Прописними літерами позначаються значення на бічних гранях, визначені з розпаду розриву.

У загальному випадку розподіл $u,\ \rho,\ p,\ e$ по координатам $x$ на момент часу $t = t_0 + \tau$, побудувати з використанням алгоритму розрахунку розпаду розривів на всіх вузлах $x_j$,буде дуже складно. Замінимо його кусково-постійним розподілом, який отримаємо, якщо в межах кожного інтервалу $j - 1/2$ рахувати густину маси $\rho$, імпульс $\rho u$ і повної енергії $\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)$ що дорівнює їх середньому значенню по інтервалу. Нові значення значень, отриманих таким чином в певний момент часу $t_0 + \tau$ позначимо $(u, \rho, p, e)^{j-1/2}$. Закони збереження, що застосовуються до комірки сітки $j - 1/2$ протягом певного часу $t_0$ до $t_0 + \tau$, дозволяють виписати для середніх значень $(u, \rho, p, e)^{j-1/2}$,без використання розподілу по шару коли на шарі $t = t_0 + \tau$, у вигляді

$$\left[\rho^{j-1/2} - \rho_{j-1/2}\right]\left(x_j - x_{j-1}\right) + \tau\left[M_j - M_{j-1}\right] = 0, \tag{2.35}$$

$$\left[(\rho u)^{j-1/2} - (\rho u)_{j-1/2}\right]\left(x_j - x_{j-1}\right) + \tau\left[J_j - J_{j-1}\right] = 0, \tag{2.36}$$

$$\left[\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)^{j-1/2} - \rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)_{j-1/2}\right]\left(x_j - x_{j-1}\right) + \tau\left[L_j - L_{j-1}\right] = 0, \tag{2.37}$$

де $M_j = (RU)_j$ , $J_j = (P + RU)_j$, $L_j = \left[RU\left(E + \frac{U^2}{2}\right) + PU\right]_j$.

Доповнимо отримані рівняння рівнянням стану

$$e^{j-1/2} = e\left(p^{j-1/2}, \rho^{j-1/2}\right) \tag{2.38}$$

Можна виписати явні формули для обчислення значень $(u, \rho, p, e)^{j-1/2}$

$$\rho^{j-1/2} = \rho_{j-1/2} + \frac{\tau}{x_{j-1} - x_j}\left[M_j - M_{j-1}\right], \tag{2.39}$$

$$(\rho u)^{j-1/2} = (\rho u)_{j-1/2} + \frac{\tau}{x_{j-1} - x_j}\left[J_j - J_{j-1}\right] = 0, \tag{2.40}$$

$$\left[\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\right]^{j-1/2} = \left[\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\right]_{j-1/2} + \frac{\tau}{x_{j-1} - x_j}\left[L_j - L_{j-1}\right]. \tag{2.41}$$

Можна припустити, що отримані рівняння апроксимують стан газу в момент часу $t_0 + \tau$ .Якщо ми приймемо їх за початковий стан і знову проведемо розрахунок за отриманою схемою, то зможемо просунутися іще на величину $\overline{\tau}$ (в загальному випадку відмінну від $\tau$), отримавши приблизний стан газу на даний момент $t_0 + \tau + \overline{\tau}$.

# 3. ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ПЕРЕНОСУ

Важливість відомостей про кінетичні властивості рідин і газів, з одного боку, і складність (а іноді і неможливість) отримання такої інформації експериментальним шляхом, з іншого, зумовили бурхливий розвиток методів, спрямованих на опис і прогнозування цих властивостей.

Теоретичні методи визначення коефіцієнтів переносу в рідинах і газах можна розділити на наступні основні групи:

1) Модельні теорії (феноменологічні, засновані на структурних припущеннях, кореляціях властивостей і т.д.).
2) Традиційні методи в рамках фундаментального підходу (рівняння Больцмана, часові кореляційні функції).
3) Методи теорії збурень.
4) Чисельні методи – молекулярна динаміка і Монте-Карло.

Коефіцієнтами перенесення є коефіцієнт динамічної в'язкості $\mu$ суміші, коефіцієнт теплопровідності $\lambda$ та ефективний коефіцієнт дифузії $D$.

## 3.1 Коефіцієнт динамічної в'язкості

Коефіцієнт динамічної в'язкості розраховується за однією з двох моделей. Згідно з першою моделлю, динамічний коефіцієнт в'язкості розраховується за формулою Сазерленда у вигляді:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{273}\right)^{1.5} \frac{273+C}{T+C}, \tag{3.1}$$

де $C$ - константа, для азоту $C = 107$; $\mu_0$ - динамічна в'язкість газу при температурі 273 К, для азоту $\mu_0 = 1.67 \cdot 10^{-5}$ Нс/м2.

Згідно з другою моделлю, динамічний коефіцієнт в'язкості як функція від температури розраховується виходячи з параметрів потенціалу Леннарда-Джонса за наступною формулою:

$$\mu(T) = 266{,}93 \cdot 10^{-8} \frac{\sqrt{M \cdot T}}{\sigma^2 \Omega^{(2,2)*}(T^*)}, \text{ [Нс/м}^2\text{]} \tag{3.2}$$

де $\Omega^{(2,2)*}(T^*)$ - інтеграл зіткнення для перенесення імпульсу в залежності від характеристичної температури $T^* = \frac{kT^*}{\varepsilon}$. Величини $\sigma, \left[\overset{0}{A}\right]$; $E = \frac{\varepsilon}{k}$, [К] - параметри потенціалу Леннарда-Джонса, $M$ молекулярна маса в одиницях [кг/кмоль].

Функція $\Omega^{(2,2)*}(T^*)$ апроксимується формулою [7]:

$$\Omega^{(2,2)*}(T^*) = 1.157(T^*)^{-0.1472} \tag{3.3}$$

## 3.2 Коефіцієнт теплопровідності

Коефіцієнт теплопровідності розраховується за допомогою однієї з двох моделей. Згідно з першою моделлю, коефіцієнт теплопровідності визначається за формулою

$$\lambda = \lambda_0 \left(\frac{T}{273}\right)^n, \tag{3.4}$$

де $\lambda_0$ - коефіцієнт теплопровідності при 273 К, для азоту дорівнює $24.19 \cdot 10^{-3}$ [Вт/(м·К)]; $n$ є емпіричною константою для конкретного газу, для азоту $n = 0{,}80$.

Згідно з другою моделлю, коефіцієнт теплопровідності розраховується на основі аналогії процесів перенесення в'язкого імпульсу і теплопровідності за формулою:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot c_p}{Pr}, \tag{3.5}$$

де $Pr$ - число Прандтля.

## 3.3 Коефіцієнт дифузії

Ефективний коефіцієнт дифузії розраховується виходячи з аналогії процесів перенесення в'язкого імпульсу і дифузії за наступною формулою :

$$D = \frac{\mu}{\rho \cdot S_c}, \tag{3.6}$$

де $S_c$ - число Шмідта.

## 3.4 Визначення коефіцієнтів динамічної в'язкості та теплопровідності на основі потенціалів Леннарда-Джонса

Отримані значення коефіцієнта динамічної в'язкості $\chi_0$ і коефіцієнта теплопровідності $\lambda_0$ справедливі для ідеального газу.

Висловимо його $\chi_0$ $\lambda_0$ як в термінах наведених значень, так $\chi_0^*$ і $\lambda_0^*$ [4]

$$\chi_0 = \tilde{\chi} \cdot \chi_0^*; \qquad \chi_0^* = \frac{5}{16\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{T^*}}{\Omega^{(2.2)*}};$$

$$\lambda_0 = \tilde{\lambda}\lambda_0^*,; \qquad \lambda_0^* = f_c \chi_0^*,$$

де $f_c = (c_{v0}/R_0) + 2.25$; $c_{v0}$ - ізохорна теплоємність в ідеальному газоподібному стані $(c_{v0} = c_{p0} - R_0)$.

Далі для зведеного інтеграла зіткнення використовується наступне наближення

$$\Omega^{(2.2)*}(T^*) = \frac{1.16145}{(T^*)^{0.14874}} + \frac{0.52487}{exp(0.7732T^*)} + \frac{2.16178}{exp(2.43787T^*)} \qquad (3.7)$$

Параметри зведення $\tilde{\chi}$ , $\tilde{\lambda}$ , які фігурують у формулах, такі:

$$\tilde{\chi} = 151.416\frac{\sqrt{M \cdot E}}{\sigma^2},\ 10^{-7}\ \text{Па·с}; \qquad (3.8)$$

$$\tilde{\lambda} = 125.893\frac{\sqrt{E/M}}{\sigma^2},\ 10^{-3}\ \text{Вт/(м·К)}, \qquad (3.9)$$

де $M, E, \sigma$ - еталонні параметри.

Вихідні дані:

$\boldsymbol{M = 28.0314}$ кг/кмоль, $\boldsymbol{E = 97.31}$ К, $\boldsymbol{\sigma = 3.5827}$ м, $c_v = 733.2$ кДж/(кг·К); $R = 296.8$ кДж/(кг·К).

Для азоту при $T = 273$ К $\lambda = 0.02407267$ Вт/(м·К), $\chi_0 = 1.718 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

Результати обчислень за цими формулами добре узгоджуються з експериментальними значеннями в нормальних умовах.

## 4. ПОБУДОВА СІТОК ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЧИСЛОВИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Наступні формули можуть бути використані для побудови сіткових моделей осесиметричних і плоских задач

$$Z_r(r,s) = \sum_{j=0}^{1} \phi_j(r) Z_b(j,s)\,; \qquad (4.1)$$

$$Z(r,s) = Z_r(r,s) + \sum_{k=0}^{1} \psi_k(s)\,[Z_b(r,k) - Z_r(r,k)]. \qquad (4.2)$$

Недоліком цього методу побудави сітки є те, що він не є ортогональним поблизу граничних поверхонь. Ріцці та Еріксон вперше застосували тривимірну трансфінітну інтерполяцію для картографування крила-фюзеляжу в 1981 році.

При вирішенні в'язких задач необхідно експоненціально «згустити» комірки біля стінки.

Процедура модифікації сітки полягає в згущенні вузлів в областях найбільшої зміни цікавих характеристик рішення і розрідження її там, де ця зміна незначною мірою шляхом переміщення вузлів.

Для обстеження точок поблизу граничних поверхонь можна використовувати такі аналогічні підходи: застосування функцій розтягування та застосування стискаючих перетворень координат.

Використовуються наступні види функцій розтягування: функція Ейземана і авторська функція:

$$\eta = P\eta^* + (1-P)\left(1 - \frac{th[Q(1-\eta^*)]}{th(Q)}\right), \tag{4.3}$$

Розглянемо докладніше процес подрібнення сітки біля однієї з границь, біля двох границь і на заданій відстані від границі на двовимірній задачі, і узагальнимо результати на випадок тривимірності.

Припустимо, в результаті відображення ми маємо обчислювальний прямокутник із заданою стороною $h$ і побудована на ньому звичайна сітка. Потрібно відобразити цей прямокутник на інший прямокутник зі стороною, що дорівнює одиниці, і нерегулярної подрібненої поблизу $y = 0$ сітки. Пряме перетворення можна виконати за допомогою наступних формул

$$x_1 = x,$$

$$y_1 = 1 - \frac{ln\{[\beta+1-(y/h)]/[\beta-1+(y/h)]\}}{ln[(\beta+1)/(\beta-1)]}, \quad 1 < \beta < \infty. \tag{4.4}$$

Це перетворення розтягування розміщує тим більше число точок поблизу $y = 0$, чим ближче параметр $\beta$ до 1.

Обернене перетворення можна знайти за такими формулами

$$x = x_1,$$

$$y = h\frac{(\beta+1)-(\beta-1)\{[(\beta+1)/(\beta-1)]^{1-y_1}\}}{[(\beta+1)/(\beta-1)]^{1-y_1}+1}. \tag{4.5}$$

Ще одна трансформація цього сімейства подрібнює сітку біля стінок каналу.

$$x_1 = x,$$

$$y_1 = \alpha + (1-\alpha)\frac{ln(\{\beta-2\alpha+[y(2\alpha+1)/h]\}/\{\beta+2\alpha-[y(2\alpha+1)/h]\})}{ln[(\beta+1)/(\beta-1)]}. \tag{4.6}$$

Якщо $\alpha = 0$ , то сітка буде подрібнена тільки поблизу $y = h$ , тоді якщо $\alpha = 1/2$, то сітка буде подрібнюватися як поблизу $y = 0$, так і поблизу $y = h$. Робертс показав, що параметр розтягування $\beta$ апроксимується до безрозмірної товщини граничного шару $\delta/h$ наступним чином:

$$\beta = (1 - \delta/h)^{-1/2}\ ,\ 0 < \delta/h < 1,$$

де $h$ - розмір сітки в напрямку $y$.

Обернене перетворення

$$x = x_1,$$

$$y = h\frac{(\beta+2\alpha)[(\beta+1)/(\beta-1)]^{(y_1-\alpha)/(1-\alpha)}-\beta+2\alpha}{(2\alpha+1)\{1+[(\beta+1)/(\beta-1)]^{(y_1-\alpha)/(1-\alpha)}\}}. \quad (4.7)$$

Перетворення для подрібнення сітки біля внутрішньої границі можна представити наступними формулами

$$x_1 = x,$$

$$y_1 = B + \frac{1}{\tau} arcsh\left[\left(\frac{y}{y_C} - 1\right) sh(\tau B)\right], \quad (4.8)$$

Де, $B = \frac{1}{2\tau} ln\left[\frac{1+(e^{\tau}-1)(y_C/h)}{1+(e^{-\tau}-1)(y_C/h)}\right]$, $0 < \tau < \infty$.

Обернене перетворення можна виконати за формулою

$$y = y_C\left\{1 + \frac{sh[\tau(y_1-B)]}{sh(\tau B)}\right\}. \quad (4.9)$$

# 5. МОДЕЛЮВАННЯ ПОВІТРЯНОГО ТЕПЛООБМІННИКА

## 5.1 Постановка проблеми

Розглянемо задачу повітряного потоку навколо теплообмінника, що складається з гладкої трубки, яку обтікає потік повітря.

Для розв'язання задачі використано рівняння газо та термо динаміки.

Розглянемо ламінарний потік газоподібного азоту в трубі з внутрішнім діаметром $d_1$ і зовнішнім діаметром $d_2$, довжиною L, який обтікає повітряний потік зі швидкістю v. Труба виготовлена з матеріалу з теплопровідністю k.

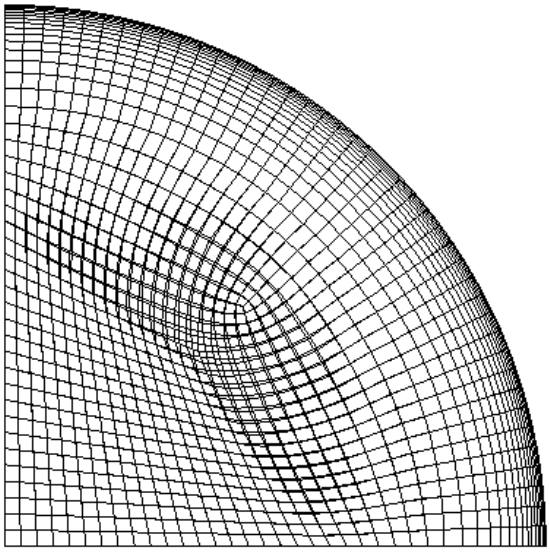


Рисунок 5.1 – Розрахункова сітка в поперечному перерізі сектора труби

Рівняння передачі імпульсу, безперервності потоку та збереження енергії були використані для визначення полів потоку газу в трубі (1.1). Газ, що протікає по трубі, вважається ідеальним.

Передбачується,що тепловий потік рівномірно розподіляється по поверхні.

## 5.2 Розрахунок теплового потоку

Коефіцієнт конвективної тепловіддачі для розглянутого теплообмінника визначається за формулою [8]

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{D}, \tag{5.1}$$

де $Nu$ - критерій (число) Нуссельта; $\lambda$ - коефіцієнт теплопровідності повітря при заданій температурі, Вт/(м·К).

Для одночного циліндра, обтічного за рахунок вхідного потоку повітря, критерій Нуссельта можна визначити з виразу

$$\mathrm{Nu} = 0.023\mathrm{Re}^{0.8}\mathrm{Pr}^{0.4}, \quad (5.2)$$

де $Re$ - число Рейнольдса; $Pr$ - Число Прандтля.

Число Рейнольдса визначається за формулою

$$Re = \frac{u \cdot d_2}{\nu}, \quad (5.3)$$

де $\nu$ – кінематичний коефіцієнт в'язкості, м$^2$/с.

Тепловий потік через поверхню циліндричної трубки можна розрахувати за формулою

$$Q = \frac{T_S - T_\infty}{\frac{ln(d_2/d_1)}{2\pi k} + \frac{1}{\pi d_2 \alpha}}, \quad (5.4)$$

де $T_S$ - температура рідкого азоту на вході в теплообмінник, К; $T_\infty$ -температура газового потоку, що надходить, К; k - коефіцієнт теплопровідності матеріалу теплообмінника, Вт/(м К·).

Число Прандтля в діапазоні температур повітря -20...+50 °С з хорошою точністю становить 0,7 [10].

При розрахунку теплообмінника враховувалися такі параметри: d1 = 12 мм, d2 = 18 мм, L = 0,5 м, k = 387,6 Вт/(м·К).

В результаті розрахунків за формулою (5.4) для розглянутого теплообмінника тепловий потік через стінку труби дорівнює 692 Вт/м$^2$.

Для вирішення цієї проблеми був використаний метод визначення [10].

В якості граничних умов на вході були встановлені наступні параметри:

- сумарний надлишковий тиск 0,9 МПа,
- статичний тиск 0,5 МПа,
- температура газу на вході $T_S$= 173 К,
- Температура обтікаючого повітря $T_\infty$= 293 К.

На виході величина статичного тиску становить 0,03 МПа.

Обчислювальна сітка складалася з 59641 вузлів і 55566 гексаедричних елементів.

Молекулярну в'язкість і теплопровідність розраховували за кінетичною теорією газів за формулами (3.2), (3.4).

В результаті розв'язання системи рівнянь (1.1) визначено термодинамічні та кінематичні характеристики потоку, а саме: тиск, густин та вектор швидкості для кожної комірки обчислювальної області.

Для визначення повної температури використовувався наступний вираз

$$T_0 = T(1 + 0.5(\gamma - 1)M^2), \quad (5.5)$$

де $T$ - статична температура, К; $\gamma$ - адіабатичний показник; $M$ -число Маха.

## 5.3 Результати розрахунку параметрів потоку газоподібного азоту в трубі

При аналізі результатів порівнюються повні (енергетичні) параметри потоку для більшої точності.

Одним з найпростіших випадків руху в'язкого газу є так званий ламінарний рух по циліндричній трубі довільного перерізу, при якому лінії потоку є прямими лініями, паралельними осі труби.

В результаті експериментальних досліджень встановлено , що такий рух відбувається в циліндричних трубках з різною формою поперечного перерізу, якщо число Рейнольдса не перевищує деякого критичного значення.

На основі проведених розрахунків отримано поля розподілу чисел Маха (рис. 5.2), повної температури (рис. 5.3), внутрішньої енергії (рис. 5.4), статичного тиску (рис. 5.5), повного тиску (рис. 5.6) і повної температури по довжині трубки (рис. 5.7).

З малюнку 5.2, біля стінки трубки утворюється тонкий прикордонний шар, в якому проявляються в'язкі ефекти. За межами тонкого, але розташованого нижче за течією пригранічного шару, реальний газ поводиться як ідеальний, тобто в ядрі потоку рух газу описується системою рівнянь для нев'язкого газу (Ейлера). Навпаки, в пригранічного шарі, де дотичні до стінки компоненти різко змінюються від нуля до велечин порядку швидкості набігаючого потоку внаслідок великих значень похідних від нормальної до поверхні стінки трубки швидкостей, виникають значні сили в'язкості, які різко впливають на загальний характер руху рідини в пригранічному шарі. З рис. 5.3 можна побачити,що підвищення загальної температури газу спостерігається поблизу переходу від нев'язкого до в'язкого потоку (тобто межі пригранічного шару) за рахунок різкого уповільнення потоку в околицях в'язкого практично стаціонарного газу.

Внутрішня енергія (рис. 5.4) зменшується до ядра потоку за рахунок надходження тепла через стінки трубки. З рис. 5.6, 5.7 випливає, що загальна довжина трубки поза пригранічним шаром не змінюється через відсутність зміни напрямку потоку, а всі втрати відбуваються в межах тонкого пригранічного шару за рахунок сил тертя.

Визначимо коефіцієнт втрат повного тиску як відношення інтеграла повного тиску по вхідному перерізу до інтегралу повного тиску по вихідному перерізу

$$\mu = 1 - \frac{\iint p_{вх} dS}{\iint p_{вых} dS}. \tag{5.6}$$

У цьому випадку коефіцієнт втрат, розрахований за формулою (5,6), дорівнює 0,9948.

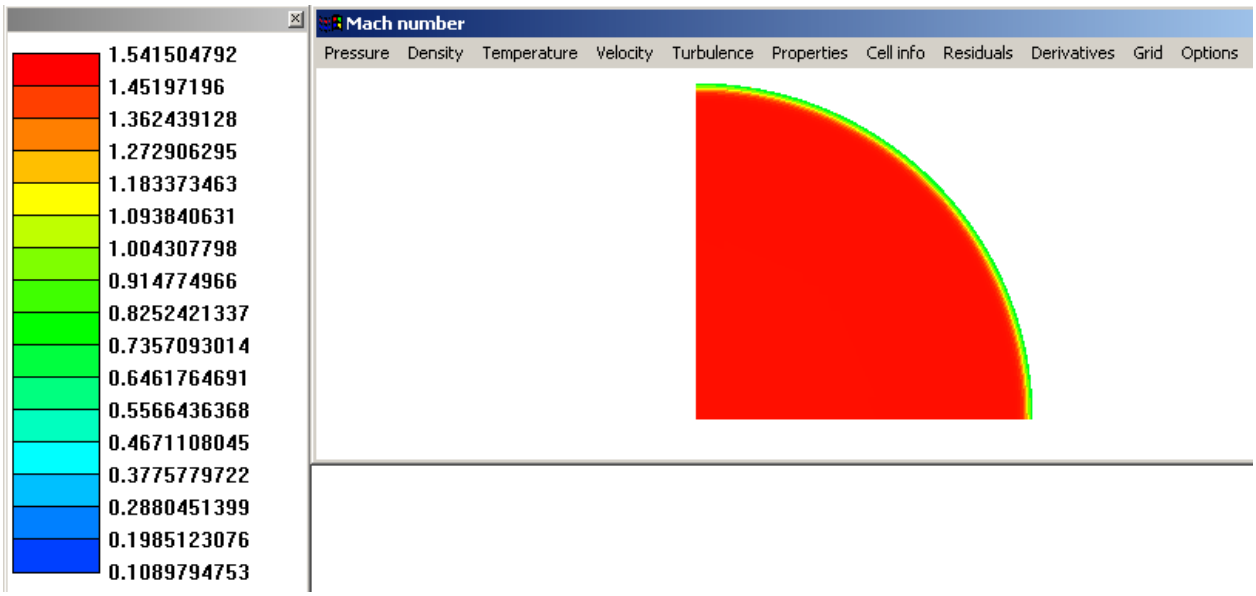



Рисунок 5.2 - Поле розподілу числа Маха в вихідному перерізу сектора теплообмінника

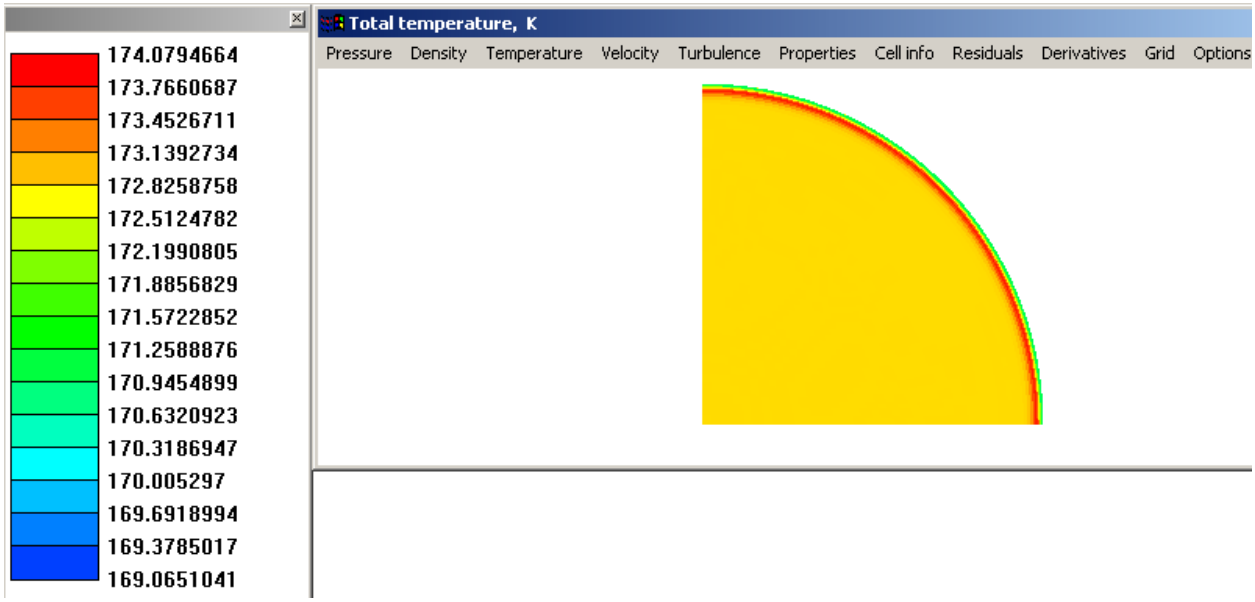



Рисунок 5.3 - Повне поле розподілу температури у вихідному перерізу сектора теплообмінника

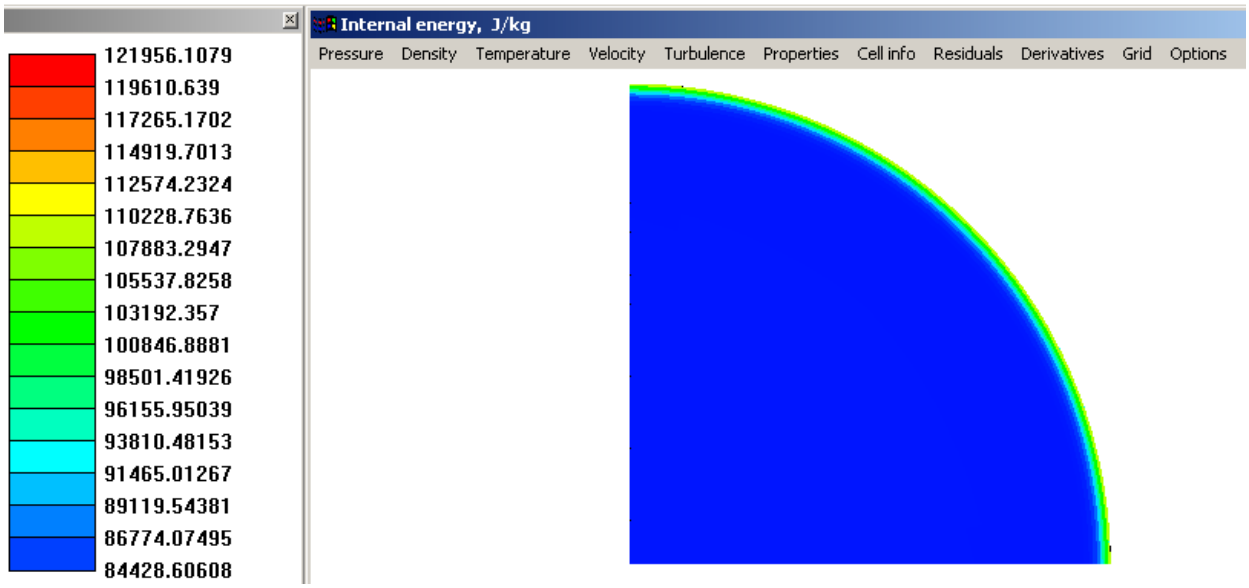



Рисунок 5.4 – Поле розподілу значень внутрішньої енергії у вихідному перерізі трубчастого сектора

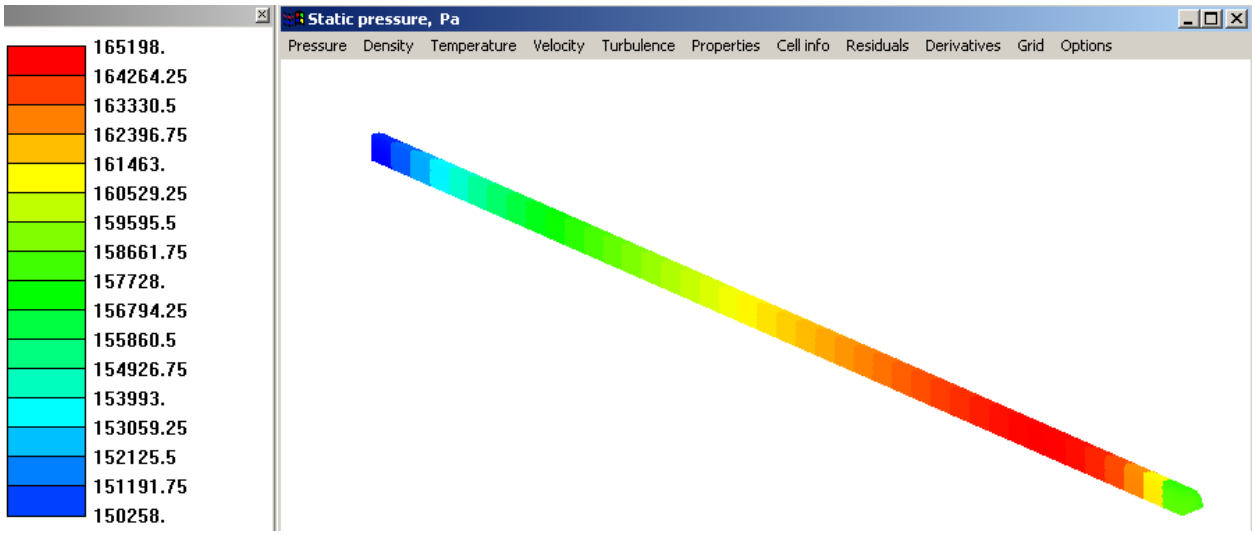



Рисунок 5.5 – Поле розподілу статичного тиску по довжині труби

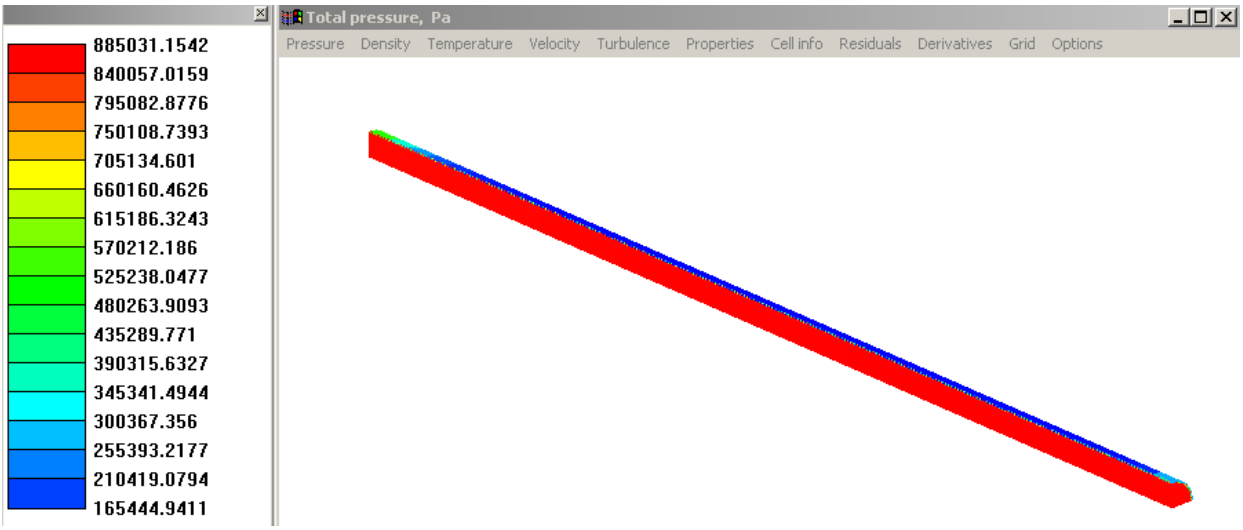



Рисунок 5.6 – Поле розподілу сумарних значень тиску по довжині труби

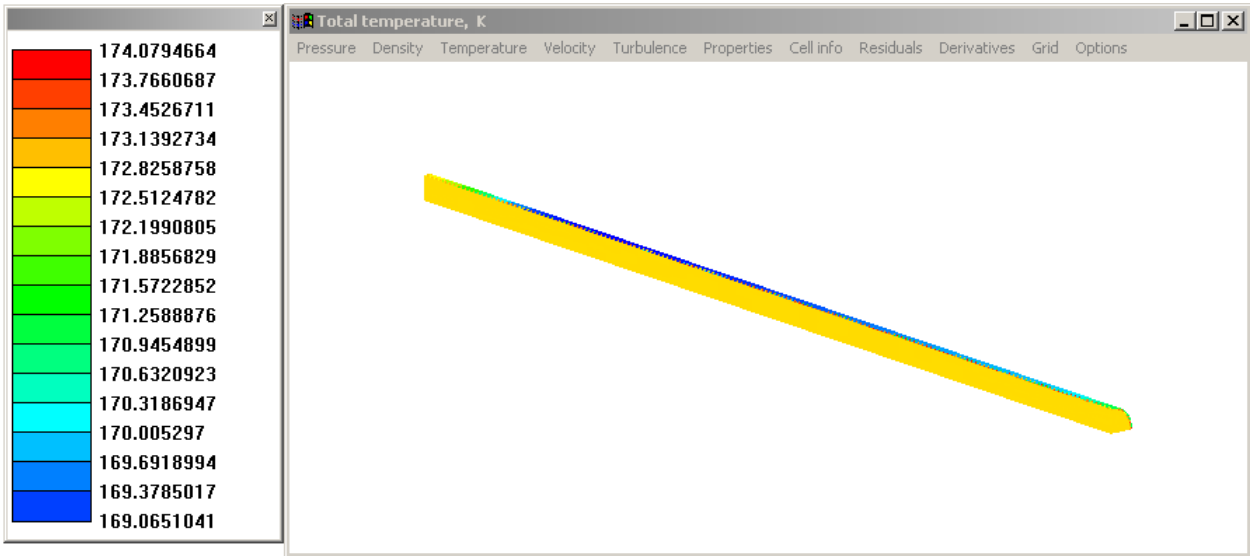



Рисунок 5.7 – Поле розподілу повних значень температури по довжині трубки

## 5.4 Результати аналізу зі зміненими граничними умовами

Розглянемо розрахунок при підвищеному тепловому потоці через стінку труби, рівному 2692 Вт/ м$^2$.

В якості граничних умов на вході задають наступні параметри:

- сумарний надлишковий тиск 0,87 МПа,
- статичний тиск 0,75 МПа,
- температура газу на вході $T_S$= 173 К,

На виході величина надлишкового статичного тиску дорівнює 0 МПа.

Робочим тиском прийнято вважати 0,13 МПа. Результати розрахунків за формулами (1.1) наведені на рис. 5.8 - 5.12.

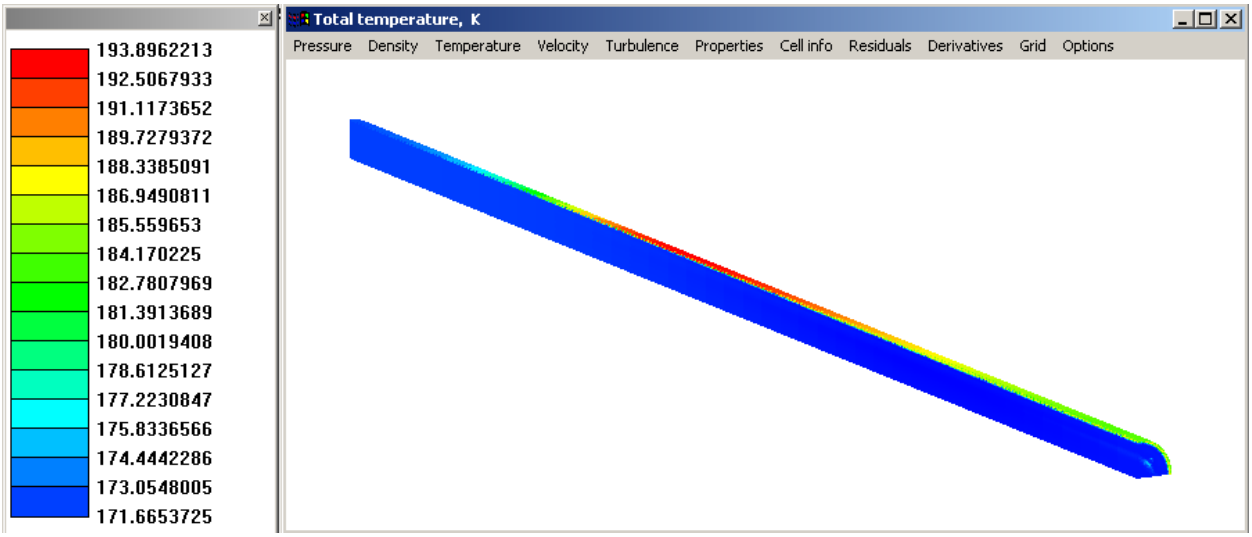



Рисунок 5.8 – Поле розподілу сумарних значень температури по довжині труби

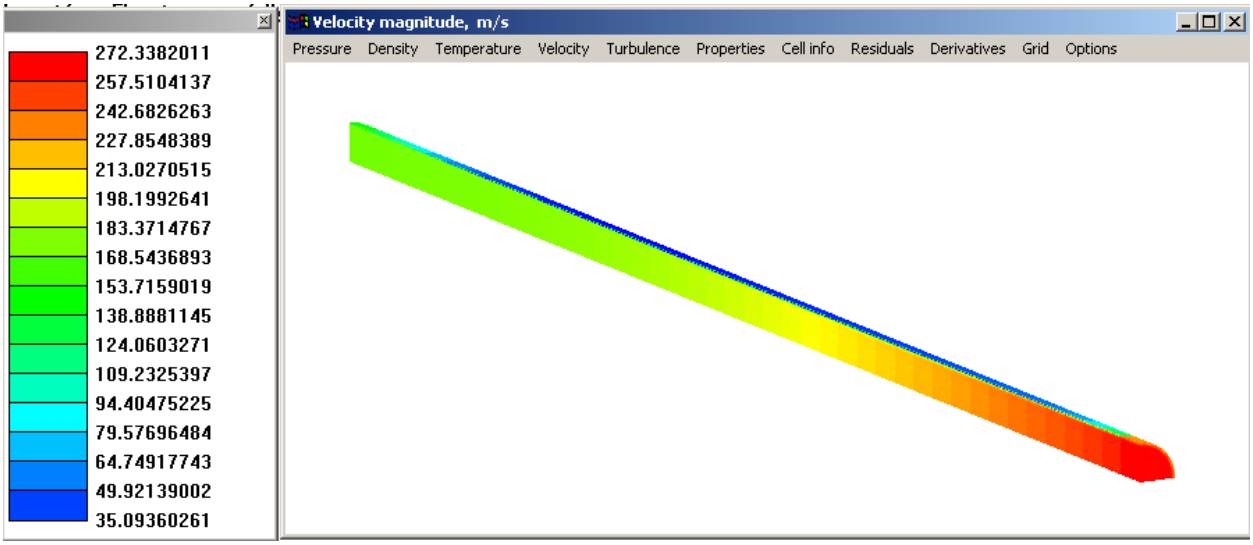



Рисунок 5.9 – Поле розподілу значень вектора швидкостей за модулем по довжині трубки

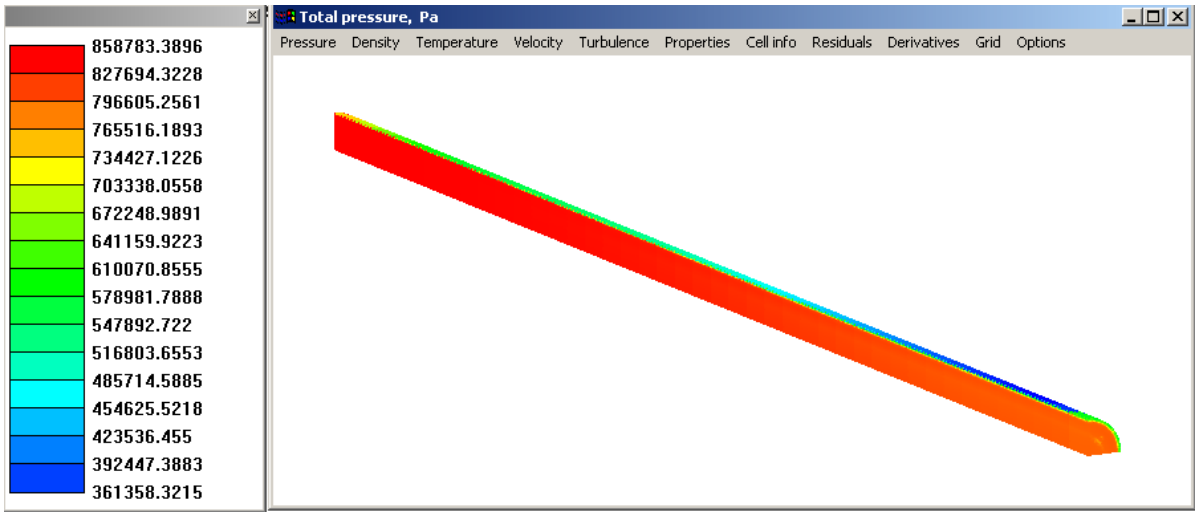



Рисунок 5.10 - Загальне поле розподілу тиску по довжині труби

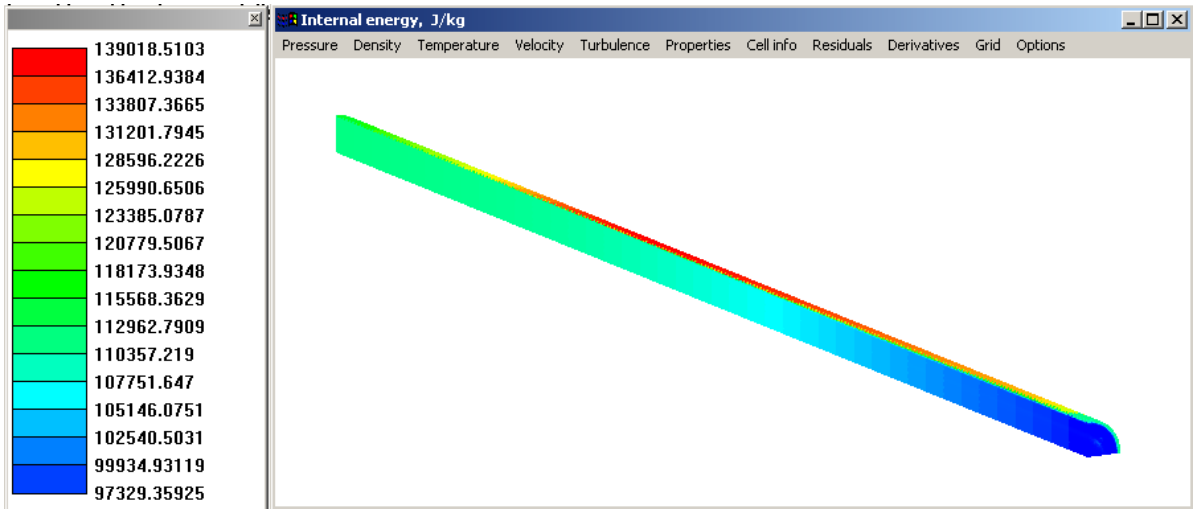



Рисунок 5.11 – Поле розподілу значень внутрішньої енергії по довжині трубки

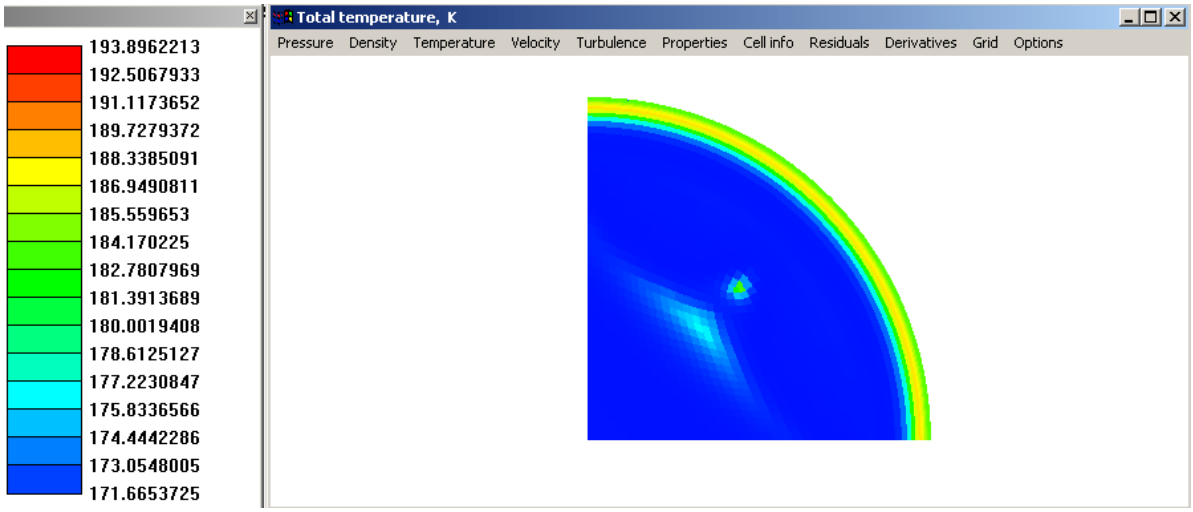



Рисунок 5.12 - Видиме поле розподілу температури в секції вихідного отвору

# ВИСНОВКИ

За результатами розрахунку можна зробити такі висновки:

- Сумарні втрати тиску в першу чергу пов'язані з втратами в приграничному шарі, в той час як параметри в сердечнику потоку залишаються незмінними, з урахуванням зроблених припущень про ламінарність течії;

- Середні значення сумарного тиску на вході і виході будуть відрізнятися (параметри, показані датчиками) величиною сумарних втрат тиску в приграничному шарі;

- Аналогічна ситуація виникає при порівнянні сумарних температур (на вході і виході трубки) – найбільш значний нагрів газу відбувається на поверхні трубки в тонкому приграничному шарі, а значить, найбільший нагрів газу відбувається на поверхні теплообміну, а в ядрі потоку (за рахунок відсутності кінематичних втрат) температура залишається постійною.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Чисельне дослідження закачування в'язкого нестисливого газу в плоский канал на основі рівнянь Нав'є-Стокса. С.Б. Березін, В.М. Пасконов. Обчислювальні методи та програмування, 2003, т.4.
2. Задачі чисельного моделювання надзвукового ламінарно-турбулентного потоку навколо тіл скінченних розмірів. Г.А. Тарнавський, С.І. Шпак. (1998). Математичне моделювання, том 10, No 6. P. 53-74.
3. Ю.В. Лапін. Турбулентний прикордонний шар у надзвукових газових потоках. - М.: Наука, 1982.
4. Маринін В.С. Теплофізика альтернативних енергоносіїв. – Національна академія наук України. Ін-т пробл. Машинобудування імені А.Н. Підгорного. Харків : Форт, 1999. 212 с. (російською мовою).
5. Єршов С., Русанов А., Лампарт П., Свіриридчук Й., Гардзілевич А., Моделювання потоків турбомашин за допомогою 3D розв'язувача RANS з моделлю турбулентності Menter SST // Рівняння Ейлера та Нав'є Стокса, Прага, 23-25 травня 2001 р., с. 145-148.
6. Прикладна газодинаміка. Абрамович Г.М. 4-е видання, виправлене і доповнене. Головна редакція фізико-математичної літератури видавництва «Наука», Москва, 1976, 888 с.
7. Міхєєв М.А., Міхєєва І.М. Основи теплообміну. М., Видавництво «Енергія», 1973.
8. Теплотехніка: Учеб. За редакцією В. Н. Луканіна – М.: Вища школа, 1999. - 671 с. (російською мовою).
9. Дж.Х.Лі Основні керівні рівняння для режимів польоту аероасистованих орбітальних транспортних засобів.// Стаття AIAA No 84-1729, 1984.
10. Книга теплообміну.
11. Довідник з фізико-технічних основ кріогеніки / Під редакцією М.П.Малкова. М., Видавництво «Енергія», 1973, 392 с.

12. Єршов С.В. Квазімонотонна схема ENO підвищеної точності для інтегрування рівнянь Ейлера та Нав'є-Стокса. Моделювання. – 1994. – 6, N 11. – С. 58–64.
13. Єршов С.В. Чисельне моделювання турбулентних струмів розриву в плоских сітках. Університетів. Авіаційна техніка, 1994, No 1. – С. 69 – 72.
14. Єршов С.В., Русанов А.В.3D розрахунки розділеної в'язкої течії за схемою високої роздільної здатності Годунова // Прок. 7-а Міжнародна конф. Аерофізичні дослідження, Новосибірськ, 22–26 серпня 1994 р. – Новосибірськ. – 1. – С. 209–214.
15. Єршов С.В. Чисельне моделювання 3D розділеного потоку через багатоступінчасту турбомашину // ICFM5/95, Proc. 5th Int. Conf. Fluid Mechanics, Каїр, 2 - 5 січня 1995 р. – Каїр, Єгипет. – 1995. – 2. – С. 109 – 118.
16. Білоцерковський О.М. Пряме чисельне моделювання вільної розвиненої турбулентності: когерентні структури, ламінарно-турбулентний перехід, хаос / В Етюди про турбулентність, - М.: Наука, 1994, с.137-222.
17. Норрі Д., де Фріс Ж. Вступ до методу кінцевих елементів. Москва, 1981.
18. Пірумов У.Г., Росляков Г.С. Чисельні методи газодинаміки. Довідник для студентів вищих технічних навчальних закладів. Москва: Висш. Шк., 1987. – 232 с. (російською мовою).
19. Гогрічіані Г. В., Шипілін А. В. Перехідні процеси в пневматичних системах. Москва, Видавництво «Машинобудування», 1986. 160 с. (російською мовою).
20. Й.О.Гіршфельдер, Ч.Ф.Кертісс, Р.Б.Берд. Молекулярна теорія газів і рідин птахів.- Нью-Йорк, Уайлі, Лондон, Чепмен і Холл, 1954.