

Дифференциальные практические задачи.

1

№ 1

Линейное уравнение первого
порядка. Уравнение Бернулли.

①. $y' + 4y = 0$; $y(0) = 3$,

Решение:

Для уравнения

$$C(x) = y' + p(x)y = 0$$

$$y = C \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

Здесь $p(x) = 4$.

$$y = C \cdot e^{-\int 4 dx} = Ce^{-4x}$$

Н.у.: $y(0) = 3$,

$$3 = C$$

Ответ: $y = 3e^{-4x}$.

②. $y' - y \cdot \operatorname{ctg} 2x = 0$,
 $y(\frac{\pi}{4}) = 1$

Pemisue:

$$y = C \cdot e^{\int \operatorname{ctg} 2x \, dx}$$

$$\int \operatorname{ctg} 2x \, dx = \int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin 2x} =$$

$$= \left[t = \sin 2x \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |t| + C_1 = \frac{1}{2} \ln |\sin 2x| + C_1$$

$$y = C \cdot e^{\frac{1}{2} \ln |\sin 2x|} = C \cdot \sqrt{|\sin 2x|}$$

$$\text{A. y. } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$1 = C \cdot \sqrt{\sin \frac{\pi}{2}} = C,$$

$$y = \sqrt{\sin 2x} \quad (\text{uoggi is moreso kee})$$

cektur, t.k., upr. $x = \frac{\pi}{4}$ uuelii.

$$(\sin 2x = \sin 2x \geq 0).$$

Other: $y = \sqrt{\sin 2x}$

$$\textcircled{3}. \quad y' + \frac{y}{x} = x+1; \quad y(1) = 0.$$

Pemisue:

Pemisue (coobertc~~t~~ byazee ognopostie)

Уравнение:

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

$$-\int \frac{1}{x} dx$$

$$= y_{\text{общ}} = C e^{-\ln x} = C e^{-\ln x} = \frac{C}{x}$$

Учно-исследовательский метод Азаровская.
Численное решение уравнения

8. Сингулярные

$$\textcircled{1}: y = \frac{C(x)}{x}$$

$$\frac{C'(x)}{x} = x + 1$$

$$C'(x) = x^2 + x$$

$$C(x) = \int (x^2 + x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{C}{x}$$

$$\text{И. у.: } y(1) = 0.$$

$$0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C$$

$$C = -\frac{5}{6}$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}x$$

$$\textcircled{4}: y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x;$$

$$y(0) = 0.$$

Решение:

$$y' + y \operatorname{tg} x = 0,$$

$$\begin{aligned} y_{\text{офиц.}} &= C e^{-\int \operatorname{tg} x dx} = C e^{\ln \cos x} = \\ &= C \cdot \cos x. \end{aligned}$$

$$y = C(x) \cdot \cos x,$$

$$C'(x) \cdot \cos x = \cos^2 x,$$

$$C'(x) = \cos x.$$

$$C(x) = \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$y = (\sin x + C) \cdot \cos x,$$

$$\text{И.у. } y(0) = 0.$$

$$C = 0,$$

$$y = \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2},$$

Ответ: $y = \frac{\sin 2x}{2}$

5. $y' + \frac{y}{x} = xy^2$. Решение:

Это уравнение Бернулли.

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^a \quad (a \neq 0; a \neq 1).$$

Решаем соответствующее линейное однородное уравнение:

$$y' + \frac{y}{x} = 0,$$

$$y_{\text{общ}} = C e^{-\int \frac{1}{x} dx} = C e^{-\ln x} = \frac{C}{x},$$

$$y = \frac{c(x)}{x}.$$

$$\frac{c'(x)}{x} = x \cdot \left(\frac{c(x)}{x}\right)^2.$$

$$c'(x) = c^2(x).$$

$$\int \frac{dc(x)}{c^2(x)} = \int dx,$$

Из полученного равенства (y^*) будем решать для $c(x)$:

$$\frac{1}{c(x)} = x + C,$$

$$c(x) = \frac{1}{x+C},$$

$$y = -\frac{1}{x(x+C)} = -\frac{1}{x^2+Cx},$$

Однако $y = -\frac{1}{x^2+Cx}$.

6. $y' - y = \frac{e^x}{y}.$

Fremeset:

$$y' - y = 0, \int 1 dx = Ce^x$$

$$y_{\text{ogn.}} = Ce^x$$

$$y = C(x) \cdot e^x$$

$$C'(x) \cdot e^x = \frac{(x)e^x}{C(x) \cdot e^x}$$

$$C'(x) = \frac{e^{-x}}{C(x)}.$$

Orter:

$$\int C(x) dC(x) = \int e^{-x} dx,$$

⑧.

$$\frac{C^2(x)}{2} = -e^{-x} + C,$$

$$C(x) = \pm \sqrt{2(C - e^{-x})},$$

$$y = \pm e^x \cdot \sqrt{2(C - e^{-x})} =$$

$$= \pm \sqrt{2(Ce^{2x} - e^{2x})}$$

Orter:

$$y = \pm \sqrt{2(Ce^{2x} - e^{2x})}$$

⑦.

$$y' + 3y = x^2 + x + 5.$$

Это уравнение можно решить с
помощью Лагранжа, то есть свести
уравнению к постоянной коэф.
приравнению и спешившему урав-
нению reaction, и это можно решить
прямые. Решаем с помощью
огнеподжигающее уравнение:

$$y' + 3y = 0.$$

$$\bar{y} = y_{ogn.} = Ce^{-3x}.$$

$$y' + ay = P(x); a \neq 0.$$

Ищем частное решение (y^*) в
виде многочленов от x вида
того $P(x)$:

$$y^* = Ax^2 + Bx + C;$$

$$y^{*'} = 2Ax + B,$$

$$2Ax + B + 3(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + x + 5.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3A = 1; \\ 2A + 3B = 1; \\ B + 3C = 5. \end{array} \right.$$

$$A = \frac{1}{3}; B = \frac{1}{9}; C = \frac{44}{27}.$$

$$y^* = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{44}{27} =$$
$$= \frac{9x^2 + 3x + 44}{27}$$

$$y = y^* + \bar{y} = \frac{9x^2 + 3x + 44}{27} +$$
$$+ Ce^{-3x}$$

$$\text{Other: } y = \frac{9x^2 + 3x + 44}{27} + Ce^{-3x}$$

$$\textcircled{8}. \quad y' - 2y = (2x + 5) e^x.$$

Permešne,

$$y' - 2y = 0.$$

$$\bar{y} = Ce^{2x}$$

$$y^* = Q(x) \cdot e^x$$

Due yspolemenie $y' + py = P(x) \cdot e^x$,

$$Q' + (p + a) Q = P(x);$$

$$y^* = Q(x) \cdot e^{ax}$$

$$p = -2; a = 1; P(x) = 2x + 5;$$

$$Q' - Q = 2x + 5.$$

$$Q = Ax + B; Q' = A,$$

$$A - Ax - B = 2x + 5,$$

9

$$\begin{cases} -A = 2; \\ A - B = 5. \end{cases}$$

$$A = -2; B = -7.$$

$$Q(x) = -2x - 7.$$

$$y^* = -(2x + 7) \cdot e^x.$$

$$y = -(2x + 7) e^x + C e^{2x}.$$

Ответ: $y = -(2x + 7) e^x + C e^{2x}.$

⑨ $y' + 3y = x^2 \cdot e^{-3x}$

Решение:

$$y' + 3y = 0.$$

$$\bar{y} = C e^{-3x}.$$

$$P(x) = x^2; P = 3; a = -3,$$

$$Q' = x^2.$$

$$Q = \frac{x^3}{3}.$$

$$y^* = \frac{x^3}{3} \cdot e^{-3x}.$$

$$y = \left(C + \frac{x^3}{3}\right) \cdot e^{-3x}$$

Ответ:

$$y = \left(C + \frac{x^3}{3}\right) \cdot e^{-3x}.$$

$$⑩. \quad y' + 2y = 3 \cos 5x. \quad 10$$

Решение:

$$y' + 2y = 0.$$

$$\tilde{y} = C e^{-2x}$$

Комплексное уравнение:

$$y' + 2y = 3e^{5ix}$$

$$\tilde{y} = Q(x) \cdot e^{5ix};$$

$$y^* = \operatorname{Re} \tilde{y}.$$

$$Q' + (2 + 5i) Q = 3.$$

$$Q = A; \quad Q' = 0.$$

$$(2 + 5i) A = 3,$$

$$A = \frac{3}{2 + 5i} = \frac{3 \cdot (2 - 5i)}{29}$$

$$Q = \frac{3 \cdot (2 - 5i)}{29}$$

$$\tilde{y} = \frac{3 \cdot (2 - 5i)}{29} \cdot (\cos 5x + i \sin 5x).$$

$$y^* = \operatorname{Re} \tilde{y} = \frac{6 \cos 5x + 15 \sin 5x}{29}$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{6 \cos 5x + 15 \sin 5x}{29} + C e^{-2x}.$$

Практическое задание № 2. 11

Уравнения второго порядка, допускающие поиск линейного порядка.

①. $y'' = -\frac{y'}{x}$.

Решение:

Для уравнений вида

$$y'' = f(x; y')$$

используется замена

$$u = y'$$

$$u' = -\frac{u}{x}.$$

Это однородное линейное
уравнение первого порядка:

$$u = C_1 e^{-\int \frac{1}{x} dx} = C_1 e^{-\ln x} =$$

$$= \frac{C_1}{x},$$

$$y = \int u(x) dx = C_1 \ln |x| + C_2.$$

Ответ: $y = C_1 \ln |x| + C_2.$

$$②. \quad y'' = x(y')^2; \quad y(0)=1; \quad y'(0) = \underline{\underline{1}}.$$

Решение:

$$u = y'$$

12

$$u' = xu^2.$$

Это уравнение с разделяющимися
переменными:

$$\frac{du}{dx} = xu^2,$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int x \, dx,$$

$$-\frac{1}{u} = x + C_1,$$

$$u = -\frac{1}{x+C_1}.$$

$$y = \int u(x) \, dx = -\ln|x+C_1| + C_2.$$

$$\text{Н.у.: } y'(0) = 1 \Rightarrow u(0) = 1.$$

$$-\frac{1}{C_1} = 1,$$

$$C_1 = -1.$$

$$y = -\ln(1-x) + C_2$$

13

(т. к. при $x=0$: $1-x > 0$),

$$y(0)=1 \Rightarrow C_2=1,$$

$$y = 1 - \ln(1-x).$$

Ответ: $y = 1 - \ln(1-x)$.

③. $y'' = yy'$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$.

Решение:

Для уравнений вида

$$y'' = f(y; y')$$

используется дополнительное
уравнение

$$y' = p(y),$$

где функция $p(y)$ неизвестна.

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = \frac{d}{dx} p(y) = p'(y) \cdot y' = \\ &= p'(y) \cdot p(y); \end{aligned}$$

$p'(y) \cdot p(y) = f(y; p(y))$ —
уравнение первого порядка с

ненулевой функцией $p(y)$ и
независимой переменной y .

Затем решаем уравнение 19
 $y' = p(y)$ (с разделяющимися
переменными),

Решение:

В данном случае:

$$y' = p(y).$$

$$p'(y) \cdot p(y) = y \cdot p(y).$$

$$p'(y) = y.$$

$$p(y) = \frac{y^2}{2} + C.$$

$$\text{И.у.: } y(0) = 1; y'(0) = 1,$$

т. е. при $y = 1$: $p(y) = 1$:

$$1 = \frac{1^2}{2} + C,$$

$$C = \frac{1}{2}.$$

$$p(y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2},$$

$$y' = \frac{y^2 + 1}{2}.$$

15

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 1}{2},$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int \frac{dx}{2},$$

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x}{2} + C,$$

$$\text{u. } y|_0, y(0) = 1,$$

$$\operatorname{arctg} 1 = C,$$

$$C = \frac{\pi}{4}.$$

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{Other: } y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\textcircled{4}. \quad y'' = \frac{(y')^2}{y}.$$

Pensieve:

$$\therefore y' = p(y), \quad p^2(y)$$

$$p'(y) = \frac{p(y)}{y}, \quad 16$$

$$p(y) = C_1 e^{\int \frac{1}{y} dy} = C_1 e^{\ln y} = C_1 y.$$

$$y' = C_1 y.$$

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Orter: $y = C_2 \cdot e^{C_1 x}$.

⑤. $y'' = e^{2y}; y(0)=0; y'(0)=1.$

Reinesue:

$$y' = p(y).$$

$$p'(y) \cdot p(y) = e^{2y}.$$

$$p \frac{dp}{dy} = e^{2y}.$$

$$\int p dp = \int e^{2y} dy.$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{e^{2y}}{2} + C.$$

H. g.: $y(0)=0; y'(0)=1.$

Tzu $y=0: p(y)=1:$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C.$$

$$c = 0.$$

17

$$p^2 = e^{2y}.$$

$$p > 0 \Rightarrow p = e^y.$$

$$y' = e^y.$$

$$\frac{dy}{dx} = e^y.$$

$$\int e^{-y} dy = \int dx.$$

$$-e^{-y} = x + C.$$

$$y = -\ln(-x + C).$$

$$\text{H.y.}, y(0) = 0.$$

$$C = -1.$$

$$y = -\ln(1 - x).$$

$$\underline{\text{Other:}} \quad y = -\ln(1 - x).$$

$$\textcircled{6}. \quad y'' = \frac{1}{y^3}; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

Reversen:

$$y' = p(y).$$

$$p'(y) \cdot p(y) = \frac{1}{y^3}.$$

18

$$p \frac{dp}{dy} = \frac{1}{y^3}.$$

$$\int p dp = \int \frac{dy}{y^3}.$$

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + C.$$

$$\text{H. y.; } y(0) = 1; y'(0) = 1.$$

$$\text{Jtpu } y = 1: \quad p(y) = 1:$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + C.$$

$$C = 1.$$

$$p^2 = -\frac{1}{y^2} + 2.$$

$$p > 0 \Rightarrow p = \sqrt{2 - \frac{1}{y^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2y^2 - 1}}{y}.$$

$$y' = \frac{\sqrt{2y^2 - 1}}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2y^2 - 1}}{y}.$$

$$\int \frac{y \, dy}{\sqrt{2y^2 - 1}} = \int dx. \quad 19$$

$$\int \frac{d(2y^2 - 1)}{2\sqrt{2y^2 - 1}} = 2x + C.$$

$$\sqrt{2y^2 - 1} = 2x + C.$$

$$\text{H.y.: } y(0) = 1,$$

$$C = 1,$$

$$\sqrt{2y^2 - 1} = 2x + 1.$$

$$2y^2 - 1 = 4x^2 + 4x + 1.$$

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1.$$

$$y > 0 \Rightarrow y = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}.$$

Ober: $y = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}.$

Задания к самостоятельной работе:

1) Решение, уравнения с разделяющимися переменными, "однородные уравнения 1-го порядка" (противоположное № 3) — $k/p \# 1$.

2) Решение, линейные ур-я 1-го порядка", "ур-я в дериватии" (дополнительное № 3 № 1) —
 $k/p \# 2$.

3) Решение, уравнений 2-го порядка, допускающие понижение порядка" (дополнительное № 3 № 2) —

$k/p \# 3$.
Каждая работа — на 10 баллов.