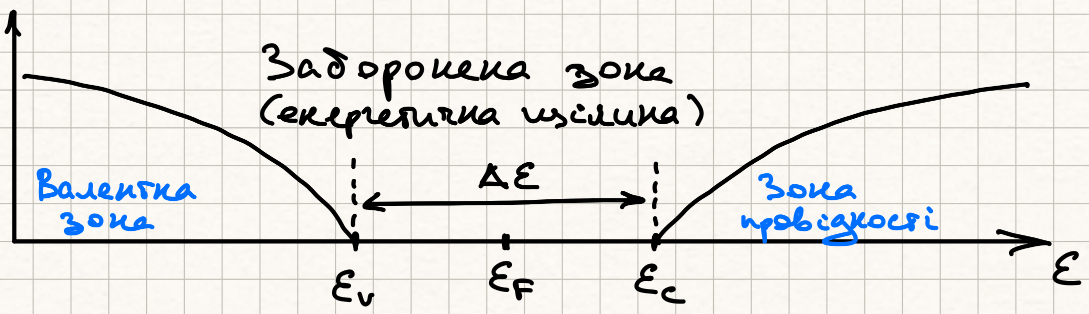
Практичне заняття №2

Задача №1.



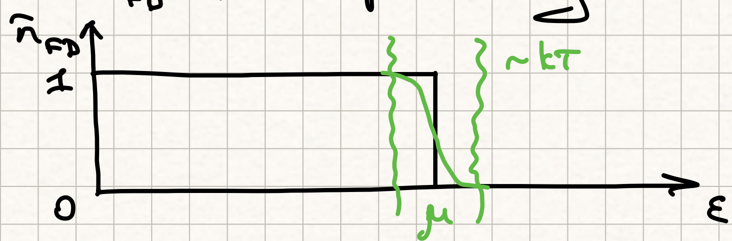
(a) Як перше наближення, нехай густина станів біля дна зони провідності буде такою ж, як для вільного Фермі-газу: $g(\varepsilon) = g_0\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_c}$, де $g_0 = \frac{3N}{2\varepsilon_F^{3/2}} = \frac{\pi(8m)^{3/2}}{2h^3}V = const.$ Ми будемо моделювати густину станів біля вершини валентної зони як її дзеркальне відображення. Поясніть, чому в такому випадку хім. потенціал має бути рівно посередині між двома зонами.

$g(\varepsilon)\bar{n}_{FD}(\varepsilon)$; $g(\varepsilon)$ симетрична відносно $\varepsilon = \varepsilon_F$

$\bar{n}_{FD}(\varepsilon)$ симетрична відносно $\varepsilon = \mu$

$$\bar{n}_{FD} = \frac{1}{1+e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT}} ;$$

$$\mu = \varepsilon_F(1+\ldots)$$



(b) Вивести кількість електронів у зоні провідності як ф-цію температури T і ширини забороненої зони $\Delta\varepsilon$, якщо $\Delta\varepsilon \gg kT$.

$$N_c = \int_{\varepsilon_c}^{\infty} g(\varepsilon)\bar{n}_{FD}(\varepsilon)\,d\varepsilon = g_0\int_{\varepsilon_c}^{\infty}\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_c}\,\frac{1}{e^{(\varepsilon-\varepsilon_F)/k_BT}\cancel{+1}}\,d\varepsilon =$$

$$= g_0\int_{\varepsilon_c}^{\infty}\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_c}\,e^{-(\varepsilon-\varepsilon_c)/k_BT}\cdot e^{-(\varepsilon_c-\varepsilon_F)/k_BT}\,d\varepsilon =$$

$$= g_0\, e^{-(\varepsilon_c-\varepsilon_F)/k_BT}\cdot (k_BT)^{3/2}\underbrace{\int_0^{\infty}\sqrt{x}\,e^{-x}\,dx}_{=\sqrt{\pi}/2} ;$$

$$\boxed{N_c} = \frac{\pi(8m)^{3/2}}{2h^3} V (k_BT)^{3/2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-(\varepsilon_c-\varepsilon_F)/k_BT} = \boxed{\frac{2V}{\lambda^3} e^{-\frac{\Delta\varepsilon}{2k_BT}}};$$

(c) Для кремнія (Si) при кімнатній т-рі $\Delta\varepsilon \approx 1.1$ еВ. Оцініти, скільки у нього буде електронів в зоні провідності на $1\,см^3$? Як це співвідноситься з аналогічною величиною для міді?

$k_BT \approx 0.026$ еВ $\Rightarrow$

$$e^{-\Delta\varepsilon/2k_BT} = \exp\left(-\frac{1.11\,еВ}{2\cdot 0.026\,еВ}\right) = e^{-21.3} = 5.4\cdot 10^{-10};$$

$$\lambda^3 = \left(\frac{(6.63\cdot 10^{-34}\,Дж\cdot с)^2}{2\pi\,(9.11\cdot 10^{-31}\,кг)\cdot(1.38\cdot 10^{-23}\,Дж/К)\cdot(300\,К)}\right)^{3/2} = 8.0\cdot 10^{-26}\,м^3;$$

$$\frac{N_c}{V} = \frac{2\cdot 5.4\cdot 10^{-10}}{8\cdot 10^{-26}\,м^3} = 1.3\cdot 10^{16}\,м^{-3} = 1.3\cdot 10^{10}\,см^{-3};$$

Для міді (Cu): $8.5\cdot 10^{28}\,м^{-3} = 8.5\cdot 10^{22}\,см^{-3}$.

(d) Поясніть, чому напівпровідник краще проводить струм при високих т-рах. Підтвердіть це числами.

Піднімемо т-ру від 300K до 350K.

Для λ^3: $(350/300)^{3/2} \approx 1.26$.

$$e^{-\Delta\varepsilon/2k_BT} = \exp\left(-\frac{1.11\,еВ}{2\cdot(8.62\cdot 10^{5}\,еВ/К)\cdot(350\,К)}\right) = e^{-18.4} = 1.0\cdot 10^{-8};$$

– більше у 19 разів ніж для $T = 300$K.

N_c/V збільшиться більше ніж у 20 разів.

(e) Грубо кажучи, наскільки широкою має бути енергетична щілина, щоб матеріал вважався ізолятором, а не напівпровідником?

Для $\Delta\varepsilon = 3$ еВ: $e^{-\Delta\varepsilon/2k_BT} = \exp\left(-\frac{3\,еВ}{2\cdot 0.026\,еВ}\right) = e^{-57.7} = 9\cdot 10^{-26};$

$N_c/V = \frac{2\cdot(9\cdot 10^{-26})}{8\cdot 10^{-26}\,м^3} \approx 2\,м^3.$

Практичне заняття № 5

Задача № 5.1 Припускаючи, що тунельні резистори R_1 та R_2, що підключені паралельно, дають сумарний опір KR_1R_2, де $K = const$, показати, що TMR дорівнює $2P^2/(1-P^2)$.

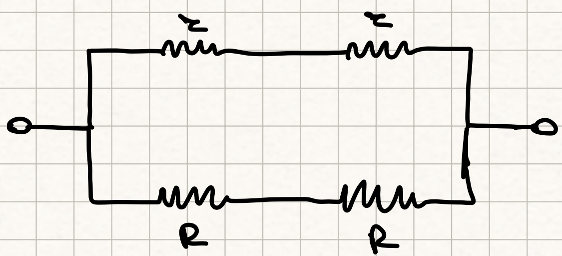
Було:

$R_1 + R_2$

Тепер:

KR_1R_2

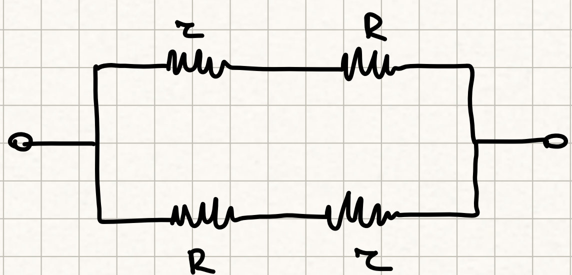
(P)



$$R_P = Kr^2 \parallel KR^2 = \frac{\cancel{K}r^2 \cdot KR^2}{\cancel{K}r^2 + \cancel{K}R^2};$$

$$R_P = \frac{Kr^2R^2}{r^2+R^2};$$

(AP)



$$R_{AP} = KrR \parallel KrR = \frac{KrR \cdot \cancel{KrR}}{\cancel{KrR} + \cancel{KrR}};$$

$$R_{AP} = \frac{KrR}{2};$$

$$TMR = \frac{R_{AP} - R_P}{R_P} = \frac{R_{AP}}{R_P} - 1;$$

$$\frac{R_{AP}}{R_P} = \frac{\cancel{KrR}}{2} \cdot \frac{r^2 + R^2}{\cancel{K}r^{\cancel{2}} R^{\cancel{2}}} = \frac{r^2 + R^2}{2rR} = \frac{(R+r)^2 + (R-r)^2}{(R+r)^2 - (R-r)^2};$$

$$P = \frac{R-r}{R+r}$$ – поляризація магніта

$$\frac{R_{AP}}{R_P} = \frac{\left(\frac{R+r}{R+r}\right)^2 + \left(\frac{R-r}{R+r}\right)^2}{\left(\frac{R+r}{R+r}\right)^2 - \left(\frac{R-r}{R+r}\right)^2} = \frac{1+P^2}{1-P^2};$$

$$TMR = \frac{1+P^2}{1-P^2} - 1 = \frac{\cancel{1}+P^2-\cancel{1}+P^2}{1-P^2} = \frac{2P^2}{1-P^2}; \quad TMR = \frac{2P^2}{1-P^2};$$

Задача 5.2 Розглянути двовимірні провідники з трьома різними відношеннями між енергією та імпульсом:

a) $E = E_c + \frac{p^2}{2m}$; b) $E = E_c + v_0 p$; c) $E = \sqrt{E_c^2 + v_0^2 p^2}$;

У кожному із цих випадків знайти ф-ції $N(E)$ та $D(E)$ і перевірити, чи задовільняється умова: $Dvp = Nd$, де $d=2$ - розмірність системи.

Розглянемо випадок (с):

$$\begin{cases} E(p) = \sqrt{E_c^2 + v_0^2 p^2}; \\ N(p) = \pi W L \left(\frac{p}{h}\right)^2; \end{cases} \qquad \begin{aligned} E^2 &= E_c^2 + v_0^2 p^2; \\ p^2 &= \frac{E^2 - E_c^2}{v_0^2}; \end{aligned}$$

$$N(E) = \pi W L \frac{E^2 - E_c^2}{h^2 v_0^2} = \frac{\pi W L}{h^2} \frac{E^2 - E_c^2}{v_0^2};$$

$$D(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{\pi W L}{h^2} \frac{2E}{v_0^2} = \frac{2\pi W L E}{h^2 v_0^2};$$

$$Dvp = Nd \ ?$$

$$v(E) = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}\sqrt{E_c^2 + v_0^2 p^2} = \frac{1}{\cancel{2}}\left(E_c^2 + v_0^2 p^2\right)^{-1/2} \cdot \cancel{2} p v_0^2;$$

$$v(E) = \frac{v_0^2 p}{E};$$

$$D(E) v(E) p = \frac{2\pi W L \cancel{E}}{h^2 \cancel{v_0^2}} \cdot \frac{\cancel{v_0^2} p}{\cancel{E}} \cdot p = \frac{2\pi W L}{h^2} p^2 = 2\pi W L \left(\frac{p}{h}\right)^2;$$

$$N(p) \cdot d = 2N(p) = 2\pi W L \left(\frac{p}{h}\right)^2; \qquad Dvp = Nd;$$

Задача 5.3 Розглянути двовимірні провідники з трьома різними відношеннями між енергією та імпульсом

a) $E = E_c + \frac{p^2}{2m}$; b) $E = E_c + v_0 p$; c) $E = \sqrt{E_c^2 + v_0^2 p^2}$.

У кожному із цих випадків знайти кількість мод за формулою $M(E) = \frac{hDv}{2L}\left\{1, \frac{2}{\pi}, \frac{1}{2}\right\}$ та показати, що воно співпадає із формулою: $M(E) = \left\{ 1, 2\frac{W}{h/p}, \pi\frac{A}{(h/p)^2} \right\}$.

Розглянемо випадок (c):

$$M(E) = \frac{hDv}{\cancel{2}L} \cdot \frac{\cancel{2}}{\pi} = \frac{h}{\pi L} D(E) v(E);$$

Але $D(E)$ та $v(E)$ отримані вище:

$$D(E) = \frac{2\pi W L E}{h^2 v_0^2}; \qquad v(E) = \frac{v_0^2 p}{E};$$

$$M(E) = \frac{\cancel{h}}{\cancel{\pi}\cancel{L}} \cdot \frac{2\cancel{\pi} W \cancel{L} \cancel{E}}{h^{\cancel{2}} \cancel{v_0^2}} \cdot \frac{\cancel{v_0^2} p}{\cancel{E}} = 2W\frac{p}{h} = 2\frac{W}{h/p};$$

З фізичної точки зору: $M(E) = \mathrm{Int}\left\{ 2\frac{W}{h/p} \right\}$.

Практичне заняття №6

Задача №6.1 Спінові хвилі у феромагнетику.

При $T=0$: $M \sim 2\mu_B N$.

При $T\neq 0$ → збудження у формі спінових хвиль.

Магнони - квазічастинки, що описують спінові хвилі.

Кожний магнон зменшує повний спін системи на $\hbar = h/2\pi$, тобто зменшує намагніченість на $\sim 2\mu_B$. Але, для магнонів $\omega \sim (1/\lambda)^2$: $\varepsilon = hf = \hbar\omega$, $p = h/\lambda$ $\Rightarrow$ $\varepsilon \sim p^2$. Тобто, для магнонів : $\varepsilon = p^2/2m^*$.

Постійна величина m^* пов'язана із спін-спіновою взаємодією та міжатомною відстанню.

Для заліза (Fe) : $m^* = 1.24\cdot 10^{-29}$ кг, тобто $m^* \approx 14 m_e$.

У магнона є лише одна можлива поляризація.

a) Показати, що при низьких T-рах кількість магнонів на од. об'єма у 3D феромагнетику дорівнює

$$\frac{N_m}{V} = 2\pi\left(\frac{2m^* k_B T}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x-1}\,dx.$$ Оцінити інтеграл.

$$N_m = \sum_{n_x,n_y,n_z}\frac{1}{e^{\varepsilon/kT}-1}; \qquad \varepsilon = p^2/2m^*; \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hn}{2L}.$$

$$n = \sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}.$$

$$\Rightarrow N_m = \int \frac{1}{e^{\varepsilon/kT}-1}\,d^3n = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{n^2\,dn}{e^{\varepsilon/kT}-1};$$

$$x = \frac{\varepsilon}{k_B T}; \quad x = \frac{p^2}{2m^* k_B T} = \frac{h^2 n^2}{8m^* L^2 k_B T};$$

$$n = \sqrt{\frac{8m^* L^2 k_B T x}{h^2}}; \quad dn = \sqrt{\frac{2m^* L^2 k_B T}{h^2}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$N_m = \frac{{}^{2}\pi}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{8}^{\,2} m^* L^2 k_B T}{h^2}\cdot\sqrt{\frac{2m^* L^2 k_B T}{h^2}}\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}\,dx}{e^x-1};$$

$$\frac{N_m}{V} = 2\pi\left(\frac{2m^* k_B T}{h^2}\right)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}\,dx}_{= 2.315} ; \qquad L^3 = V ;$$

b) Обчислити відносне зменшення намагніченості, $\frac{M(0) - M(T)}{M(0)}$, як ф-цію від $\left(\frac{T}{T_0}\right)$.

Якщо при $T = 0$: $M(0) = 2\mu_B N$, і кожний магнон зменшує це значення на $2\mu_B$ $\Rightarrow$

$$\frac{M(T)}{M(0)} = \frac{2\mu_B N_m}{2\mu_B N} = \frac{N_m}{N} = 2\pi(2.315)\frac{V}{N}\left(\frac{2m^* k_B T}{h^2}\right)^{3/2} \Rightarrow$$

$$\frac{N_m}{N} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}, \qquad T_0 = \frac{h^2}{2m^* k_B}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \frac{1}{(2\pi \cdot 2.315)^{2/3}} ;$$

$$T_0 = \frac{0.0839 \cdot h^2}{m^* k_B}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} ;$$

$$\boxed{\frac{M(0) - M(T)}{M(0)} = 1 - \frac{M(T)}{M(0)} = 1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}} ;$$

Обчислимо T_0 для заліза (Fe) : $m^* = 1.24 \cdot 10^{-29}$ кг ;

Об'єм одного моля Fe : $V = 7.11 \cdot 10^{-6}$ м^3 (можна це обчислити)

$$T_0 = \frac{(0.0839)\cdot(6.63\cdot 10^{-34}\,\text{Дж}\cdot\text{с})^2}{(1.24\cdot 10^{-29}\,\text{кг})\cdot(1.38\cdot 10^{-23}\,\text{Дж/К})} \cdot \left(\frac{6.02\cdot 10^{23}}{7.11\cdot 10^{-6}\,\text{м}^3}\right)^{2/3} \Rightarrow$$

$$T_0(\text{Fe}) = 4150\ \text{К}.$$

c) Обчислити теплоємність, пов'язану із магнітними збудженнями для феромагнетіка при низьких т-рах.

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} ; \qquad U(T) - ?$$

$$U = \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/k_B T} - 1} = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon n^2}{e^{\varepsilon/k_B T} - 1}\,dn ; \qquad x = \frac{\varepsilon}{k_B T} ;$$

$$U = 2\pi V\left(\frac{2m^* k_B T}{h^2}\right)^{3/2} k_B T \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^{3/2}\,dx}{e^x - 1}}_{= 1.783} ;$$

$$U = 2\pi(1.783)\cdot V k_B\left(\frac{2m^* k_B}{h^2}\right)^{3/2} \cdot T^{5/2} ;$$

$$U = 31.69 \cdot k_B V \left(\frac{m^* k_B}{h^2}\right)^{3/2} \cdot T^{5/2} \;;$$

$$\frac{C_V}{N k_B} = \frac{1}{N k_B} \frac{\partial U}{\partial T} = 31.69 \cdot \frac{5}{2} \frac{V}{N} \left(\frac{m^* k_B}{h^2}\right)^{3/2} T^{3/2} \;;$$

$$\frac{C_V}{N k_B} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{3/2} \;; \quad T_1 = \frac{h^2}{m^* k_B} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{2}{5 \cdot 31.69}\right)^{2/3} ;$$

$$T_1 = \frac{T_0}{0.0839} \cdot \left(\frac{2}{5 \cdot 31.69}\right)^{2/3} = (0.646) \cdot T_0 \,.$$

Fe : $T_1 = 2680\ K$.

$$\left(\frac{T}{T_1}\right)^{3/2} = \frac{12\pi^4}{5} \left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \;;$$

$$T = \left(\frac{5}{12\pi^4}\right)^{2/3} \cdot \frac{T_D^2}{T_1} = 0.0264 \cdot \frac{(470\,K)^2}{2680\,K} = 2.17\ K.$$