Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра комп'ютерної фізики

**"ЗАТВЕРДЖУЮ"**

Директор навчально-наукового інституту
комп'ютерної фізики та енергетики
_____ Ірина ГАРЯЧЕВСЬКА
"28" серпня 2023 р.

# РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

# МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

| | |
|---|---|
| рівень вищої освіти | перший (бакалаврський) |
| галузь знань | 10 Природничі науки |
| спеціальність | 105 Прикладна фізика та наноматеріали |
| освітня програма | «Комп'ютерна фізика»<br>«Прикладна фізика енергетичних систем»<br>«Прикладна фізика нетрадиційної енергетики» |
| вид дисципліни | обов'язкова |

навчально – науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики

2023 / 2024 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження Вченою радою Навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики

28 серпня 2023 року, протокол № 8/23

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ:
Караєв Артем Олександрович, доцент кафедри комп'ютерної фізики

Програму схвалено на засіданні кафедри комп'ютерної фізики.

Протокол від 28 серпня 2023 року № 8/23

Завідувач кафедри комп'ютерної фізики _____ Костянтин НЄМЧЕНКО

Програму погоджено з гарантами освітніх програм «Комп'ютерна фізика», «Прикладна фізика енергетичних систем», «Прикладна фізика нетрадиційної енергетики»

Гарант освітньої програми «Прикладна фізика енергетичних систем»

_____ Руслан СУХОВ

Гарант освітньої програми «Комп'ютерна фізика»

_____ Світлана РОГОВА

Гарант освітньої програми «Прикладна фізика нетрадиційної енергетики»

_____ Ілля МАРУЩЕНКО

Програму погоджено навчально- методичною комісією Навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики

Протокол від 28 серпня 2023 року № 8/23

Голова навчально-методичної комісії Навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики

_____ Денис ПРОТЕКТОР

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «Методи математичної фізики» складена відповідно до освітньо-професійних програм «Прикладна фізика енергетичних систем», «Комп'ютерна фізика», «Прикладна фізика нетрадиційної енергетики» підготовки першого (бакалаврського) рівня освіти

спеціальність: 105 Прикладна фізика та наноматеріали

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета викладання навчальної дисципліни

Мета і завдання курсу – дати студентам знання основ теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП), навчити їх складати математичні моделі різних явищ природи, які приводять до задач Коші, мішаних та крайових задач для ДРЧП, знаходити розв'язки отриманих задач та давати їх фізичну інтерпретацію, вміти проводити дослідження реальних процесів на основі вивчення якісних властивостей побудованих математичних моделей.

1.2. Основні завдання вивчення дисципліни

Основними завданнями вивчення дисципліни є створення практичної основи для розуміння студентами математичного апарату теоретичної та прикладної фізики.

1.3. Кількість кредитів — 4

1.4. Загальна кількість годин — 120

| 1.5. Характеристика навчальної дисципліни | |
|---|---|
| Нормативна | |
| Вид кінцевого контролю (семестровий екзамен або залік)<br>Семестровий екзамен | |
| Денна форма навчання | Заочна (дистанційна) форма навчання |
| Рік підготовки | |
| 3-й | 3-й |
| Семестр | |
| 5-й | -й |
| Лекції | |
| 32 год. | год. |
| Практичні, семінарські заняття | |
| 32 год. | год. |
| Лабораторні заняття | |
| | год. |
| Самостійна робота | |
| 56 год. | год. |
| у тому числі індивідуальні завдання | |
| год. | |

1.6. Заплановані результати навчання

Згідно з вимогами освітньо-професійної (освітньо-наукової) програми студенти повинні досягти таких результатів навчання:

**знати:** Геометричне зображення комплексних чисел, виконання дій над комплексними числами, правила обчислення границь, похідної; основні елементарні функції та їх властивості; означення інтеграла та його властивості і обчислення; інтегральну формулу Коші; основні типи ДРЧП другого порядку, їх канонічні форми та способи інтегрування; фізичні процеси, які приводять до

ДРЧП; методи побудови розв'яз-ківзадач Коші, мішаних та крайових задач для ДРЧП та їх обґрунтування;

**вміти:** Зображувати комплексне число на площині, виконувати дії над комплексними числами; досліджувати функцію на неперервність, диференціювати її; обчислювати інтеграл від функції комплексної змінної, розкладати в степеневий ряд та в ряд Лорана; обчислювати лишки та застосовувати до обчислення інтегралів від функції дійсної змінної; зводити ДРЧП другого порядку до канонічного вигляду; будувати розв'язки інтегровних типів ДРЧП; будувати математичні моделі фізичних процесів, які приводять до ДРЧП; знаходити розв'язки задач Коші, мішаних та крайових задач для ДРЧП другого порядку.

Студент повинен демонструвати:

- поглиблені знання математики, здатність використовувати математичні методи;
- здатність вибирати методи та методики розв'язання типових спеціалізованих задач в галузі прикладної фізики та проведення дослідження у відповідності до сформульованого завдання;
- здатність використовувати математичний апарат для освоєння теоретичних основ і практичного використання фізичних методів;
- здатність використовувати фізико-математичні та технологічні знання при обранні матеріалів для оптимального розв'язання конкретної задачі.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

**Розділ 1. Класифікація диференціальних рівнянь в частинних похідних** [1-4]

Тема 1. Основні поняття та означення теорії ДРЧП

Тема 2. Диференціальні рівняння в частинних похідних другого порядку із двома незалежними змінними та їх класифікація.

Тема 3. Зведення до канонічного вигляду рівнянь в частинних похідних другого порядку.

Тема 4. Класифікація рівнянь в частинних похідних другого порядку у випадку багатьох незалежних змінних.

**Розділ 2. Рівняння гіперболічного типу** [1-4]

Тема 1. Найпростіші задачі, що приводять до рівнянь гіперболічного типу. Виведення рівняння малих поперечних коливань струни. Рівняння поздовжніх коливань стержнів та струн. Енергія коливання струни.

Тема 2. Виведення рівнянь електричних коливань у дротах. Поперечні коливання мембрани. Рівняння гідродинаміки та акустики.

Тема 3. Формулювання основних крайових задач для рівняння коливання струни. Фізична інтерпретація граничних і початкових умов. Редукція загальної задачі до більш простих задач. Теорема про єдиність розв'язку першої крайової задачі.

Тема 4. Задача Коші для однорідного рівняння коливання струни. Формула Даламбера та її фізична інтерпретація. Задача Коші для неоднорідного рівняння коливання струни.

Тема 5. Неперервна залежність розв'язку задачі Коші для однорідного рівняння коливання струни від початкових умов. Поняття про коректність постановки задач математичної фізики.

Тема 6. Метод продовжень для напівобмеженої струни. Задача для обмеженої струни.

Тема 7. Метод відокремлення змінних для рівняння вільних коливань струни. Фізична інтерпретація розв'язку. Метод відокремлення змінних для неоднорідного рівняння. Коливання струни з рухомими кінцями. Змушені коливання струни. Тема 8. Загальна перша крайова задача рівняння коливання струни. Крайова задача із стаціонарними неоднорідностями. Задача без початкових умов.

Тема 9. Загальна схема методу відокремлення змінних.

Тема 10. Вільні коливання мембрани. Коливання прямокутної та круглої мембрани.

**Розділ 3. Рівняння параболічного типу** [1-4]

Тема 1. Лінійна задача про поширення тепла. Виведення рівняння теплопровідності.
Тема 2. Рівняння дифузії. Задача про поширення тепла в просторі.
Тема 3. Формулювання крайових задач для рівняння теплопровідності.
Тема 4. Принцип максимального значення для рівняння теплопровідності. Основні наслідки із принципу максимального значення. Теорема про єдиність розв'язку першої крайової задачі рівняння теплопровідності. Теорема про єдиність розв'язку для нескінченної прямої.
Тема 5. Метод відокремлення змінних для однорідного рівняння теплопровідності. Функція температурного впливу миттєвого точкового джерела тепла.
Тема 6. Метод відокремлення змінних для неоднорідного рівняння теплопровідності. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності.
Тема 7. Поширення тепла на нескінченній прямій. Виведення формули для фундаментального розв'язку рівняння теплопровідності.
Тема 8. Крайові задачі для рівняння теплопровідності у випадку напівобмеженої прямої.
Тема 9. Перетворення рівняннь в задачах теплопровідності. Задача без початкових умов для рівняння теплопровідності. Метод подібності в теорії теплопровідності.
Тема 10. Задача Штурма-Ліувілля

**Розділ 4. Рівняння еліптичного типу** [1-4]

Тема 1. Задачі пов'язані з рівнянням Лапласа. Стаціонарне теплове поле. Потенціальна течія рідини. Потенціал стаціонарного потоку рідини і електростатичного поля. Крайові задачі для рівняння Лапласа: задачі Дирихле, Неймана, мішана задача.
Тема 2. Рівняння Лапласа в криволінійній ортогональній системі координат. Коефіцієнти Ляме. Рівняння Лапласа в сферичній та циліндричній системах координат. Фундаментальні розв'язки рівняння Лапласа в просторі та на площині.
Тема 3. Задача Дирихле для прямокутника, круга, кільця. Інтеграл Пуассона.
Тема 4. Функція джерела для рівняння Лапласа та її основні властивості.

**Розділ 5. Спеціальні функції та їх застосування** [1-4]

Тема 1. Гамма-функція. Дельта-функція Дірака.
Тема 2. Рівняння Беселя. Властивості функцій Беселя першого роду.
Тема 3. Циліндричні функції інших типів. Їхні властивості.
Тема 4. Модифіковане рівняння Бесселя. Функція Макдональда та функція Томсона.
Тема 5. Відокремлення змінних в рівнянні Лапласа в сферичній системі координат.
Тема 6. Рівняння і поліноми Лежандра. Приєднані функції Лежандра.
Тема 7. Кульові функції Лапласа і сферичні функції. Просторова задача Діріхле для кулі

## 3. Структура навчальної дисципліни

| Назви розділів і тем | Кількість годин | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Денна форма | | | | | | Заочна форма | | | | | |
| | Усього | у тому числі | | | | | Усього | у тому числі | | | | |
| | | лк | п | лб | інд | ср | | лк | п | лб | інд | ср |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **Розділ 1. Класифікація диференціальних рівнянь в частинних похідних** | | | | | | | | | | | | |
| **Разом – Розділ 1** | **10** | **4** | **4** | | | **8** | | | | | | |
| **Розділ 2. Рівняння гіперболічного типу** | | | | | | | | | | | | |
| **Разом – Розділ 2** | **30** | **8** | **8** | | | **12** | | | | | | |
| **Розділ 3. Рівняння параболічного типу** | | | | | | | | | | | | |
| **Разом – Розділ 3** | **30** | **8** | **8** | | | **12** | | | | | | |
| **Розділ 4. Рівняння еліптичного типу** | | | | | | | | | | | | |
| **Разом – Розділ 4** | **30** | **8** | **8** | | | **12** | | | | | | |
| **Розділ 5. Спеціальні функції та їх застосування** | | | | | | | | | | | | |
| **Разом – Розділ 5.** | **20** | **4** | **4** | | | **6** | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **УСЬОГО ГОДИН** | **120** | **32** | **32** | | | **56** | | | | | | |

## 4. Теми практичних занять

| № з/п | Назва теми | Кількість годин |
|---|---|---|
| 1 | Квазілінійні ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними, їх класифікація та зведення до канонічного вигляду. | 2 |
| 2 | Канонічні форми лінійних ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами. | 2 |
| 3 | Класифікація ДРЧП другого порядку з багатьма незалежними змінними. | 2 |
| 4 | Інтегровні типи ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними. Метод характеристик. | 2 |
| 4 | Вільні коливання нескінченої струни. Метод поширення хвиль (метод характеристик). Фізична інтерпретація розв'яз-ку задачі Коші для рівняння вільних коливань струни. | 2 |
| 5 | Мішані задачі для напівобмеженої струни: метод характеристик, метод відбиттів. | 2 |
| 6 | Мішані задачі для рівняння коливань струни. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є). | 2 |
| 7 | Мішані задачі для рівняння коливань прямокутної мембрани. Метод відокремлення змінних. | 2 |
| 8 | Мішані задачі для рівнянь параболічного типу. Метод Фур'є. | 2 |
| 9 | Задачі Коші для рівняння теплопровідності. Поширення тепла в напівобмеженому стержні з теплоізольованою бічною поверхнею. | 4 |
| 10 | Крайові задачі для рівнянь Лапласа і Пуассона в прямокутних областях. Метод відокремлення змінних. | 4 |
| 11 | Крайові задачі для рівнянь Лапласа і Пуассона в кругових областях. Метод Фур'є. | 4 |
| 12 | Функція Ґріна оператора Лапласа та її застосування. Інтегрування крайових задач для рівнянь еліптичного типу за допомогою потенціалів. | 4 |
| | **Усього** | **32** |

## 5. Завдання для самостійної роботи

| № з/п | Назва теми | Кількість годин |
|---|---|---|
| 1 | Вивчити крайові задачі для звичайних диференціальних рівняннь 2-го порядку. | 8 |
| 2 | Вивчити одновимірну задачу Штурма-Ліувілля. | 8 |
| 3 | Ознайомитись з розв'язуванням мішаних крайових задач для одновимірних рівняннь гіперболічного та параболічного типів. | 8 |
| 4 | Ознайомитись з постановками спектральних задач. Задача Штурма-Ліувілля без (і з) особливої точки. | 8 |
| 5 | Вивчити матеріал лекцій (на два семестри) | 8 |
| 6 | Виконанати практичних робіт (на два семестри) | 8 |
| 7 | Підготовка до екзамену (на два семестри) | 8 |
| | **Разом** | **56** |

**Приклади та задачі до розділу 1**

Визначити тип та звести до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку:

1. $u_{yy} + 4e^{2y}u_{xy} + u_y - u_x(x,y) - e^x = 0.$
2. $\left(1+x^2\right)u_{xx} + \left(1+y^2\right)u_{yy} + xu_x + yu_y(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$
3. $\sin^2 y u_{xx} - e^{2x}u_{yy} + 3u_x - 5u(x,y) = 0.$
4. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 5u_y + u_x(x,y) = 0.$
5. $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} - 5u_y + u_x(x,y) = 0.$
6. $u_{xx} + 6u_{xy} - 5u_y + u_x - 4u(x,y) = 0.$

Зінтегрувати ДРЧП:

7. $(x-y)u_{xy} - u_x + u_y(x,y) = 0.$
8. $x^3u_{xx} + 2x^2u_x - 2xu(x,y) = 0.$
9. $2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y(x,y) = 0.$
10. $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y(x,y) = 0, \quad y \neq 0.$

Знайти розв'язок задачі Коші:

11. $u_{xy} + u_x = 0; \quad u(x,x) = e^{-x}, \quad u_y(x,x) = 0.$
12. $2u_{xy} - u_{xx} = 0; \quad u(-y,y) = 5y, \quad u_x(-y,y) = e^{-y}.$
13. $yu_{xx} - (x+y)u_{xy} + xu_{yy} + \dfrac{x+y}{y-x}\left(u_x - u_y\right) = 0 \quad (x \neq y); \quad u(x,0) = x^3, \quad u_y(x,0) = 0.$
14. $u_{xy} + u_{xx} = 12; \quad u(1,y) = 0, \quad u_x(1,y) = 0.$

Зобразити графічно процес вільних коливань однорідної нескінченої струни, якщо:

15. Початкова швидкість точок струни рівна нулеві, а початкове відхилення опи-сується функцією

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 4, \\ 8-2x, & 0 < x \le 4, \\ 8+2x, & -4 \le x \le 0. \end{cases}$$

16. У початковий момент часу струна перебувала в спокої, а швидкість її точок була рівна

$$\psi(x) = \begin{cases} 0{,}02a, & 0 \le x \le 10, \\ 0, & x \notin [0;10]. \end{cases}$$

За допомогою фазової площини знайти узагальнений розв'язок задачі Коші для рівняння вільних коливань струни та записати формули для заданих значень $t = t_0$, $x = x_0$:

17. $u_{tt} = 9u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in R;$
$u(0,x) = \begin{cases} 9 - x^2, & |x| \le 3, \\ 0, & |x| < 3. \end{cases}$
$u_t(0,x) = 0, \quad x \in R.$
$t_0 = 6, \ x_0 = -2.$

18. $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in R;$
$u(0,x) = 0, \quad x \in R;$
$u_t(0,x) = \begin{cases} 2\sin 2x, & 0 \le x \le 2\pi, \\ 0, & x \notin [0;2\pi]. \end{cases}$
$t_0 = \pi/4, \ x_0 = 3\pi.$

19. Знайти закон вимушених коливань однорідної нескінченої струни, якщо по-чаткові відхилення та швидкість рівні нулеві, а інтенсивність зовнішніх сил рівна $24tx$.

20. Знайти закон вільних коливань однорідної нескінченої мембрани, якщо по-чаткова швидкість точок струни рівна нулеві, а початкове відхилення описується функцією $6xy$.

21. Вивчити коливання звукових хвиль у просторі, якщо задані початкові значення потенціалу швидкостей і його похідної за часом:
$u(0,x,y,z) = 0, \quad u_t(0,x,y,z) = z.$

**Приклади і задачі до розділу 2**

Методом характеристик розв'язати наступні мішані задачі для напівобмеженої струни:

22. $u_{tt} = 0{,}25u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$
$u(0,x) = x, \quad u_t(0,x) = 0, \quad x \ge 0,$
$u_x(t,0) = \cos t, \quad t \ge 0.$

23. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + t, \quad t > 0, \quad x > 0,$
$u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = 0, \quad x \ge 0,$
$u(t,0) = 0, \quad t \ge 0.$

Накреслити профіль однорідної ($a = 1$) напівобмеженої струни при $t = 1,2,3,4,$ якщо:

24. Кінець струни нерухомо закріплений, а коливання відбуваються тільки за рахунок початкового відхилення її точок, яке рівне
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;3) \cup [5;+\infty), \\ x - 3, & 3 \le x < 5, \\ 5 - x, & 4 \le x < 5. \end{cases}$$

25. Кінець струни вільний, а коливання відбуваються тільки за рахунок початкової швидкості її точок, яка відмінна від нуля тільки на проміжку $[3;5]$, де набуває значення $Q = const$.

26. Вивчити вимушені поперечні коливання однорідної струни, яка закріплена на кінці $x = 0$, а на кінці $x = l$ піддається дії збурюючої гармонічної сили, що викликає зміщення, рівне $A\sin\omega t, \ A, \omega - const.$ Початкове відхилення та початкова швидкість точок струни рівні нулеві, а сумарна інтенсивність зовнішніх сил рівна $x^2\omega^2 l^{-2}\cos 2\omega t.$ Дати фізичну інтерпретацію одержаного розв'язку.

Зінтегрувати мішані задачі для рівняння коливань струни. Дати фізичну інтерпретацію поставлених задач:

27. $u_{tt} = 16u_{xx} + e^{-t}\sin\frac{7\pi}{10}x, \quad t > 0, \quad x \in (0;5),$

28. $u_{tt} = u_{xx} - \frac{\pi}{3}u_t, \quad t > 0, \quad x \in (0;3),$

$u(0,x)=0, \quad u_t(0,x)=0, \quad x\in[0;5],$

$u(t,0)=0, \quad u_x(t,5)=0, \quad t\ge 0.$

$u(0,x)=0, \quad u_t(0,x)=2, \quad x\in[0;3],$

$u_x(t,0)=0, \quad u(t,3)=2t, \quad t\ge 0.$

29. $u_{tt}=a^2u_{xx}-6, \quad t>0, \quad x\in(0;l),$

$u(0,x)=0, \quad u_t(0,x)=0, \quad x\in[0;l],$

$u(t,0)=0, \quad u(t,l)=0, \quad t\ge 0.$

30. $u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad t>0, \quad 0<x<l,$

$u(0,x)=x^2(x-l)^2, \quad u_t(0,x)=0, \quad 0\le x\le l,$

$u_x(t,0)=0, \quad u_x(t,l)=0, \quad t\ge 0.$

**Приклади і задачі до розділу 3**

За допомогою формули Пуассона знайти розв'язки задач Коші для рівняння теплопровідності:

31. $u_t=a^2u_{xx}+\sin 2x, \quad t>0, \quad x\in R;$

$u(0,x)=0, \quad x\in R.$

32. $u_t=u_{xx}, \quad t>0, \quad x\in R;$

$u(0,x)=e^{-0,5(x+1)^2}, \quad x\in R.$

Знайти розв'язки мішаних задач для напівобмеженого стержня з теплоізольованою бічною поверхнею:

33. $u_t=0{,}25u_{xx}, \quad t>0, \quad x>0,$

$u(0,x)=e^{-x^2}-1, \quad x\ge 0,$

$u(t,0)=0, \quad t\ge 0.$

34. $u_t=a^2u_{xx}, \quad t>0, \quad x>0,$

$u(0,x)=A=const, \quad x\ge 0,$

$u_x(t,0)=0, \quad t\ge 0.$

35. В однорідному ізотропному стержні довжини $l$ обидва кінці та бічна поверхня теплоізольовані, а початкова температура стержня стала й рівна $U_0$. Тепло-обмін вільний. Знайти розподіл температури в стержні при $t>0$.

Зінтегрувати мішані задачі для рівняння теплопровідності. Дати фізичну інтерпретацію поставлених задач:

36. $u_t=0{,}25u_{xx}+2\sin t\cos 6\pi x, \quad t>0, \quad x\in(0;2),$

$u(0,x)=0, \quad x\in[0;2],$

$u_x(t,0)=0, \quad u_x(t,2)=0, \quad t\ge 0.$

37. $u_t=a^2u_{xx}+16Ax^2\cos 4t, \quad t>0, \quad 0<x<\frac{1}{2} \quad (A=const),$

$u(0,x)=0, \quad 0\le x\le \frac{1}{2},$

$u(t,0)=0, \quad u\left(t,\frac{1}{2}\right)=A\sin 4t, \quad t\ge 0.$

38. $u_t=a^2u_{xx}-12lx, \quad t>0, \quad x\in(0;l),$

39. $u_t=a^2u_{xx}, \quad t>0, \quad x\in(0;l),$

$u(0,x)=0, \quad x\in[0;l],$
$u_x(t,0)=0, \quad u(t,l)=0, \quad t\ge 0.$

$u(0,x)=x^2-2l, \quad 0\le x\le l,$
$u(t,0)=0, \quad u_x(t,l)=0, \quad t\ge 0.$

**Приклади і задачі до розділу 4**

40. Знайти функцію $u=u(x,y)$, гармонічну всередині прямокутника $0\le x\le a,$ $0\le y\le b,$ яка на контурі набуває заданих значень:

$u(x,0)=B\sin\frac{\pi}{a}x, \quad u(x,b)=0, \quad x\in[0,a]; \quad u(0,y)=Ay(b-y), \quad u(a,y)=0 \quad y\in[0,b],$

де $A,B-const.$

41. У півсмузі $x\ge 0$, $0\le y\le b$ знайти розв'язок $u(x,y)$ рівняння Лапласа, який справджує крайові умови:

$$u_y(x,0)=0, \quad u(x,b)=0, \quad x\ge 0;$$
$$u(0,y)=A\left(y^2-b^2\right), \quad \lim_{x\to\infty}u(x,y)=0, \quad 0\le y\le b.$$

42. Знайти розв'язок задачі Неймана для рівняння Лапласа в крузі $x^2+y^2=R^2$ за крайової умови $u_\rho(R,\varphi)=f(\varphi)$, $0\le\varphi<2\pi$.

43. Знайти розв'язок рівняння Пуассона $\Delta u(x,y)=12\left(x^2-y^2\right)$ в кільці $a<\rho<b$, якщо

$$u(a,\varphi)=0, \quad u_\rho(b,\varphi)=0, \quad 0\le\varphi<2\pi.$$

44. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці $0\le x\le a, \quad 0\le y\le b,$ всередині якої діють джерела тепла інтенсивності $2x(x-a),$ якщо краї $x=0$ та $x=a$ пластинки підтримуються при нульовій температурі, а інші два краї теплоізольовані.

45. Визначити прогин мембрани, яка має форму півкруга радіуса *a*, якщо прямолінійний край мембрани нерухомо закріплений, а на дузі задане відхилення $A\sin 4\varphi$, де $A=const.$

46. Розв'язати задачу Штурма-Ліувілля:

$$\Delta u(x,y)+\lambda u(x,y)=0, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b,$$
$$u(0,y)=0, \quad u_x(a,y)=0, \quad 0\le y\le b,$$
$$u_y(x,0)=0, \quad u_y(x,b)=0, \quad 0\le x\le a.$$

## 6. Індивідуальні завдання

Передбачено розрахунково-графічна робота

## 7. Методи навчання

У процесі викладання дисципліни використовуються основні методи навчання:

- Пояснювально-ілюстративний метод (викладання лекційного, пояснювального практичного матеріалів, Zoom-конференції);

- Проблемні методи (розв’язання проблемних задач, дискусії, самостійне вивчення літератури студентами, Zoom-конференції);
- Репродуктивний метод (виконання завдань на базі зразка, система Moodle);
- Частково-пошуковий (робота студентів на практичних заняттях у дошки)

Передбачено робота у рамках практичних занять та лекцій. Основна увага – на виконання домашніх завдань щодо закріплення матеріалу лекцій та практичних занять та виконання підсумкової контрольної роботи.

Передбачено дистанційний курс у системі Moodle, Zoom-конференції, Telegram-чат.

## 8 Методи контролю

Навчальні досягнення студентів з дисципліни оцінюються за модульно-рейтинговою системою, в основу якої покладено принцип поопераційної звітності, обов’язковості модульного контролю, накопичувальної системи оцінювання рівня знань, умінь та навичок, розширення кількості підсумкових балів до 100.

У процесі оцінювання навчальних досягнень студентів застосовуються такі методи:

- Методи усного контролю: індивідуальне опитування, фронтальне опитування, співбесіда, залік.
- Методи письмового контролю: розрахунково-графічні роботи, іспит.
- Методи самоконтролю: уміння самостійно оцінювати свої знання, самоаналіз.

### Критерії оцінювання навчальних досягнень

Кількість балів за роботу з теоретичним матеріалом, на практичних заняттях, під час виконання самостійної роботи залежить від дотримання таких вимог:

- систематичність відвідування занять;
- своєчасність виконання навчальних і індивідуальних завдань;
- повний обсяг їх виконання;
- якість виконання навчальних і індивідуальних завдань;
- самостійність виконання;
- творчий підхід у виконанні завдань;
- ініціативність у навчальній діяльності;
- виконання тестових завдань.

Загальна максимальна бальна оцінка за екзамен складатиме 40 балів. Мінімальний підсумковий бал складатиме 50 балів, а максимальний – 100 балів. Підсумкова оцінка визначається шляхом переводу підсумкового балу з дисципліни у традиційну академічну оцінку національної шкали ("відмінно", "добре", "задовільно", "незадовільно" за шкалою, що наведено у попередньому пункті робочої програми за шкалою:

— **“відмінно"** (90 та вище балів) заслуговує студент, який виявив всебічне і глибоке знання програмового матеріалу, вміння вільно виконувати завдання, передбачені програмою, засвоїв основну і ознайомився з додатковою літературою, розуміє взаємозв'язок головних понять дисципліни та їх значення для майбутньої професії;

— **“добре"** (82-89 балів) заслуговує студент, який виявив повне знання програмного матеріалу, успішно виконує передбачені програмою завдання, засвоїв основну літературу рекомендовану програмою, виявив систематичний характер знань з дисциплін і здатний до самостійного доповнення, але під час відповіді допустив деякі неточності;

— **"добре"** (70-81 балів) заслуговує студент, що виявив не цілком повне знання програмного матеріалу, не завжди успішно виконує передбачені програмою завдання, частково засвоїв основну літературу, рекомендовану програмою, виявив не систематичний характер знань з дисциплін і не завжди здатний до їх самостійного доповнення і під час відповіді допускає деякі неточності;

— **"задовільно"** (61-69 балів) заслуговує студент, що виявив знання основного програмного матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка "задовільно" виставляється студентам, що допустили помилки у відповіді на екзамені та при виконанні екзаменаційних завдань, але які володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача;

— **"задовільно"** (50-60 балів) заслуговує студент, що виявив часткове знання основного програмового матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, не завжди вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий лише частково з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка "достатньо" виставляється студентам, що допустили грубі помилки у відповіді на екзамені та при виконанні екзаменаційних завдань, але які частково володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача.

— **"незадовільно"** (40-49 балів) виставляється студенту, який виявив суттєві прогалини в знаннях основного програмового матеріалу, допустив принципові помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

— **"незадовільно"** (1-39 балів) виставляється студенту коли протягом семестру він допустив грубі помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

При виставленні оцінки можуть враховуватися результати навчальної роботи студента протягом семестру.

Передбачаються бали за:

- експрес-контроль на лекції – 8;
- виконання РГР – 36;
- виконання самостійних практичних робіт – 16;
- іспит – 40 балів.

Систему рейтингових балів для різних видів контролю та порядок їх переведення у національну (4-бальну) та європейську (ECTS) шкалу подано нижче у таблицях.

## 7. Схема нарахування балів

| Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання | | | | | | | | Екзамен | Сума |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Розділ 1-3 | | | Розділ 4-5 | | Контрольні роботи, передбачена навчальним планом | Індивідуальне завдання | Разом | | |
| 3 | 3 | 3 | 4 | 3 | | 36 | 60 | 40 | 100 |

**Схема нарахування балів на іспиті.**

Мінімальна кількість балів для допуску до підсумкового контролю становить – 20 балів.

**Кожне питання екзаменаційного білету оцінюється наступним чином (максимальна кількість балів за теоретичне питання - 5):**

5 балів – студент повністю відповів на питання;

4 балів – у загалому правильна відповідь, робота з певною кількістю помилок ;

3 балів - відповів на питання, але з великою кількістю недоліків;
2 балів – допущені грубі помилки у відповіді, але студент частково володіє необхідними знаннями;
1 балів - студент відповів на питання з грубими помилками та продемонстрував відсутність володіння базовими знаннями;
0 балів – студент зовсім не відповів на питання.

**Кожна задача екзаменаційного білету оцінюється наступним чином (максимальна кількість балів за питання – 10 або 20 відповідно):**

10 або 20 балів – студент повністю розв'язав задачу без помилок;
8 або 15 балів – у загальному правильний розв'язок з певною кількістю незначних помилок ;
6 або 10 балів – розв'язав задачу за правильним алгоритмов, але з великою кількістю недоліків;
2 або 5 балів – студент позначив хід розв'язання задачі, але не вирішив її;
0 балів – студент зовсім не розв'язав задачу.

**Шкала оцінювання**

| Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру | Оцінка | |
|---|---|---|
| | для чотирирівневої шкали оцінювання | для дворівневої шкали оцінювання |
| 90 – 100 | відмінно | зараховано |
| 70-89 | добре | |
| 50-69 | задовільно | |
| 1-49 | незадовільно | не зараховано |

## 10. Рекомендована література

### Основна


1. Білоколос Є. Д., Шека Д. Д. Збірник задач з комплексного аналізу. - К., 2004. - 58 с.
2. Комплексний аналіз : підручник / Т. А. Мельник. – К. : ВПЦ. "Київський університет", 2015. – 192 с.
3. Теорія функцій комплексної змінної: Навчальний посібник /. Ю. В. Мастиновський, Г. А. Шишканова. – Запоріжжя : ЗНТУ,160 стор.
4. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Теорія ймовірностей та математична статистика / уклад. Самборська О.М., Шелестовський Б.Г., Фурсевич Л.В., Габрусєв Г.В. Тернопіль: ТДТУ імені Івана Пулюя, 2009. - 115 с.


### Допоміжна


1. An Introduction to Complex Function Theory //Bruce P. Palka, Springer Science & Business Media, 1991 - 559c.
2. Complex Function Theory //Anthony S. B. Holland, Elsevier North Holland, 1980 - 304 c.


## 11 Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

немає