

Розглянемо суперпозицію двох коливань, частоти яких є близькими одна до одної, $\omega_1 \approx \omega_2$:

$$x_1 = a \cos \omega_1 t, \quad x_2 = a \cos \omega_2 t. \quad (2.117)$$

Результуюче відхилення можна записати у наступному вигляді:

$$x = x_1 + x_2 = 2a \cos \frac{\Delta \omega}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t, \quad (2.118)$$

де $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$. Результуюче коливання (2.118) (див. рис. 2.26) можна розглядати як коливання з частотою, що дорівнює половині суми частот коливань, що взаємодіють між собою, та мають амплітуду, яка періодично змінюється в часі:

$$A = |2a \cos(\Delta \omega \cdot t / 2)|. \quad (2.119)$$

Графік залежності амплітуди результуючого коливання від часу наведено на рис. 2.27. Період зміни амплітуди A визначається умовою:

$$|\cos(\Delta \omega \cdot T_B / 2)| = 1, \quad (2.120)$$

тобто $\Delta \omega \cdot T_B / 2 = \pi$; $T_B = 2\pi / \Delta \omega$. Частота зміни амплітуди (частота биття) визначається саме періодом биття:

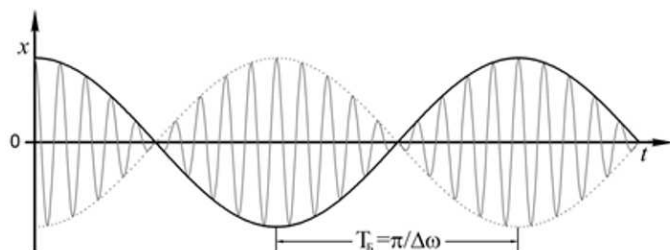


Рис. 2.26. Суперпозиція коливань із близькими частотами. Суцільною та точковою лініями показано зміну згинаючої цієї суперпозиції з часом

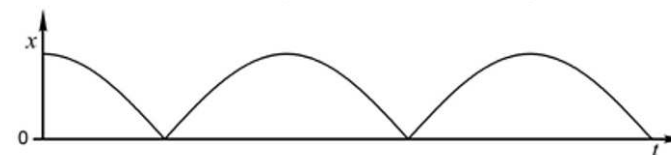


Рис. 2.27. Графік амплітуди результуючого коливання, що утворюється при суперпозиції гармонічних коливань з однаковими амплітудами та близькими за величиною частотами

$$f_B = \frac{1}{T_B} = \frac{\Delta \omega}{2\pi} = f_2 - f_1. \quad (2.121)$$

Вона дорівнює різниці частот коливань, що взаємодіють між собою.

Порядок виконання завдання

1. Включити електродвигун і потенціометром «Частота коливань» установити таке значення частоти f_0 коливань стрижня 3, що змушує коливатися маятник 8, що є близьким до власної частоти коливань маятника 8 (f^*).
2. Домогтися реалізації режиму биття з амплітудою 8–10 сантиметрів, додатково регулюючи частоту f_0 .
3. Натиснути клавішу «Скидання» при максимальному значенні амплітуди биття. Після 10 періодів биття зупинити секундомір натисканням клавіші «Стоп». Обчислити частоту биття за формулою $f_B = n/t$.
4. Вимірити частоту коливань стрижня 3 (див. вказівка до завдання 3).
5. Обчислити теоретичне значення частоти биття за формулою (2.121) та порівняти з експериментальним результатом.

Контрольні питання

1. Які коливання називаються загасаючими?
2. Запишіть формули циклічної частоти власних і загасаючих коливань.

3. Запишіть зв'язок між логарифмічним декрементом загасання та коефіцієнтом загасання.
4. Які коливання називаються вимушеними?
5. У чому полягає явище лінійного резонансу?
6. Яке явище називається "биттям"?
7. Як експериментально визначати частоти биттів?

2.12. Лабораторна робота «Вивчення параметричних механічних коливань»

Мета роботи:

1. Дослідити явище параметричного резонансу механічних коливань на прикладі коливань математичного маятника.
2. Дослідити закономірності реалізації режиму параметричної нестійкості в механічних коливальних системах.

Обладнання: секундомір, лабораторний прилад для дослідження параметричного резонансу у вигляді моделі математичного маятника, до складу якого входить електромотор та пристрій для зміни максимальної довжини підвісу маятника.

Завдання 1. Ознайомлення з теорією параметричного резонансу

Перед початком роботи з дослідження параметричної нестійкості математичного маятника слід ознайомитися з основними положеннями теорії нелінійних коливань. Спочатку дамо визначення коливань: це – процес почергового зростання та зменшення величини певного параметра досліджуваної фізичної системи відносно його рівноважного (середнього за часом) значення. Механічні коливання відрізняються від інших типів руху тим, що їх, у цілому, можна охарактеризувати кількома параметрами (наприклад, частотою та амплітудою) за відносно довгий проміжок часу, тоді як для інших рухів слід знати положення системи у будь-який час для будь-якої точки простору.

За типом диференціальних рівнянь, якими описуються ті чи інші коливання, їх можна поділити на два класи: лінійні та

нелінійні коливання. За характером збудження коливань серед них можна виділити такі чотири типи: власні, вимушені, параметричні та автоколивання.

Власні коливання виникають в ізольованій від зовнішніх сил системах після тимчасового зовнішнього збурення. Їхній характер визначається практично лише внутрішніми силами, фізичною побудовою системи. Енергію до такої системи вкладають один раз, під час первісного тимчасового зовнішнього збурення. Отже, якщо математичний маятник вивести зі стану рівноваги, надавши йому певну кількість механічної енергії, то він виконуватиме власні коливання. Оскільки на математичний маятник діють також дисипативні сили (тертя), то поступово ці коливання згаснуть. Величину зміщення положення маятника відносно рівноважного можна аналітично записати у наступному вигляді:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \exp(-\beta \cdot t) \cos(\omega \cdot t), \quad (2.122)$$

де φ_0 – це початкове значення кута відхилення маятника відносно рівноважного положення $\varphi=0$, β – це декремент загасання, що визначає час, коли максимальне відхилення маятника відносно рівноважного положення зменшиться в \exp разів порівняно з φ_0 , частота коливань математичного маятника $\omega = \sqrt{g/l_0}$ визначається його довжиною l_0 та прискоренням вільного падіння g .

Вимушені коливання відбуваються внаслідок дії зовнішніх сил, які діють незалежно від коливань самої системи. Характер вимушених коливань визначається не лише внутрішніми властивостями системи, але істотно залежить від зовнішньої сили. Найчастіше саме вона визначає характер цих коливань. Енергія до системи надходить внаслідок дії зовнішньої сили. Диференціальне рівняння, що описує ці коливання, має вигляд другого закону Ньютона, відповідно до якого прискорення механічного об'єкта визначається дією зовнішньої результуючої сили. Запишемо його так, щоби складова сили тяжіння, яка повертає маятник до стану рівноваги (повертаюча сила), була записана в лівій частині рівняння,

а зовнішня періодична сила, яка виводить маятник зі стану рівноваги – праворуч (силою тертя знехтуємо для спрощення запису):

$$d^2\varphi/dt^2 + \omega^2\varphi = f \cdot \cos(\Omega t), \quad (2.123)$$

де f – це прискорення, з яким би рухалась ця механічна система під дією зовнішньої сили, якби ця сила не змінювалася з часом із частотою Ω . Як видно з аналізу рівняння (2.123), воно є лінійним: змінна величина, кут φ , входить до нього у першому ступені. Але, як вже було вказано вище, параметричні коливання є нелінійними. Дамо визначення цьому типу коливань.

Параметричні коливання – це особливий тип вимушених коливань, який відрізняється від решти тим, що зовнішня сила періодично змінює певний фізичний параметр системи (наприклад, масу маятника, довжину його підвісу, таке інше), який визначає власну частоту коливань. У цьому випадку енергія надходить до системи через зовнішню силу; але залежно від фазових співвідношень зовнішня сила або виконує додатну роботу, тоді амплітуда коливань зростає, або від'ємну роботу, тоді амплітуда зменшується. На лінійній стадії параметричні коливання є або параметрично нестійкими (реалізується режим параметричного збудження), або параметрично стійкими, тоді реалізується режим загасання. На нелінійній стадії параметричної нестійкості відбувається її насичення через нелінійний зсув фази коливань відносно фази зовнішньої сили. В нашому випадку параметричні коливання описуються рівнянням Мат'є з малим параметром $\varepsilon = a/l_0 < 1$:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = \varepsilon\omega^2\varphi\cos(\Omega t). \quad (2.124)$$

На відміну від рівняння (2.123) зовнішня сила, яку записано праворуч, є залежною не тільки від $\cos(\Omega t)$, але й прямо пропорційна до значення кута відхилення маятника відносно стану рівноваги. Рівняння (2.124) можна переписати в іншому вигляді: $\ddot{\varphi} + \varphi \cdot (g/l_0)[1 - (a/l_0) \cdot \cos(\Omega t)] = 0$, з якого видно, що дія зовнішньої сили дійсно призводить до періодичної зміни

довжини маятника на величину a , яку можна назвати амплітудою модуляції довжини маятника, а параметр ε – параметром модуляції.

Припустимо, що електродвигун, який періодично змінює довжину маятника, виконує роботу зі зменшення довжини маятника в той момент часу, коли математичний маятник проходить положення рівноваги, тоді сила натягу мотузки, на якій висить тягарець маятника, є максимальною, бо у цьому положенні швидкість руху тягарця, а отже, і доцентрове прискорення є максимальними. А коли маятник проходить положення максимального відхилення від стану рівноваги, його швидкість дорівнює нулю, тому сила натягу мотузки є мінімальною, тому робота електромотору зі збільшення довжини мотузки за абсолютною величиною є меншою, ніж робота зі зменшення довжини маятника. Крім того, ці роботи є різного знаку, бо відбувається протилежна зміна довжини маятника, але в сумі за період одного коливання зовнішня сила виконує додатну роботу, яка витрачається на збільшення енергії коливань цього математичного маятника. Отже, збільшення енергії математичного маятника при такому режимі роботи зовнішньої сили означає збільшення амплітуди коливань маятника, що називається параметричною нестійкістю.

Зростання амплітуди параметричних коливань відбувається до того часу, коли (через нелінійні процеси впливу амплітуди коливань на їхню фазу) зовнішня сила перестає виконувати роботу із зменшення довжини підвісу маятника саме в ті моменти часу, коли маятник проходить положення рівноваги. Отже, через такий нелінійний зсув фази параметричних коливань зовнішня сила перестає виконувати додатну роботу у тій кількості, яка є достатньою для перекриття втрат енергії коливань цього математичного маятника на від'ємну роботу проти дисипативних сил (тертя в коливальній системі, опір руху в оточуючому середовищі тощо). Таким чином, ми приходимо до висновку про істотну залежність сценарію параметричної нестійкості від фазового співвідношення між частотою зовнішньої сили та власною частотою. Параметрична нестійкість реалізується при виконанні наступної резонансної умови:

$$\omega/\Omega = N/2, \quad (2.125)$$

де N – це натуральне число. Перша умова параметричного резонансу ($N=1$) означає, що зовнішня сила за один період коливань маятника встигає двічі виконати додатну роботу зі зменшення довжини маятника, або інакше кажучи: упродовж одного періоду коливань двічі внести енергію у коливальну систему. Що більшим є параметр N , то менше енергії надходить до параметричної коливальної системи за один період її коливань.

Елементарний розрахунок моделі математичного маятника показує, що за умов миттєвого скорочення його довжини при проходженні ним положення рівноваги, за один період енергія його коливань збільшиться на величину $\Delta E \approx 6aE/l_0$, яка пропорційна повній енергії коливань. Оцінимо втрати енергії математичного маятника за один період внаслідок неминучих дисипативних процесів при майже гармонічних коливаннях як величину, що також пропорційна енергії коливань $\Delta E_{los} \approx 2\Delta E$, де Λ – це логарифмічний декремент загасання цих коливань. Таким чином, критерієм розвитку параметричної нестійкості математичного маятника за умов $N=1$ є нерівність:

$$3a/l_0 > \Lambda. \quad (2.126)$$

Якщо $N > 1$, то і амплітуда модуляції ε довжини підвісу математичного маятника має зрости пропорційно N .

Оскільки ми розглядали спрощену модель параметричних коливань, то записували точну резонансну умову параметричного резонансу (2.125). Реально в експерименті чим більше амплітуда модуляції, тим більше діапазон $\min(\omega/\Omega) < \omega/\Omega < \max(\omega/\Omega)$, в якому спостерігається параметрична нестійкість.

Завдання 2. Вивчення експериментальної установки

Математичний маятник, який використовується у цій роботі, виготовлено у вигляді тонкої шовкової нитки, на нижньому кінці якої висить металева кулька. Вигляд збоку та вигляд зверху цього маятника показано на рис. 2.28, там же зображено градусну шкалу, за допомогою якої вимірюють відхилення математичного маятника відносно положення рівноваги в процесі збудження параметричних коливань. Маса кульки приблизно три грами.

Нитка проходить крізь скляний капіляр, потім її перекинуто через блок і другий її кінчик за допомогою петлі закріплено на шпинделі, який вкручено в один з отворів, які зроблено у вузькій планці. Цю планку насаджено на вісь електромотора Уоррена СД-60. Мотор робить 60 обертів на хвилину. Зміна величини амплітуди модуляції довжини підвісу математичного маятника (абсолютної величини зміни довжини підвісу) може бути реалізована у межах від двох до восьми сантиметрів.

Мотор 1 закріплено на підставці 11. На ній же встановлено кронштейни 9 та 13, в яких закріплено металевий стрижень 10 довжиною 100 см. Вздовж цього стрижня 10 можна переміщувати та закріплювати у довільному положенні за допомогою стопорного гвинта 8 подвійний хомут 5, який несе на собі вісь 7 блоку 6. Отже, змінюючи положення подвійного хомута 5, можна змінювати довжину нитки 14 математичного маятника, на кінці якої висить маленька металева кулька 15.

Окрім того, на осі 7 за допомогою іншого хомута за допомогою гвинта 12 кріплено вісь 16 градусної шкали 4, за допомогою якої можна вимірювати кут відхилення математичного маятника відносно положення рівноваги при параметричному резонансі.

На вісь мотору 1 насаджено досить довгу вузьку металеву планку 2, в якій зроблено кілька отворів, що мають різьбу. У ці отвори можна вкручувати шпindel 3, на який накинута петелька, яку зроблено на кінці нитки 14. На рис. 2.28 (див. вигляд зверху) показано випадок, коли шпindel 3 вкручено у крайній (самий дальній від осі) отвір. Такому

положенню шпинделя відповідає максимальна (для нашого лабораторного пристрою) величина амплітуди модуляції довжини маятника.

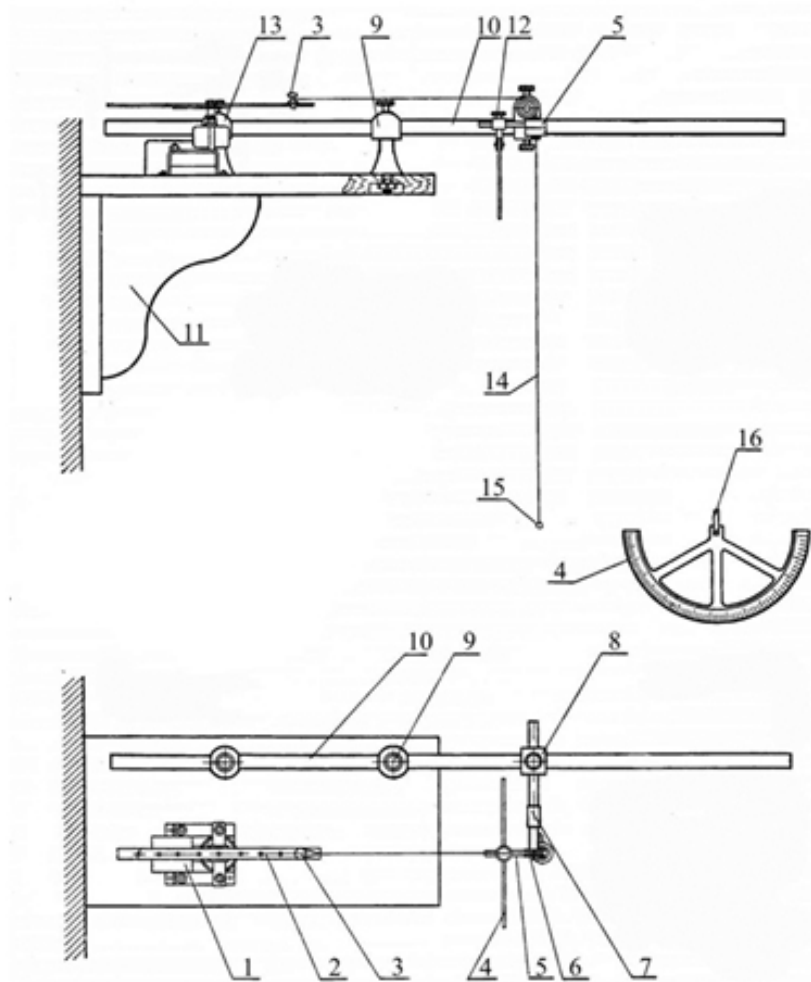


Рис. 2.28. Вигляд (збоку та згори) експериментальної установки для дослідження параметричних коливань

3. Порядок виконання роботи

1. Увімкнути електродвигун та за допомогою секундоміра виміряти час t , упродовж якого планка на осі мотору виконує $n=10\div 15$ повних обертів.
2. Визначити період модуляції довжини підвісу маятника $\tau=t/n$.
3. Беручи до уваги умову параметричного резонансу (2.125), яку перепишемо у термінах періодів: $\omega/\Omega = \tau/T = N/2$, обчислимо значення періодів коливань математичного маятника $T = 2\tau/N$, для яких виконуються перші дві умови параметричного резонансу. Тобто: $T_1=2\tau$ та $T_2=\tau$.
4. Визначити за допомогою відомої формули для періоду коливань математичного маятника три значення його довжини, для яких за умов даного експерименту можлива реалізація параметричної нестійкості:

$$l_{0j} = gT_j^2 / (4\pi^2), \text{ де } j=1,2.$$

5. Встановити шпиндель в одному з отворів планки, задавши велике значення амплітуди модуляції довжини підвісу маятника, наприклад $a_1 = 6$ см. Планку розташовують перпендикулярно до стрижня. Переміщуючи подвійний хомут з блоком вздовж стрижня, виставляють довжину маятника на 4 см більшу, ніж обчислено значення l_{01} .
6. Відхиливши тягарець математичного маятника на 5° , не вмикаючи електродвигун, надають можливість маятнику виконати 10 повних коливань, вимірявши при цьому проміжок часу, упродовж якого ці коливання відбулися. Це дасть можливість знайти період $T_1^{(1)}$ власних коливань маятника з довжиною підвісу $(l_{01} + 4)$ см.
7. Маятник зупиняють, вмикають двигун Уоррена та спостерігають за розвитком параметричних коливань. За допомогою шкали, яку встановлюють паралельно площині стаціонарних параметричних коливань, визначають значення стаціонарної амплітуди коливань $\phi_1^{(1)}$. Здобуті дані ($\phi_1^{(1)}$ та $T_1^{(1)}$) заносять до таблиці.

8. Після цього мотор вимикають, а маятник зупиняють. Довжину маятника зменшують на 1 см, наближуючи її величину до значення l_{01} . Відповідно до методики, що викладено в пункті 6 визначають період $T_1^{(2)}$ для маятника з довжиною $(l_{01} + 3)$ см. Далі виконуються завдання, які вказано в пункті 7, але для нової $(l_{01} + 3)$ см довжини підвісу маятника, в результаті чого експериментально встановлюють нове значення стаціонарної амплітуди параметричних коливань $\phi_1^{(2)}$. Нові отримані дані заносять до таблиці.

9. Мотор знову вимикають, а маятник зупиняють і повторюють експерименти відповідно до змісту пунктів 6 та 7, але для все менших та менших значень амплітуди модуляції довжини підвісу, доки з кроком в 1 см довжина підвісу маятника не стане дорівнювати $(l_{01} - 4)$ см. Всі отримані данні заносять до таблиці, вказавши величину амплітуди модуляції.

10. Тепер шпindel переставляють у нове гніздо, щоб амплітуда модуляції довжини підвісу була на 2 см меншою від попереднього значення, тобто $a_2 = 4$ см. Після цього повторюють всі експериментальні процедури, які вказано в пунктах 5, 6, 7, 8 та 9. Всі здобуті експериментальні данні заносять до таблиці, вказавши значення амплітуди модуляції.

11. Шпindel знову переставляють у нове гніздо, таким чином, щоб амплітуда модуляції довжини підвісу була на 2 см меншою від попереднього значення, тобто $a_2 = 2$ см. Після цього повторюють всі експериментальні процедури, які вказано в пунктах 5, 6, 7, 8 та 9. Всі здобуті експериментальні данні заносять до таблиці, вказавши значення амплітуди модуляції.

12. Виставляють нову довжину математичного маятника, обравши в якості першого значення $(l_{02} + 4)$ см. Після цього проводять експериментальні дослідження відповідно для змісту пунктів 5÷11. Всі здобуті експериментальні данні $\phi_2^{(i)} = \phi_2^{(i)}(T_2^{(i)})$ заносять до таблиці, вказавши значення амплітуди модуляції.

13. За здобутими експериментальними даними на одному графіку будують шість експериментальних кривих $\phi_j = \phi_j(T_j)$.

Контрольні питання

1. За яких умов у коливальній системі, на яку діє зовнішня сила, виникає явище резонансу?
2. Чим параметричний резонанс відрізняється від лінійного резонансу вимушених коливань?
3. Чому умова параметричного резонансу є поліваріантною, тобто записується у вигляді: $\omega = N \cdot \Omega / 2$, де N – це натуральне число?
4. Намалюйте приблизну залежність амплітуди стаціонарних параметричних коливань від періоду власних коливань відповідного математичного маятника, дайте пояснення цій залежності.
5. Чому зменшення довжини підвісу маятника призводить до збільшення амплітуди параметричних коливань за умов параметричного резонансу?
6. Чому зменшення амплітуди модуляції довжини підвісу призводить до зменшення амплітуди параметричних коливань у режимі насичення параметричної нестійкості?
7. Чому збільшення амплітуди модуляції довжини підвісу збільшує діапазон довжин математичного маятника для яких можлива параметрична нестійкість коливань цього маятника?

§3. Лабораторні роботи з молекулярної фізики

3.1. Лабораторна робота «Визначення довжини вільного пробігу та ефективного діаметра молекул повітря»

Мета роботи:

1. Визначити довжину вільного пробігу.
2. Визначити ефективний діаметр молекул повітря шляхом непрямого визначення величини коефіцієнта внутрішнього тертя.

Обладнання: велика ємність (діаметр ~ 0.2 м), що частково заповнено водою, до ємності повітря може потрапляти крізь тонкий коаксіальний капіляр (різниця радіусів $\sim 10^{-4}$ м), а витікати – крізь кран з помірною (діаметр ~ 0.005 м) величиною перерізу.

1. Ознайомлення з основами теорії стаціонарних процесів перенесення

Молекулярно-кінетична теорія дає можливість зв'язати макроскопічні параметри газового середовища, такі як тиск, температура, об'єм з його мікроскопічними параметрами, такими як розміри та маса молекул, їхня швидкість, середня довжина вільного пробігу. Застосування молекулярно-кінетичної теорії до термодинамічних систем, в яких спостерігається перепад певного макропараметра, робить можливим опис явищ перенесення в цих системах.

Якщо визначити величину коефіцієнта внутрішнього тертя η , який описує здатність середовища передавати імпульс упорядкованого руху частинок середовища у напрямку, що є перпендикулярним до напрямку цього упорядкованого руху, то можна знайти величину мікропараметрів, які впливають на величину η . Наприклад, визначивши експериментально коефіцієнт внутрішнього тертя η газу та скориставшись зв'язком між ним та густиною середовища ρ , середньою довжиною вільного пробігу частинок газу λ та середнім значенням модуля

швидкості $\langle v \rangle$, який відомий з теорії стаціонарних явищ перенесення:

$$\eta = \lambda \rho \langle v \rangle / 3, \quad (3.1)$$

можна визначити середню довжину вільного пробігу частинок газу λ .

В роботі досліджується випадок протікання повітря крізь циліндричну капілярну трубку, в яку вставлено дріт, діаметр якого за порядком величини співпадає з діаметром капіляра. Об'єм газу V , що ламінарно (без утворення вихорів та розривів середовища) протікає крізь трубку з круглим внутрішнім перерізом за час τ , визначається формулою Пуазейля для стаціонарних потоків:

$$V = \frac{\pi \cdot r^4 \tau \cdot \Delta P}{8 \eta L}, \quad (3.2)$$

де r – це радіус трубки, L – це довжина трубки, ΔP – це різниця тиску на кінцях трубки, яка обумовлює течію газу. Рівняння (3.2) записано для течії крізь трубу круглого перерізу. А у даній роботі, щоб зменшити потік повітря крізь трубку, до неї вставлено дріт, діаметр якого є близьким до діаметра трубки. Отже, таким чином для протікання повітря утворився коаксіальний канал. У випадку течії крізь коаксіальну трубу (див. рис. 3.1) об'єм газу V , що протікає крізь нього, відрізняється від того, що дає формула (3.2), та виражається наступним співвідношенням:

$$V = \frac{\pi \cdot \tau \cdot \Delta P}{8 \eta L} \left[R_0^4 - r^4 - \frac{(R_0^2 - r^2)^2}{\ln(R_0 / r)} \right], \quad (3.3)$$

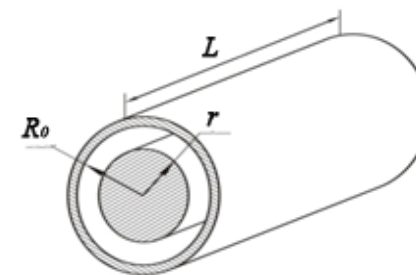


Рис. 3.1. Поперечний переріз капіляра з коаксіальним каналом.

Його параметри:

$$R_0 = (0.275 \pm 0.005) \times 10^{-3} \text{ м},$$

$$r = (0.150 \pm 0.005) \times 10^{-3} \text{ м},$$

$$L = (96.0 \pm 0.5) \times 10^{-3} \text{ м}$$

де R_0 – це зовнішній (великий радіус) каналу, r – внутрішній (малий) радіус каналу цієї коаксіальної труби.

З формули (3.3) можна здобути вираз для коефіцієнта внутрішнього тертя η :

$$\eta = \frac{\pi \cdot \tau \cdot \Delta P}{8VL} \left[R_0^4 - r^4 - \frac{(R_0^2 - r^2)^2}{\ln(R_0 / r)} \right]. \quad (3.4)$$

У співвідношенні (3.4) усі величини можна безпосередньо виміряти, через це ним можна скористатися для експериментального визначення внутрішнього тертя (грузкості) газу.

З іншого боку, згідно з молекулярно-кінетичною теорією, існує зв'язок між коефіцієнтом внутрішнього тертя ідеальних газів, середньою довжиною вільного пробігу частинок газу λ та середнім значенням модуля швидкості руху частинок газу (див. формулу (3.1)). Більш адекватний підхід до виведення співвідношення (3.1), який враховує розподіл Максвелла молекул газу за швидкостями, дає дещо інше значення коефіцієнта пропорційності у формулі (3.1). Таким чином, для повітря співвідношення (3.1) набуває вигляду:

$$\eta = \lambda \rho \langle v \rangle / 2. \quad (3.5)$$

Замінивши в цьому рівнянні $\langle v \rangle$ на його значення, яке відоме з молекулярно-кінетичної теорії газів, здобудемо наступну формулу для визначення середньої довжини вільного пробігу частинок повітря:

$$\lambda = \frac{2\eta}{\rho \langle v \rangle} = \frac{2\eta}{\rho} \sqrt{\frac{\pi \mu}{8RT}}, \quad (3.6)$$

де R – це універсальна газова стала, T – абсолютна температура, μ – це ефективна величина молярної маси повітря ($\mu = 29 \times 10^{-3}$ кг/моль).

У свою чергу, середня довжина вільного пробігу та ефективний діаметр молекули повітря d пов'язані співвідношенням:

$$\lambda = 1 / (\sqrt{2} n \pi d^2), \quad (3.7)$$

де n – це концентрація частинок цього газу. Тоді з формули (3.5) можна визначити ефективний діаметр молекул повітря для певної температури, якщо відомі величини λ та n . Концентрацію частинок можна визначити з рівняння, яке є наслідком рівняння стану ідеального газу:

$$n = N_L T_0 P / (T P_0), \quad (3.8)$$

де N_L – це концентрація молекул за нормальних умов: $P_0 = 101325$ Па, $T_0 = 273.15$ К, її називають числом Лошмідта, $N_L = 2.6867774(47) \times 10^{25}$ м⁻³. З рівнянь (3.8) та (3.7) ефективний діаметр молекул повітря визначають наступною формулою:

$$d = \left(\sqrt{2} N_L \pi \lambda \frac{P T_0}{P_0 T} \right)^{-1/2}. \quad (3.9)$$

Врахувавши вираз (3.6), з рівняння (3.9) отримуємо:

$$d = \sqrt{\frac{P_0 T}{P T_0} \frac{\rho \sqrt{RT}}{\eta N_L \pi^{3/2} \sqrt{\mu}}}. \quad (3.10)$$

Якщо скористатися тим, що густину повітря ρ можна знайти з рівняння Клапейрона–Менделєєва:

$$\rho = \frac{P \mu}{RT}, \quad (3.11)$$

то вираз (3.10) набуває наступного вигляду:

$$d = \left(\frac{\mu \Gamma}{\pi R} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{P_0}{\pi T_0 N_L \eta}}. \quad (3.12)$$

Урахувавши у виразі (3.12) відомі константи, отримаємо розрахункову формулу:

$$d[\text{м}] = 3.8267 \times 10^{-13} \times \frac{(T[^\circ\text{K}])^{1/4}}{\sqrt{\eta[\text{Па} \cdot \text{с}]}}, \quad (3.13)$$

2. Опис лабораторного устаткування

Лабораторне устаткування складається з великої лабораторної ємності (див. рис. 3.2), що має кран у своїй нижній частині, зверху її закрито корком, крізь який проходить трубка, що містить в середині капіляр із коаксіальним перерізом; двох мірних мензурок, секундоміра та термометра (використовується звичайний термометр, що вимірює температуру в приміщенні). Цю ємність, до стінки якої прикріплено шкалу, заповнено водою. Рівень води має бути в межах шкали так, щоби капіляр не торкався поверхні води. Кран має отвір зі значно більшим перерізом, ніж переріз капіляра, але площа перерізу крана є значно менша за площу перерізу ємності. При закритому крані тиск повітря

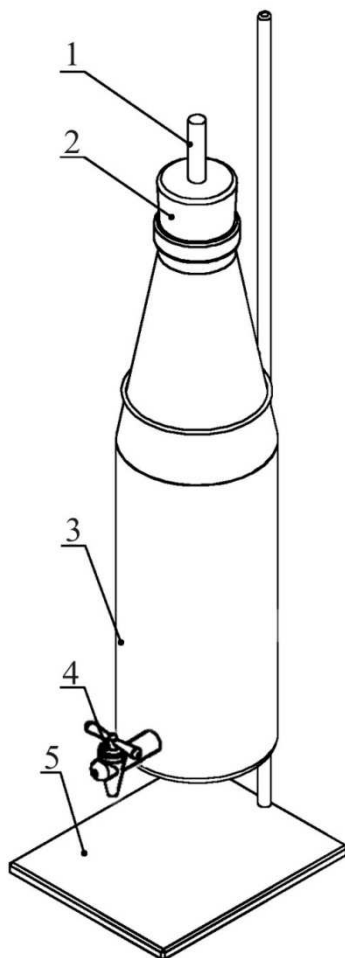


Рис. 3.2. Зображення лабораторного пристрою для роботи № 3.

1 – трубка з капіляром;
2 – корок; 3 – ємність; 4 – кран;
5 – підставка штативу

над рідиною всередині лабораторної ємності дорівнює атмосферному, бо повітря в ній поєднано з атмосферою саме крізь зазначений капіляр.

Коли кран повністю відкривають (див. схему на рис. 3.3), то починається витікання рідини у вигляді струмочка (з рівня I до рівня II). Цей процес відбувається внаслідок дії гідростатичного тиску повітря та рідини в середині ємності.

Такий режим витікання триватиме, доки сумарний тиск газу та рідини всередині лабораторної ємності на рівні отвору не стане дорівнювати атмосферному тиску (рівень II):

$$P_1 + \rho_p g h_1 = P_{\text{атм}}, \quad (3.14)$$

де P_1 – тиск газу в даній ємності, h_1 – висота стовпа рідини в даний момент часу від рівня крана до верхнього рівня води, ρ_p – густина рідини, g – прискорення вільного падіння.

При цьому на кінцях капіляра утворюється різниця тисків повітря:

$$\Delta P = P_{\text{атм}} - P_1 = \rho_p g h_1. \quad (3.15)$$

Оскільки тиск повітря у цій ємності є меншим за атмосферний, то повітря ззовні почне натікати крізь капіляр до лабораторної ємності. Але внаслідок того, що повітря дуже повільно надходитиме до ємності крізь малий отвір у капілярі, то рідина почне витікати крізь повністю відкритий кран краплинами, а не струмком!

Різниця тисків на кінцях капіляра, яка спочатку дорівнювала $\rho_p g h_1$, з часом змінюватиметься, оскільки зменшуватиметься висота стовпа рідини над краном. Зміна висоти стовпа рідини буде незначною, бо площа перерізу

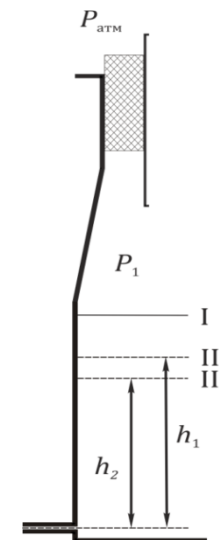


Рис. 3.3. Схема визначення стовпа рідини при різних режимах витікання рідини

посудини є великою, а об'єм рідини, що витікає з крана, є порівняно малим. Тому і зміна тиску ΔP буде малою величиною. Скориставшись цим, у формулі (3.4) у якості ΔP можна взяти середнє значення різниці тиску на кінцях капіляра на початку та наприкінці досліду, і таким чином:

$$\Delta P = (h_1 + h_2)g\rho/2. \quad (3.16)$$

З урахуванням (3.16) вираз (3.4) набуває вигляду:

$$\eta = \frac{\pi \cdot \tau \cdot \rho_p \cdot g}{16VL} \left[R_0^4 - r^4 - \frac{(R_0^2 - r^2)^2}{\ln(R_0/r)} \right] (h_1 + h_2). \quad (3.17)$$

Об'єм газу V , що протік крізь капіляр, дорівнюватиме об'ємові рідини, що витекла крізь нижній кран до мензурки, бо газ займає весь вільний від рідини об'єм. Підставивши значення η , розраховане за формулою (3.17), до виразу (3.13), отримаємо ефективний діаметр молекул повітря d .

3. Порядок виконання роботи

1. Визначити початковий рівень води в посудині.
2. Підставити велику мірну мензурку під кран у нижній частині посудини.
3. Відкрити кран, і зачекавши, доки вода почне витікати краплями, визначити рівень води h_1 у посудині. Тоді підставити нову мензурку, одночасно включивши секундомір.
4. Зупинити секундомір, коли в мензурці буде 50 см^3 води, закрити кран. Визначити новий рівень води в посудині h_2 . Записати значення h_2 та показання секундоміра τ . Повторити експеримент десять разів. Результати занести до таблиці:

№ досліду	Початковий рівень води, $(h_1 + \Delta h_1), \text{ м}$	Кінцевий рівень води, $(h_2 + \Delta h_2), \text{ м}$	Час, $(\tau + \Delta \tau), \text{ с}$
1			
...			
N			

4. Обробка отриманих результатів вимірювань

1. За формулою (3.17) обчислити коефіцієнт внутрішнього тертя повітря.
2. Виміряти кімнатну температуру T . За розрахунковою формулою (3.13) обчислити ефективний діаметр молекули повітря.
3. Обчислити абсолютні похибки здобутих результатів.

Абсолютна статистична помилка при обчисленні коефіцієнта внутрішнього тертя η визначається як:

$$\Delta S_\eta = t_{st} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{\eta} - \eta_i)^2}{n(n-1)}}, \quad (3.18)$$

де t_{st} – коефіцієнт Стюдента, $\bar{\eta}$ – середнє значення коефіцієнта внутрішнього тертя, η_i – значення коефіцієнта внутрішнього тертя за результатами i -го вимірювання, n – кількість вимірювань. Абсолютна помилка при обчисленні коефіцієнта внутрішнього тертя η , яка пов'язана з помилками вимірювання величин τ , h_1 , h_2 , R , r , L , V , знаходиться за формулою:

$$\Delta \bar{X}_\eta = \sum_{i=1}^k \left| \frac{\partial \eta(x_i)}{\partial x_i} \Delta x_i \right|, \quad (3.19)$$

де x_i – величина, що вимірюється, Δx_i – абсолютна помилка вимірювання цієї величини.

Повна абсолютна помилка $\Delta \eta$ знаходиться так:

$$\Delta \eta = \sqrt{(\Delta S_\eta)^2 + (\Delta \bar{X}_\eta)^2}. \quad (3.20)$$

Абсолютна помилка ефективного діаметра молекули повітря визначається в наступний спосіб:

$$\Delta d = \sum_{i=1}^k \left| \frac{\partial d(x_i)}{\partial x_i} \Delta x_i \right|. \quad (3.21)$$

Врахувавши вираз (3.13) для розрахункової формули, отримаємо:

$$\Delta d [m] = \left| \frac{2.87003 \cdot 10^{-13}}{(T [^\circ K])^{3/4} \cdot (\eta [Pa \cdot c])^{1/2}} \right| \Delta T + \left| \frac{3.82670 \cdot 10^{-13} (T [^\circ K])^{1/4}}{2(\eta [Pa \cdot c])^{3/2}} \right| \Delta \eta [Pa \cdot c]. \quad (3.22)$$

5. Представлення здобутих результатів

Записати здобуте значення коефіцієнта внутрішнього тертя $\eta = (\eta_{cp} \pm \Delta \eta) Pa \cdot c$, та ефективного діаметра молекули повітря $(d \pm \Delta d) 10^{-9} m$. Обчислити відносну помилку для d за формулою:

$$\delta d = \frac{\Delta d}{d} 100\%. \quad (3.23)$$

Порівняти здобуте значення ефективного діаметра молекули повітря з табличним. Розрахувати відносне відхилення отриманого значення ефективного діаметра молекули повітря від табличного $d_{таб}$ за формулою:

$$\delta S = \frac{|d_{таб} - d|}{d} 100\%. \quad (3.24)$$

Контрольні питання

1. Які явища мають спільну назву явищ перенесення?
2. Який загальний вигляд мають рівняння стаціонарного перенесення у феноменологічному підході?

3. Що у фізичній кінетиці називають довжиною вільного пробігу?
4. Як визначається площа перетину пружного розсіяння частинок ідеального газу?
5. Що та у якому напрямку переноситься при самодифузії?
6. Вивести формулу для частоти зіткнення частинок ідеального газу, які описуються розподілом Максвелла, зі стінкою камери, де він знаходиться.
7. Чим відрізняються характери потоків частинок ідеального газу крізь трубу великого діаметра (його розміри перевищують довжину вільного пробігу частинок λ) та крізь капіляр, діаметр якого є значно меншим за λ ?

3.2. Лабораторна робота «Визначення коефіцієнта внутрішнього тертя рідини методом Стокса»

Мета роботи: визначити коефіцієнт внутрішнього тертя рідини.

Обладнання: мірна мензурка великого діаметра з гліцериним, набір металевих кульок малого (порядку міліметра) діаметра.

1. Короткі теоретичні відомості про стаціонарні явища перенесення

Питання, які експериментально досліджуються в даній роботі, вивчає фізична кінетика. В ній експериментально визначають величину коефіцієнта внутрішнього тертя через вимірювання швидкості руху середовища. Якщо певна частина газу або рідини перебуває в стані руху під дією стаціонарної зовнішньої сили, яка підтримує цей рух, тоді при невеликих швидкостях течії у цьому середовищі утворюється режим його шарованого (ламінарного) протікання. На поверхні поділу двох прошарків середовища, що рухаються зі швидкостями v та $v+dv$, діють однакові за величиною сили f . Одна з них діє з боку повільного шару на швидкий і є гальмуючою, а друга діє з боку швидкого шару на повільний, внаслідок чого останній прискорюється. Це є прояв такої властивості рідини, яке

називають внутрішнім тертям (грузькістю). Унаслідок внутрішнього тертя імпульс більш швидкої течії переноситься до прошарку з меншим імпульсом направлено руху.

Інакше кажучи, через наявність внутрішнього тертя в середовищі, прошарки якого рухаються з різними швидкостями, утворюється потік імпульсу у напрямку, що є перпендикулярним до напрямку упорядкованого руху частинок середовища. Оскільки в умовах навчальної лабораторії технічно важко влаштувати процес стаціонарного натікання газу чи рідини на нерухоме (відносно лабораторної системи відліку) тверде тіло, то ми скористаємося відносним характером механічного руху. Тобто будемо спостерігати за рухом твердого тіла у нерухомому середовищі. Якщо перейти до системи відліку, пов'язаної з тілом, то у цьому випадку рухається середовище.

2. Визначення коефіцієнта внутрішнього тертя рідини

Цю роботу присвячено визначенню коефіцієнта внутрішнього тертя рідини, оскільки для газів це явище є менш промовистим, а отже, його визначення потребує більш досконалого обладнання та проведення більш складного експерименту. Сила взаємодії прошарків рідини з різними швидкостями визначається наступною формулою:

$$f = -\eta S dV / dx, \quad (3.25)$$

де η – коефіцієнт внутрішнього тертя, S – площа поверхні взаємодії шарів рідини, dV/dx – перепад швидкості в поперечному напрямку.

У даній роботі явище внутрішнього тертя вивчається на прикладі руху маленької кульки в досліджуваній рідині. На кульку, що падає в рідині під дією сили тяжіння, діє також сила Архімеда, яка виштовхує кульку, занурену в дану рідину, та сила опору. Якщо кулька повільно падає в безмежному середовищі, не залишаючи за собою вихорів, тоді, як показав ще Стокс, сила опору дорівнює

$$f = 6\pi\eta rV, \quad (3.26)$$

де V – швидкість кульки, r – радіус кульки. Рівняння руху кульки в рідині має вигляд другого закону Ньютона; запишемо його так:

$$mdV / dt = mg - m_1g - 6\pi\eta rV. \quad (3.27)$$

Тут m_1 – це маса рідини в об'ємі кульки, g – прискорення вільного падіння.

Як видно з закону Стокса (3.26), сила опору зростає при збільшенні величини швидкості руху кульки. Тому, потрапивши до рідини майже з нульовою швидкістю, кулька спочатку рухається з додатнім прискоренням, але нарешті, коли величина сили опору (останній доданок у формулі (3.27)) стає достатньо великою, настає момент, коли кулька починає рухатися рівномірно із швидкістю V_0 . Це відбувається за умови рівності нулю рівнодіючої сили, тому для визначення V_0 маємо наступне рівняння:

$$4\pi r^3 (\rho - \rho_1)g / 3 - 6\pi\eta rV_0 = 0, \quad (3.28)$$

де ρ – густина металу, з якого виготовлено кульку, ρ_1 – густина рідини, у якій відбувається досліджуваний рух.

З рівняння (3.28), якщо від радіуса кульки перейти до d – діаметра кульки, можна здобути наступний вираз для коефіцієнта внутрішнього тертя η :

$$\eta = (\rho - \rho_1)gd^2 / (18V_0). \quad (3.29)$$

Оскільки в даній роботі кулька падає вздовж осі довгої циліндричної посудини з діаметром D , то врахування наявності стінки призводить до певної модифікації виразу (3.29), яка враховує результати експериментів:

$$\eta = (\rho - \rho_1)gd^2 / [18V_0(1 + 2.4d / D)]. \quad (3.30)$$

Усі величини, що входять до (3.30), визначаються або експериментально, або є табличними даними.

3. Опис лабораторного устаткування

Лабораторне устаткування складається зі скляного циліндра, що наповнено досліджуваною рідиною, металевих кульок, діаметри яких попередньо вимірюють (мікрометром або за допомогою мікроскопа), секундоміра, призначеного для вимірювання часу руху кульки. На скляному циліндрі нанесено горизонтальні мітки для вимірювання довжини пройденого шляху.

4. Порядок виконання роботи

1. Визначити ціну поділки мікроскопа, роздивляючись крізь окуляр будь-який предмет із нанесеними на ньому еталонними поділками довжини. Це дозволить виміряти діаметр кульки. Для цього кульку кладуть на предметне скло, потім разом із ним ставлять на столик мікроскопа.
2. Те саме можна зробити за допомогою мікрометра. Мікрометр беруть таким чином, щоб нерухома п'ята була знизу, а рухома зверху. Прилад треба тримати міцно та точно вертикально. Кульку обережно кладуть на нерухому п'яту мікрометра, потім прокручують маховик мікрометра за годинниковою стрілкою доки торець мікрометричного гвинта не притисне кульку до нерухомої п'яти. Коли сила притискання досягне потрібної величини, тоді храповий механізм вийде зі стану зачеплення з мікрометричним гвинтом і рух маховика припиниться. Після цього по лімбі мікрометричного гвинта можна буде визначити діаметр кульки. Похибка вимірювання залежить від класу приладу, вона звичайно вказується на скобі мікрометра. Вивільнити кульку, прокручуючи маховик проти годинникової стрілки.
3. Занурити кульку до досліджуваної рідини без початкової швидкості. Виміряти секундоміром час τ рівномірного руху кульки між мітками (у середній частині циліндра). При вимірюванні довжини шляху рівномірного руху на мітки циліндра слід дивитись під прямим кутом так, щоб уникнути помилки через оптичне явище – паралакс.

4. Вимірявши відстань між мітками, визначити швидкість рівномірного руху. Дослід повторити для різних кульок десять разів.
5. Обчислити за формулою (3.30) коефіцієнт η для кожної кульки, знайти його середнє значення при фіксованому значенні температури.
6. Обчислити абсолютну похибку визначення η .
7. Результати дослідів занести до таблиці.

№ досліду	Діаметр кульки $(d \pm \Delta d)$, м	Час, $(t \pm \Delta t)$, с	Довжина шляху, $(l \pm \Delta l)$, м	Швидкість, $(v_0 \pm \Delta v_0)$, м/с
1				
...				
n				

8. Виміряти температуру в приміщенні.
9. Виміряти зовнішній діаметр циліндра D_3 . Вважаючи, що товщина скла становить 1.1 мм, розрахувати внутрішній діаметр циліндра D .

5. Обробка отриманих результатів вимірювань

В даній лабораторній роботі у якості рідини, для якої визначається коефіцієнт внутрішнього тертя, використовують гліцерин. Його густина при 20°C складає величину $\rho_{gl}=1.26 \times 10^3$ кг/м³. Густина металу, з якого виготовлено кульки, $\rho_m=7.8 \times 10^3$ кг/м³. Коефіцієнт η для кожного експерименту з усіма кульками обчислюється окремо за наступною формулою:

$$\eta = \frac{(\rho_m - \rho_{gl})gd^2t}{18 \cdot l(1 + 2.4d/D)}. \quad (3.31)$$

Під час виконання роботи вимірювались наступні величини: d – діаметр кульки; t – час рівномірного руху кульки; l – довжина шляху рівномірного руху кульки, D_3 – зовнішній діаметр циліндра. Внутрішній діаметр циліндра D обчислено за