МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАУКОВО-НАВЧАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ

Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем бакалавр

«Якісний та числовий аналіз граничних циклів рівняння Ван-дер-Поля»

Виконав: студент 4 курсу, групи НФ-43
Веселов О. А.
спеціальність: 105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Прикладна фізика енергетичних систем
Керівник: доц. Вербицький В. І.

Рецензент:

Харків – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра інформаційних технологій у фізико-енергетичних системах
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) бакалавр
Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Руслан СУХОВ
підпис
"____"_____2020 року

ЗАВДАННЯ
НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ

Веселов Олексій Андрійович

1. Тема роботи «Якісний та числовий аналіз граничних циклів рівняння Ван-дер-Поля» керівник роботи: Вербицький Віктор Ілліч, кандидат фізико-математичних наук, затверджено наказом по університету від 5 грудня 2090 року №0210–05/2249.
2. Строк подання студентом роботи 06.06.2020
3. Перелік питань, які потрібно розробити:
   1) зробити огляд літератури, теоретичних та числових методів аналізу автоколивань та граничних циклів;
   2) провести дослідження фазового портрету рівняння Ван-дер-Поля в залежності від параметрів;
   3) обрати та застосувати числовий алгоритм граничних циклів;
   4) провести обчислювальний експеримент при різних значеннях параметру.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми.
2	Затвердження теми на кафедрі
3	Робота над літературою та іншими джерелами
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6	Написання третього розділу
7	Завершення написання дипломної роботи (висновки та література)
8	Подача науковому керівнику
9	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
10	Попередній захист
11	Захист

5.Дата видачі завдання

Студент _____ Олексій ВЕСЕЛОВ
підпис

Керівник роботи _____ Віктор ВЕРБИЦЬКИЙ
підпис

РЕФЕРАТ

Олексій Веселов «Якісний та числовий аналіз граничних циклів рівняння Ван-дер-Поля»

Кваліфікаційна робота бакалавра з прикладної фізики. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2020. – 46 с.

Бакалаврська робота виконана студентом Веселовим Олексієм Андрійовичем на тему: «Якісний та числовий аналіз граничних циклів рівняння Ван-дер-Поля».

Об’єктом дослідження дипломної роботи є рівняння Ван-дер-Поля, яке виникає в різних фізичних задачах та, зокрема, описує роботу лампового генератора.

Предметом дослідження є якісний та числовий аналіз розв’язків рівняння Ван-дер-Поля при різних значеннях параметру; аналіз автоколивальних режимів та граничних циклів.

Метою даної роботи є вивчення та проведення аналізу рівняння Ван-дер-Поля і його станів в програмному забезпеченні SciLab.

В ході виконання дипломної роботи за допомогою SciLab була розроблена програма, яка дозволяє аналізувати осцилятор Ван-дер-Поля при різних значеннях параметру.

Дипломний проект містить: 46 сторінок, 24 рисунків, 10 джерел.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: АВТОКОЛИВАННЯ, ГРАНИЧНИЙ ЦИКЛ, РІВНЯННЯ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ, БІФУРКАЦІЯ АНДРОНОВА-ХОПФА, СТІЙКІСТЬ, АТТРАКТОР.

РЕФЕРАТ

Алексей Веселов «Качественный и численный анализ предельных циклов уравнения Ван-дер-Поля»
Квалификационная работа бакалавра прикладной физики. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2020. – 46 с.

Бакалаврская работа выполнена студентом Веселовым Алексеем Андреевичем на тему: «Качественный и численный анализ предельных циклов уравнения Ван-дер-Поля».

Объектом исследования дипломной работы является уравнение Ван-дер-Поля, которое возникает в различных физических задачах и, в частности, описывает работу лампового генератора.

Предметом исследования является качественный и численный анализ решений уравнения Ван-дер-Поля при различных значениях параметра; анализ автоколебательных режимов и предельных циклов.

Целью данной работы является изучение и проведение анализа уравнение Ван-дер-Поля и его состояний в программном обеспечении SciLab.

В ходе выполнения дипломной работы с помощью SciLab была разработана программа, которая позволяет анализировать осциллятор Ван-дер-Поля при различных значениях параметра.

Дипломный проект содержит 46 страниц, 24 рисунков, 10 источников.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: АВТОКОЛЕБАНИЯ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ, УРАВНЕНИЕ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ, БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА-ХОПФА, УСТОЙЧИВОСТЬ, АТТРАКТОР.

ABSTRACT

Oleksii Veselov “Qualitative and numerical analysis of limit cycles of the Van der Pol equation”

Qualification work of the bachelor of applied physics. – Kharkiv. – V.N. Karazin KhNU, 2020. – 46 p.

Bachelor's work was done by student Veselov Oleksii on the topic: "Qualitative and numerical analysis of limit cycles of the Van der Pol equation."

The object of research of the thesis is the Van der Pol equation, which arises in various physical problems and, in particular, describes the operation of a tube generator.

The subject of the study is a qualitative and numerical analysis of solutions of the Van der Pol equation for various parameter values; analysis of self-oscillating regimes and limit cycles.

The purpose of the work is to study and analyze the van der Pol equation and its states in SciLab software.

In the course of the thesis with the help of SciLab, a program was developed that allows you to analyze the Van der Pol oscillator for various parameter values.

The graduation project contains 46 pages, 24 drawings, 10 sources.

KEYWORDS: SELF-OSCILLATIONS, LIMIT CYCLES, VAN DER POL EQUATION, ANDRONOV-HOPF BIFURCATION, STABILITY, ATTRACTOR.

ЗМІСТ

ВСТУП.....8
1. АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ.....11
1.1. Введення в граничні цикли.....11
1.2. Типологія граничних циклів.....16
1.3. Теорія автоколивань.....17
1.4. Якісний аналіз автоколивань.....18
1.5. Числовий аналіз автоколивань. Рівняння Ван-дер-Поля.....17
2. ДОСЛІДЖЕННЯ ОСЦИЛЯТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ.....23
2.1. Види рівняння Ван-дер-Поля.....23
2.2. Квазігармонічні автоколивання. Рівняння амплітуди та фази.....26
2.3. Жорстке збудження автоколивань в автогенераторі.....29
2.4. Біфуркаційна діаграма «жорсткого» генератора.....32
3. ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ РІВНЯННЯ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ.....35
3.1. Опис програмного забезпечення SciLab.....35
3.2. Проектування та розробка осцилятора Ван-Дер-Поля в SciLab.....39
3.3. Графічно-числовий аналіз осцилятора Ван-Дер-Поля.....41
ВИСНОВКИ.....45
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....46

ВСТУП

Темою для роботи було обрано аналіз граничних циклів Ван-дер-Поля. Задачі, які тісно пов'язані з вивченням систем нелінійних диференціальних рівнянь, випливають майже у всіх областях природознавства. Кожен день науковці зустрічають фундаментальні проблеми теорії випадкових процесів: різноманітні хвилі (повітря, електромагнетизм, тощо), біологічні системи (серцебиття), астрофізичні явища, акустичні шуми, сигнали зв'язку. Під час аналізу таких процесів з'являються великі розбіжності між теорією та результатами. Але на сьогоднішній день ця область аналізу систем диференціальних рівнянь достатньо розвинена. Ці рівняння можуть описувати будь-які процеси, незважаючи на їх походження. Наприклад, ізольовані замкнуті траєкторії відповідають явищам різної природи які називаються автоколиваннями. Автоколивання спостерігаються в багатьох системах: часи, звучання скрипкової струни, ламповий генератор, будь-яка механічна система, биття серця. У той же час, існує багато важливих задач, які залишаються невирішеними. Звичайно, описати ці системи у вигляді рівняння тяжко. З'явився інтерес розглянути диференціальне рівняння, які описують процес автоколивання – рівняння Ван-дер-Поля, та враховуючи вже існуючі дослідження з'ясувати користь та актуальність цього рівняння у сучасній ситуації.

Ван-дер-Поль – голландський фізик який виявив стійкі коливання що були названі «граничними циклами». Ця система коливань є осцилятором Ван-дер-Поля що представляє собою генератор з нелінійними загасаннями. Ван-дер-Поль показав що завдяки його моделі можна аналізувати періодичні коливання, та спостерігати за такими станами системи, як стійкий аттрактор, стійкий і нестійкий фокус, граничний цикл, утворення другого нестійкого фокуса і граничного циклу.

Щоб зрозуміти природу та **актуальність** цього явища треба зробити якісний аналіз усіх станів. Завдяки програмному забезпеченню SciLab ми можемо написати програму яка буде вирішувати та демонструвати у виді графіків рівняння тих або інших природних явищ. Отриманні результати треба проаналізувати з метою виявлення які з систем можуть обмінюватися енергією, тобто являються енергетично відкритими.

Як вже зазначалося, велика кількість задач пов'язаних з вивченням систем нелінійних диференціальних рівнянь залишаються невирішеними. Ці задачі виникають природним чином при проектуванні будь-яких датчиків, електричних пристроїв, біологічних процесів та інше. Застосування традиційних методів аналізу систем недостатньо. Тому ця тема являється актуальною, сучасною та важливою у будь-який час.

Тому **метою** даної роботи є вивчення та проведення аналізу рівняння Ван-дер-Поля і його станів в програмному забезпеченні SciLab. Для цього треба з'ясувати феномен рівняння Ван-дер-Полю завдяки типових коливальних явищ, досліджувати їх на основі цього аналізу, написати код для програмного забезпечення SciLab, щоб дослідження були наочні. За допомогою написаної програми та отриманих графіків типових явищ зробити висновки.

Для досягнення поставленої мети визначені **задачі**:

- Проведено якісний аналіз розв'язків рівняння Ван-дер-Поля при зміні параметру; знайдено граничні цикли.
- За допомогою SciLab досліджено наближені розв'язки, проведено числовий експеримент з програмою, дана фізична інтерпретація отриманих результатів.

Об'єкт дослідження – рівняння Ван-дер-Поля.

Предмет дослідження – якісний та числовий аналіз розв'язків рівняння Ван-дер-Поля при різних значеннях параметру; аналіз автоколивальних режимів та граничних циклів.

Структура і обсяг роботи. Магістерська робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи становить 46 сторінку, із них основного тексту 28 сторінки, 24 рисунків за текстом, список використаних джерел із 10 найменувань на 1 сторінці.

1. АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

1.1. Введення в граничні цикли

Велика кількість моделей у фізиці, математиці, біології та в багатьох інших дисциплінах представляються у вигляді диференціальних рівнянь. Більша частина цих завдань не має аналітичного рішення, але більш важливі властивості поведінки систем дозволяють бути досліджені на якісному рівні. Давайте розглянемо декілька прикладів систем із замкнутими траєкторіями, тобто, які мають цикли і в оточенні яких немає інших ізольованих траєкторій. Ізольовані замкнуті траєкторії збігаються з явищ, процесами природознавства. Ці процеси називають автоколиваннями. Замкнені траєкторії відповідають циклічності руху. Цими рівняннями зазвичай описують незгасаючі періодичні процеси, що характерно тільки для нелінійних систем.

Розглянемо декілька простих прикладів граничних циклів:

Приклад 1. *Стійкий граничний цикл.*

Дана система нелінійних диференціальних рівнянь (1.1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1\left[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}\right], \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2\left[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}\right]. \end{cases} \quad (1.1)$$

Можна побачити, що система має особливу точку в координаті (0,0). Треба визначити характер цієї точки. Обмежимося лінійними доданками поблизу ($x_1 \approx 0, x_2 \approx 0$). Тоді система буде мати вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Знайдемо корені цих рівнянь із умови:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda * E - A) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\lambda - 1)^2 + 1 = 0,$$

$$A * \overline{x} = \lambda * \overline{x},$$

де $\overline{x}$ — власний вектор, що відповідає власному значенню λ.

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Коріння є комплексно-спряжені та мають позитивні дійсні частини. Це говорить о том, що особливі точки - це нестійкий фокус. Треба перевірити чи є ще якісь особливості у системи. Тоді $\dot{x}_1$ помножимо на x_1, а $\dot{x}_2$ на x_2.

$$\begin{cases} x_1\dot{x}_1 = -x_1x_2 + x_1^2\left[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}\right], \\ x_2\dot{x}_2 = x_1x_2 + x_2^2\left[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}\right]. \end{cases}$$

Після множення складемо ці два рівняння:

$$x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = (x_1^2 + x_2^2)\left[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Введемо, що $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, та перепишемо:

$$\frac{1}{2}\frac{d(x_1^2 + x_2^2)}{dt} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$

$$\frac{d(R^2)}{dt} = 2R^2(1 - R) \Longrightarrow \frac{d(R^2)}{dt} = R(1 - R).$$

Перемножимо перше рівняння системи (1.1) на x_2, друге на x_1:

$$\begin{cases} x_2x_1\dot{x}_1 = -x_1x_2^2 + x_2x_1^2\left[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}\right], \\ x_2x_1\dot{x}_2 = x_1^2x_2 + x_1x_2^2\left[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}\right]. \end{cases}$$

Ввіднімемо ці два рівняння:

$$x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2^2 = R^2.$$

Зробимо заміну і продиференціюємо рівняння:

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{x_2}{x_1},$$

$$\frac{\dot{\Theta}}{\cos^2\Theta} = \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{x_1^2},$$

де $\dot{\Theta}$ — кутова швидкість.

$$\cos^2\Theta = \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2},$$

таким чином

$$\dot{\Theta} = \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{R^2}.$$

Отже $\dot{\Theta} = 1$.

Зараз рівняння має вигляд у полярній системи координат, $R = 1$ — особлива траєкторія (окружність одиничного радіуса). Особлива траєкторія розділяється на дві частини: зовнішня — $\dot{R} < 0$, внутрішня — $\dot{R} > 0$ ($R < 1$). На зовнішній частині ми можемо спостерігати що фазові траєкторії скручуються зовні, на внутрішній ці траєкторії розкручуються від точки (0, 0) до одиничної окружності. Тобто усі траєкторії будуть накручуватись на окружність (R = 1). Далі буде побудована система з стійким граничним циклом.

Система з стійким граничним циклом зображена на рис. 1.1

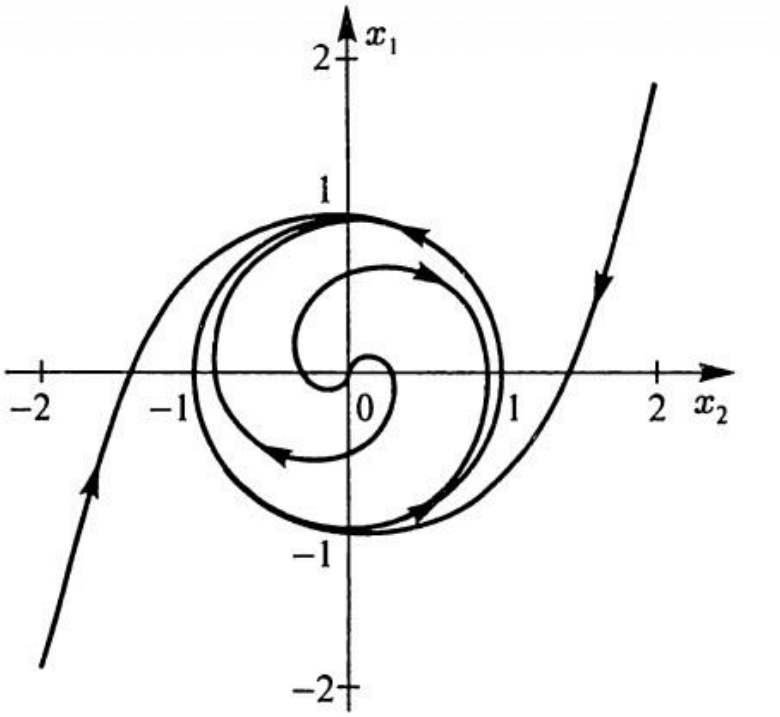


Рис. 1.1. Система з стійким граничним циклом

Приклад 2. *Нестійкий граничний цикл.*

Дана система у полярному вигляді (1.2):

$$\begin{cases} \dot{r} = \mathrm{r}(\mathrm{r}-1)(\mathrm{r}-2), \\ \dot{\Theta} = 1. \end{cases}$$

З першого рівняння зрозуміло, що існує дві особливі траєкторії: $r = 1$ та $r = 2$ при $\dot{r} = 0$. На додачу, у похідної є різні знаки:

$$\begin{cases} \dot{r} > 0, & \text{якщо } r > 2, \\ \dot{r} < 0, & \text{якщо } 1 < r < 2, \\ \dot{r} > 0, & \text{якщо } r < 1. \end{cases}$$

Це говорить нам про те, що система має два граничних циклу: зовнішній — нестійкий граничний цикл, тобто фазові траєкторії як би відкручуються від окружності $(r = 2)$ на нескінченність, або закручуються на окружність меншого радіусу $(r = 1)$, внутрішній — стійкий граничний цикл, фазові траєкторії із точки (0,0) відкручуються на окружність радіусом $(r = 1)$, а фазові траєкторії зовнішній окружності накручуються на туж саму окружність.

Система з нестійким граничним циклом зображена на рис. 1.2

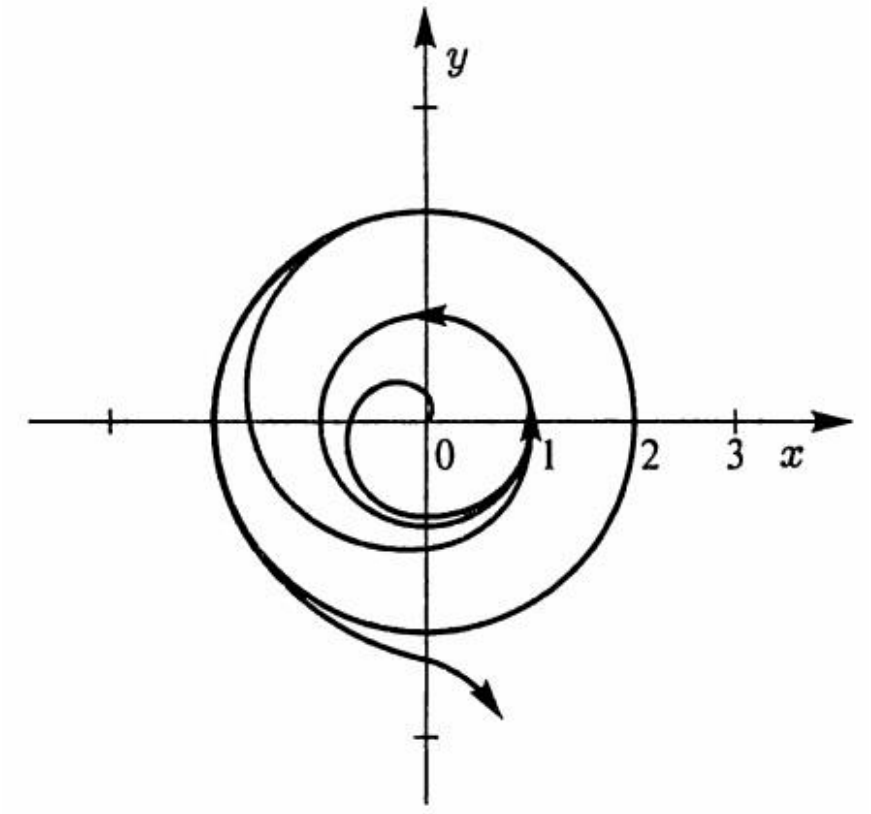


Рис. 1.2. Система з нестійким граничним циклом

Приклад 3. *Напів-стійкий граничний цикл.*

Дана система у полярному вигляді (1.3):

$$\begin{cases} \dot{r} = \mathrm{r}(\mathrm{r}-1)^2, \\ \dot{\Theta} = 1. \end{cases}$$

Зрозуміло, що існує особлива траєкторія: $r = 1$ при $\dot{r} = 0$. Крім цього, у похідної є різні знаки:

$$\begin{cases} \dot{r} > 0, & \text{якщо } r > 1, \\ \dot{r} > 0, & \text{якщо } 0 < r < 1. \end{cases}$$

Тоді система має граничний цикл на якому внутрішні траєкторії відкручуються від центру на окружність ($r = 1$), та зовнішні траєкторії також відкручуються від окружності ($r = 1$) на нескінченність.

Система з напів-стійким граничним циклом зображена на рис. 1.3

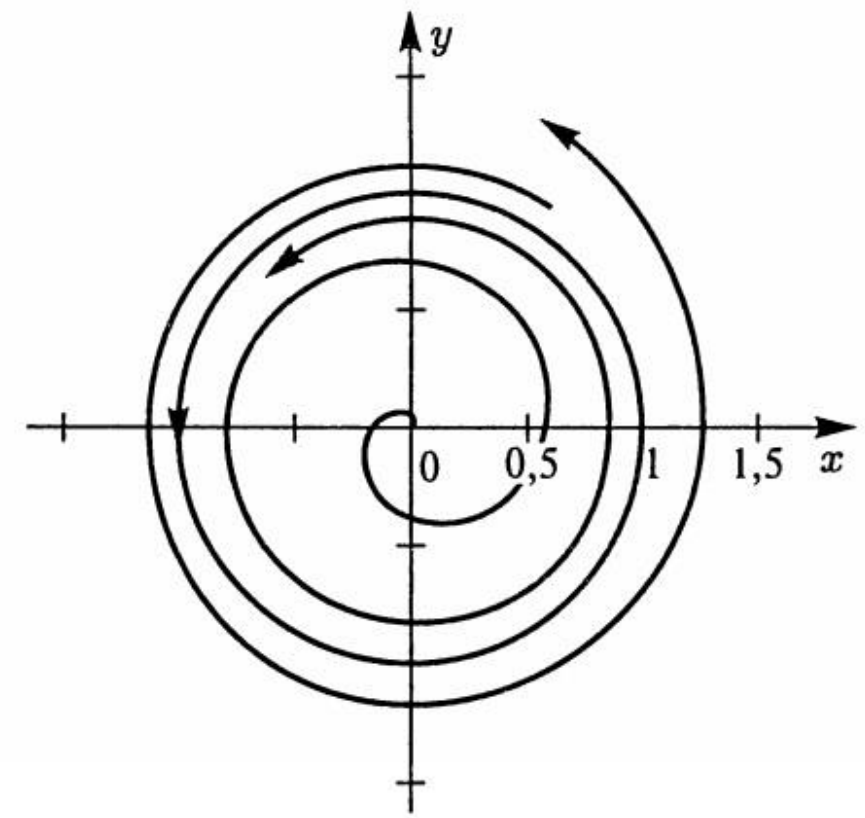


Рис. 1.3. Система з напів-стійким граничним циклом

1.2. Типологія граничних циклів

Як вже згадувалось у багатьох моделях з’являються незгасаючі процеси, коливання, властивості яких не залежать від начальних умов або не впливають на тип цих коливань. Автоколиванням на фазовій площині є граничний цикл — ізольована особлива траєкторія, або як ми називали це раніше, замкнута траєкторія на яку намотуються фазові траєкторії. Це говорить о том, що граничний цикл являється аттрактором. Не слід плутати його з фокусом. Фокус — ізольована особлива точка.

З прикладів стало зрозуміло, що існують стійкі, нестійкі та напів-стійкі граничні цикли. Граничний цикл називається стійким, коли з деякої трубчатої околиці фазові траєкторії прагнуть до циклу при $t \to +\infty$ (див. Рис. 1.1), як би намотуються на нього с обох сторін. Нестійким граничний цикл називається, коли з деякої фазової площині фазові траєкторії прагнуть до граничного циклу

при $t \to -\infty$ (див. Рис. 1.2), як би змотуються з нього. Напів-стійкими граничними циклами називаються такі цикли, що включають в собі стійкі та нестійкі фазові портрети, тобто з одного боку усі траєкторії змотуються ($t \to -\infty$), а с другого боку намотуються ($t \to +\infty$) на предельний цикл (див. Рис. 1.3).

1.3. Теорія автоколивань

Автоколивання були введені О.О. Андроновим у 1928 р. Він пояснив автоколивання так: «Автоколивання - це незгасаючі коливання в нелінійної дисипативної системі, вид і властивості яких визначаються самою системою і не залежать від початкових умов (принаймні, в кінцевих межах), та підтримуються за рахунок зовнішнього джерела енергії, тобто неперіодичного зовнішнього впливу».

Автоколивальні системи дуже просто можна представити у вигляді схеми яка складається з джерела енергії, осцилятора і нелінійного елемента. (див. Рис. 1.4).

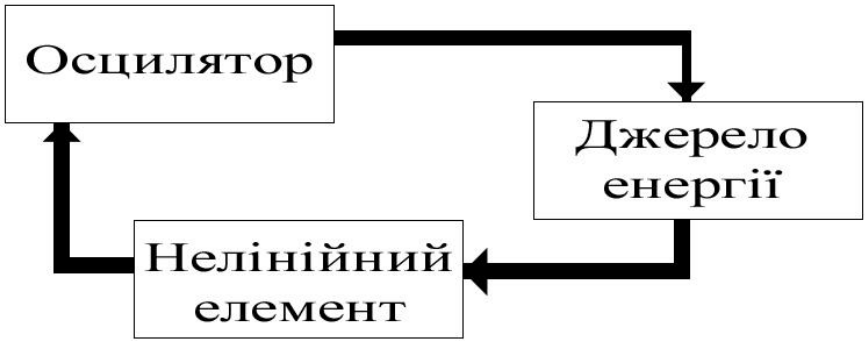


Рис. 1.4. Простий приклад автоколивальної системи

Тепер зрозуміло чому автоколивання відрізняються від вимушених коливань. На цій схемі видно, що при автоколиваннях, завдяки нелінійному елементу, осцилятор регулює поступ енергії від джерела та узгоджують роботу осцилятора. Коли в вимушених коливаннях джерело енергії самостійно

задає частоту, фазу, форму та амплітуду тим, що визначає коли і скільки енергії подавати. Такі системи зустрічаються повсюдно.

1.4. Якісний аналіз автоколивань

Автоколивальні системи зустрічаються повсюдно, тому я пропаную розглянути декілька прикладів систем які здійснюють автоколивання навколо нас.

Приклад. *Годинник.*

Загальновідомо, що механічні годинники з маятником і гирями мають пружину, яку закручують щоб привести годинник у стан роботи. Саме пружина та анкерний механізм забезпечує працю годиннику, ці механізми грубо кажучи штовхають маятник годинника, подаваючи порції енергії від закрученої пружини при опусканні гирь на ланцюжку.

Зрозуміти принцип праці годиннику з боку автоколивальних систем можна завдяки цієї схеми (див. Рис. 1.5):

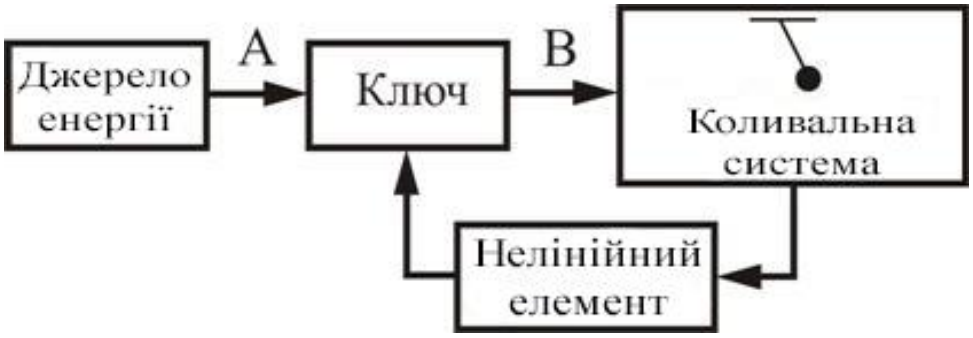


Рис. 1.5. Схема автоколивальної системи годинника

Канал АВ є тим самим «штовхаючим» моментом, тобто ключ управляє усією системою. У годиннику роль ключа виповняє пристрій — анкер.

1.5. Числовий аналіз автоколивань. Рівняння Ван-дер-Поля

Приклад. *Ламповий генератор.*

На рис. 1.6 зображений ламповий генератор у виді схеми з контуром в цепі. Цей генератор є показовим, його можна навіть назвати автогенератором.

Завдяки тому, що у цепі є тріод T, то у контурі RLC не виникають затухаючі електромагнітні коливання, внаслідок індуктивного зв'язку між L та L'. Зв'язок обумовлений тим, що присутній коефіцієнт взаємної індукції M між цими котушками, та на сітку тріода подається змінна напруга, яка і регулює увесь струм через тріод тим самим забезпечуючи попадання енергії в коливальну систему (контур).

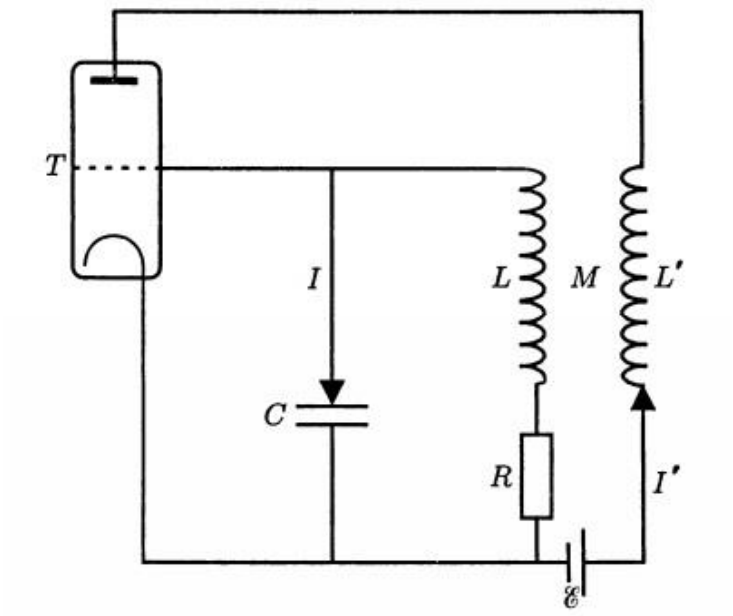


Рис. 1.6. Схема лампового генератора

Коливальний контур можна записати:

$$-U - IR = -L\frac{dI}{dt} - M\frac{I'}{dt},$$

де

$$I = -\dot{q} = -C\dot{U}, \qquad \dot{I} = -C\ddot{U}, \qquad \frac{dI'}{dt} = \frac{dI'}{dt}\frac{dU}{dt} = S(U)\dot{U}.$$

У рівнянні ми бачимо величину $S(U)$ — сіткова характеристика тріода, яка є зворотною величиною диференціального опору тріода. Тоді получаємо:

$$LC\ddot{U} - MS(U)\dot{U} + RC\dot{U} + U = 0\,.$$

Це рівняння дуже схоже на затухаючі коливання у конторі, та система буде мати негативний опір, коливання наростатимуть, якщо $RC - MS < 0$. Система є нелінійною, так як S — функція напруги. Завдяки цьому може статися стабілізація на певної амплітуді коливань. Вважаємо, що: $S(U) \approx S_0 - S_2U^2$, $\propto$ $\alpha = \frac{(MS_0 - RC)}{LC}, \beta = \frac{2MS_2}{RC - MS_0}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Отримаємо:

$$\ddot{U} - \alpha(1 - \beta x^2)\dot{U} + \omega_0^2 U = 0.$$

Це рівняння можна переписати у безрозмірному вигляді, замінюючи: $\tau = \omega_0 t$, $x = \sqrt{\beta}U$, $\mu = \alpha\omega_0$. Отримаємо:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 - \text{рівняння Ван-дер-Поля.}$$

При різних значеннях μ у системи виникають різні автоколивання:

$$\begin{cases} \text{при } \mu \ll 1 - \text{квазігармонічні автоколивання (див. Рис. 1.7 а)}, \\ \text{при } \mu \approx 1 - \text{несінусоїдальні автоколивання(див. Рис. 1.7 б)}, \\ \text{при } \mu \gg 1 - \text{релаксаційні автоколивання(див. Рис. 1.7 в)}. \end{cases}$$

В цій системі режим збудження м’який. Такий режим називають коли фазовий портрет системи (див. Рис. 1.8) завжди закручується до граничного циклу, який є стаціонарним режимом цієї системи навіть при нульових значеннях начальних умов.

Також існують системи с режимом жорсткого збудження. Вони виникають тільки в результаті товчка.

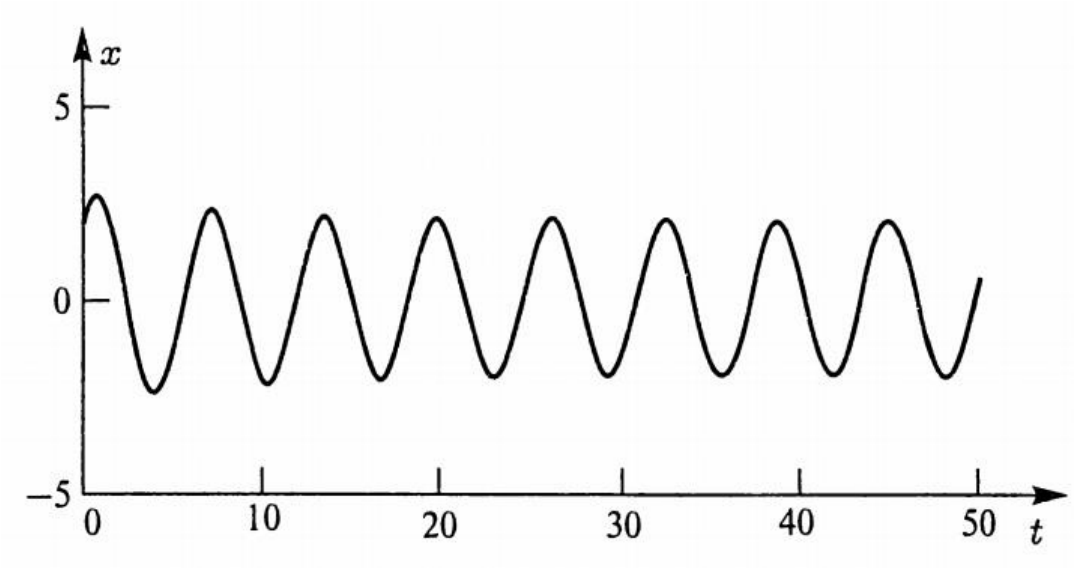


Рис. 1.7а Квазігармонічні коливання

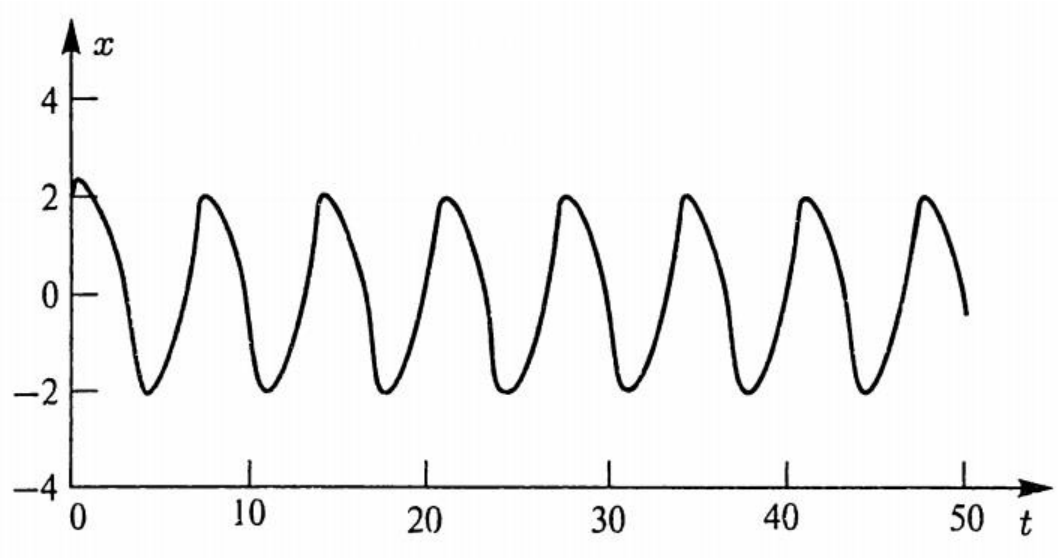


Рис. 1.7б Несінусоїдальні коливання

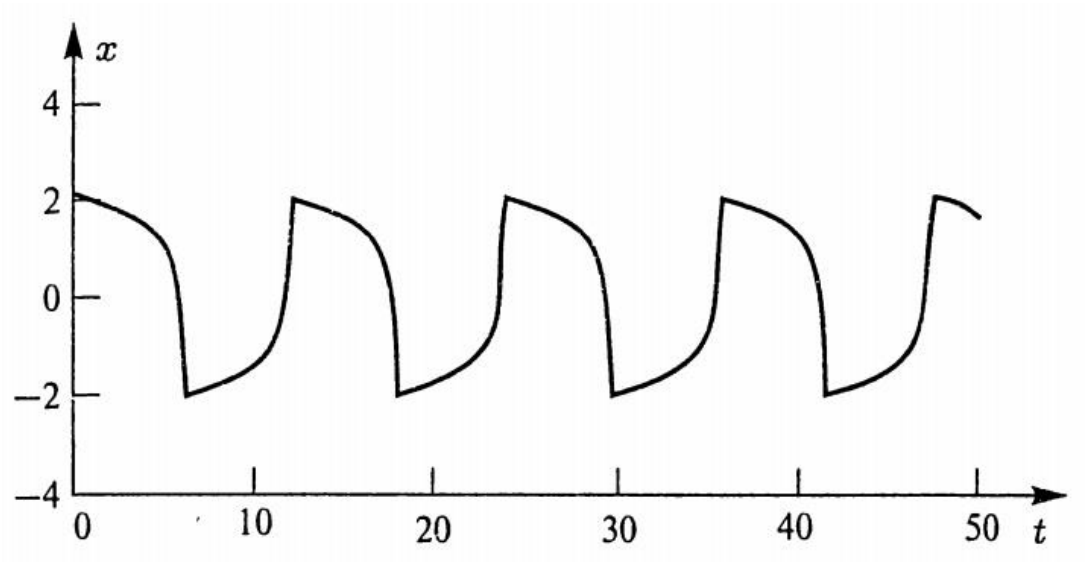


Рис. 1.7в Релаксаційні коливання

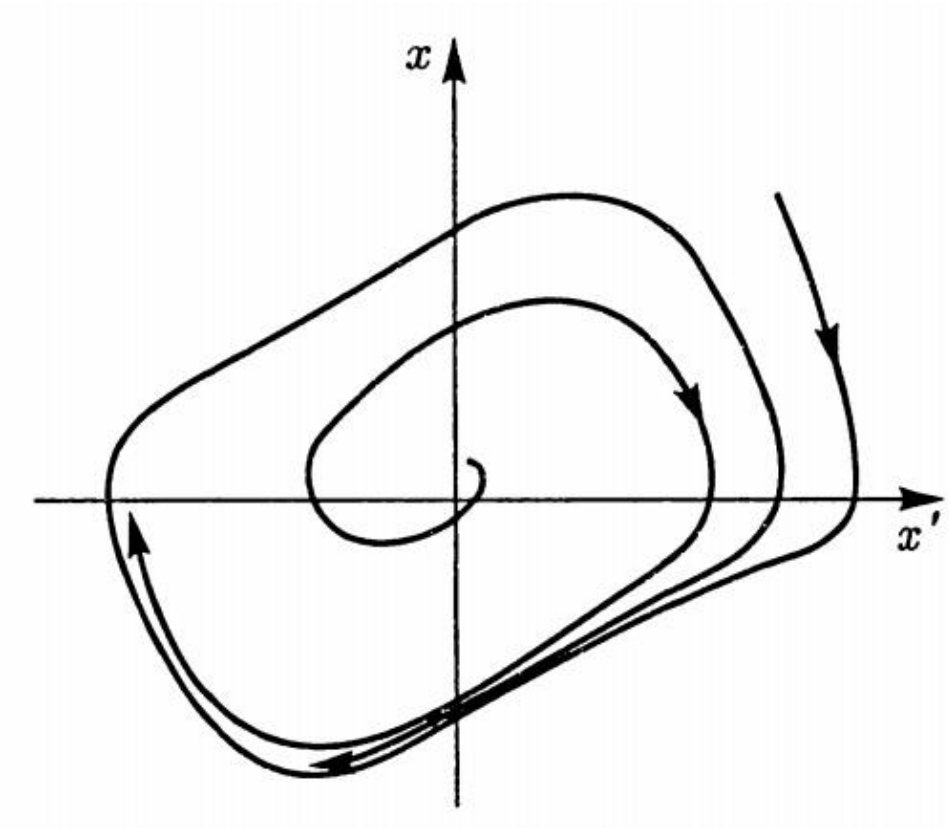


Рис. 1.8 Фазовий портрет автоколивальної системи

2. ДОСЛІДЖЕННЯ ОСЦИЛЯТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

2.1. Види рівняння Ван-дер-Поля

У минулому розділі було показано одну форму рівняння Ван-дер-Поля, але його можна записати у різних формах, які залежать від параметрів системи та динамічних перемінних. Зазвичай це рівняння має таки види:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0, \tag{2.1}$$

або

$$\ddot{y} - \varepsilon(1 - y^2)\dot{y} + y = 0, \tag{2.2}$$

або

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \alpha(1 - \beta u^2)\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0. \tag{2.3}$$

де $x,\ y,\ u -$ динамічні перемінні; $\alpha,\ \beta,\ \varepsilon -$ параметрі, які управляють збудженням автоколивань, називаються параметрами збудження; $\omega_0 -$ частота генератора. Ці форми рівняння одинакові по своєму значенню, але мають різний вид. Щоб получити рівняння (2.2), треба перейти до безрозмірного часу $\tau = \omega_0 t,$ та получимо рівняння, у якому $y = \sqrt{\beta}u\ ,\ \dot{y} = \frac{dy}{d\tau},\ \varepsilon = \frac{\alpha}{\omega_0}$. У такому осциляторі ω_0 дорівнює одиниці. Рівняння (2.1) зв'язано з такою заміною у рівнянні (2.2) $x = \sqrt{\varepsilon}y$.

Рівняння Ван-дер-Поля описує значення, характери, контури дисипації найбільш складні коливальні системи. У фазових координатах коливання рівняння мають інший вид:

$$\dot{x}_1 \approx x_2, \dot{x}_2 = (\varepsilon - x^2)(1 - bx_1^2)x_2 - x_{1,} \tag{2.4}$$

так що

$$(\varepsilon - x_1^2)(1 - bx_1^2) \not\equiv 0 \tag{2.5}$$

Любі дослідження проводяться тільки числовими методами, рівняння виду (2.4) не вирішуються аналітично. У кожному випадку $(\varepsilon > 0)$ це рівняння (2.4) має одне рішення, яке буде мати вид граничного циклу.

Щоб з'ясувати які точки рівноваги, який характер стійкості виникають у автоколивальній системі візьмемо рівняння (2.1)

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0$$

Якщо ми знаємо умови виникання цієї системи, нам потрібно дізнатися також у неї існують стани рівноваги, та як змінюється характер стійкості системи при різних параметрів. Напишемо наше рівняння у виді системи першого порядку:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} = f_2(x, y, \varepsilon), \end{cases} \tag{2.6}$$

де

$$\begin{cases} f_1(x, y, \varepsilon) = y, \\ f_2(x, y, \varepsilon) = (\varepsilon - x^2)y - x. \end{cases}$$

Ця система має розмірність фазового простору яка дорівнює двом, тому що є дві змінні x та y. Прирівняємо ці функції к нулю, щоб получити систему у стані рівноваги:

$$\begin{cases} y = 0, \\ (\varepsilon - x^2)y - x = 0. \end{cases}$$

З цієї системи видно існування однієї особливої точки, яка розташована у началу координат $x_0 = 0, y_0 = 0$. Щоб визначення стійкості рівноваги треба побудувати матрицю Якобі (або лінеаризації) системи (2.6). Получимо:

$$\widehat{\mathrm{A}}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Тепер можна визначити власні значення матриці (2.7) із характеристичного рівняння. Визначимо стійкість рівноваги осцилятора Ван-дер-Поля:

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 0-s & 1 \\ -1 & \varepsilon - s \end{bmatrix} = 0$$

$$s^2 - \varepsilon s + 1 = 0.$$

$$s_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - 1}$$

Получили два власних значення системи. В залежності від $\varepsilon -$ параметр збудженості, можна прослідити за стійкістю стану рівноваги, коли $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, нашого осцилятора Ван-дер-Поля.

1. Якщо $\varepsilon < -2$, власні значення є від'ємними дійсними числами. Це говорить о том, що стан рівноваги – стійкий вузол. (Рис. 2.1)

2. Якщо $-2 < \varepsilon < 0$, власні значення є комплексно-спряжені числа та $\mathrm{Re}[s_{1,2}] < 0$. Це говорить о том, що стан рівноваги – стійкий фокус. (Рис. 2.1)

3. Якщо $0 < \varepsilon < 2$, , власні значення є комплексно-спряжені числа та $\mathrm{Re}[s_{1,2}] > 0$. Це говорить о том, що стан рівноваги – нестійкий фокус. (Рис. 2.1)

4. Якщо $\varepsilon > 2$, , власні значення є додатні дійсні числа. Це говорить о том, що стан рівноваги – нестійкий вузол. (Рис. 2.1)

Також у системі є дуже цікавий випадок, коли $\varepsilon = 0 -$ біфуркаційне значення параметру збудження, так як власні значення (комплексно-спряжені) у стані рівноваги стають уявними, що є біфуркацією Андронова-Хопфа.

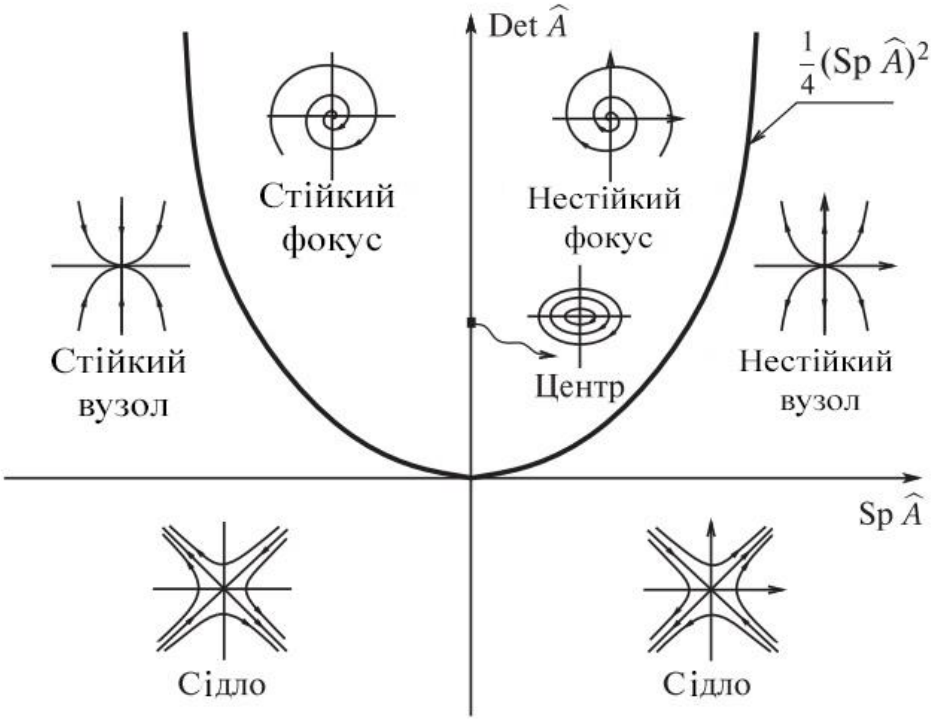


Рис. 2.1 Стани рівноваги на площині

2.2. Квазігармонічні автоколивання. Рівняння амплітуди та фази

Існує декілька методів знаходження квазігармонічного рішення рівняння осцилятора Ван-дер-Поля. Для цього існує метод усереднення Ван-дер-Поля, який можна розглянути на прикладі рівняння форми (2.1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\varepsilon - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

Якщо при $\varepsilon \to +0-$ будемо вважати, що рішення близькі к гармонічним коливанням. Тепер напишемо гармонічну функції з параметрами які дуже повільно міняються:

$$x(t) = Re[a(t)\exp(jt)] = \frac{1}{2}[a\exp(jt) + a^*\exp(-jt)], \qquad (2.8)$$

де $a(t)-$ комплексна амплітуда $Re[\ldots]-$, дійсна частина комплексної величини, a^*- комплексно-спряжена величина. Функція $a(t)$ повинна

задовольняти умовам, але так як комплексна функція недостатньо визначена, треба ввести нові умови.

$$\frac{da}{dt}\exp(jt) + \frac{da^*}{dt}\exp(-jt) = 0. \tag{2.9}$$

Знайдемо першу та другу похідну рівняння Ван-дер-Поля з підставленим (2.8), та з урахуванням умови (2.9):

$$j\frac{da}{dt}\exp(jt) = \left[\varepsilon - \frac{a^2\exp(2jt) + 2|a|^2 + (a^*)^2\exp(-2jt)}{4}\right] \times \frac{ja\exp(jt) - ja^*\exp(-jt)}{2}.$$

Перетворимо обидві частини рівняння розкривши дужки і розділивши на $j\exp(jt)$:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon a - \frac{1}{8}|a|^2 a - \frac{1}{2}\varepsilon a^*\exp(-2jt) - \frac{1}{8}a^3\exp(2jt) + \frac{1}{4}|a|^2 a^*\exp(-2jt) - \\ - \frac{1}{8}|a|^2 a^*\exp(-2jt) + \frac{1}{8}(a^*)^3\exp(-4jt). \tag{2.10}$$

Тоді вважаємо: $a(t) -$ функція часу яка дуже повільно змінюється, та нею можна знехтувати, $\frac{da}{dt} -$ постійна. Помножаємо рівняння (2.10) на $\frac{1}{2\pi}$, та інтегруємо по часу від 0 до 2π. Тоді:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon a - \frac{1}{8}|a|^2 a. \tag{2.11}$$

Отриманий вираз (2.11) є рівнянням Ван-дер-Поля для комплексної амплітуди, або його ще називають «укороченим» рівнянням. Представимо (2.11) у полярних координатах:

$$a(t) = \rho(t)\exp\big(j\varphi(t)\big),$$

де $\rho(t) -$ дійсна амплітуда, $\varphi(t) -$ дійсна фаза коливань. Тоді із рівняння (2.11) можна зробити рівняння для амплітуди та фази:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3, \\ \frac{d\varphi}{dt} = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Прирівнюємо похідні до нулю та отримуємо стаціонарні стани системи:

$$\begin{cases} \rho^0(t) = 0, \\ \varphi^0(t) = \varphi_0, \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} \rho^0(t) = 2\sqrt{\varepsilon}, \\ \varphi^0(t) = \varphi_{0.} \end{cases}$$

Перший випадок є станом рівноваги в осциляторі Ван-дер-Поля (2.2), тобто не має ніяких коливань. Другий випадок є станом квазігармонічних коливань в осциляторі, там має вид:

$$x(t) = 2\sqrt{\varepsilon}\cos(t + \varphi_0), \tag{2.13}$$

де $\varphi_0 -$ первісне умова фази коливань. Також рівняння (2.12) можна розглядати окремо, так як вони незалежні один від одного. Завдяки цьому розглянемо стійкість станів:

$$s_p = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3}{8}(\rho^0)^2.$$

Бачимо, що відхилення від стаціонарного значення змінюється за експоненціальним законом. Для $\rho^0 = 2\sqrt{\varepsilon} \implies s_p = -\varepsilon$. Стаціонарне значення негативне при позитивних значеннях ε, тобто будь який ненульовий стан для амплітуди буде стійкий (не збільшується та не зменшується при будь якому збудженню фази). Таке рішення для фази називається нейтрально стійким.

Якісний аналіз «укорочених» рівнянь показав, що після переходу ε до позитивних значень з’являються нейтрально стійкі коливання (2.13), тобто біфуркація Андронова-Хопфа є м’якою.

2.3. Жорстке збудження автоколивань в автогенераторі

Як і у генератора з м’яким збудженням, треба: дослідити стійкість стану рівноваги, отримати укорочені рівняння та можна провести дослідження на біфуркаційні переходи і побудувати діаграми. Для початку візьмемо за основу рівняння (2.1) та знайдемо точки рівноваги і характер їх стійкості:

$$\ddot{x} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0.$$

Перетворимо у вигляді системи рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, \varepsilon_0, \varepsilon_1), \\ \dot{y} = f_2(x, y, \varepsilon_0, \varepsilon_1), \end{cases}$$

де

$$\begin{cases} f_1(x, y, \varepsilon_0, \varepsilon_1) = y, \\ f_2(x, y, \varepsilon_0, \varepsilon_1) = (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 - x^4)y + x. \end{cases}$$

Виразимо точки рівноваги:

$$\begin{cases} y = 0, \\ (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 - x^4)y + x = 0. \end{cases}$$

На фазовій площині існує лише одна точка (0; 0). Щоб визначити стійкості рівноваги треба побудувати матрицю Якобі (або лінеаризації):

$$\widehat{\mathrm{A}}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon_0 \end{bmatrix}.$$

Із характеристичного рівняння знайдемо власні значення матриці (які у свою чергу визначають стійкість генератора):

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 0 - s & 1 \\ -1 & \varepsilon_0 - s \end{bmatrix} = 0,$$

$$s^2 - \varepsilon_0 s + 1 = 0.$$

$$s_{1,2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \pm \sqrt{\frac{{\varepsilon_0}^2}{4} - 1}.$$

Ми можемо побачити, що як і в осциляторі Ван-дер-Поля, у генераторі с жорстким збудженням існує лише один стан рівноваги в координатах (0; 0), а також повністю збігається характер, та поведінка цієї точки. Усе залежить тільки від одного параметра ε_0. Це говорить о том, що:

1. Якщо $\varepsilon_0 < -2$, власні значення є від'ємними дійсними числами. Стан рівноваги – стійкий вузол.

2. Якщо $-2 < \varepsilon_0 < 0$, власні значення є комплексно-спряжені числа та $\mathrm{Re}[\mathrm{s}_{1,2}] < 0$. Стан рівноваги – стійкий фокус.

3. Якщо $0 < \varepsilon_0 < 2$, власні значення є комплексно-спряжені числа та $\mathrm{Re}[\mathrm{s}_{1,2}] > 0$. Стан рівноваги – нестійкий фокус.

4. Якщо $\varepsilon_0 > 2$, стан рівноваги – нестійкий вузол.

Та авжеж, коли $\varepsilon = 0 -$ біфуркаційне значення параметру збудження, так як власні значення (комплексно-спряжені) у стані рівноваги стають уявними, це говорить о тому, що виконується біфуркація Андронова-Хопфа. Далі ми получимо «укорочені» рівняння для фази та амплітуди, і розглянемо генератор в квазігармонічному наближенні.

Якщо вважати, що ε_0 та $\varepsilon_1 -$ майже рівні нулю, та система має вид квазігармоничного генератора, то «укорочене» рівняння для амплітуди і фази (повільно мінливі в часі) можна шукати у виді гармонічної функції:

$$x(t) = Re[a(t)\exp(jt)] = \frac{1}{2}[a\exp(jt) + a^*\exp(-jt)]. \qquad (2.14)$$

Як і минулий раз, $a(t) -$ комплексна амплітуда $Re[\dots] -$, дійсна частина комплексної величини, $a^* -$ комплексно-спряжена величина. Функція $a(t)$ повинна задовольняти умовам, але так як комплексна функція недостатньо визначена, вводимо нові умови.

$$\dot{a}\exp(jt) + \dot{a}^*\exp(-jt) = 0.$$

Знайдемо першу та другу похідну рівняння Ван-дер-Поля (2.1) та підставимо у (2.14), з урахуванням нової умови:

$$j\dot{a}\exp(jt) = \left[\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \frac{(a\exp(jt) + a^*\exp(-jt))^2}{4} - \frac{(a\exp(jt) + a^*\exp(-jt))^4}{16}\right] \times \frac{1}{2}[ja\exp(jt) - ja^*\exp(-jt)].$$

Вважаємо, що $a(t)$ та $a(t) -$ повільно мінливі та майже постійні функції. Отримане рівняння розділимо на $j\exp(jt)$, та зробимо усереднення за період. Отримуємо «укорочене» рівняння для амплітуди:

$$\dot{a} = \left[\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_1}{8}|a|^2 - \frac{1}{16}|a|^4\right]. \quad (2.15)$$

Представимо у полярних координатах:

$$a(t) = \rho(t)\exp\big(j\varphi(t)\big),$$

Тоді із рівняння (2.15) можна зробити рівняння для амплітуди та фази:

$$\begin{cases}\dot{\rho} = \left[\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_1}{8}\rho^2 - \frac{1}{16}\rho^4\right]\rho, \\ \dot{\varphi} = 0.\end{cases}$$

З отриманих рівнянь можна побачити, що рівняння для амплітуди та фази незалежні. Це говорить о том, що ми звели усе до вивчення амплітудного рівняння із завдання про періодичні рухи (стійкості, біфуркацій) в генераторі.

2.4. Біфуркаційна діаграма «жорсткого» генератора

Поставлена задача завжди зводиться к дослідженню біфуркацій, станів рівноваги, їх стійкості при різних значеннях параметрів. Для цього ми візьмемо рівняння для амплітуди:

$$\left[\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_1}{8}\rho^2-\frac{1}{16}\rho^4\right]\rho=0$$

Видно, що рівняння має три стани рівноваги:

$$\begin{cases}\rho_1=0,\\ \rho_2=\sqrt{\varepsilon_1+\sqrt{\varepsilon^2{}_1+8\varepsilon_0}},\\ \rho_3=\sqrt{\varepsilon_1-\sqrt{\varepsilon^2{}_1+8\varepsilon_0}}.\end{cases}$$

Можна зробити висновок, що для параметра ε_0 існує три інтервала:

1) Якщо $\varepsilon_0 < -(\frac{\varepsilon_1^2}{8})$, існує лише одна точка рівноваги ρ_1.
2) Якщо $-(\frac{\varepsilon_1^2}{8}) < \varepsilon_0 < 0$, тоді існує вже три точки рівноваги ρ_1, ρ_2, ρ_3.
3) Якщо $\varepsilon_0 > 0$, тоді існує лиш дві точки рівноваги ρ_1, ρ_2.

Знайдемо власні значення станів ρ_1, ρ_2, ρ_3 для отримання стійкості станів рівноваги

$$s_i=\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_1}{8}\rho^2-\frac{1}{16}\rho^4\right).$$

Зробимо заміну $\rho=\rho_i$:

$$s_i=\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{3\varepsilon_1}{8}(\rho_i)^2-\frac{5}{16}(\rho_i)^4,$$

де $i=1,2,3-$ номера станів рівноваги.

Для ρ_1- получимо, що $s_1=\frac{\varepsilon_0}{2}$. Це каже нам о тому, що при $\varepsilon_0<0$ точка буде стійкою, а при протилежних значеннях нестійким станом.

Для ρ_2- получимо, що:

$$s_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon^2{}_1 + 8\varepsilon_0}\left[\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon^2{}_1 + 8\varepsilon_0}\right].$$

Для початку позначимо, що ε_0 може приймати любі значення (позитивні і негативні значення), а ε_1 може приймати лише позитивні значення. Тепер дослідимо стійкість станів рівноваги ρ_2. Стани з'являються, якщо $\varepsilon_0 = -(\frac{\varepsilon_1^2}{8})$, тоді $s_2 = 0 -$ що э точкою біфуркації. Якщо $\varepsilon_0 > -\left(\frac{\varepsilon_1^2}{8}\right)$, тоді $s_2 < 0$, так як усі множники позитивні, тобто ρ_2 є стійким.

Для $\rho_3 -$ получимо, що:

$$s_3 = \frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon^2{}_1 + 8\varepsilon_0}\left[\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon^2{}_1 + 8\varepsilon_0}\right].$$

У цьому випадку $s_2 > 0$, тобто ρ_3 є нестійкою точкою, так як стан рівноваги існує лише при $-(\frac{\varepsilon_1^2}{8}) < \varepsilon_0 < 0$.

Після того як ми визначили стійкості станів рівноваги можна побудувати для генератора біфуркаційну діаграму с жорстким збудженням (див. Рис. 2.2)

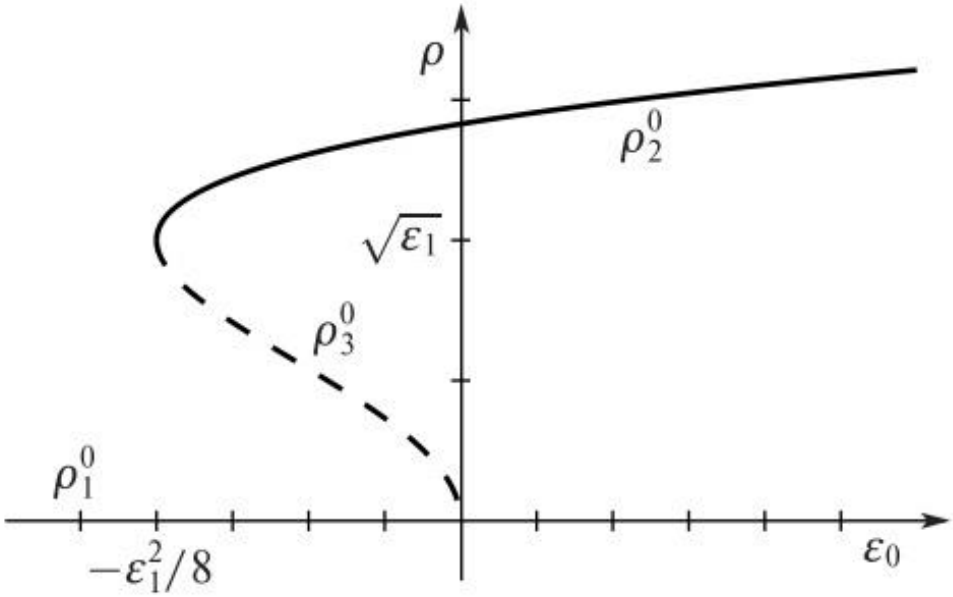


Рис. 2.2 Біфуркаційна діаграма «жорсткого» генератора

На осі абсцис відкладена динаміка параметру ε_0, на осі ординат – значення амплітуди $\rho(t)$. На діаграмі можна побачити, що на площині є два аттрактора (стійка точка і граничний цикл, теж стійкий), а їх граничним значенням є нестійкий граничний цикл.

У другому розділі ми провели якісне дослідження типових прикладів автоколивальних систем — генератора Ван-дер-Поля, та «жорсткого» генератора, получили «укорочені» рівняння для амплітуд та фаз, провели дослідження квазігармоніческіх наближень, побудували біфуркаційну діаграму.

3. ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ РІВНЯННЯ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

3.1. Опис програмного забезпечення SciLab

SciLab – пакет прикладного математичного забезпечення для аналізу, дослідження, що надає безкоштовне оточення для інженерних, технічних і наукових розрахунків. SciLab має багато математичних функцій написаних на різних мовах (Си, C++, і т.д.), та має можливість розширяти функціонал даного програмного забезпечення. Програма вміє працювати з різними структурами даних (списки, таблиці, поліноми, системами лінійних алгебраїчних рівнянь), в пакеті використовується інтерпретатор і мова високо рівня. Найголовніший плюс цієї програми в тому, що можна додавати в неї свої типи даних і операції за допомогою перевантаження. Програмне забезпечення має дуже зручний та зрозумілий для нового користувача інтерфейс (див. Рис. 3.1)

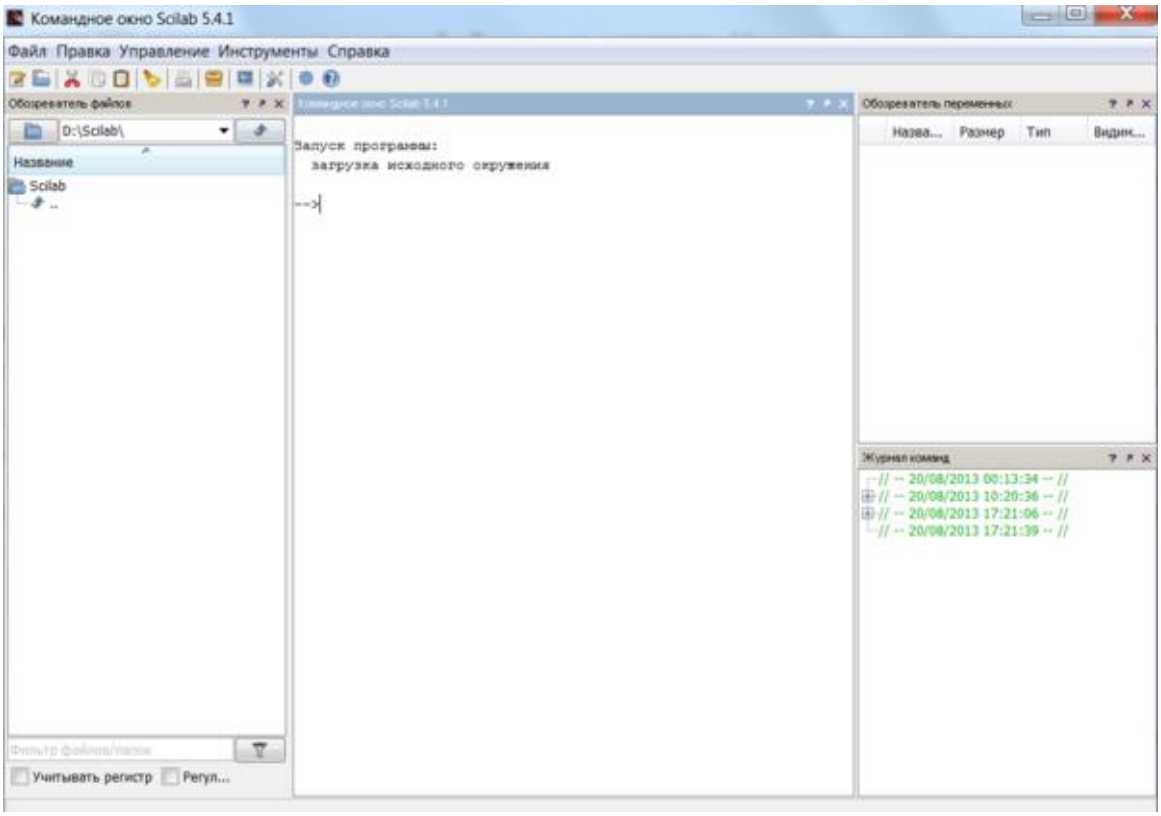


Рис. 3.1 Інтерфейс програмного забезпечення SciLab

Ключові особливості пакету SciLab:

1. Відкрите програмне забезпечення.
2. Безкоштовне.
3. Займає мало місця на твердому накопичувачі (розмір інсталятора версії 5.0 та вище усього 108 МегаБайт).
4. Не обов’язково мати графічний інтерфейс, можна запускати з командної строки.
5. Підтримує багато операційних систем
6. Сумісний з іншими популярними програмними рішеннями.

При за запуску SciLab відкривається командне вікно (див. Рис. 3.1), але є 2 варіанти, як можна працювати з програмою: командне вікно (рис. 3.2) і SciNotes — блокнот з підсвіткою коду (рис. 3.3)

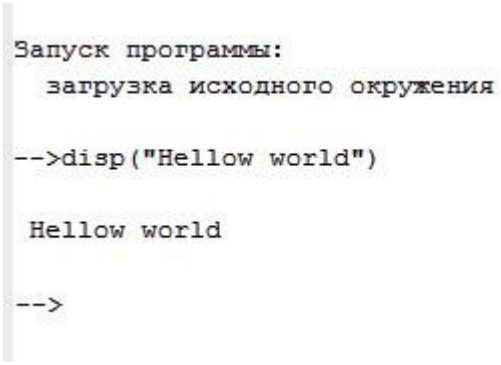


Рис. 3.2 Командне вікно SciLab

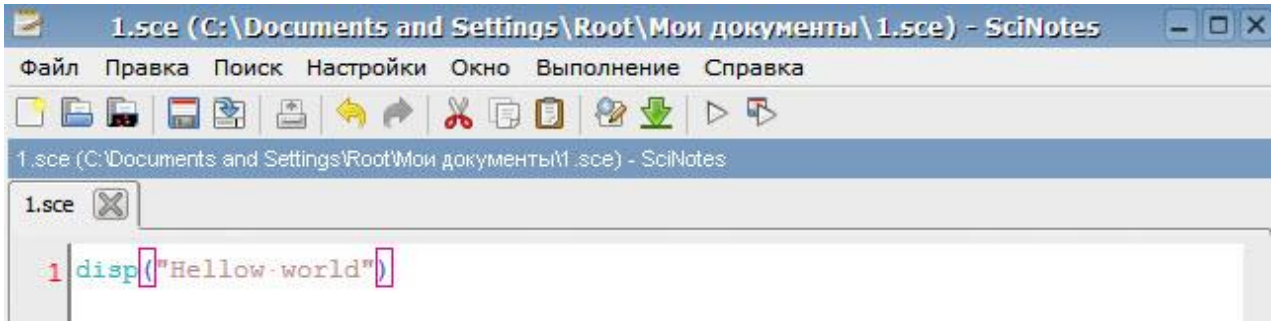


Рис. 3.3 Блокнот для коду SciNotes

Основні стандартні операції програмного забезпечення SciLab:

- Складання (+)
- Віднімання (-)
- Множення (*)
- Поділ справа, тобто $\frac{x}{y} = xy^{(-1)}$
- Поділ зліва, тобто $\frac{y}{x} = yx^{(-1)}$
- Зведення в ступінь (^ або **)
- Ермітове спряження, комплексне спряження та транспонування (’)

Інші доступні операції пакету SciLab: елементарні математичні функції (sin, cos, tg, ctg, sqrt та інші), типи данних (y = int8(x) 8-бітове число зі знаком [-2 ^ 7; (2 ^ 7) -1] = [-128; 127], y = uint8 (x) 8-бітове число без знака [0; (2 ^ 8) -1] = [0; 255], y = int16 (x) 16-бітове число зі знаком [-2 ^ 15; (2 ^ 15) -1] = [-32768; 32767], y = uint16 (x) 16-бітове число без знака [0; (2 ^ 16) -1] = [0; 65535], y = int32 (x) 32-бітове число зі знаком [-2 ^ 31; (2 ^ 31) -1] = [-2147483648; 2147483647], y = uint32 (x) 32-бітове число без знака [0; (2 ^ 32) -1] = [0; 4294967295]), перетворення числа до цілого, визначення типу числа, виклик функції користувача, робота з n-мірними масивами, а також різноманітні операції з масивами (розкладання Холесского, матриця-компаньйон, визначник матриці, обернена матриця, рішення систем лінійних рівнянь, метод найменших квадратів та багато іншого).

Найголовніше для цієї роботи те, що програмне забезпечення SciLab вміє обчислювати похідні, інтеграли та диференціальні рівняння. Також не мало важлива функція — побудова різноманітних графіків. (рис. 3.4 і 3.5)

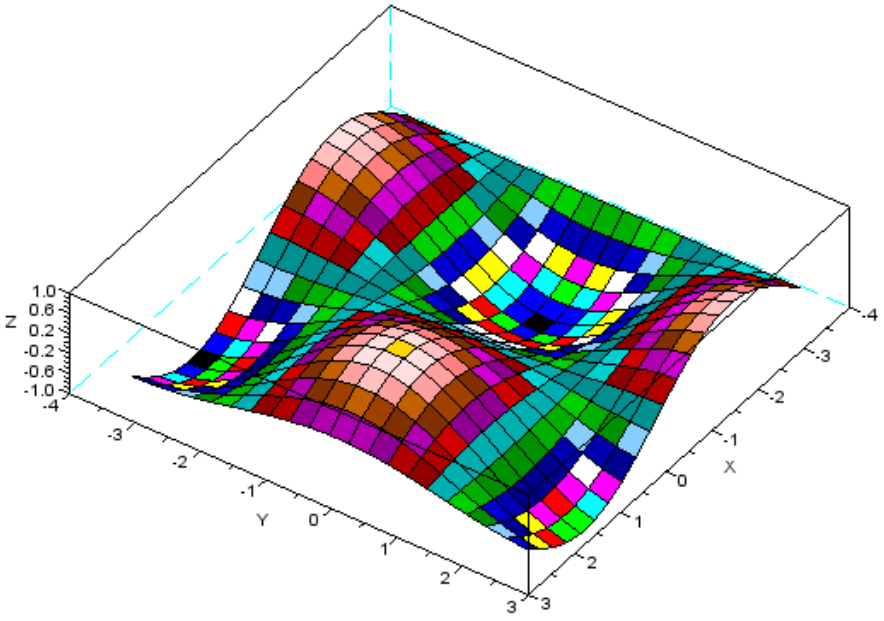


Рис. 3.4 Побудова тривимірних графіків в SciLab

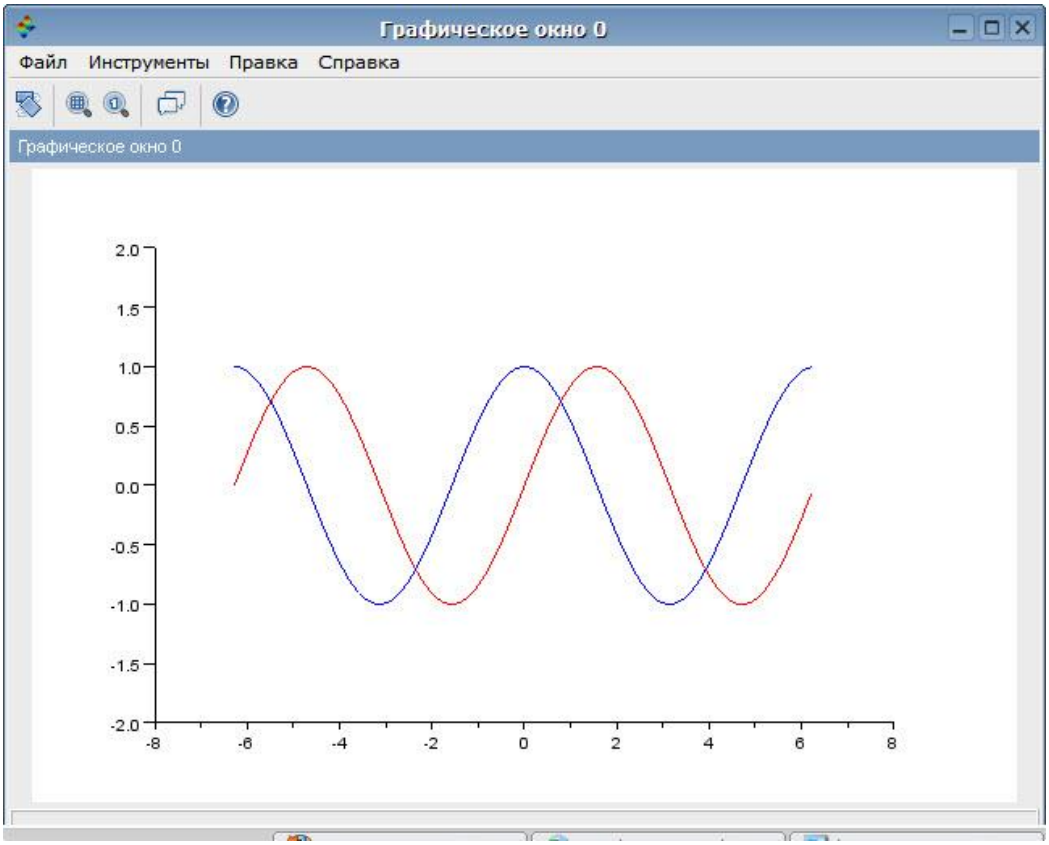


Рис. 3.5 Побудова двовимірних графіків в SciLab

3.2. Проектування та розробка осцилятора Ван-Дер-Поля в SciLab

Перш ніж почати написання програми для вивчення роботи осцилятора Ван-Дер-Поля, треба побудувати блок-схему або розробити алгоритм обчислення нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Для цього потрібно вибрати функцію яка зможе вирішувати систему рівнянь такого виду:

$$\frac{d}{dt}X(t) = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\mu,$$

де $X(t) -$ вектор-стовпець, $F(t, x_1, x_2, \dots, x_n) -$ функція-стовпець. Для рішення таких систем в системі SciLab реалізовані такі методи, які називаються «вирішувач диференціальних рівнянь» та розділяються на таки види:

- Вирішувач систем рівнянь явного виду: (ode45, ode23, ode133, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb).
- Вирішувач систем рівнянь неявного виду: (ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb).

Але пізніше ми побачимо, що вирішувач для диференціальних рівнянь осцилятора Ван-Дер-Поля (ode45) або сильно збільшує час рішення, або взагалі не може привести до рішення. Побудуємо блок-схему для спрощення розробки програми (див. Рис. 3.6)

Далі треба відзначити вхідні параметри, у нашому випадку це: $(x_0, y_0) -$ початкові координати коливань, $\mu -$ керуючий параметр, $t -$ час проходження. Залишилось привести рівняння осцилятора Ван-Дер-Поля у вигляді коду для системи SciLab та перепишемо у вигляді системи:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \mu(1 - x^2{}_1)x_2 - x_1. \end{cases}$$

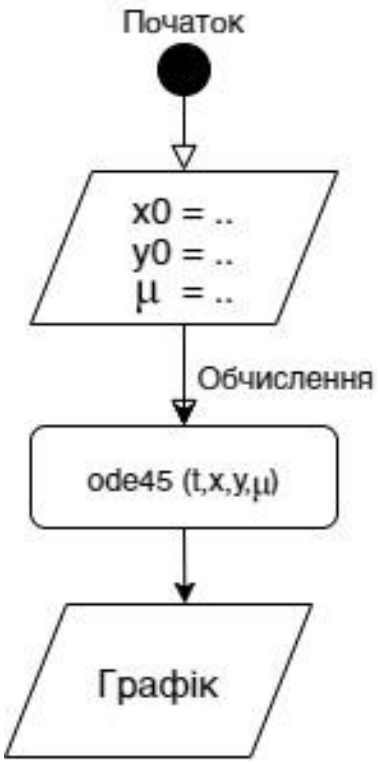


Рис. 3.6 Блок-схема осцилятора Ван-Дер-Поля

Напишемо у якості функції рішення диференціальних рівнянь:

```
function dxdt = diff_system(t,x,mu)
    {
        dxdt = [x(2); mu*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)];
    }
```

Задаємо потрібні параметри, та завдяки функцій побудови графіків виведемо зображення отриманих результатів на координатну площину:

```
t = [0, 100]; x = [0.5; 0]; mu = 0.0; %задаємо параметри
disp(['Fig0 t = [0, 100]; mu=', num2str(Mu)]); %виводимо шаги
[t,x] = ode45(@diff_system, t, x, [], mu); %обчислюємо диференціальні рівняння
plot(t,x(:,1),'b','LineWidth',2); %виводимо графік на екран
```

Та запускаємо.

3.3. Графічно-числовий аналіз осцилятора Ван-Дер-Поля

Розроблена в ході виконання бакалаврської роботи програма в системі SciLab дозволяє провести дослідження фазового портрету рівняння Ван-дер-Поля в залежності від параметрів. Може використовуватися для вивчення та дослідження поведінки автогенераторів.

Після запуску програми, користувач побачить головне вікно де необхідно ввести потрібні параметри для отримання графіків (Рис. 3.7)

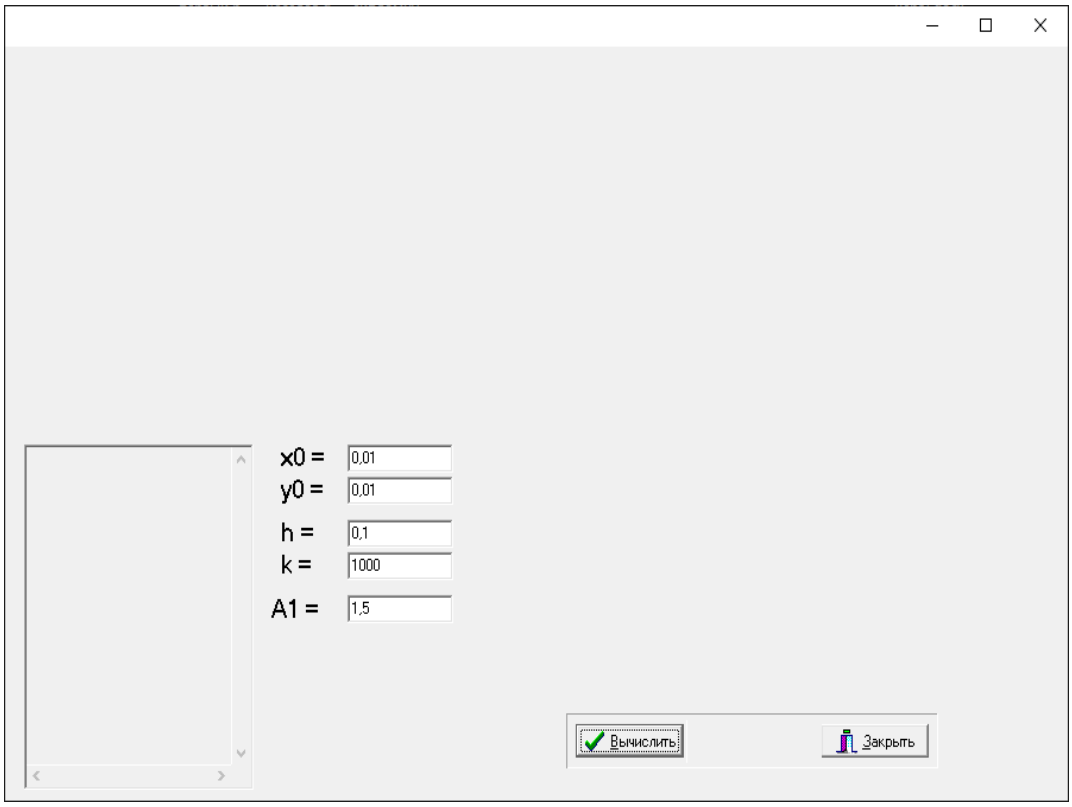


Рис. 3.7 Інтерфейс написаної програми

Після введення усіх параметрів на натискання кнопки «Обчислити», відобразяться графіки генераторів с заданими параметрами. Наприклад, графіки стійкого-вузла (Рис. 3.8), стійкого фокуса (Рис. 3.9), стійкого граничного циклу (Рис. 3.10), нестійкого фокусу (Рис. 3.11), нестійкого граничного циклу (Рис. 3.12).

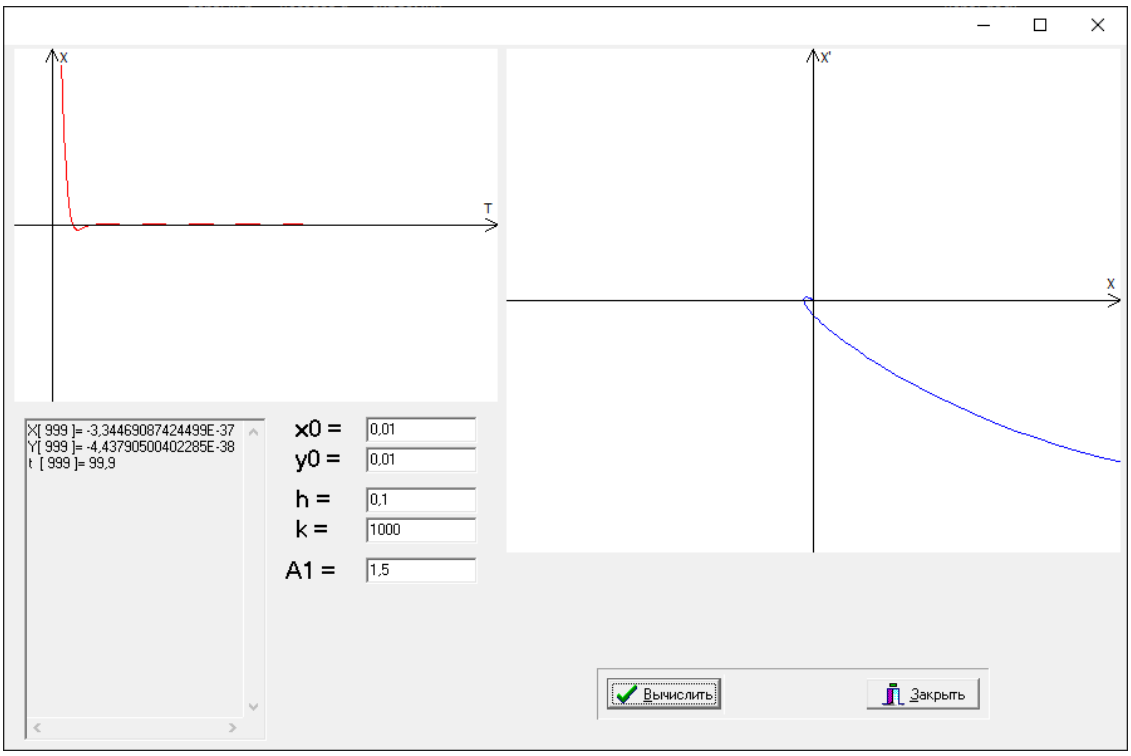


Рис. 3.8 Графік стійкого-вузла

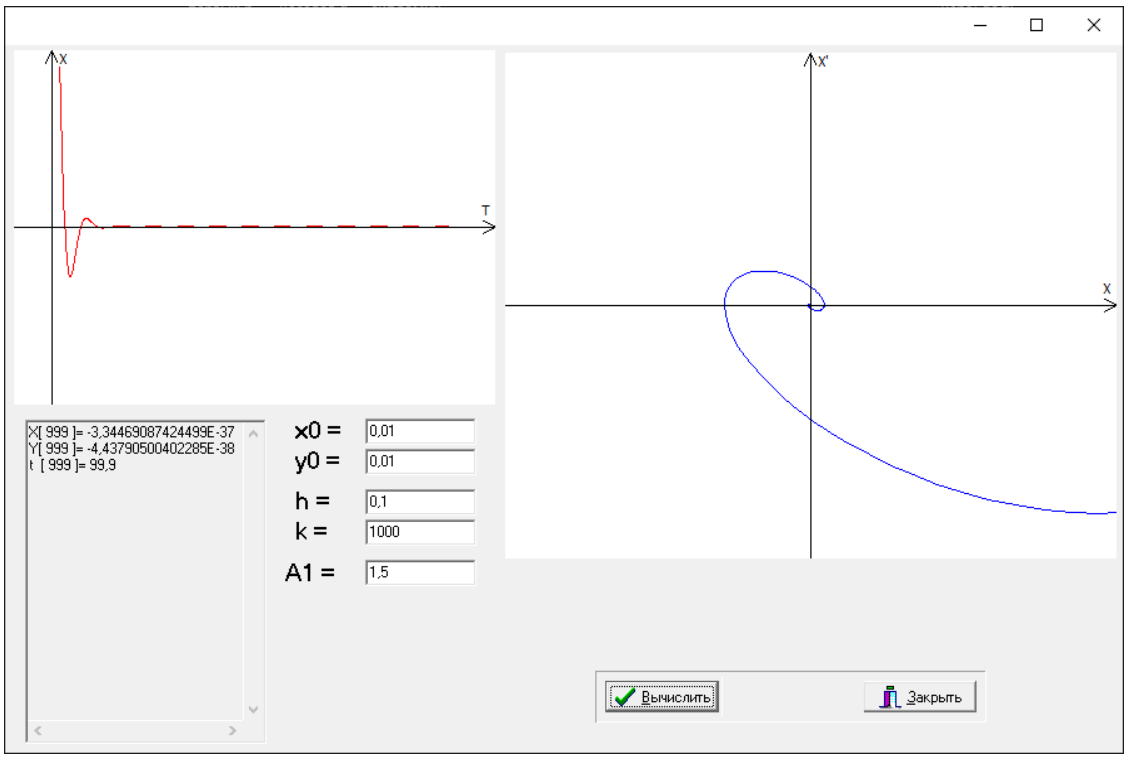


Рис. 3.9 Графік стійкого фокуса

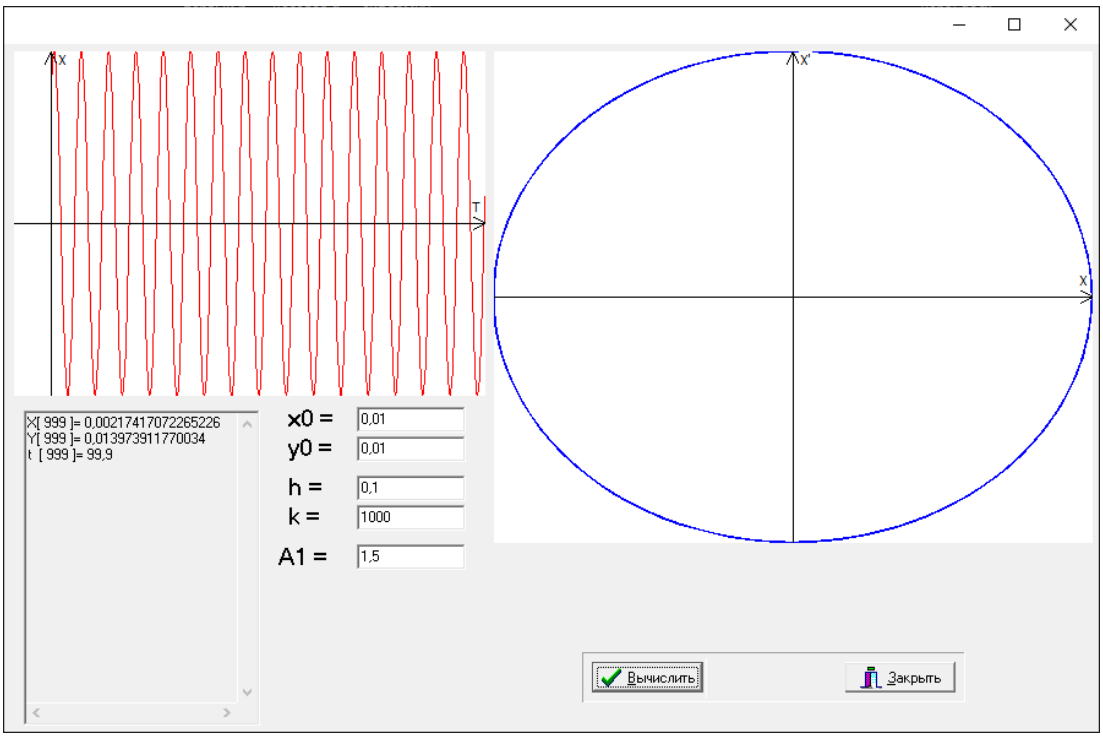


Рис. 3.9 Графік стійкого граничного циклу

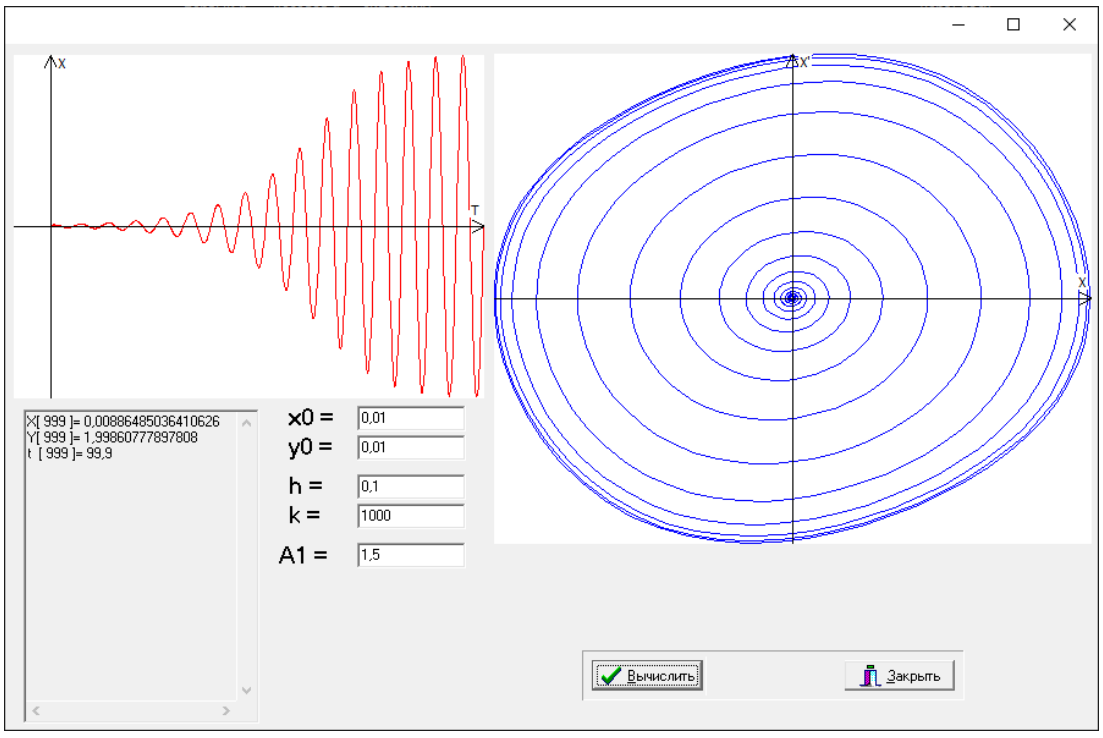


Рис. 3.9 Графік нестійкого фокусу

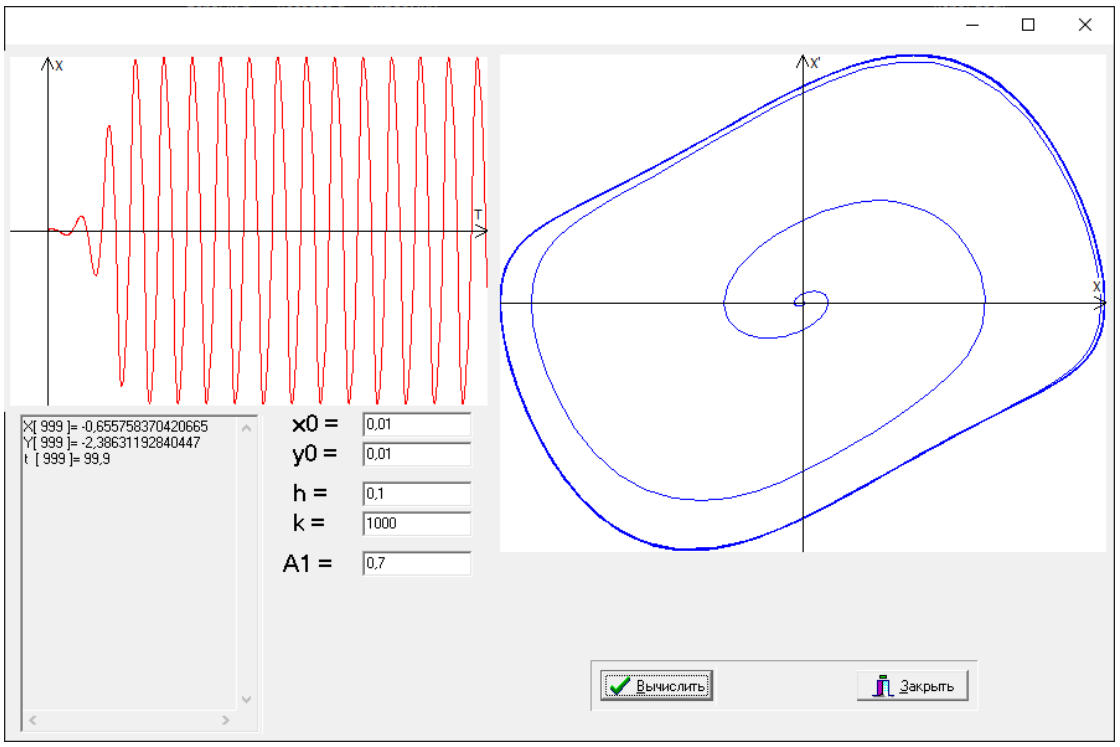


Рис. 3.9 Графік нестійкого граничного циклу

ВИСНОВКИ

В ході виконання дипломної роботи було проведено дослідження природи виникнення автоколивань, зроблено якісний аналіз існуючих систем, розроблено програму для вивчення генератора автоколивань Ван-Дер-Поля, та вирішено наступні завдання:

- проведено огляд літератури, теоретичних та числових методів аналізу автоколивань та граничних циклів;
- проведено дослідження фазового портрету рівняння Ван-дер-Поля в залежності від параметрів;
- розроблено алгоритм роботи генератора Ван-дер-Поля для програмного забезпечення SciLab;
- написана програма для вивчення та дослідження фазових портретів осцилятора Ван-дер-Поля при різних значеннях параметрів;
- проведено обчислювальний експеримент.

Написана програма може бути використана в дослідницьких цілях або для наочної презентації роботи автоколивальних систем для студентів та науковців. Програма легко корегується під інші рівняння або управляючі параметри та з легкістю виводить фазові портрети отриманих даних. Для детального аналізу отриманих даних було застосовано сучасний пакет програм SciLab, який є безкоштовним та відкритим програмним забезпеченням.

Результатом цієї роботи є те, що досі існує велика кількість недосліджених систем, які ми можем описати комп’ютерно, що допоможе людству розвинути, побудувати або, навіть, сімулювати наш фізичний мір у віртуальній реальності, який, я вважаю, облегшить вивчення любої науки в житті.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс / Тарасевич Ю.Ю., Учебное пособие, Изд. 3-е, испр. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 144 с. ISBN 5-354-00381-4
2. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем / Аносов Д. В., М.: МЦНМО, 2008. — 200 с. ISBN 978-5-94057-398-8
3. Предельные циклы системы дифференциальных уравнений второго порядка. / М. Т. Терёхин, Метод малых форм, Изв. вузов. Матем., 2009, номер 8, 73–82 с.
4. Задачи по теории колебаний, устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений. Часть 4. Метод Ван-дер-Поля. / Сандалов В.М., Москова Е.С., А.Л. Пригоровский / Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2017 – 24 с.
5. Физика колебаний: учеб. пособие / А.Н. Паршаков. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2010. – 302 с. ISBN 978-5-398-00500-4
6. Феномен уравнения Ван дер Поля / А. П. Кузнецов, Е. С. Селиверстова, Д. И. Трубецков, Л. В. Тюрюкина, Изв. вузов «ПНД», т. 22, № 4, 2014, - 42 с.
7. Лекции по нелинейной динамике: учеб. пособие для вузов / Анищенко В. С., Вадивасона Т. Е., М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.-516 с.
8. Інтернет ресурс: http//habr.com/
9. Інтернет ресурс: http//scilab.org/
10. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова, Е. А. Рудченко. — М.: ALT Linux ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 260 с.: ил.; 8 с. цв. вклейки. — (Библиотека ALT Linux).