МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ КОМПЮ'ТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ
Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр

«Вільні та вимушені коливання рідини в резервуарах з перегородками»

Виконав: студент 2 курсу, групи НФ-63
Сидоров Д. Г.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Прикладна фізика
енергетичних систем
Керівник:
професор, д.т.н.Стрельнікова О.О.

Рецензент:

Харків – 2019

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра інформаційних технологій у фізико-енергетичних системах
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магистр
Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____доц. Сухов Р.В.
підпис

"____"_____2019 року

З А В Д А Н Н Я
НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ (ПРОЕКТ)

Сидоров Денис Геннадійович

1.Тема роботи "Вільні та вимушені коливання рідини в резервуарах з перегородкою "

керівник роботи: Стрельнікова Олена Олександрівна, доктор технічних наук, професор.

затверджені наказом по університету від "06" листопада 2019 року №0210-05/2127

2. Строк подання студентом роботи 25.11.2019

3. Перелік питань, які потрібно розробити:

1) Вільні гідро пружні коливання оболонки, частково заповненої рідиною
2) Коливання рідини в жорсткому резервуарі
3) Вільні коливання рідини в жорсткому резервуарі з перегородкою
4) Вимушені коливання рідини в жорсткому резервуарі з перегородкою

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми, узгодження, а також затвердження її на кафедрі
2	Робота над літературою та іншими джерелами
3	Затвердження теми на кафедрі
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6	Написання третього розділу
7	Завершення написання дипломної роботи(висновки та література)
8	Подача науковому керівнику
9	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
10	Попередній захист
11	Захист

5. Дата видачі завдання 25.09.2019

Студент _____ Д.Г.Сидоров
підпис

Керівник робот _____ О.О.Стрельнікова
підпис

РЕФЕРАТ

Сидоров Денис. Вільні та вимушені коливання в резервуарах з перегородкою.

Дипломний проект містить: 47 сторінок, 12 рисунків, 2 таблиці, 51 джерел.

Об’єктом магістерської роботи є процес коливання рідини в жорстких резервуарах з перегородкою.

Предметом дипломної роботи є вільні та вимушені коливання в резервуарах з перегородкою.

Мета: Розроблення методу розрахунку підйому рівня рідини в резервуарах з перегородками внаслідок дії гармонічних, імпульсних або сейсмічних впливів.

Проаналізовано влив наявності хрестовидних перегородок на амплітуди коливання рідини у циліндричному резервуарі під дією гармонічних, імпульсних та сейсмічних збуджень. Встановлено що влив перегородки суттєво зменшує амплітуди коливань рідини. Якщо частота сили що збуджує наближається до частоти власних коливань, спостерігається режим биття.

КЛЮЧЕВІ СЛОВА: ВІЛЬНІ ТА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ, РЕЗЕРВУАРАХ, ПЕРГОРОДКИ, ГАРМОНІЧНІ, ІМПУЛЬСНІ ТА СЕЙСМІЧНІ ЗБУДЖЕНЯ, ХРЕСТОВИДНІ ПЕРЕГОРОДКИ.

РЕФЕРАТ

Сидоров Денис. Свободные и вынужденые колебания в резервуарах с перегородкой.

Дипломный проект содержит 47 страниц, 12 рисунков, 2 таблицы, 51 источников.

Предметом дипломная работа свободные и вынужден колебания в резервуарах с перегородкой.

Цель: Разработка метода расчета подъема уровня жидкости в резервуарах с перегородкой в результате действия гармонических, импульсных или сейсмических влияний.

Проанализированы влияние наличии крестовидних перегородок на амплитуде колебания жидкости в цилиндрическом резервуаре под действием гармонических, импульсных и сейсмических возмущений. Установлена что влияние перегородки ссущественно уменьшает амплитуду колебания жидкости. Если частота силы что влияет приближается к частоте ссобственных колебаний, наблюдается режим биения.

Объектом магисерской работы является процесс колебания жидкости в жест ких резервуарах с перегородкой.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: СВОБОДНЫЕ И ВИМУШЕНИ КОЛЕБАНИЯ, РЕЗЕРВУАРЫ, ПЕРЕГОРОДКИ, ГАРМОНИЧНЫЕ, ИМПУЛЬСНЫЕ И СЕЙСМИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ, ХРЕСТОВИДНИ ПЕРЕГОРОДКИ.

ABSTRACT

Denys Sydorov. Free and forced oscillations in partition tanks.

The object of the master's work is the process of fluid oscillation in rigid reservoirs with a partition.

The diploma project contains: 47 pages, 12 drawings, 2 tables, 51.

The subject of the thesis is free and forced oscillations in the partition tanks.

Objective: To develop a method of calculating the rise of fluid levels in reservoirs with partitions due to the action of harmonic, impulse or seismic effects.

Influence of the presence of cruciform partitions on the amplitude of fluid oscillation in a cylindrical reservoir under the influence of harmonic, impulse and seismic excitations is analyzed. It is found that the inflow of the partition significantly reduces the amplitude of the fluid oscillations. If the frequency of the excitation force approaches the frequency of its own oscillations, the beat mode is observed.

KEYWORDS: FREE AND FORCED OSCILLATIONS, TANKS, PARTITIONS, HARMONIC, IMPULSE AND SEISMIC EXCITATIONS, CRUCIFORM PARTITIONS

ЗМІСТ

ВСТУП 8
1 МЕТОД ЗАДАНИХ ФОРМ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ОБОЛОНОК, ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНИХ РІДИНОЮ 12
2 ВІЛЬНІ ГІДРОПРУЖНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНКИ, ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНОЇ РІДИНОЮ 20
3 МЕТОД ГРАНИЧНИХ СУПЕРЕЛЕМЕНТІВ 24
3.1 Сингулярні інтегральні рівняння в задачі визначення швидкостей рідини при плесканнях в жорсткому резервуарі з внутрішніми перегородками 24
3.2 Коливання рідини в складеному пружному резервуарі 26
3.3 Коливання рідини в жорсткому резервуарі. 32
ВИСНОВКИ 43
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ 45

ВСТУП

Контейнери та резервуари для зберігання нафти, легкозаймистих і отруйних рідин широко використовуються в різних областях інженерної практики, таких як авіабудування, хімічна і нафтогазова промисловість, енергетичне машинобудування, транспорт. Ці резервуари функціонують в умовах підвищених технологічних навантажень і заповнені нафтою, легкозаймистими або отруйними речовинами. В результаті раптового дії навантажень, викликаних землетрусами, іншими форс-мажорними обставинами рідина, що зберігається в резервуарах, починає відчувати інтенсивні плескання.

Плескання - це феномен, який спостерігається в ряді промислових об'єктів: в контейнерах для зберігання зрідженого газу, нафти, паливних баках, в резервуарах вантажних танків. Відомо, що саме частково заповнені резервуари піддаються дії особливо інтенсивних плескань. Це може привести до високого тиску на стінки резервуара, руйнування конструкції або до втрати стійкості і може викликати відплив небезпечного вмісту, що в свою чергу, може привести до серйозних екологічних наслідків.

Перші результати в області динаміки коливань пружних оболонок, що взаємодіють з рідиною, пов'язані з іменами Релея, Жуковського Н.Є. [1] та інших дослідників кінця XIX - початку XX століть. Однак період найбільш інтенсивного розроблення даної тематики приходиться на другу половину XX століття у зв'язку з розвитком ракетної та авіаційної техніки, а також з появою електронних обчислювальних систем нового покоління.

Великий внесок у розвиток проблеми взаємодії пружних конструкцій з рідиною внесли роботи відомих вчених А.З. Авербуха, Р.І. Вейцмана, М.Д. Генкіна [2], Л.І. Балабуха [3, 4], В.В. Болотіна [5, 6], В.Н.Буйвола [7], А.С. Вольміра [8], Ш.У. Галієва [9], М.С. Галкіна [10, 11], Е.І. Григолюка і А.Г. Горшкова [12], О.М. Гузя і В.Д. Кубенко [13], М.А. Ильгамова [14, 15], Р.Є. Лампера [16], І.А. Луковського [17], Г.Н. Мікішева і Б.В. Рабіновича [18,

19], Є.М. Мньова і А.К. Перцева [20], І.М. Рапопорта [21], К.В. Фролова, В.Н.Антонова [22], Ф.Н. Шклярчука [23,24], В.П. Шмакова [25, 26] та ін.

Задачі взаємодії інженерних конструкцій з рідиною виділилися в новий напрямок обчислювальної та прикладної механіки, що отримав за кордоном назву «Fluid-Structure Interaction Problems».

Бурхливий розвиток методів аналізу плескань рідини в контейнерах та паливних баках пов'язаний з початком в 60 –і роки пришлого сторіччя космічних програм СРСР та NASA. Зауважимо, що перші місії до Юпітера закінчились руйнуванням космічних апаратів саме через невдале відстроювання від резонансних частот, пов’язаних з плесканнями палива. Серед перших досліджень відмітимо роботи Г. Абрамсона [27,28]. В роботах Г. Попова і співавторів [29,30] досліджено вплив прискорення та кривини вільної поверхні при русі прямокутних контейнерів (плоска задача) й встановлено, що динамічні характеристики суттєво залежать від співвідношення рівня заповнення до ширини контейнера. Останнім часом для аналізу плескань все більш використовуються методи обчислювальної механіки рідини (Computational Fluid Dynamics, CFD). До цього напрямку відносяться праці [31,32], де доведено, що власні частоти коливань суттєво залежать від рівня заповнення.

На теперішній час розроблено велику кількість моделей плескань рідини в резервуарах та контейнерах. Для деяких конструкцій достатньо застосовувати спрощені моделі опису плескань рідини в рухомому резервуарі. Переваги спрощених моделей полягають в тому, що вони дозволяють проводити числову симуляцію з достатньою точністю при використанні досить простих рівнянь.

Відзначимо, що аналітичні підходи є застосовними лише для аналізу плескань малої амплітуди в контейнерах досить простої форми. Такі дослідження неможливо узагальнити на випадок плескань із значною амплітудою в контейнерах ускладненої форми, з конструктивними перегородками [33].

Нелінійний рух вільної поверхні можна вивчати лише за допомогою числових методів. Зауважимо, що в деяких випадках результати, отримані за спрощеними двовимірними моделями, можуть бути застосовними щодо опису поведінки рідини в тривимірному формулюванні. Але цей перехід є досить проблематичним. Faltinsen в [33] встановив, що збудження коливань навіть на найнижчій частоті вільних коливань рідини в двовимірному резервуарі може призвести до того, що рух втрачає стійкість, стає суттєво тривимірним, і навіть хаотичним.

На цей час застосовується ціла серія різних числових методів і схем для опису характеру плескань в резервуарах з вільною поверхнею рідини. Wu з співавторами в [34] розробили скінченно - елементний підхід для розв'язання задач щодо потенціальної течії рідини та застосували його до дослідження тривимірної нелінійної поведінки рідини в резервуарі. Далі ці дослідники в [35] розробили підхід, заснований на методі скінченних різниць, для вивчення динаміки рідини в рухомому резервуарі в тривимірному формулюванні.

Curadelli в [36] застосував метод скінченних елементів для дослідження частот и форм вільних коливань сферичного резервуара. В [37] наведені уточнені рівняння для визначення форми вільної поверхні й запропоновано варіант методу скінченних різниць для їх розв'язання.

Найчастіше застосовують два типи простіших моделей. Перший з них – це так звана модель маятника, другий – це пружинна аналогія [38]. Обидві моделі засновані на такому підході. Треба перетворити рух рідини так, щоб її можна було розглянути або як прикріплений до резервуару маятник, або як прикріплену пружину. Природно, що при цьому плескання розглядатимуться лише в лінійному формулюванні. Слід зазначити, що в більшості робіт розглядаються циліндричні оболонки; для чисельного моделювання застосовується метод скінченних елементів. Явища пружності стінок або не враховуються, або вивчаються відокремлено від плескань рідини.

В цьому розділі розглянуто питання щодо вільних та вимушених коливань оболонок обертання з довільним меридіаном при частковому

заповненні рідиною. Вивчається вплив перегородок на частоти коливань та рівень підйому вільної поверхні. Враховується як пружність стінок резервуару так і наявність плескань вільної поверхні. Для розв’язання задачі визначення тиску рідини на оболонку використовуються одновимірний метод граничних елементів та метод підобластей. Це дозволяє істотно скоротити час розрахунку, що приводить до якісно нових можливостей при моделюванні динамічної поведінки конструкцій.

1 МЕТОД ЗАДАНИХ ФОРМ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ОБОЛОНОК, ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНИХ РІДИНОЮ

Міцність і динамічні характеристики резервуарів і конструкцій паливних баків, цистерн та резервуарів слід визначати, розв'язуючи задачі гідропружньої взаємодії.

Для розв'язання задач гідропружності в цій науково-дослідній роботі застосовано метод заданих форм. Як базисні функції для розв'язання задач стосовно вільних і вимушених коливань оболонок обертання, частково заповнених рідиною, приймаються форми власних коливань незаповненої оболонки. Метод їх визначення приведено в роботах [39,40].

Рівняння коливань оболонкової конструкції з рідиною запишемо в загальному матричному вигляді

$$L(\mathbf{U})+M(\ddot{\mathbf{U}})=P+Q, \tag{1}$$

де L, M – оператори пружних та масових сил відповідно; U = (*u*, *v*, *w*) – вектор-функція переміщень серединної поверхні, P характеризує перепад тиску рідини на змочені поверхні конструкції, Q - сила збудження.

Вважаємо, що рідина є ідеальною, нестисливою, а її рух (індукований рухом оболонкової системи) є безвихровим. Позначив компоненти швидкості як V_x, V_y, V_z, умову нестисливості середовища отримаємо із рівності

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

Оскільки потік є безвихровим, то існує потенціал швидкостей φ, такий що

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Внаслідок (1) потенціал φ задовольняє гармонічному рівнянню

$$\nabla^2\varphi = 0.$$

Зв'язок тиску та потенціалу швидкостей визначимо з лінеарізованого інтегралу Коші-Лагранжа [39]

$$p - p_0 = -\rho\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))z + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right]$$

Будемо використовувати таке зображення форм власних коливань оболонки з рідиною [39]:

$$\vec{U}(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t)\boldsymbol{u}_k(x,y,z), \tag{3}$$

де $\vec{U}(x,y,z,t) = (u,v,w)$– вектор переміщень;

$\boldsymbol{u}_k(x,y,z) = (u_k(x,y,z), v_k(x,y,z), w_k(x,y,z))$ – вектор-функції, що є формами власних коливань незаповненої оболонки,

$c_k(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу.

Визначимо потенціал швидкостей. Для цього знайдемо «часткові» потенціали швидкостей, що відповідають власним формам коливань незаповненої оболонки.

Згідно з (3) маємо

$$w(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{m} w_k(x,y,z)c_k(t).$$

Тут функції $w_k(x,y,z)$ є нормальними компонентами власних форм коливань незаповненої оболонки.

Для функції φ маємо таку крайову задачу:

$$\Delta\varphi = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t}; & M \in S \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial t}; & M \in \sigma_0 \end{cases}.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a_s(t)x + g\zeta = 0; \quad M \in \sigma_0 .$$

де $w(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{m} w_k(x,y,z)c_k(t)$.

Пропонуємо подати потенціал швидкостей φ у вигляді суми двох потенціалів $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Для визначення φ_1 сформулюємо таку крайову задачу:

$$\nabla^2\varphi_1 = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t},\ M \in S, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0,\ M \in S. \tag{4}$$

Зазначимо, що із співвідношення (3) і другого з рівнянь (4) можна отримати розклад

$$\varphi_1(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_{1k}(x,y,z)\dot{c}_k(t).$$

Для визначення функцій φ_{1k} маємо m таких крайових задач:

$$\nabla^2\varphi_{1k} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial n} = w_k,\ M \in S, \qquad \varphi_{1k} = 0,\ M \in \sigma_0. \tag{5}$$

Можна зауважити, що задачі (5) відповідають нульовому прискоренню вільного падіння. Зазначимо також, що (5) є мішаними задачами для рівняння Лапласа, умова розв’язання для таких задач не перевіряється.

Для визначення потенціалу φ_2 почнемо з допоміжної задачі про коливання рідини в жорсткій оболонці з урахуванням сил тяжіння. Таку задачу сформулюємо у вигляді

$$\nabla^2\Psi = 0,\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0,\ M \in S_1, \frac{\partial \Psi}{\partial n} = \dot{\zeta},\ M \in S_0,\ \dot{\Psi} + g\zeta = 0,\ M \in S_0. \tag{6}$$

Останнє рівняння в (6) є динамічною умовою (рівність тиску рідини атмосферному тиску) на вільній поверхні. Диференціювання цього рівняння за

змінною t з урахуванням третього співвідношення в (6) дає

$$\ddot{\Psi} + g\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0\,,\ M \in \sigma_0\,. \tag{7}$$

Розглянемо задачу (7) як проблему власних значень та зобразимо її розв'язок у вигляді

$$\Psi(x,y,z,t) = e^{i\kappa t}\psi(x,y,z)\,.$$

Для функції ψ маємо таку задачу про гармонічні коливання рідини в жорсткому резервуарі:

$$\nabla^2\psi = 0\,,\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0\,,\ M \in S\,, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\kappa^2}{g}\psi\,,\ M \in \sigma_0\,. \tag{8}$$

Розв'язання цієї задачі дає ряд власних значень κ_k і відповідних їм власних функцій, які позначимо як φ_{2k}. Далі, після розв'язання цієї допоміжної задачі шукатимемо потенціал φ_2 у вигляді

$$\varphi_2(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{d}_k(t)\varphi_{2k}(x,y,z)\,. \tag{9}$$

Таким чином, маємо $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$,

де

$$\varphi_1(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{m} \dot{c}_k(t)\varphi_{1k}(x,y,z)\ ; \qquad \varphi_2(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{d}_k(t)\varphi_{2k}(x,y,z)\,.$$

Перш за все, зазначимо, що побудований у такий спосіб сумарний потенціал задовольняє рівнянню Лапласа, тобто

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = 0\,.$$

Далі, на змоченій поверхні оболонки виконується умова непротікання, а саме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t},\ M \in S.$$

На вільній поверхні у разі горизонтального збудження мають виконуватись такі граничні умови:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \dot{\zeta},\ M \in \sigma_0;\quad \dot{\varphi} + g\zeta + a_s(t)x = 0,\ M \in \sigma_0.$$

З рівнянь (8) і (9) отримаємо, що вільна поверхня визначається співвідношенням

$$\zeta = \sum_{k=1}^{n} d_k(t) \frac{\partial \varphi_{2k}(x,y,z)}{\partial n} + \sum_{k=1}^{m} c_k(t) \frac{\partial \varphi_{1k}(x,y,z)}{\partial n}.$$

Зазначимо перевагу запропонованого підходу, яка полягає в тому, що для визначення форми вільної поверхні не треба, наприклад, диференціювати сейсмічне прискорення $a_s(t)$ за часом, що є досить складною задачею.

Розглянемо динамічну крайову умову на вільній поверхні. З останнього співвідношення в (4) маємо $\dot{\varphi}_1 = 0$. Тому умова $\dot{\varphi} + g\zeta + a_s(t)x = 0$ приводить до диференціальних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{n} \ddot{d}_k(t)\varphi_{2k}(x,y,z) + g\sum_{j=1}^{m} c_j(t) \frac{\partial \varphi_{1j}(x,y,z)}{\partial n} + g\sum_{k=1}^{n} d_k(t) \frac{\partial \varphi_{2k}(x,y,z)}{\partial n} + a_s(t)x = 0. \quad (10)$$

Тут відсутні форми, що відповідають першому потенціалу внаслідок рівності $\varphi_{1k} = 0,\ M \in \sigma_0$.

Крім того, маємо вираз для тиску

$$-\frac{p}{\rho_l} = \sum_{k=1}^{n} \ddot{c}_k(t)\varphi_{1k}(x,y,z) + \sum_{k=1}^{n} \ddot{d}_k(t)\varphi_{2k}(x,y,z) + gz + a_s(t)x. \quad (11)$$

Використовуючи для функцій φ_{2k} співвідношення

$$\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial n} = \frac{\kappa_k^2}{g}\varphi_{2k}\ ,\ M \in \sigma_0\ ,$$

отримаємо, що рівняння (10) набуває вигляду

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\ddot{d}_k(t) + \kappa_k^2 d_k(t)\right]\varphi_{2k}(x,y,z) + g\sum_{k=1}^{m} c_k(t)\,\frac{\partial \varphi_{1k}(x,y,z)}{\partial n} + a_s(t)\,x = 0\ .$$

Після скалярного добутку цього співвідношення на функції φ_{2l} одержимо (внаслідок ортогональності власних форм коливань рідини в жорсткому резервуарі, принаймні для оболонок обертання, [19]) такі рівняння:

$$\ddot{d}_l(t) + \kappa_l^2 d_l(t) + \frac{g}{(\varphi_{2l},\varphi_{2l})}\sum_{k=1}^{m} c_k(t)\left(\frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial n},\varphi_{2l}\right) + a_s(t)\left(x,\varphi_l\right) = 0,\quad l = 1,2..,n\ .$$

Визначивши функції φ_{1k} и φ_{2k} , знайдемо вираз для тиску, що обчислений за формулою (11). Виконаємо також скалярний добуток отриманих рівностей на власну форму $\boldsymbol{u}_j$. Скалярний добуток тут розуміємо в сенсі

$$\left(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_j\right) = \iint_S \left(u_k u_j + v_k v_j + w_k w_j\right)dS\ .$$

Позначимо диференціальні оператори з (1), що відповідають матрицям жорсткості і мас, таким чином:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{33} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix};\quad \boldsymbol{M} = \rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Використаємо умову ортогональності власних форм незаповненої оболонки за матрицею мас [17]

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}_k = \omega_k^2 \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}_k\ ,\qquad (\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_j) = \delta_{kj}\ . \tag{12}$$

де ω_k – частота власних коливань незаповненої оболонки, що відповідає k –тій власній формі.

Після виконання скалярного добутку перших рівнянь (1) на $\boldsymbol{u}_j$ з урахуванням співвідношень (12) отримаємо

$$\ddot{c}_j(t)+\omega_j^2 c_j(t)+\rho_l\sum_{k=1}^{m}\ddot{c}_k\left(\varphi_{1k},w_j\right)+$$
$$+\rho_l\left[\sum_{i=1}^{n}\ddot{d}_i\left(\varphi_{2i},w_j\right)+g\left(z,w_j\right)+a_s(t)\left(x,w_j\right)\right]=\left(Q,\boldsymbol{u}_j\right),\ j=1,\ m$$

Остаточно приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно невідомих коефіцієнтів $c_k(t),\ \ k=1,...,m$, $d_k(t),\ \ k=1,...,n$:

$$\begin{gathered}\ddot{c}_j(t)+\omega_j^2 c_j(t)+\rho_l\sum_{k=1}^{m}\ddot{c}_k\left(\varphi_{1k},w_j\right)+\\ +\rho_l\left[\sum_{i=1}^{n}\ddot{d}_i\left(\varphi_{2i},w_j\right)+g\left(z,w_j\right)+a_s(t)\left(x,w_j\right)\right]=\left(Q,\boldsymbol{u}_j\right),\ j=1,\ m\end{gathered}\qquad(13)$$

$$\ddot{d}_l(t)+\kappa_l^2 d_l(t)+\frac{g}{\left(\varphi_{2l},\varphi_{2l}\right)}\sum_{k=1}^{m}\dot{c}_k(t)\left(\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial n},\varphi_{2l}\right)+a_s(t)\left(x,\varphi_l\right)=0,\quad l=1,2..,n$$

Оскільки припускалося, що в початковий момент часу (наприклад, до початку землетрусу) система «оболонка-рідина» знаходилась в стані спокою, приймаються нульові початкові умови

$$c_k(0)=\dot{c}_k(0)=0,\quad k=1,...,m;\quad d_k(0)=\dot{d}_k(0)=0,\quad k=1,...,n.$$

Таким чином, схема розв’язання зв’язаної динамічної задачі для оболонки обертання, частково заповненою рідиною, містить декілька етапів, кожний з котрих має самостійну цінність. Ці етапи є такими:

1.Визначення частот і форм вільних коливань незаповненої оболонки методом скінченних елементів.

2.Визначення частот і форм коливань рідини в жорсткій оболонці під

дією сили тяжіння з використанням методу граничних елементів.

3. Визначення частот і форм коливань пружної оболонки без урахування дії сили тяжіння з використанням методу граничних елементів.

4. Розв’язання системи диференціальних рівнянь другого порядку з використанням методу Рунге-Кутта 4-го і 5-го порядків.

2 ВІЛЬНІ ГІДРОПРУЖНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНКИ, ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНОЇ РІДИНОЮ

Розглянемо задачу вільних коливань пружної оболонки обертання, частково заповненої ідеальною нестисливою рідиною. Ця задача потребує знаходження часткового потенціалу з співвідношень (5). Наведемо основні співвідношення

Систему рівнянь руху символічно запишемо у вигляді

$$L(U) + M(\ddot{\mathbf{U}}) = P, \tag{14}$$

де L, M – оператори пружних і масових сил;

P – тиск рідини на змочену поверхню оболонки;

U=(u_1, u_2, u_3) – вектор - функція переміщень.

Розглянемо спочатку задачу про малі гармонійні коливання пружної оболонки. Зобразимо вектор U у формі $U = ue^{i\Omega t}$, де Ω – частота, а u – власна форма коливань розглянутої оболонки з рідиною.

Будемо шукати власні форми коливань рідини у вигляді

$$u = \sum_{k=1}^{N} c_k u_k \tag{15}$$

де u_k – власні форми коливань оболонки в вакуумі;

c_k – невідомі коефіцієнти.

Зауважимо, що визначенню власних частот та форм коливань оболонок обертання присвячено перший етап робіт з даного проекту.

Таким чином, згідно з (15) форму коливань оболонки з рідиною визначимо як лінійну комбінацію власних форм коливань у вакуумі.

Виконуються такі співвідношення:

$$L(u_k) = \Omega_k^2 M(u_k), \quad (M(u_k), u_j) = \delta_{kj} \ .$$

Отже,

$$(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}_k), \boldsymbol{u}_j) = \Omega_k^2 \delta_{kj} \, .$$

де Ω_k – k-а частота власних коливань у вакуумі.

Ці співвідношення показують, що власні форми коливань оболонки в вакуумі мають бути ортонормовані за матрицею мас.

Розглянемо праву частину рівняння (14). Зазначимо, що вектор $\boldsymbol{P}$ спрямований по нормалі до розглянутої оболонки, внаслідок того, що ідеальна рідина створює тільки нормальний тиск на змоченому тілі. Вважаємо, що $| \, |\boldsymbol{P}| = p$.

Припустимо, що рідина ідеальна, нестислива, а її рух (індукований коливаннями оболонки) є безвихровим. У цих умовах існує потенціал швидкостей, який задовольняє гармонічному рівнянню.

У випадку гармонічних коливань в припущенні, що власна швидкість рідини дорівнює нулю, згідно з інтегралом Коші-Лагранжа [8] величина p може бути подана в такому вигляді:

$$p = -\rho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -i\rho_2 \Omega e^{i\Omega t}$$

де $\Phi = \varphi e^{i\Omega t}$, ρ_2 – густина рідини.

Рівняння руху (14) двох середовищ і гранична умова сполучення запишуться в цьому випадку у вигляді

$$\nabla^2 \varphi = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}} \right| S_1 = i\Omega w \qquad (17)$$

$$p = -\rho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -i\rho_2 \Omega \varphi e^{i\Omega t} \Big|_{S_0} = 0 \qquad (18)$$

$$\nabla\varphi \to 0\left(r \to \infty\right) \tag{19}$$

Тут w – амплітуда нормальної складової переміщення оболонки S_1, S_0 – вільна поверхня рідини, r – відстань між точкою спостереження і точкою поверхні $S_1 \cup S_0$. Зазначимо, що оскільки S_1 – оболонка обертання, то в розглянутому випадку поверхня S_0 – коло.

Таким чином, потрібно визначити функції $\boldsymbol{u}$, φ, які задовольняють системі диференціальних рівнянь (16), умовам непротікання (17), умові відсутності тиску на вільній поверхні (18) і згасання швидкості збуреної рідини на нескінченності (19) у разі зовнішньої задачі, а також умовами закріплення оболонки.

Із співвідношення (15) маємо

$$w = \sum_{k=1}^{N} c_k w_k \,,$$

де w_k – нормальні складові власних форм коливань оболонки в вакуумі; c_k – невідомі коефіцієнти.

Позначимо через φ_k розв’язки таких мішаних крайових задач для рівняння Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_k}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{S_1} = i\Omega w_k$$

$$\varphi_k\big|_{S_0} = 0 = 0,$$

$$\nabla\varphi_k \to 0\left(r \to \infty\right)$$

У символічній формі розв’язок задач (20) можна записати у вигляді

$$\varphi_k\left(P_0\right) = i\Omega \mathbf{H}\left(w_k\left(P_0\right)\right). \tag{21}$$

Тут $\mathbf{H}(w_k(P_0))$ – обернений оператор гідродинамічної задачі.

Врахуємо, що в силу лінійності задачі

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \, .$$

Отримаємо

$$L\left(\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{u}_k\right) + M\left(\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{u}_k\right) = i\Omega\rho_2 \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \, . \tag{22}$$

У співвідношення (22) підставимо вираз (15) і дістанемо скалярний добуток отриманого рівняння на w_j. Будемо мати

$$\left(\Omega_k^2 \delta_{kj} + \delta_{kj}\right) c_j = \Omega^2 \rho_2 \sum_{k=1}^{N} c_k \left(\mathbf{H}(w_k) \cdot w_j\right) \tag{23}$$

Співвідношення (23) є узагальненою проблемою власних значень. Розв’язавши цю проблему, ми визначимо власні частоти Ω коливань оболонки з рідиною і невідомі c_k, які є коефіцієнтами при власних формах коливань оболонки в вакуумі.

Таким чином, розглянута задача зводиться до послідовного визначення частот Ω_k і форм w_k оболонки у вакуумі (перший етап), розв'язання змішаних задач для рівняння Лапласа (другий етап), побудови матриці приєднаних мас рідини $\rho_2\left(\mathbf{H}(w_k) \cdot w_j\right)$ (третій етап) та рішення узагальненої проблеми власних значень (четвертий етап). Зазначимо, що визначення гармонічної функції φ можливо здійснити методом граничних інтегральних рівнянь, а можливо і іншими методами (які не приводять до розв'язання граничних інтегральних рівнянь). Наприклад, в роботі [35] для цієї мети використано метод скінченних елементів.

3 МЕТОД ГРАНИЧНИХ СУПЕРЕЛЕМЕНТІВ

3.1 Сингулярні інтегральні рівняння в задачі визначення швидкостей рідини при плесканнях в жорсткому резервуарі з внутрішніми перегородками

Метод граничних суперелементів застосовується для розв'язання задач про коливання рідини в оболонкових конструкціях з внутрішніми перегородками, які ставлять для гасіння плескань. Плескання будемо визначати як рух вільної поверхні рідини в частково заповненому резервуарі. Зазначимо, що невдале розташування перегородок може призвести до руйнування конструкції. Наприклад, один з перших польотів на Юпітер зазнав фіаско внаслідок того, що програма, що керує поворотами космічного апарату, працювала з частотою, яка виявилася близькою до частоти коливань рідини, і плескання, що виникли при цьому, призвели до втрати стійкості апарата.

На першому етапі ми розглянемо циліндричну оболонку з внутрішніми перегородками (рис. 1). Зауважимо, що суперелементний підхід може бути також застосований до розрахунку вісесиметричних конструкцій, що взаємодіють з рідиною (таких як радіально-осьова турбіна).

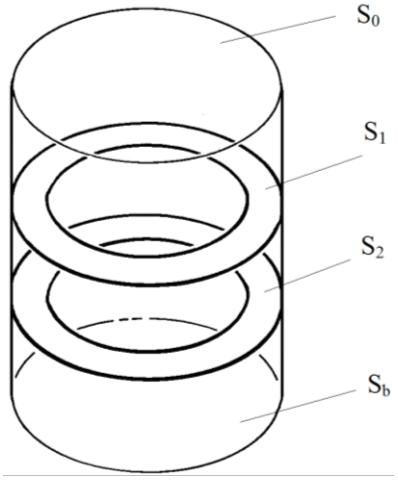


Рис. 3.1. Циліндрична оболонка в внутрішніми перегородками.

На першому етапі ми будемо визначати потенціал швидкостей ϕ_1 і отже

часткові потенціали ϕ_{1k}. Щоб визначити ці часткові потенціали застосуємо пряме формулювання методу граничних елементів. Для використання суперелементного підходу розділимо область, зайняту рідиною, на підобласті

$$\Sigma_i = \sigma_i^1 \bigcup \sigma_i^2 \bigcup \sigma_i^3; \quad i = 1,2,3 .$$

Тут

$$\sigma_1^1 = S_b; \sigma_1^2 = S_2; \sigma_1^3 = S_{w1}; \quad \sigma_2^1 = S_2; \sigma_2^2 = S_1; \sigma_2^3 = S_{w2}; \quad \sigma_3^1 = S_1; \sigma_3^2 = S_0; \sigma_3^3 = S_{w3}.$$

Позначимо через $S_{wi}\ (i = 1,2,3)$ частини циліндричної оболонки S_w між поверхнями S_b і S_2, S_2 і S_0 відповідно. Отже, для кожного часткового потенціалу ϕ_{1k} отримаємо таку систему сингулярних інтегральних рівнянь (індекс $1k$ тут для простоти пропущений)

$$2\pi\phi_l^j(P_0) = \sum_{i=1}^{3}\left(\iint\limits_{\sigma_i^j} \frac{\partial \phi_i^j}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} d\sigma_i^j - \iint\limits_{\sigma_i^j} \phi_i^j \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} d\sigma_i^j \right), \; j,l = 1,2,3$$

Тут наявні 18 невідомих функцій $\phi_i^j, \frac{\partial \phi_i^j}{\partial n}, \quad (i, j = 1,2,3)$, але сингулярних інтегральних рівнянь лише 9. Зазначимо, що невідомі функції задаються на відповідних поверхнях. З граничних умов визначаємо значення наступних функцій $\frac{\partial \phi_1^1}{\partial n}, \frac{\partial \phi_1^3}{\partial n}, \frac{\partial \phi_2^3}{\partial n}, \frac{\partial \phi_3^3}{\partial n}, \phi_2^3$.

На поверхнях S_1 і S_2 справедливі наступні співвідношення:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^1 \Rightarrow \phi_1^2 = \phi_2^1; \quad \frac{\partial \phi_1^2}{\partial n} = \frac{\partial \phi_2^1}{\partial n}; \quad \sigma_2^2 = \sigma_3^1 \Rightarrow \phi_2^2 = \phi_3^1; \quad \frac{\partial \phi_2^2}{\partial n} = \frac{\partial \phi_3^1}{\partial n} .$$

Отже, отримаємо систему 9 рівнянь з 9 невідомими функціями.

Задача визначення часткових потенціалів ϕ_{2k} при використанні суперелементного підходу буде зведена до розв'язання системи лінійних

алгебраїчних рівнянь з розрідженою блоковою матрицею.

Далі використовуємо циліндричну систему координат і уявимо невідомі функції у вигляді рядів Фур'є по окружній координаті.

$$w = w(r,z)\cos\alpha\theta, \quad \phi = \phi(r,z)\cos\alpha\theta.$$

Чисельне розв'язання отриманої системи сингулярних інтегральних рівнянь здійснено за методикою, представленою в [38,42,43,46]. Використано метод граничних елементів з кусково-постійною апроксимацією густини [43]. Інтегрування по рідкому об'єму зведено до обчислення одновимірних інтегралів вздовж меридіану оболонки і радіусу вільної поверхні рідини. Зазначимо, що застосування методу скінченних елементів вимагає тривимірного моделювання для розв’язання я зазначеної зв'язаної задачі. Це призводить до значно більших витрат комп'ютерного часу і не дозволяє використовувати ці методи у задачах комп'ютерного моніторингу.

3.2 Коливання рідини в складеному пружному резервуарі

Складені оболонки, заповнені рідиною, широко використовуються в сучасній техніці. До них відносяться парові котли, резервуари водонапірних башт, газгольдери, нафтові баки, газові і повітряні балони і т.п. Особливий інтерес мають оболонки, що складаються з декількох відсіків, частково заповнених рідиною, причому рідина в кожному відсіку може мати свою густину і свій рівень заповнення. Наявність перегородок в пружному баці з рідиною сприяє забезпеченню демпфування коливань. Для розв’язання таких задач ефективним є поєднання методів скінчених та граничних елементів [46].

Розглянемо складену оболонку обертання з перегородками, зображену на рис.

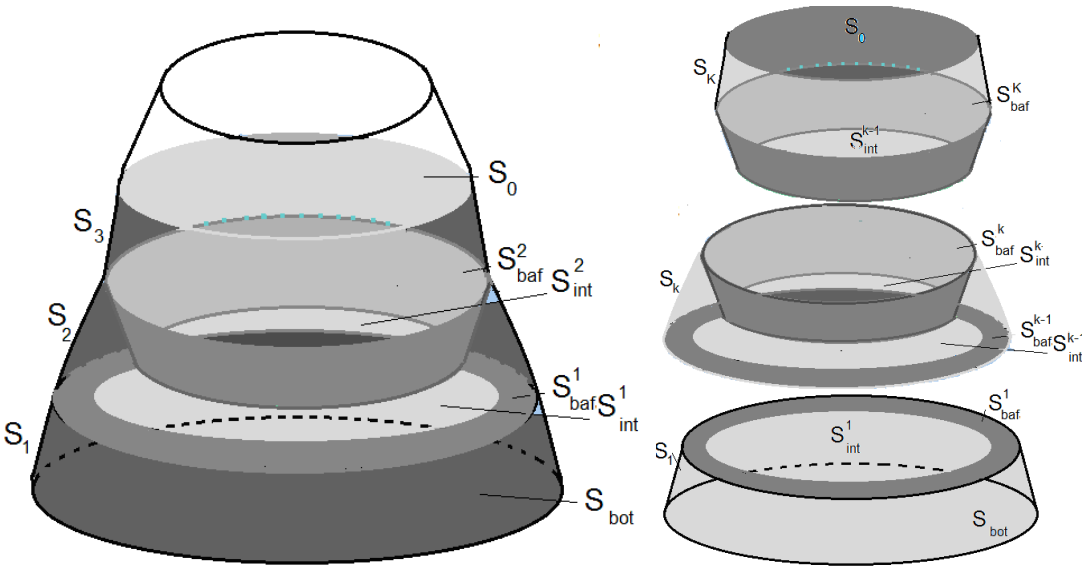


Рис. 3.2 Оболонка обертання з перегородками, частково заповнена рідиною

Рівняння руху такої оболонки можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{L}U + \mathbf{M}\ddot{U} = P + Q,$$

де L, M – матриці жорсткості і мас;

U=(u, v, w) – вектор-функція переміщень;

$Q(t)$ – вектор зовнішнього навантаження,

$P(t)$ – гідродинамічний тиск рідини. Будемо шукати розв'язок задачі у вигляді

$$U(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{m} u_k(x,y,z)c_k(t),$$

де $u_k(x,y,z)$ – власні форми коливань незаповненої оболонки, $c_k(t)$ - невідомі коефіцієнти.

Тиск рідини визначається інтегралом Коші-Лагранжа, який в лінійному наближенні має вигляд

$$\frac{P}{\rho_l} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{P_0}{\rho_l},$$

де φ – потенціал швидкостей;

ρ_l – густина рідини.

Сили тяжіння в даному випадку не розглядаємо.

Для визначення потенціалу швидкостей маємо крайову задачу для рівняння Лапласа в двокомпонентній області, яка схематично зображена на рис. і складається з частин Ω_1 і Ω Кожна з цих частин складається у свою чергу з вільної поверхні $\Omega_1^0;\Omega_2^0$ та поверхні оболонки $\Omega_1^1;\Omega_2^1$. Зазначена крайова задача описується рівнянням Лапласа і граничними умовами

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{\Omega_1^1} = \frac{\partial w_1}{\partial t}; \quad \varphi|_{\Omega_1^0} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{\Omega_2^1} = \frac{\partial w_2}{\partial t}; \quad \varphi|_{\Omega_2^0} = 0.$$

Зазначимо, що праві частини в граничних умовах є невідомими функціями. Як показано в [43], задача зводиться до визначення часткових потенціалів для кожної власної форми коливань оболонки без рідини. Структура отриманих співвідношень показує, що задача визначення потенціалу швидкостей зводиться до розв’язання незалежних крайових задач в областях Ω_1 і Ω Таким чином, приходимо до необхідності розв’язання таких крайових задач для визначення часткових потенціалів:

$$\frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial z^2} = 0; \left.\frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial n}\right|_{\Omega_1^1} = w_{1k}; \quad \varphi_{1k}\Big|_{\Omega_1^0} = 0$$

і

$$\frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial z^2}=0;\ \frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial n}\bigg|_{\Omega_1^1}=w_{1k};\quad \varphi_{2k}\big|_{\Omega_1^0}=0\,.$$

Після рішення наведених крайових задач отримуємо подання для потенціалів швидкостей , а саме

$$\varphi_1(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{m}\varphi_{1k}(x,y,z)\dot{c}_k(t);\qquad \varphi_2(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{m}\varphi_{2k}(x,y,z)\dot{c}_k(t)\,.$$

З урахуванням цих співвідношень одержимо таке подання для потенціалу швидкостей розглянутої задачі:

$$\varphi(x,y,z,t)=\begin{cases}\varphi_1(x,y,z,t); & (x,y,z)\in\Omega_1;\\ \varphi_2(x,y,z,t); & (x,y,z)\in\Omega_2.\end{cases}$$

Для тиску рідини на стінки оболонки отримуємо вираз

$$P(x,y,z,t)-P_0=\begin{cases}-\rho_l\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_{1k}(x,y,z)\ddot{c}_k(t); & (x,y,z)\in\Omega_1;\\ -\rho_l\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_{2k}(x,y,z)\ddot{c}_k(t); & (x,y,z)\in\Omega_2.\end{cases}$$

Для розв'язання задачі про власні коливання оболонки з рідиною в цих співвідношеннях слід покласти $c_k(t)=e^{i\omega t}$ і розглянути рівняння руху при $Q(t)=0$.

Для визначення часткових потенціалів $\varphi_{1k},\varphi_{2k}$ маємо таку систему сингулярних інтегральних рівнянь (індекси опущені для простоти)

$$2\pi\varphi(P_0)+\iint\limits_{S_1}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|}dS_1-\iint\limits_{S_0}q\frac{1}{|P-P_0|}dS_0=\iint\limits_{S_1}w\frac{1}{|P-P_0|}dS_1;\quad P_0\in\Omega_1$$

$$\iint\limits_{S_1}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|}dS_1-\iint\limits_{S_0}q\frac{1}{|P-P_0|}dS_0=\iint\limits_{S_1}w\frac{1}{|P-P_0|}dS_1;\quad P_0\in\Omega_0$$

Після перетворень, аналогічних проведеним у [50-51], приходимо до одновимірних сингулярних рівнянь

$$2\pi\varphi(z_0)+\int\limits_{\Gamma}\varphi(z)Q(z,z_0)r(z)d\Gamma-\int\limits_{0}^{R}q(\rho)\Psi(P,P_0)\rho d\rho=\int\limits_{\Gamma}w(z)\Psi(P,P_0)r(z)d\Gamma_1;P_0\in S_1$$

,

$$\int\limits_{\Gamma}\varphi(z)Q(z,z_0)r(z)d\Gamma-\int\limits_{0}^{R}q(\rho)\Psi(P,P_0)\rho d\rho=\int\limits_{\Gamma}w(z)\Psi(P,P_0)r(z)d\Gamma_1;\ P_0\in S_0.$$

Тут

$$Q(z,z_0)=\frac{4}{\sqrt{a+b}}\left\{\frac{1}{2r}\left[\frac{r^2-r_0^2+(z_0-z)^2}{a-b}\mathsf{E}_\alpha(k)-\mathsf{F}_\alpha(k)\right]n_r+\frac{z_0-z}{a-b}\mathsf{E}_\alpha(k)n_z\right\},$$

$$\Psi(P,P_0)=\frac{4}{\sqrt{a+b}}\mathsf{F}_\alpha(k).$$

Функції $\mathsf{E}_\alpha(k),\mathsf{F}_\alpha(k)$ визначені в [47].

З метою тестування алгоритму був також отриманий аналітичний розв’язок задачі про власні коливання циліндричної оболонки, повністю заповненою рідиною [48], [49].

Шляхом використання методу розділення змінних Фур’є отримаємо аналітичний розв’язок

$$\frac{\chi_k^2}{g}=\mu_k\tanh\left(\mu_k\frac{H}{R}\right),k=1,2,..;\varphi_k=J_\alpha\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)\cosh\left(\frac{\mu_k}{R}z\right)\cosh^{-1}\left(\frac{\mu_k}{R}H\right).\ )$$

де μ_k, корені рівняння $J'_\alpha(x)=0$, відповідають першій гармоніці.

Ці корені були розраховані чисельно та для $\alpha = 1$ наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Характеристичні числа.

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
1.841	5.331	8.536	11.71	14.86

На рис. 3.3 показаний розподіл форм плескань для $\alpha = 1$ на вільній поверхні рідини. Суцільні лінії відповідають аналітичному розв'язку, точками відмічені чисельні розв'язки отримані методом дискретних особливостей. Цифри 1,2, 3 відповідають першій другій та третій формі коливань.

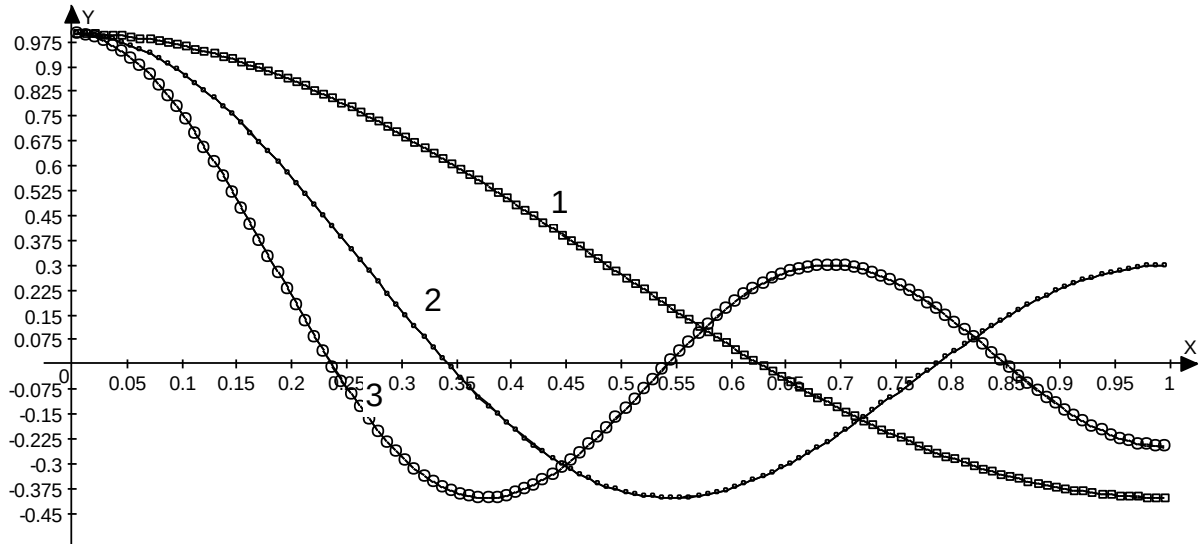


Рис. 3.3 Чисельні та аналітичний розв'язки крайової задачі

На рис. 3.4 подані форми коливань вільної поверхні рідини в циліндричній оболонці.

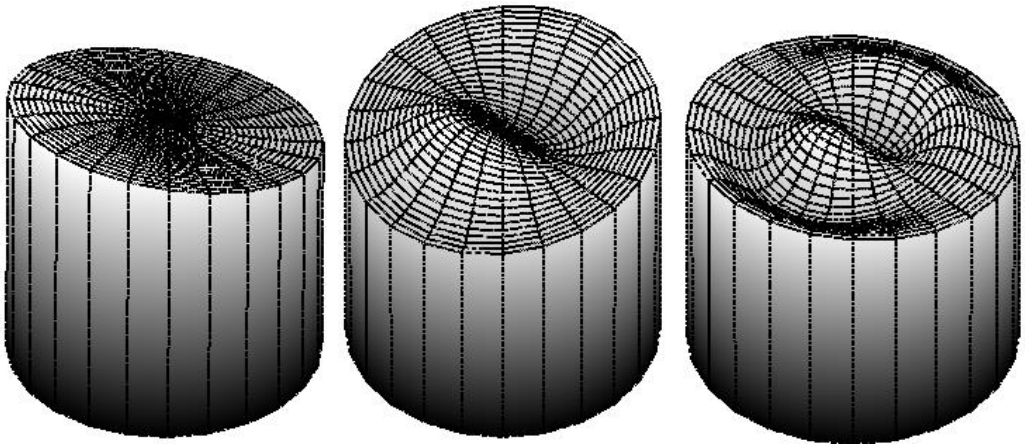


Рис. 3.4 Форми коливань вільної поверхні для $\alpha = 1$.

Як доведено в [47] форми коливань є лінійно-незалежними функціями, заданими на вільній поверхні в недеформованому стані, і можуть складати систему базисних функцій для розв’язання гідро пружній задачі в зв’язаному формулюванні.

Зауважимо, що метод граничних суперелементів дає більш високу точність в порівнянні з класичним методом граничних елементів при однаковій кількості обчислень. Про це свідчать дані, отримані в роботах авторів звіту [49], [50], [51].

3.3 Коливання рідини в жорсткому резервуарі.

Досліджено проблеми вільних та вимушених коливань рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з радіусом *R* і з двома вертикальними перегородками. Ця задача потребує визначення потенціалу з співвідношень (6). Схема резервуара наведена на рис. 3.5б). Нехай S_1 є змоченою поверхнею оболонки, а S_0 – вільною поверхнею рідини. Для порівняння результатів розглянемо також циліндричний резервуар без перегородок, рис. 3.5а). Це необхідно для з'ясування впливу перегородок на зміну рівня вільної поверхні при вимушених коливаннях. Розглядаються горизонтальні та вертикальні збудження, викликані періодичними навантаженнями. Припускається, що рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух, викликаний зовнішніми навантаженнями, є безвихровим. В цих умовах існує потенціал швидкостей Ф,

що задовольняє рівнянню Лапласа. Тиск рідини на поверхні резервуара визначається за допомогою лінеаризованого інтегралу Коші-Лагранжа. Наведемо основні співвідношення.

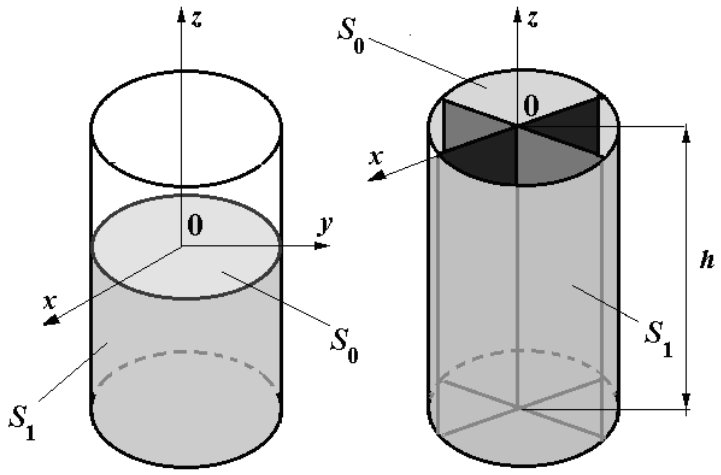
На змоченій поверхні оболонки задається умова непротікання

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_1} = 0.$$

На вільній поверхні рідини задаються кінематична та динамічна умови у вигляді

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0|_{S_0} = 0.$$

де ζ- функція, що описує форму вільної поверхні рідини.



а) б)

Рис. 3.5 Циліндричні резервуари з рідиною

Використовуємо підхід, заснований на використанні методу сингулярних інтегральних рівнянь та наступних розкладень:

$$\Phi = \sum_{\alpha=0}^{N} \cos\alpha\theta \sum_{k=1}^{M} \dot{d}_{\alpha k}(t)\varphi_{\alpha k}(r,z), \; \zeta = \frac{1}{g}\sum_{\alpha=0}^{N} \cos\alpha\theta \sum_{k=1}^{M} \chi_{\alpha k}^2 d_{\alpha k}(t)\varphi_{\alpha k}(r,z).$$

Тут α- це номер гармоніки, а k-номер форми коливань рідини, що відповідає даному значенню α.

Для функцій $\varphi_{\alpha k}$ розглядаються такі крайові задачі:

$$\nabla^2\varphi_{\alpha k}=0,\ \frac{\partial\varphi_{\alpha k}}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{S_1}=0,\frac{\partial\varphi_{\alpha k}}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{S_0}=\frac{\partial\zeta}{\partial t};\quad \frac{\partial\varphi_{\alpha k}}{\partial t}+g\zeta=0.$$

(24)

Диференціюємо друге рівняння у співвідношеннях (24) по t та підставимо вираження для ζ_t' з першої рівності в (24). Тут і далі припускаємо, що $\varphi_{\alpha k}(t,x,y,z)=e^{i\chi_k t}\varphi_{\alpha k}(x,y,z)$. Далі ми отримуємо послідовність задач на власні значення з такими крайовими умовами на вільній поверхні для кожної $\varphi_{\alpha k}$:

Ефективна чисельна процедура для розв'язання проблеми власних значень з використанням методу граничних елементів запропонована в [5].

Для визначення функцій $\varphi_{\alpha k}$, будемо використовувати метод граничних елементів в прямому формулюванні, запропонований C. Brebbia в [42]. опускаючи індекс αk, ми можемо записати основне співвідношення у формі

$$2\pi\varphi(P_0)=\iint_S q\frac{1}{|P-P_0|}dS-\iint_S\varphi\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\frac{1}{|P-P_0|}dS,$$

де $S = S_1 \cup S_0$; точки P і P_0 належать поверхні S. Як $|P - P_0|$ ми позначимо декартову відстань між точками P і P_0. Функція φ, визначена на поверхні S_1, є тиском на змоченій поверхні, та функція q, визначена на S_0, є потоком $q=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}$.

З використанням граничних умов приходимо до системи сингулярних інтегральних рівнянь у формі, отриманій в [41, 42]:

$$\begin{cases} 2\pi\varphi_1 + \iint\limits_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{r}\right) dS_1 - \frac{\chi_k^2}{g} \iint\limits_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 + \iint\limits_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dS_0 = 0, \\ \\ -\iint\limits_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{r}\right) dS_1 - 2\pi\varphi_0 + \frac{\chi_k^2}{g} \iint\limits_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 = 0. \end{cases}$$

Тут для зручності ми позначаємо через φ_0 значення потенціалу на вільній поверхні, як φ_1 - значення потенціалу на стінках оболонки.

Варто зазначити, що маємо два види ядер в інтегральних операторах, яки наведені вище. А саме, маємо

$$A(S,\sigma)\psi = \iint\limits_S \psi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS; \quad B(S,\sigma)\psi = \iint\limits_S \psi \frac{1}{|P-P_0|} dS; \quad P_0 \in \sigma. \tag{25}$$

В формулах (25) поверхні S та σ можуть бути різними або однаковими. Якщо поверхня S співпадає з поверхнею σ, то інтеграли в (25) сингулярні, і при їх чисельному визначенні необхідно приймати до уваги наявність цієї інтегрованої особливості. Вирази під знаком інтегралу тут є істотно неоднорідними, і стандартні квадратури втрачають точність.

Як і в [41,42] ми замінимо Декартові координати (x, y, z) на циліндричні (r, θ, z), проінтегруємо по z та θ, приймаючи до уваги, що

$$|P-P_0| = \sqrt{r^2 + r_0^2 + (z-z_0)^2 - 2rr_0\cos(\theta-\theta_0)}.$$

Тут r, θ і r_0, θ_0 радіуси-вектори і окружні координати точок P та P_0. Зобразимо невідомі функції у вигляді рядів Фур'є по окружній координаті

$$\psi(r,z,\theta) = \psi(r,z)\cos\alpha\theta; \quad i = 1,2,$$

Отримаємо інтегральні оператори в формі

$$\iint\limits_S \psi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS = \int\limits_\Gamma \psi(P)\Theta(P,P_0) d\Gamma; \quad \iint\limits_S \psi \frac{1}{|P-P_0|} dS = \int\limits_\Gamma \psi(P)\Phi(P,P_0) d\Gamma; \; P_0 \in \sigma.$$

Тут Г - твірна поверхні S, ядра $\Theta(P,P_0)$ та $\Phi(P,P_0)$ визначається в такий спосіб

$$\Theta(z,z_0)=\frac{4}{\sqrt{a+b}}\left\{\frac{1}{2r}\left[\frac{r^2-r_0^2+(z_0-z)^2}{a-b}\mathsf{E}_m(k)-\mathsf{F}_m(k)\right]n_r+\frac{z_0-z}{a-b}\mathsf{E}_m(k)n_z\right\},$$

$$\Phi(P,P_0)=\frac{4}{\sqrt{a+b}}\mathsf{F}_m(k),$$

де n_r, n_z - компоненти одиничної нормалі **n** до поверхні. Вище наведено такі позначення

$$\mathsf{E}_m(k)=(-1)^m(1-4m^2)\int_0^{\pi/2}\cos 2m\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta,$$

$$\mathsf{F}_m(k)=(-1)^m\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2m\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \qquad (26)$$

$$a=r^2+r_0^2+(z-z_0)^2, \quad b=2rr_0; \quad k^2=\frac{2b}{a+b}.$$

Припускаючи, що $m=0$ у співвідношеннях (26), отримуємо стандартні еліптичні інтеграли першого і другого роду**.**

Задача визначення амплітуди коливань рідини зводиться до такої системи звичайних диференційних рівнянь другого порядку:

$$\ddot{d}_{1k}+\chi_{1k}^2\left(1+\frac{a_z(t)}{g}\right)d_{1k}+a_x(t)F_{1k}=0;\ \ddot{d}_{0k}+\chi_{0k}^2\left(1+\frac{a_z(t)}{g}\right)d_{0k}=0;\ F_{1k}=\frac{(\rho,\varphi_{1k})}{(\varphi_{1k},\varphi_{1k})};\ k=\overline{1,M},\ (24)$$

$$a_z(t)=a_1\cos(\omega t), \quad a_x(t)=a_2\cos(\omega t)$$

До цієї системи додаються початкові умови:

$$d_{1k}(0)=0,\ k=\overline{1,M},\quad \dot{d}_{11}(0)=0.05,\quad \dot{d}_{1k}(0)=0,\quad k=\overline{2,M},$$
$$d_{0k}(0)=0,\ k=\overline{1,M},\quad \dot{d}_{0k}(0)=0,\quad k=\overline{1,M}.$$

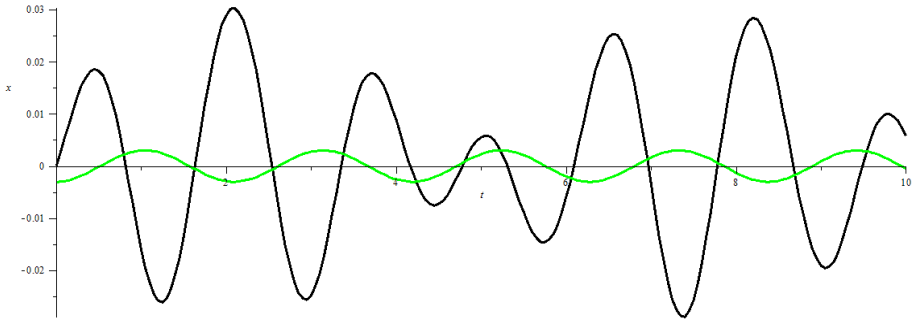
За допомогою методу, розробленого в [42], отримані власні частоти коливань рідини, їх значення наведені в таблиці Тут БП- це оболонка без перегородок, ВП- оболонка з вертикальними перегородками.

Таблиця 2

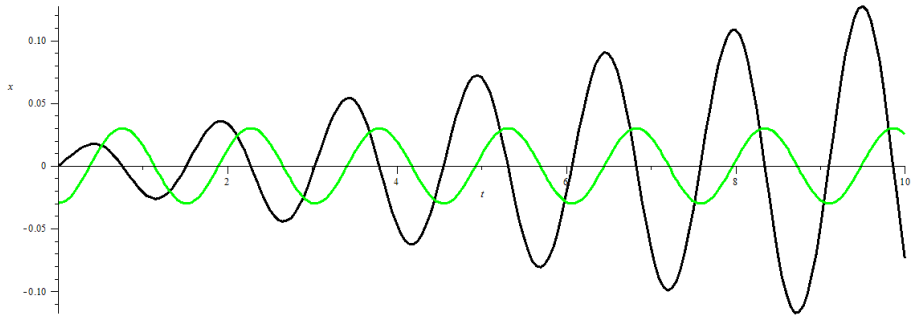
Частоти коливань рідини в оболонці

α	Тип оболонки	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4
0	БП	6.1248	8.2919	9.98475	11.4295
	ВП	6.1248	8.2919	9.98475	11.4295
1	БП	4.1424	7.2286	9.14726	10.7120
	ВП	5.4582	8.1067	9.87918	16574

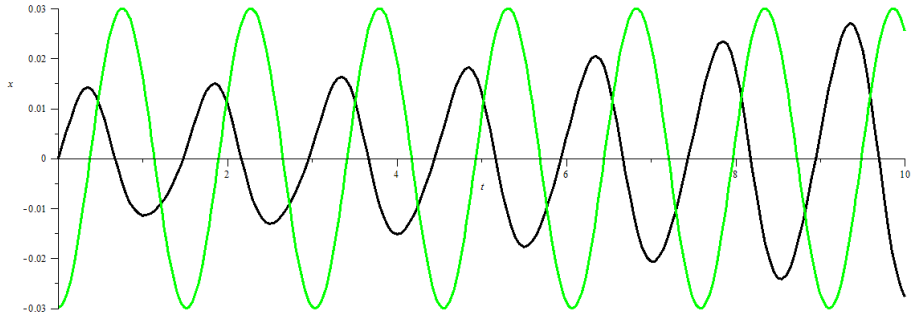
Систему (24) розв’язано при таких параметрах: а- ω=3Гц, б- ω=4.14Гц, в- ω=8.28Гц. Дані розрахунків наведені на рис 3.6. Тут зеленими лініями зображені графіки функції $a_x(t)=a_2\cos(\omega t)$. Чорними лініями зображені графіки зміни рівня вільної поверхні рідини. При ω=8.28Гц спостерігається явище параметричного резонансу, яке полягає у необмеженому зростанні амплітуди коливань вільної поверхні.



а)

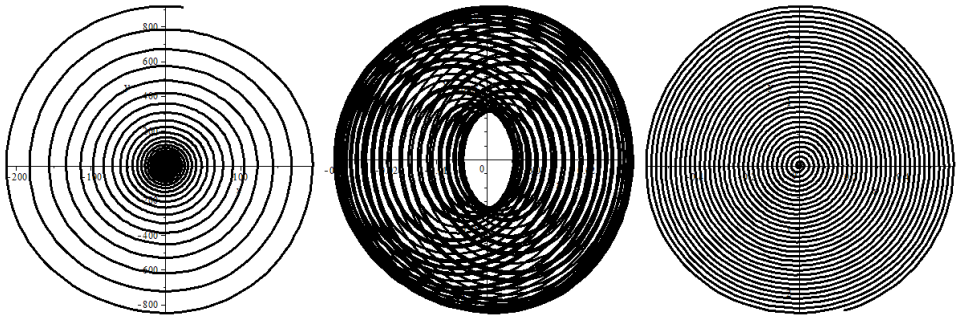


б)



в)

Рис. 3.6 Зміна рівня вільної поверхні у циліндричних резервуарах без перегородок

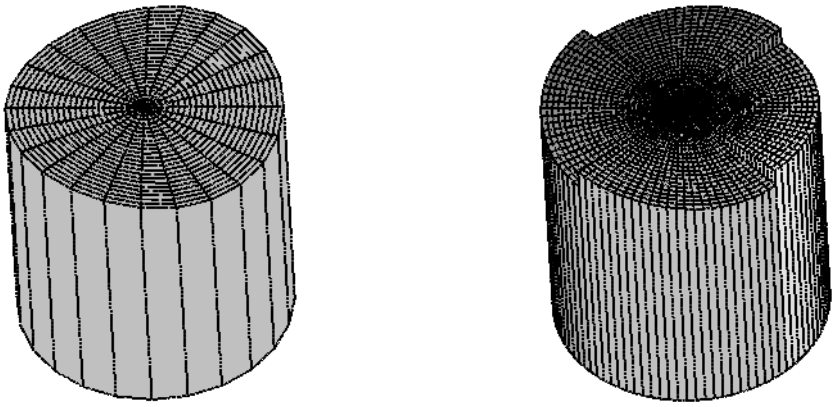


а б в

Рис. 3.7 Фазові портрети

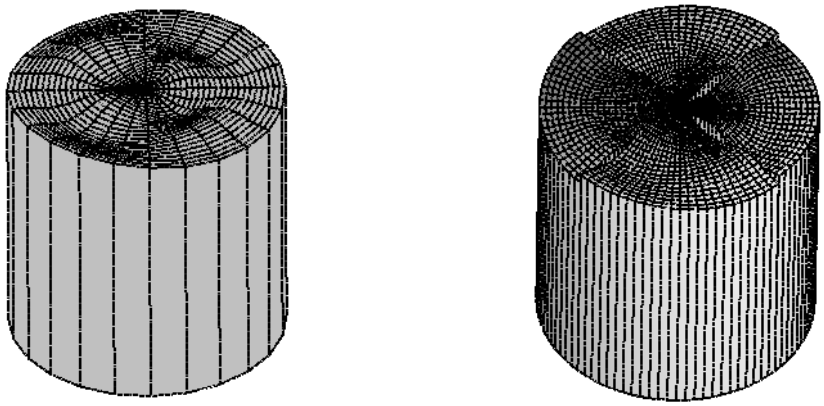
На рис. 3.7 зображені фазові портрети руху рідини, які відповідають таким частотам коливань:a-, b- ω=4.14Гц, ω=3Гц, c- ω=8.28Гц. Коли ω=4.14 Гц., маємо збігання з першою частотою антисиметричних коливань, при ω=3Гц маємо відстроювання від резонансних частот, при ω=8.28Гц відбувається параметричний резонанс. Рис 3.7а) відповідає зростанню амплітуди коливань, викликаному прикладеним вертикальним навантаженням, рис. 3.7в) відповідає параметричному резонансу, що відбувається при подвійній першій частоті. Таким чином, розроблений метод дозволяє надати рекомендації щодо відстроювання від небажаних резонансних частот.

Коливання вільної поверхні при m=1 зображені на рис. 8, 9 для першої і третьої форми коливань відповідно.



а) б)

Рис. 3.8 Перша форма коливань вільної поверхні рідини в циліндричних оболонках



а) б)

Рис. 3.9 Третя форма коливань вільної поверхні рідини в циліндричних оболонках

Рисунки 3.8а) та 3.9а) відповідають коливанням рідини в циліндричній оболонці без перегородок, а рисунки 3.8б) та 3.9б)- оболонці з вертикальними перегородками.

Рисунки 3.10 та 3.11 демонструють зміну рівня вільної поверхні за часом за дії горизонтального гармонічного збудження при частотах вимушених коливань ω=9.9 Гц та ω=5.5 Гц. Зауважимо, що при ω=5.5 Гц спостерігається режим биття.

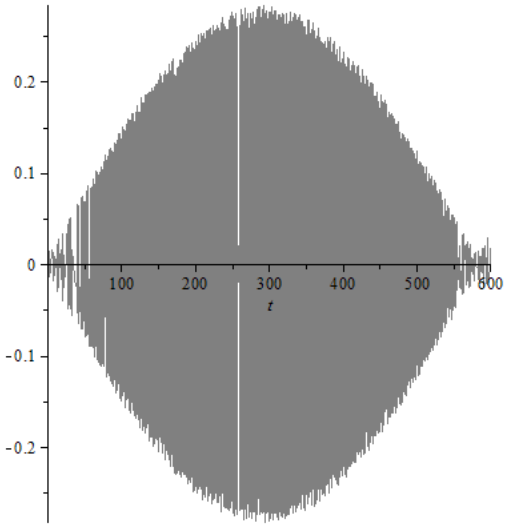


Рис. 3.10 Зміна рівня вільної поверхні за часом при ω=9.9 Гц

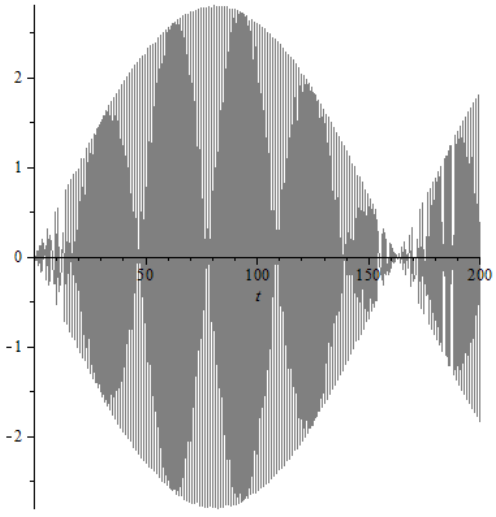


Рис. 3.11 Зміна рівня вільної поверхні при ω=5.5 Гц

Для числової симуляції сейсмічного навантаження обираємо

$$a_s(t) = 0.02\sin(\pi t/5)\cos(2\pi t), \quad 0 \le t \le 5$$
$$a_s(t) = 0, \quad t \ge 5,$$

Припустимо, що

$$\Omega_1 = \frac{12}{5}\pi, \quad \Omega_2 = \frac{9}{5}\pi.$$

Отримаємо таку систему в перетвореннях Лапласа

$$p^2 D_m + \omega_{1m}{}^2 D_m = -F_1\left(\frac{\pi 12}{5}\left(p^2 + \left(\frac{\pi 12}{5}\right)^2\right)(1-e^{-pT}) + F_2\left(\frac{\pi 9}{5}\left(p^2 + \left(\frac{\pi 9}{5}\right)^2\right)(1-e^{-pT})\right.\right.$$

Звідси маємо при t<T

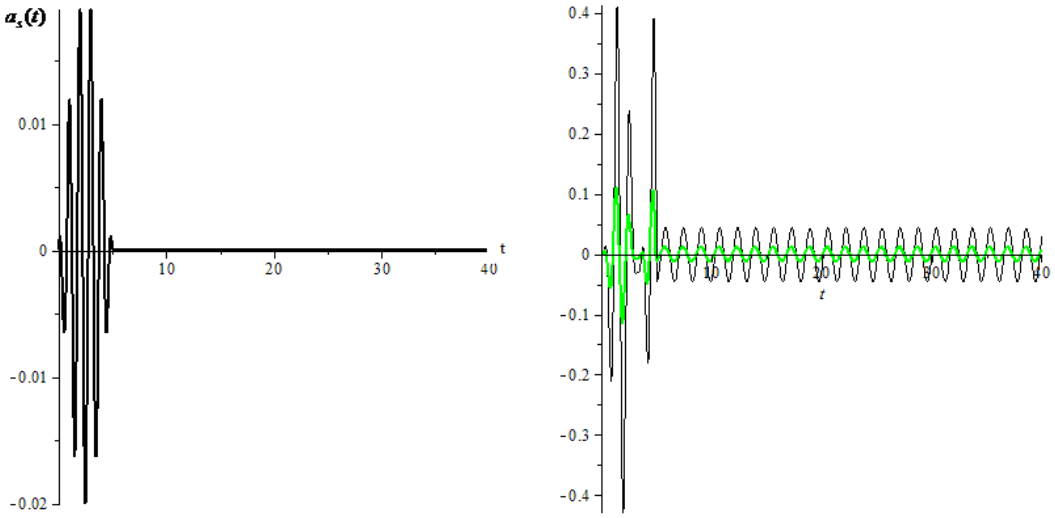
$$d_m = -\frac{F_1}{\Omega_1^2 - \omega_{1m}^2}\left[\frac{\Omega_1 \sin(\omega_{1m} t)}{\omega_{1m}} - \sin(\Omega_1 t)\right] + \frac{F_2}{\Omega_2^2 - \omega_{1m}^2}\left[\frac{\Omega_2 \sin(\omega_{1m} t)}{\omega_{1m}} - \sin(\Omega_2 t)\right]$$

та при $t>T$

$$d_m = -\frac{F_1}{\Omega_1^2 - \omega_{1m}^2}\left[\frac{\Omega_1 \sin(\omega_{1m}(t-T))}{\omega_{1m}} - \sin(\Omega_1 (t-T))\right] + \frac{F_2}{\Omega_2^2 - \omega_{1m}^2}\left[\frac{\Omega_2 \sin(\omega_{1m}(t-T))}{\omega_{1m}} - \sin(\Omega_2 (t-T))\right]$$

,

Рисунок 12а) демонструє характер сейсмічної загрузки, рисунок 12б) показує зміну рівня вільної поверхні рідини за часом. Зелена лінія відповідає рівню вільної поверхні рідини за наявності вертикальних перегородок.



a) b)

Рис. 3.12 Сейсмічне навантаження та зміна рівня вільної поверхні за часом

Для числового аналізу взаємодії системи «оболонка-рідина» для резервуара з перегородками розроблено числовий метод на основі методу граничних елементів. Досліджено поведінку рідини в циліндричних резервуарах без перегородок і з вертикальними перегородками. Установка вертикальних перегородок здвигає спектр резонансних частот в бік високочастотних коливань. Це дозволить визначити небажані частоти збудження на стадії проектування баків і запобігти втраті стабільності. Запропонований підхід дозволяє проводити чисельне моделювання резервуарів з перегородками різних форм для зберігання рідини замість проведення коштовних натурних експериментів.

ВИСНОВКИ

Таким чином, розроблено спеціальний програмний модуль для дослідження динамічних характеристик відповідальних оболонкових систем, заповнених рідиною, в широкому діапазоні конструктивних параметрів.

Запропоновано ефективну методику, засновану на удосконаленому методі граничних елементів для моделювання руху рідини в пружних та жорстких оболонках, та на поєднанні методів скінчених та граничних елементів та розкладань в ряди Фур'є при дослідженні коливань оболонок обертання, частково заповнених рідиною.

Наведено основні співвідношення задач гідропружних коливань оболонок при частковому заповненні рідиною.

Запропоновано новий метод, заснований на єдиному підході до дослідження динаміки незаповнених оболонок; визначення частот і форм коливань рідини в жорстких оболонках; визначенню частот і форм коливань оболонки з рідиною з урахуванням та без урахування сил тяжіння; визначення динамічних характеристик оболонок з рідиною, підданих дії різних зовнішніх впливів, включаючи сейсмічні навантаження.

Окреслені переваги запропонованого підходу. Серед них – засіб завдання вільної поверхні, що дозволяє аналізувати вплив рівня підйому рідини в резервуарі під дією зовнішніх зусиль без спрощуючих припущень. Крім того, відзначимо ефективність підходу, заснованого на редукції розглянутих тривимірних задач до одновимірних.

Побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення базисних функцій, які відповідають тиску рідини при різних формах коливань за фізичним змістом. При цьому застосовано метод, який дозволив звести двовимірні системи сингулярних інтегральних рівнянь до одновимірних. Об'єднання методів граничних і скінченних елементів дозволяє побудувати чисельні методи динамічного аналізу конструкцій, більш точні і ефективні в порівнянні з наявними аналогами.

Запропоновано метод граничних суперелементів. Надані формулювання крайових задач для плескання рідини в посудинах з перегородками. Побудовано системи граничних інтегральних рівнянь для визначення тиску на оболонки з вертикальними перегородками.

Проаналізовано влив наявності хрестовидних перегородок на амплітуди коливання рідини у циліндричному резервуарі під дією гармонічних, імпульсних та сейсмічних збуджень. Встановлено що влив перегородки суттєво зменшує амплітуди коливань рідини. Якщо частота сили що збуджує наближається до частоти власних коливань, спостерігається режим биття.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, заполненные однородной капельной жидкостью / Н.Е Жуковский. // В 7-и т.– М.; Л. –Гостехиздат. – 1949.–Т.–762 с.
2. *Авербух А.З.* Колебания элементов конструкций в жидкости /Авербух А.З., Р.И. Вейцман, М.Д.Генкин // М.: Наука.–1987.–157 с.
3. *Балабух Л.И.* Взаимодействие оболочек с жидкостью и газом /Л.И Балабух //Труды VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок .– М.: Наука. – 1966.–С. 935–944.
4. *Балабух Л.И.* Две задачи о собственных колебаниях упругих систем с жидким заполнителем /Л.И.Балабух, А.И Гиничев, А.Г. Молчанов //Расчеты на прочность.–1966.– № 1–С.386–407.
5. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. / В.В. Болотин //М.: Гостехиздат. – 1956. –600 с.
6. *Болотин В.В.* Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости / В.В. Болотин //Инж. сборник.–1956.– № 24.– С. 3–16.
7. *Буйвол В.Н.* Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости/ В.Н. Буйвол //Киев: Наук. думка.– 1975.–190 с.
8. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости/ А.С. Вольмир // М.: Наука. – 1976.– 416 с.
9. *Галиев Ш.У.* Динамика гидроупругопластических систем/ Ш.У. Галиев // Киев: Наук. думка. – 1981.– 276 с.
10. *Галкин М.С.* Определение присоединенных масс жидкости, частично заполняющей колеблющийся бак с деформированными стенками / М.С. Галкин // Колебания упругих конструкций с жидкостью.–Новосибирск: Новосибир. электротехн. ин-т. – 1973.– С. 28–29.
11. *Галкин М.С.* Теория колебаний упругих тел с деформируемыми полостями, частично заполненными сжимаемой жидкостью. / М.С.

Галкин // Ученые записки Центрального аэрогидродинамического ин-та.–1977.– Вып.8.– С. 90–96.

12. *Григолюк Э.И.* Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. / Э.И. Григолюк, А.Г. Горшков // Л.: Судостроение. – 1976. – 200 с.
13. *Гузь А.Н.* Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек./ А.Н.Гузь., В.Д. Кубенко// Киев: Наук. Думка – 198– 400 с.
14. *Ильгамов М.А.* Динамика упругих оболочек, содержащих акустическую среду с источниками / М.А. Ильгамов // Теория пластин и оболочек.– М.: Наука. 1971.–С. 99–12
15. *Ильгамов М.А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ / М.А. Ильгамов // М.: Наука. – 1969.–187 с.
16. *Лампер Р.Е.* К расчету собственных колебаний баков методом Ритца с варьируемым параметром/ Р.Е. Лампер // Труды VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок.– М.: Наука. – 1970.– С. 351-354.
17. *Луковский И.А.* Взаимодействие тонкостенных упругих элементов с жидкостью в подвижных полостях / И.А. Луковский, В.А. Троценко, В.И. Усюкин // Киев: Наук. Думка.– 1989.–240 с.
18. *Микишев Г.Н.* Динамика твердого тела с отсеками, содержащими жидкость/ Г.Н.Микишев, Б.Н. Рабинович // М.: Машиностроение. – 1971. – 563 с.
19. *Микишев Г.Н.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью/ Г.Н. Микишев, Б.Н. Рабинович // М.: Машиностроение.– 1968. – 532 с.
20. *Мнев Е.Н.* Гидроупругость оболочек/ Е.Н. Мнев, А.К.Перцев// Л.: Судостроение. – 1970.– 366 с.
21. *Рапопорт И.М.* Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью / И.М. Рапопорт // М.: Машиностроение. – 1967.– 359 с.
22. *Фролов К.В.* Колебания оболочек в жидкости / К.В. Фролов, В.Н Антонов //М.: Наука. – 1983.– 143 с.
23. *Шклярчук Ф.Н.* Динамика конструкций летательных аппаратов / Ф.Н.

Шклярчук //М.: Моск. авиационный ин-т. –1983.– 80 с.

24. *Шклярчук Ф.Н.* О приближенном методе расчета осесимметричных колебаний оболочек вращения с жидким заполнением / Ф.Н. Шклярчук //Изв. АН СССР. Механика.– 1965.–№ 6.– С.123–129.
25. *Шмаков В.Н.* К вычислению собственных колебаний жидкости в неподвижных сосудах / В.Н. Шмаков // Динамика упругих и твердых тел, взаимо-действующих с жидкостью.–Томск: Изд-во Томск. ун-та. – 1978.–С.157–16
26. *Шмаков В.Н.* О колебаниях непологих сферических оболочек. / В.Н. Шмаков // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.–1969.–№ 3.– С.177–185.
27. *Abramson H.N.*; Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers; Applied Mechanics Reviews, 16, 1963. PP. 501–506.
28. *Abramson H.N.;* The dynamic behavior of liquids in moving containers; NASA SP-106; 1966
29. *Popov G., Sankar S., Sankar T.S., and Vatitas G.H.*. 'Liquid Sloshing In Rectangular Road Containers, Computers Fluids, Vol. 21, No. 4, pp. 551-569, 199
30. *Popov G., Sankar S., Sankar T.S., and Vatitas G.H.* "Dynamics of liquid sloshing in horizontal cylindrical road containers," Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 207, 1993.
31. *Godderidge B., Tan M., Turnock S., and Earl C.*. A Verification and Validation Study of the Application of Computational Fluid Dynamics to the Modelling of lateral Sloshing. Ship Science Report No 140, Fluid Structure Interaction Research Group, University of Southampton, 2006.
32. *Celebi M.S., and Akyildiz H.*. Nonlinear Modeling of Liquid Sloshing in a Moving Rectangular Tank, Ocean Engineering, Vol. 29, pp. 1527-1553, 2001.
33. *Faltinsen, O.M., Rognebakke, O.F., Timokha, A.N.* Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin. Part 3: base aspect ratio perturbations. Journal of Fluid Mechanics, 551, pp. 93–116 , 2006.

34. *Wu, G.X., Ma, Q.W., Eatock Taylor, R.* Numerical simulation of sloshing waves in a 3-D tank based on a finite element methods. Applied Ocean Research 20, pp. 337–355, 1998.
35. *Wu, C.H., Ma, Q.W., Chen, B.F.* Sloshing waves and resonance modes of fluid in a 3-D tank by a time-independent finite difference method. Ocean Engineering, 36, pp. 500–510, 2009.
36. *Curadelli, O., Ambrosini, D., Mirasso, A., Amani, M.* Resonant frequencies in an elevated spherical container partially filled with water: FEM and measurement. Journal of Fluids and Structures 26, PP. 148–159, 2010.
37. *Alemi Ardakani, H., Bridges, T.J.* Shallow-water sloshing in vessels undergoing prescribed rigid-body motion in three dimensions. Journal of Fluid Mechanics 667, 2011. – PP. 474–519,.
38. *Weiß J.;* Smallslosh Eigenvalues and mechanical models (pendulum or springmass) for tanks with NEWTANK geometry; software manual and documentation; 2009.
39. *Ventsel E. S.* Free vibrations of shells of revolution filled with a fluid / E. S. Ventsel, V. Naumenko, E. Strelnikova, E. Yeseleva // Engineering analysis with boundary elements –2010. – 34 (10). – PP. 856–86
40. *Naumenko Y.V., Gnitko V.I., Strelnikova E.A.* Liquid Induced Vibrations of Truncated Elastic Conical Shells with Elastic and Rigid Bottoms International Journal of Engineering & Technology 2018, 7 (23), PP. 335–339.
41. *Gnitko V.V., Degtyariov K.G., Naumenko V.V., Strelnikova E.A.* Coupled Bem And Fem Analysis Of Fluid-structure Interaction In Dual Compartment Tanks. Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods, 2018, V6, N6, PP. 976– 988.
42. *Бреббия К.* Методы граничных элементов/ К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел // М. – Мир. 1987. – 524 с.
43. *Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик // М. –Физматгиз. –1963. – 1100 с.
44. *Хай М.В.* Двумерные интегральные уравнения типа ньютонова

потенциала и их приложения / М.В. Хай //Киев. – Наук. думка. – 1993 .– 252 с.

45. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н.Тихонов, А.А. Самарский // М. – Наука. –197 –736 с.
46. *Михлин С.Г.* Курс математической физики /С.Г. Михлин // М.: Физматгиз. – 1968. – 576 с.
47. *Gnitko V., Naumemko Y., Strelnikova E.* Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles. International Journal of Applied Mechanics and Engineering 22 (4), – 2017. – PP. 867–881.
48. *Мокеев В.В.* Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов/ В.В. Мокеев // Изв. РАН. Механика твердого тела.– 1998. – № 6.– С.166–174.
49. *Gnitko V.* Coupled multi-domain BEM and FEM for fluid-structure interaction analysis / V. Gnitko, V. Naumenko, U. Ogorodnyk, E. Strelnikova. // WIT Transaction on Modelling and Simulation. – 2013. – Vol.54. – PP. 33–44.
50. *Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko Y., Strelnikova E.* A comparative analysis of axisymmetric vibrations of conical and cylindrical fluid-filled elastic shells. Вісник Харківського національного університету імені ВН Каразіна, серія Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління 2018. – т. 38 – С. 33–41.
51. *Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y.* Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles. J. Modern Technology & Engineering – 2018–. 3 (1). – PP. 15–52