МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАУКОВО-НАВЧАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ
Кафедра комп'ютерної фізики

# ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до кваліфікаційної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр
«Комп'ютерне моделювання міцності та працездатності елементів гідротурбінного обладнання з урахуванням дефектів»

Виконав: студент 6 курсу, групи НФ-64
Маслов Д. Ю.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Комп'ютерна фізика
Науковий керівник: асистент Лістрова Д. В.
Науковий консультант: д. т. н., проф. Стрельнікова О.О.
Рецензент: д. т. н., с. н. с. Колодяжна Л. В.

Харків – 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут комп’ютерної фізики та енергетики

Кафедра комп’ютерної фізики

Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магістр Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Костянтин НЄМЧЕНКО

підпис

“____”_____2025 року

**ЗАВДАННЯ**

**НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ**

Маслову Дмитру Юрійовичу

1. Тема роботи «Комп’ютерне моделювання міцності та працездатності елементів гідротурбінного обладнання з урахуванням дефектів» керівник роботи: Стрельнікова Олена Олександрівна, доктор технічних наук, професор, затверджені наказом по університету від 20 січня 2025 року № 4201-5/147.

2. Строк подання студентом роботи 19.05.2025.

3. Перелік питань, які потрібно розробити:

1) провести аналіз сучасного стану питання моделювання міцності та працездатності елементів гідротурбінного обладнання з урахуванням дефектів;

2) здійснити огляд публікацій, присвячених дослідженню моделювання міцності та працездатності елементів гідротурбінного обладнання з урахуванням дефектів;

3) сформулювати задачу дослідження працездатності елементів

гідротурбінного обладнання;

4) сформулювати задачу вивчення впливу дефектів на працездатність конструкції;

5) провести дослідження працездатності елементів гідротурбінного обладнання з урахуванням дефектів;

6) побудувати алгоритми та комп’ютерні коди;

7) провести числові дослідження.

4. План роботи

| № з/п | Назви етапів роботи |
|---|---|
| 1 | Вибір теми, узгодження, а також затвердження її на кафедрі |
| 2 | Ознайомлення з літературними джерелами щодо працездатності елементів гідротурбінного обладнання з урахуванням дефектів |
| 3 | Формулювання проблеми визначення міцності та працездатності елементів гідротурбінного обладнання з урахуванням дефектів |
| 4 | Формулювання задачі вивчення впливу дефектів на працездатність елементів гідротурбінного обладнання |
| 5 | Побудова системи базисних функцій для розв’язання задачі |
| 6 | Зведення задачі про концентрацію напружень в елементах обладнання до сингулярних інтегральних рівнянь |
| 7 | Розвинення числового методу розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь. Проведення тестових розрахунків |
| 8 | Комп’ютерне моделювання міцності та працездатності елементі гідротурбінного обладнання з урахуванням дефектів |
| 9 | Визначення та формулювання висновків та перспектив подальшого дослідження |
| 9 | Подача науковому керівнику |
| 10 | Відгук, рецензія, підготовка до захисту |
| 11 | Попередній захист |
| 12 | Захист |

5. Дата видачі завдання 15 січня 2025 року

Студент _____ Дмитро МАСЛОВ
підпис
Керівник роботи _____ Дар’я ЛІСТРОВА
підпис

# ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ ТА АБРЕВІАТУР

МГЕ – метод граничних елементів

МСЕ – метод скінченних елементів

КІН – коефіцієнт інтенсивності напружень

ГІР – гіперсингулярні інтегральні рівняння

# РЕФЕРАТ

Маслов Дмитро Юрійович «Комп’ютерне моделювання міцності та працездатності елементів гідротурбінного обладнання з урахуванням дефектів»

Кваліфікаційна робота магістра з Комп'ютерної фізики. – Х.: ХНУ імені В. Н.Каразіна, 2025. – 52 с.

Робота присвячена розробленню методів комп’ютерного моделювання дослідження розвитку тріщин в елементах конструкцій силових машин. Розроблено чисельні методи та комп’ютерну технологію. Дослідження відбувається за таким алгоритмом: спочатку визначається напружено-деформований стан елементів конструкції за заданих навантажень і виділяється зона найбільшої концентрації напружень. Потім в цю зону поміщають модельну тріщину. Розраховано коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах тріщин і вирішено задачу про розвиток втомної тріщини для визначення кількості циклів до руйнування. Як контрольний тест, розглядається тріщина у формі кола в необмеженому просторі. Для оцінки напружено-деформованого стану використовується ефективний числовий метод, включаючи методи скінченних і граничних елементів. Точний розрахунок коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах тріщин зводиться до розв’язання гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Проаналізовано міцність лопатки паротурбінного двигуна. Додатково проведено аналіз втоми цього елемента конструкції при циклічному навантаженні. Практичне значення роботи полягає в можливості оцінки залишкового ресурсу конструкцій з урахуванням наявності тріщиноподібних дефектів. Новизна запропонованого підходу полягає в застосуванні методів скінченних і граничних елементів для отримання уточнених оцінок залишкового ресурсу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ПОШИРЕННЯ ТРІЩИНИ, РІСТ ВТОМНОЇ ТРІЩИНИ, ГІПЕРСИНГУЛЯРНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ.

## ABSTRACT

Maslov Dmytro "Computer Modeling of Strength and Performance of Hydroturbine Equipment Elements Considering Defects"

Master’s Qualification Thesis in Computer Physics. – Kharkiv: V. N. Karazin Kharkiv National University, 2025. – 52 pages.

The work is dedicated to the development of computer modeling methods for studying crack growth in structural components of power machines. Numerical methods and computational technology have been developed. The research follows this algorithm: first, the stress-strain state of the structural elements under specified loads is determined, and the zone with the highest stress concentration is identified. Then, a model crack is introduced into this zone. Stress intensity factors at the crack tips are calculated, and the problem of fatigue crack growth is solved to determine the number of cycles to failure. As a validation test, a circular crack in an infinite medium is considered. To assess the stress-strain state, an efficient numerical method is used, including finite element and boundary element methods. Accurate calculation of stress intensity factors at the crack tips is reduced to solving hypersingular integral equations. The strength of a steam turbine blade is analyzed. Additionally, a fatigue analysis of this structural element under cyclic loading is conducted. The practical significance of the results lies in the possibility of evaluating the residual life of structures considering crack-like defects. The novelty of the proposed approach consists in the application of finite and boundary element methods to obtain refined assessments of residual life.

KEYWORDS: CRACK PROPAGATION, FATIGUE CRACK GROWTH, HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATION.

# ЗМІСТ

ВСТУП.....8

1. ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ МІЦНОСТІ ТА ПРАЦЕЗДАТНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ ГІДРОТУРБІННОГО ОБЛАДНАННЯ З УРАХУВАННЯМ ДЕФЕКТІВ.....9

2. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ.....12

2.1. Основні рівняння для аналізу напружень в тілах з тріщинами.....12

2.2. Метод зважених нав'язок.....14

2.3. Гіперсингулярні інтегральні рівняння.....17

3. МЕТОДИ ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ГІПЕРСИНГУЛЯРНИХ РІВНЯНЬ.....19

3.1. Аналітичне та чисельне рішення гіперсингулярного рівняння у задачі визначення стаціонарного температурного поля у пластині з тріщиною.....19

3.2. Порівняння аналітичних та чисельних рішень гіперсингулярного рівняння у просторових задачах.....24

3.3. Чисельне визначення коефіцієнтів концентрації напруги в околі тріщини нормального відриву у формі правильного чотирикутника.....31

3.4. Метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь у задачі визначення стаціонарного поля температур у тілі з тріщиною.....33

3.5. Висновки за розділом.....37

4. РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ.....38

4.1. Еталонний тест.....38

4.2. Поширення тріщини в агрегатах силових машин.....40

ВИСНОВКИ.....46

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....47

# ВСТУП

Конструкційні матеріали незмінно містять різноманітні мікродефекти, які виникають у процесі виготовлення або експлуатації. Ці дефекти можуть істотно вплинути на безпеку і довговічність конструкцій. Розповсюдження втомної тріщини є основною причиною катастрофічних поломок залізничного транспорту, турбо- і гідрогенераторів, нафтосховищ, аварій з літаками і вертольотами. Втомні тріщини часто утворюються біля опорних поверхонь гідро- і газотурбінних енергоблоків. Спочатку ці тріщини настільки малі, що їх неможливо виявити навіть сучасними методами огляду. Однак вони викликають концентрацію напружень і поширюються під дією навантажень. Навіть якщо навантаження не перевищують номінальних значень, новоутворені тріщини починають повільно рости. Після досягнення критичної довжини несучий елемент раптово поглинає значну кількість кінетичної енергії, що призводить до катастрофічної поломки.

В даний час, коли значна частина енергетичного обладнання Україна майже вичерпала свій нормативний ресурс або зазнала пошкоджень внаслідок воєнних дій, оцінка залишкового ресурсу стала особливо актуальною.

Отже, питання, пов’язані з довговічністю, експлуатаційними характеристиками та залишковим терміном служби елементів конструкції з тріщинами, набули значного значення, викликаючи підвищений інтерес до вивчення механіки руйнування.

Це підкреслює необхідність розробки та вдосконалення чисельних методів і програмного забезпечення, здатного точно оцінювати конструкцію та термін служби елементів конструкції за наявності мікродефектів.

# 1. ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ МІЦНОСТІ ТА ПРАЦЕЗДАТНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ ГІДРОТУРБІННОГО ОБЛАДНАННЯ З УРАХУВАННЯМ ДЕФЕКТІВ

Дослідження динамічних процесів в елементах конструкцій експериментальними методами пов'язане зі значними матеріальними витратами, потенційними небезпеками та обмеженнями в отриманні детальних розподілів напружень, деформацій, переміщень і температур. Крім того, ці методи недостатньо точно описують явища виникнення, зростання та поширення тріщин і пошкоджень. Тому вкрай важливо використовувати комп'ютерне моделювання. Було запропоновано численні чисельні методи оцінки коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН). До них відносяться метод Галеркіна [1], метод скінченних елементів для симуляції КІН у балках з тріщинами [2], метод згладжених скінченних елементів для тривимірних тіл з тріщинами [3], розширений метод скінченних елементів [4], P-версія методу скінченних елементів із контурними інтегральними методами [5] та метод граничних елементів для двовимірних тіл з тріщинами [6]. У [7] КІН оцінювали теоретично та чисельно двома методами: методом віртуального закриття тріщини та J – інтегральними розрахунками. Метод граничних елементів використовується для розрахунків КІН у функціонально градуйованих пластинах у роботі [8]. Іншим важливим аспектом дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкції з тріщинами є поширення тріщини [9]. Зростання втомної тріщини є вирішальним явищем при оцінці структурної цілісності в різноманітних інженерних додатках. Точне прогнозування поширення тріщин є життєво важливим для забезпечення безпечної та надійної експлуатації конструкцій під час циклічного навантаження [10], [11]. Двовимірну постановку цієї проблеми розглянуто в [12], а експериментальні дослідження поширення тріщини в балках представлені в [13]. Тривимірний аналіз поширення втомної тріщини зварних сталевих балок на основі

глобально-локальної чисельної моделі обговорюється в [14]. Контроль процесу розповсюдження тріщини в конструкціях має вирішальне значення навіть після виявлення початкової тріщини.

Хоча виявлення наявності тріщини є важливим першим кроком, розуміння поведінки поширення тріщини не менш важливо. Для дослідження розвитку тріщин після виявлення доступні декілька програмних пакетів [15], [16]. Порівняльний аналіз ефективності цих пакетів наведено в [17]. Незважаючи на широкі дослідження, проблема поширення тріщин в цілому залишається невирішеною. Це зумовлює необхідність розробки передових чисельних методів, які демонструють ефективність і надійність у дослідженні процесів розповсюдження тріщин у реальних конструкціях.

Деякі приклади втомних тріщин наведено на рисунках 1.1, 1.2, 1.3:

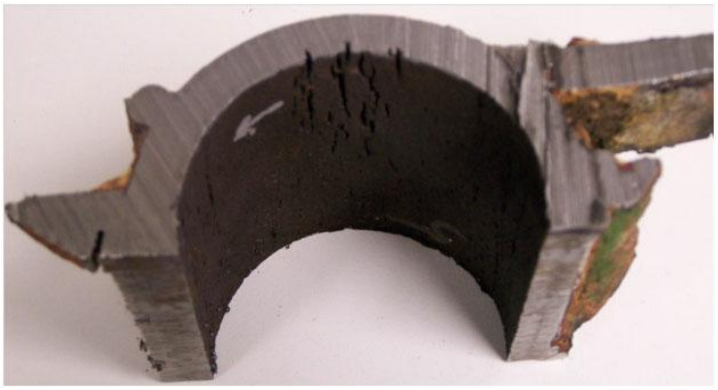


Рисунок 1.1 – Втомно-корозійна тріщина

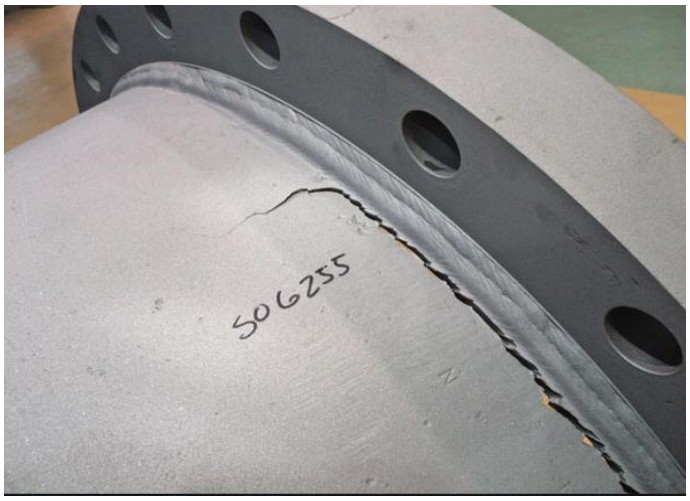



Рисунок 1.2 – Втомна тріщина в зоні високих температур

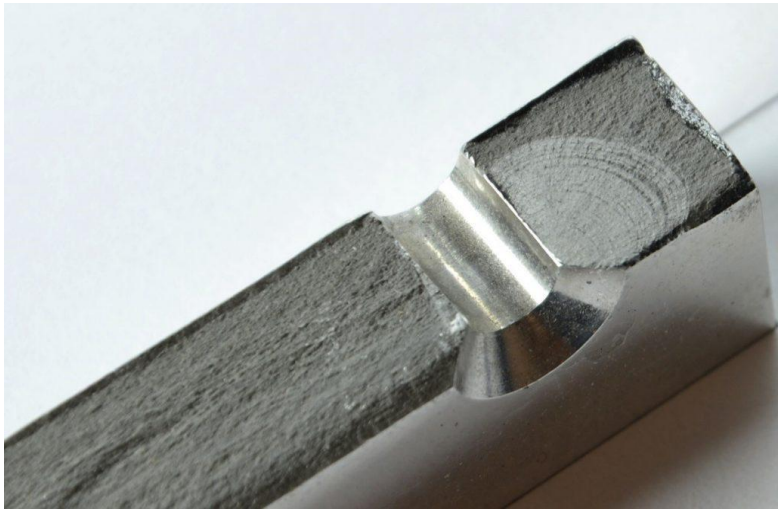


Рисунок 1.3 – Руйнування під дією циклічних навантажень

Ці дані свідчать про те, що розвинення втомних тріщин вкрай небезпечно для надійного функціонування конструкцій, розвиток комп’ютерних методів розрахунку конструкцій з тріщинами є актуальним з точки зору забезпечення надійної експлуатації енергетичного обладнання.

В роботі будуть використані числові методи розв’язання гіперсингулярних інтегральних рівнянь до яких зводяться задачі теорії тріщин [27-44].

# 2. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Для розробки програмного забезпечення використовується наступний алгоритм. Сформульовано систему диференціальних рівнянь для опису рівноваги пружного тіла, ослабленого системою тріщин, із необхідними граничними умовами. Потім застосовується метод зважених нев'язок. Такий підхід дозволяє використовувати як граничні, так і областно-орієнтовані чисельні методи. Точність цих методів перевіряється за допомогою порівняльного тесту. Даний алгоритм дозволив вирішити задачу розвитку втомної тріщини в лопатці парової турбіни.

## 2.1. Основні рівняння для аналізу напружень в тілах з тріщинами

Для визначення напружено-деформованого стану пружного тіла в області $\Omega$, обмеженої $\partial\Omega$, використовується система трьох диференціальних рівнянь другого порядку еліптичного типу, відомих як рівняння Ламе.

$$\mu\Delta U_j + (\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} = 0,\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \qquad \vartheta = \mathrm{div}\mathbf{U},\quad j = 1,2,3, \qquad (2.1)$$

де $\lambda = E\nu/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ є першим параметром Ламе, $\mu = E/[2(1+\nu)]$ – модуль зсуву (другий параметр Ламе), $E$ є модулем Юнга, $\nu$ є коефіцієнтом Пуассона, і $U$ є вектором переміщення.

Введемо поверхневий диференціальний оператор напруження в класичній пружності наступним чином:

$$\mathbf{T^{n(x)}\,U} = 2\mu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}} + \lambda\mathbf{n}\mathrm{div}\mathbf{U} + \mu(\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{U}), \qquad (2.2)$$

де $n$ є одиничним вектором нормалі до поверхні, що розглядається.

Нехай кінематичні умови першої крайової задачі задані на границі $\Omega_1$ а умови статичного навантаження другої крайової задачі визначені на границі $\Omega_2$, і $\partial\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. На поверхнях тріщин зазвичай вважаються відомими компоненти нормального та дотичного напруження. Отже, для визначення поля переміщень $U$ формулюється така крайова задача для тривимірного тіла $\Omega$, яке обмежене $\partial\Omega$ і містить систему тріщин $\Sigma_i$ ($i$ =1,...,$n$), $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i$.

$$\mu\Delta U_j + (\lambda + \mu)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j},\ j = 1,2,3,\ U_i(\mathbf{x}) = u_{il}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega_1,\ \mathbf{T}^{n(x)}\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega_2, \qquad (2.3)$$

$$(\mathbf{T}^{\mathbf{n(x)}}\mathbf{U}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})) = 0,\ (\mathbf{T}^{\mathbf{n(x)}}\ \mathbf{U}(x)\cdot\boldsymbol{\tau}_k(x)) = 0,\ \mathbf{x}\in\Sigma,\ k = 1,2.$$

Тут, n(x) і $\tau_k$(x) $k = 1,2$ являють собою складові нормалі і дотичної до поверхні $S$ в точці x.

Розглянемо крайову задачу (2.3), і виразимо її розв'язок як суму вектор-функцій U(x)= $u_0$(x)+u(x). Тут, вектор $u_0$(x) являє собою зміщення, яке відбулося б у твердому тілі без тріщин за тих самих поверхневих навантажень. Ці переміщення визначаються

$$\mu\Delta u_{j0} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = 0,\ u_{j0}(\mathbf{x}) = u_{il}(\mathbf{x}),\ j=1,2,3,\ \mathbf{x}\in\Omega_1,$$

$$\mathbf{T}^{n(x)}\mathbf{u_0}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega_2. \qquad (2.4)$$

При розв'язуванні крайової задачі (2.4), ми визначаємо області з найвищою концентрацією напружень. Вводимо $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Тоді ми припускаємо, що напруження $X_1(x) = T^{n(x)}\ u_0(x)$, отримані з розв'язку задачі (2.4), прикладаються до граниуь цих тріщин. Для визначення функції u(x), далі формулюємо наступну крайову задачу

$$\mu\Delta u_j + (\lambda + \mu)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = 0,\ u_j(\mathbf{x}) = 0,\ j=1,2,3,\ \mathbf{x}\in\Omega_1,\ \mathbf{T}^{n(x)}\mathbf{u}(\mathbf{x})=0,\ \mathbf{x}\in\Omega_2, \quad (2.5)$$

$$(\mathbf{T}^{n(x)}\mathbf{u}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{n}(\boldsymbol{x}))=(-\mathbf{X}_1(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})),\ (\mathbf{T}^{n(x)}\ \mathbf{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\tau}_k(\boldsymbol{x}))=(-\mathbf{X}_1(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\tau}_k(\boldsymbol{x})),\ \mathbf{x}\in\Sigma,\ k=1,2.$$

Функція U(x)= $u_0$(x)+u(x) тоді задовольняє рівняння (2.3).

### 2.2. Метод зважених нев'язок

Рішення крайової задачі (2.4) і (2.5) можна отримати за допомогою різних чисельних методів, у тому числі методу скінченних елементів МСЕ [18] і методу граничних елементів (МГЕ) [19]. Обидва ці методи базуються на методі зважених нев'язок. У цих підходах невідомі виражаються як коефіцієнти розкладання в ряд із використанням скінченних наборів базисних функцій $\{\psi_n\}|_{n=1}^{N_1}$. Ті самі базові функції використовуються як тестові функції. Спочатку розглядається формулювання скінченнихелементів. Апроксимація переміщення застосована у формі

$$u_0 = \{N^u\}\{u_s\}, \quad (2.6)$$

де $\{N^u\}$ представляє функції форми для переміщень, і $\{u_s\}$ позначає вузлові значення невідомих. Після інтегрування розв'язувальних рівнянь і зведення деяких об'ємних інтегралів до поверхневих інтегралів суінченно-елементне формулювання задачі (2.4) отримується наступним чином:

$$[K_s]\{u_s\} = \{f_s\}. \quad (2.7)$$

Тут $[K_s]$ позначає матрицю жорсткості, $\{f_s\}$ представляє відомий вектор навантаження.

Далі ми заглибимося в формулювання методу граничних елементів

(МСЕ). Ключовою особливістю МСЕ є використання сингулярних тестових функцій, які задовольняють диференціальне рівняння (2.1) скрізь, крім однієї сингулярної точки. Отже, як фундаментальні, так і сингулярні розв'язки рівняння (2.1) використовуються як тестові функції. Фундаментальний розв'язок в теорії пружності виводиться шляхом розгляду рівняння (2.1) з дельта-функцією в правій частині та представлений у такій матричній формі:

$$\Gamma_{ij}(x-y) = \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left[\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{\delta_{ij}}{|x-y|} + \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^3}\right]. \qquad (2.8)$$

Ця матриця, відома як матриця Кельвіна–Сомільяни, є симетричною, кожен її стовпець і рядок задовольняють рівнянню статичної рівноваги (2.1) у будь-якій довільній точці $x \in E^3$, крім випадків, коли x = y. Використовуючи фундаментальний розв'язок (2.8) і диференціальний оператор поверхневого напруження (2.2), сингулярний розв'язок рівняння (2.1) виводиться наступним чином

$$\mathbf{T^n}(\partial_x,\mathbf{n}(\mathbf{x}))\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \Gamma_1(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\ \ \Gamma_2(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = [\mathbf{T^n}(\partial_y,\mathbf{n}(\mathbf{y}))\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x})]'. \qquad (2.9)$$

Далі ми представляємо граничні інтегральні рівняння для розв'язування крайових задач (2.4) і (2.5). Вектор-функцію $u_0(x)$ можна інтерпретувати як узагальнений потенціал простого шару вздовж $\partial\Omega$, що можна записати як:

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \iint_{\partial\Omega} \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{p}_0(\mathbf{y})d\Omega_y, \qquad (2.10)$$

де $p_0(y)$ представляє невідомий вектор щільності. Вектор-функція $u_0(x)$ задовольняє рівняння Ламе для будь-якої щільності $p_0(y)$, що є інтегрованою по $\partial\Omega$. Підставляючи рівняння (2.9) у граничні умови рівняння (2.4), отримуємо інтегральні рівняння

$$\iint_{\partial\Omega} \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{p}_0(\mathbf{y})d\Omega_y = \mathbf{u}_l(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega_1,\ \mathbf{p}_0(\mathbf{x}) + \iint_{\partial\Omega} \Gamma_1(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{p}_0(\mathbf{y})d\Omega_y = \mathbf{X}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x}\in\Omega_2. \qquad (2.11)$$

Розглянемо визначення переміщень u(x), розглядаючи їх як суму узагальнених пружних потенціалів як простого, так і подвійного шарів

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \iint_{\Sigma} \Gamma_2(\mathbf{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y})d\Sigma_y + \iint_{\partial\Omega} \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{p}(\mathbf{y})d\Omega_y. \qquad (2.12)$$

Завдяки властивостям узагальненого простого та подвійного потенціалів шарів вектор-функція u(x), задовольняє рівняння (2.1). Застосовуючи граничні умови до u(x), ми отримуємо наступну систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\iint_{S} \Gamma_2(\mathbf{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y})dS_y + \iint_{\partial\Omega} \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{p}(\mathbf{y})d\Omega_y = 0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega_1, \qquad (2.13)$$

$$\iint_{S} \mathbf{T}^{n(x)}\Gamma_2(\boldsymbol{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y})dS_y - \mathbf{p}(\boldsymbol{x}) - \iint_{\partial\Omega} \Gamma_1(\boldsymbol{x}-\mathbf{y})\mathbf{p}(\mathbf{y})d\Omega_y = 0, \qquad \boldsymbol{x}\in\in\Omega_2$$

$$(\mathbf{T}^{n(x)} \iint_{\Sigma} \Gamma_2(\boldsymbol{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y})dS_y \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) + (\iint_{\partial\Omega} \Gamma_1(\boldsymbol{x}-\mathbf{y})\mathbf{p}(\mathbf{y})d\Omega_y \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) = (-\mathbf{X}_1(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})),$$

$$(\mathbf{T}^{n(x)} \iint_{\Sigma} \Gamma_2(\boldsymbol{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y})dS_y\cdot\boldsymbol{\tau}_k(\boldsymbol{x})) + (\iint_{\partial\Omega} \Gamma_1(\boldsymbol{x}-\mathbf{y})\mathbf{p}(\mathbf{y})d\Omega_y\cdot\boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{x}))$$
$$= (-\mathbf{X}_1(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\tau}_k(\boldsymbol{x})), \mathbf{x}\in\Sigma,\ k = 1,2.$$

Звернемо увагу, що для $\boldsymbol{x}\in\bigcup_{i=1}^{n}\Sigma_i$, в отриманих інтегралах порядок диференціювання та інтегрування не можна поміняти місцями. Ці інтеграли класифікуються як гіперсингулярні.

### 2.3. Гіперсингулярні інтегральні рівняння

Рівняння, отримані за допомогою представлення (2.12), перетворюються на систему гіперсингулярних інтегральних рівнянь (ГІР) по відношенню до α(y). Для нормальної відривної тріщини в необмеженому тілі ця система спрощується до гіперсингулярного рівняння [20]

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\alpha_3(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3} dS_y = Mq(\boldsymbol{x}),\ M = \frac{1-\nu}{\mu}, \tag{2.14}$$

де функція $q(x)$ характеризує навантаження на розтяг.

Для перевірки чисельних методів зручною моделлю є кругова тріщина в необмеженому пружному тілі при рівномірному розтягу. У цьому дослідженні тріщина у формі круга аналізується для оцінки коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) з використанням як методу граничних, так і методу скінченних елементів. Спочатку рівняння (2.14) застосовується до тріщини у формі «пенні», змодельованої як коло з радіусом R під одновісним рівномірним розтягом σ. Тут, $q(x) =$, і S являє собою кругову тріщину в рівнянні (2.14). Область S поділяється на $N_S$ плоских граничних елементів, які є трикутними або чотирикутними, як представлено формулою $S= \bigcup_{k=1}^{N_S} S_k$ і рисунком 1а). Нехай $x_{0j}, j = 1,2,\dots,N_S$ представляють точки коллокації. У цьому дослідженні ці точки вибираються центрами ваги граничних елементів. Потім розглядається гіперсингулярний інтеграл по апроксимованій поверхні, що призводить до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{N_S} H_{kj}\alpha_{3k} = Mq\left(\boldsymbol{x}_{0j}\right),\ \ j = 1,2,\dots N_S \tag{2.15}$$

щоб отримати значення $\alpha_{3k}$ невідомої щільності $\alpha_3(\boldsymbol{y})$. Тут

$$H_{kj} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_k} \frac{1}{|\boldsymbol{x_{0j}} - \boldsymbol{y}|^3} dS_k. \quad (2.16)$$

Під інтегралом у (2.16) розуміємо інтеграл у сенсі скінченної частини Адамара [20]. Оскільки область S у рівнянні (2.16) є колом, двовимірне гіперсингулярне рівняння спрощується до одновимірної форми [21]. Використовуючи циліндричну систему координат, виразимо координати як $x = \rho\, cos\, \varphi, y = \rho\, sin\, \varphi,,\ x_0 = \rho_0\, cos\, \varphi_0,\ y_0 = \rho_0\, sin\, \theta_0.$ Ми повинні внести наступні позначення $a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2,\ b = 2\rho\rho_0.$ За допомогою цих підстановок виходить одновимірне гіперсингулярне інтегральне рівняння:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \alpha_3\,(\rho)\, \frac{\rho E(k) d\rho}{(\rho + \rho_0)(\rho - \rho_0)^2} = \frac{1 - \nu}{\mu}. \quad (2.17)$$

Тут, E(k) позначає повний еліптичний інтеграл другого роду,

де $k^2 = 2b/(a + b)$.

Для чисельного вирішення рівняння (2.17) застосовано одновимірний МСЕ запропонований в роботі [21]. Інтервал [0,π] розбивається на $N_1$ одновимірних граничних елементів. Для обчислення внутрішнього еліптичного інтегралу використовується метод, розроблений у [22]. Для порівняння та підтвердження результатів, також використовується МГЕ.

# 3. МЕТОДИ ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ГІПЕРСИНГУЛЯРНИХ РІВНЯНЬ

У цьому розділі розглянуто деякі просторові крайові задачі механіки твердого тіла, що деформується, які зводяться до вирішення гіперсингулярних рівнянь, для яких відомі аналітичні рішення. Дані, отримані у цьому розділі, дозволяють обґрунтувати достовірність результатів магістерської роботи.

## 3.1. Аналітичне та чисельне рішення гіперсингулярного рівняння у задачі визначення стаціонарного температурного поля у пластині з тріщиною

Нехай у нескінченному тілі вздовж смуги $|x| \le l, \quad y = 0$ є термоізольована тріщина. Припустимо, що розподіл температури в тілі без тріщини описується заданою функцією гармонічної $t_0(x, y)$. Тоді температуру в тілі з тріщиною $T(x, y)$ можна подати у вигляді

$$T(x, y) = t_0(x, y) + t(x, y), \tag{3.1}$$

де $t(x, y)$ – збурене температурне поле, спричинене наявністю тріщини.

Внаслідок того, що функції $T(x, y)$ та $t_0(x, y)$ гармонічні, необхідно, щоб функція, що описує збурену температуру, задовольняла рівняння Лапласа

$$\Delta t(x, y) = 0. \tag{3.2}$$

Оскільки тріщина термоізольована, то на її берегах виконується умова

$$\frac{\partial T^+}{\partial y} = \frac{\partial T^-}{\partial y} = 0, \quad |x| \le l; \quad y = 0,$$

яку з урахуванням (3.1) можна записати як

$$\frac{\partial t^{+}}{\partial y}=\frac{\partial t^{-}}{\partial y}=-\frac{\partial t_0}{\partial y}=q(x); \qquad |x|\le l; \quad y=0. \tag{3.3}$$

З умов неперервності температури у вершинах тріщини випливає, що

$$t^{+}(\pm l,0)=t^{-}(\pm l,0). \tag{3.4}$$

Вимагаємо також виконання умови загасання збуреної температури на нескінченності

$$\operatorname{grad} t(x,y)\big|_{\infty}=0. \tag{3.5}$$

Шукатимемо функцію $t(x,y)$ у вигляді потенціалу подвійного шару з невідомою інтенсивністю $\Gamma(x)$, що обертається в нуль на кінцях інтервалу інтегрування

$$t(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}\Gamma(x)\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}dx. \tag{3.6}$$

Функція визначена формулою (3.6), автоматично задовольняє умови (3.2), (3.4), (3.5). Вимагаємо виконання граничної умови (3.3). Приходимо до гіперсингулярного інтегрального рівняння щодо $\Gamma(x)$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\Gamma(x)\frac{1}{(x-x_0)^2}dx=q(x_0), \tag{3.7}$$

інтеграл у якому розуміється у сенсі кінцевої частини за Адамаром.

Нехай у точці $(x_1, y_1)$діє джерело тепла потужністю $Q_0$ . Тоді функція $t_0(x, y)$визначається формулою

$$t_0(x,y) = m_0 \ln\left[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\right] \quad m_0 = -\frac{Q_0}{2\pi\lambda_t},$$

де $\lambda_t$ - коефіцієнт теплопровідності.

Потік тепла через лінію тріщини (права частина аналізованого гіперсигулярного рівняння) набуває вигляду

$$q(x_0) = m_0 \frac{y_1}{(x_0 - x_1)^2 + y_1^2}. \tag{3.8}$$

Показано, що при виконанні умови (3.5) гіперсингулярному рівнянню (3.7) можна надати форму

$$\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} \Gamma'(x)\frac{1}{x - x_0}dx = m_0 \frac{y_1}{(x_0 - x_1)^2 + y_1^2}. \tag{3.9}$$

Рішення рівняння (3.9) отримано у замкнутому вигляді

$$\Gamma'(x) = -\frac{m_0 y_1}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}}\int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t - x}\frac{1}{(t - x_1)^2 + y_1^2}dt. \tag{3.10}$$

Для обчислення інтеграла (3.10) введемо комплексні змінні. Покладемо $z_1 = x_1 + iy_1$. Зі співвідношення (3.10), переходячи до комплексних змінних,

отримаємо

$$\Gamma'(x)=\frac{m_0}{\sqrt{l^2-x^2}}\,\mathrm{Im}\frac{\sqrt{z_1^2-l^2}}{x-z_1}\,. \qquad (3.11)$$

Розглянемо випадок, коли $x_1=0$. З (3.11) випливає

$$\Gamma'(x)=\frac{m_0 x}{\sqrt{l^2-x^2}}\frac{\sqrt{l^2+y_1^2}}{x^2+y_1^2},$$

Інтегруючи отриману рівність по x і враховуючи умову (3.4), знаходимо

$$\Gamma(x)=0.5m_0\ln\frac{\sqrt{l^2+y_1^2}-\sqrt{l^2-x^2}}{\sqrt{l^2+y_1^2}+\sqrt{l^2-x^2}}\,. \qquad (3.12)$$

Таким чином, отримано аналітичне рішення гіперсингулярного інтегрального рівняння (3.7) з правою частиною у вигляді (3.8). Функція (3.12) є перепадом температури на берегах тріщини.

Для визначення збуреного температурного поля, спричиненого наявністю тріщини, використовуємо формулу (3.6). Зауважимо, що

$$\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}=\mathrm{Im}\frac{1}{x-z_0};\quad z_0=x_0+iy_0.$$

Тоді

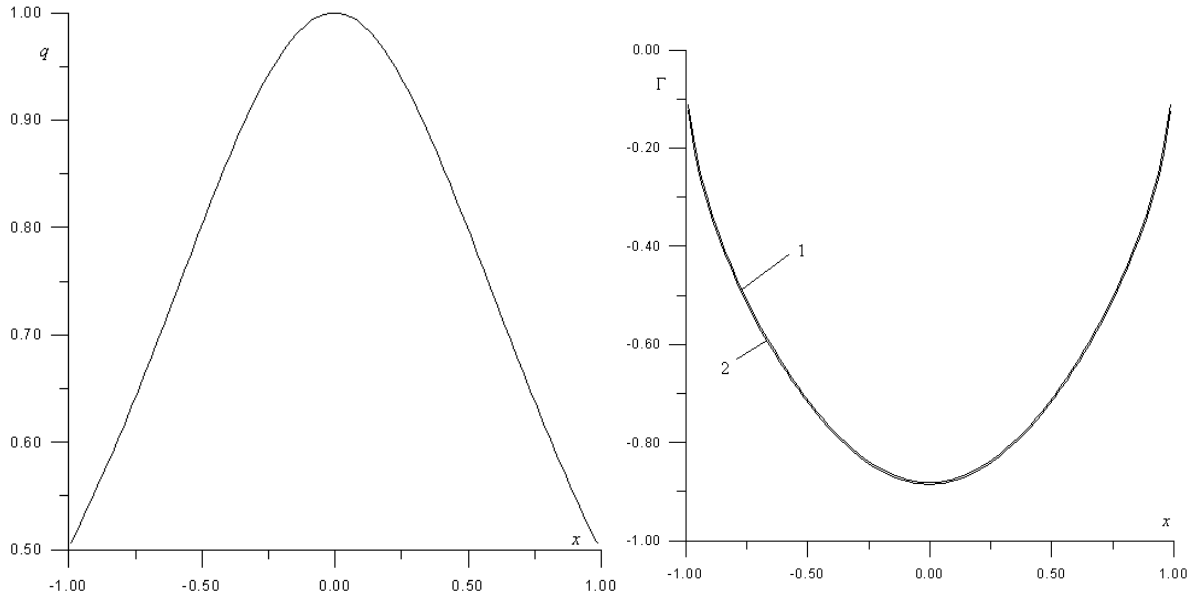
$$t(x_0,y_0)=\mathrm{Im}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}\Gamma(x)\frac{1}{x-z_0}dx\right]=0.5m_0\,\mathrm{Im}\left[\ln\frac{\sqrt{l^2+y_1^2}-\sqrt{l^2-z_0^2}}{\sqrt{l^2+y_1^2}+\sqrt{l^2-z_0^2}}\right].$$

Зазначимо, що вдалося у явному вигляді одержати перепад температури

на берегах розрізу в умовах дії джерела тепла заданої потужності та знайти розподіл обуреного температурного поля.

На рис. 3.1 а, б показані права частина (а) та рішення (б) гіперсингулярного інтегрального рівняння (3.7) з правою частиною (3.8). Цифрами 1 і 2 на рис. 3.1 б відзначені аналітичне і чисельне рішення, відповідно.

Чисельне рішення побудовано за допомогою методу граничних елементів із кубічною апроксимацією щільності. Вважалось, що $y_1=1$. Використовувалося 20 елементів. Було досягнуто точності $\varepsilon= 10^{-3}$ .При зменшенні $y_1$ точність чисельного рішення зменшується. Це пов'язано з тим, що права частина при $y_1=0$ має особливість.




а б

Рис. 3.1. Вид правої частини (а) та рішень (б) рівняння (3.7)

На рис. 3.2 показаний вид правої частини та рішення гіперсингулярного рівняння (3.7) при різних $y_1$ .

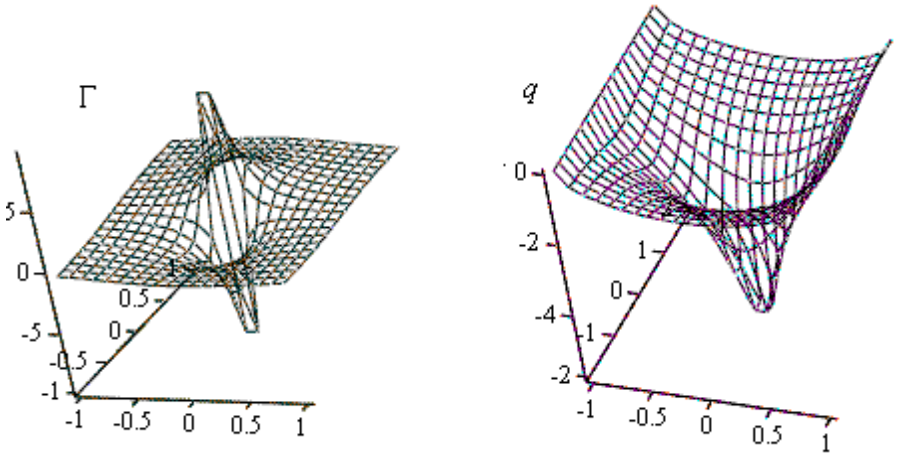



Рис. 3.2. Рішення та права частина рівняння (3.7) при різних $y_1$ .

Таким чином, задачу визначення стаціонарного поля температур у тілі з термоізольованою тріщиною зведено до вирішення гіперсингулярного інтегрального рівняння.

Отримано аналітичне рішення рівняння, що розглядається, проведено порівняння його з чисельним.

### 3.2. Порівняння аналітичних та чисельних рішень гіперсингулярного рівняння у просторових задачах

Розглянемо крайову задачу Неймана $R^3$ з розрізом у вигляді кола або еліпса (рис. 3.3).

До цього завдання можна звести визначення стаціонарного поля температур у тілі з тріщиною, розрахунок безциркуляційного обтікання круглої (еліптичної) пластини ідеальною стисливою рідиною, визначення концентрації напружень у тілі, ослабленого тріщиною нормального відриву у вигляді кола або еліпса.

Сформулюємо постановку задачі. У тривимірному просторі $R^3$ з розрізом у вигляді плоскої області S слід визначити функцію $f$(x), що задовольняє всюди поза S рівняння Лапласа, за наступної граничної умови на S

$$\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}^{\pm}} = f(\boldsymbol{x}). \qquad (3.13)$$

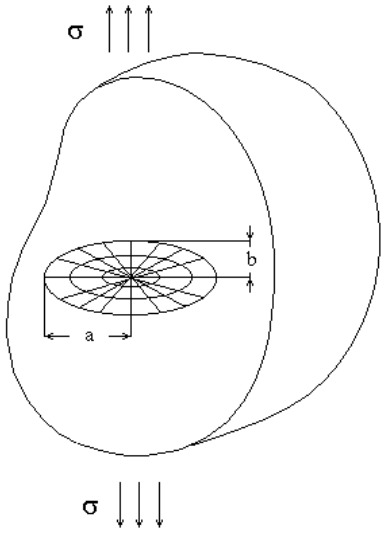



Рис. 3.3. Пружне тіло з розрізом у вигляді еліпса

На нескінченності вимагатимемо виконання умови загасання $\text{grad}\Phi\big|_{\infty} = 0$ . Шукатимемо функцію Φ( x ), що є рішенням поставленої задачі, у вигляді потенціалу подвійного шару, поширеного по області S

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma(\xi)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_{\xi}}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\xi|}dS .$$

Як зазначалося раніше, потенціал подвійного шару всюди поза S відповідає рівнянню Лапласа, на нескінченності - умови Зоммерфельда; а при переході через S потенціал Φ( x ) зазнає розриву і має безперервну нормальну похідну, якщо щільність Г(ξ) має похідні, що задовольняють умові Гельдера. Вибір такого подання для функції забезпечує можливість отримання перепаду тисків на несучій поверхні при вирішенні завдань про взаємодію пружних пластин з рідиною.

Таким чином, якщо як інтегральне подання рішення поставленої задачі вибрати потенціал подвійного шару, то для повного вирішення завдання

залишається лише задовольнити граничну умову (3.13).

Як показано раніше, завдання, що розглядається, зводиться до вирішення гіперсингулярного інтегрального рівняння.

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma(\xi)\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{n}_x \partial \boldsymbol{n}_\xi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\xi|}dS = f(\boldsymbol{x}) \quad . \tag{3.14}$$

Нехай область S є еліпс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Отримаємо аналітичне рішення гіперсингулярного інтегрального рівняння (3.14) з правою частиною f ( x ) = 1.

Якщо щільність перетворюється на нуль на межі області інтегрування і має похідні, що задовольняють умові Гельдера всюди всередині області S , то рівнянню (3.14) можна надати таку форму:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{(grad\Gamma, \boldsymbol{r})}{r^3}dS = 1; \quad \boldsymbol{r} = (x - x_0, y - y_0); \quad r = |\boldsymbol{r}| \quad . \tag{3.15}$$

Шукатимемо рішення рівняння (3.15) у вигляді

$$\Gamma(x, y) = C\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad . \tag{3.16}$$

Обчислимо приватні похідні функції Γ( x , y )

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = -\frac{C}{a^2}\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}; \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial y} = -\frac{C}{a^2}\frac{y}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

і підставимо отримані вирази в рівняння (3.15). Перейдемо до полярних координат $x - x_0 = \rho\cos\varphi; \quad y - y_0 = \rho\sin\varphi$ , dxdy = ρdρ dϕ. Рівняння еліпса у

введеній системі полярних координат набуде вигляду

$$\rho = -\frac{P}{K} + \sqrt{\frac{P^2}{K^2} + M}; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

де

$$P = \frac{x_0}{a^2}\cos\varphi + \frac{y_0}{b^2}\sin\varphi;$$

$$K = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2};$$

$$M = \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right)/K.$$

Зазначимо, що K >0 ∀ϕ, M >0 для точок всередині еліпса. У полярній системі координат вираз (3.16) набуде вигляду

$$\Gamma(\rho,\varphi) = C\sqrt{K}\sqrt{\frac{P^2}{K^2} + M - \left(\rho + \frac{P}{K}\right)^2}.$$

Величини K та M тут і вище не залежать від ρ.

Введемо такі позначення: $\tau_0 = P/K$, $l = \sqrt{\tau_0^2 + M}$. Тоді розглянуте сингулярне рівняння (3.15) у полярних координатах набуде вигляду

$$-\frac{C}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{K}}\int_0^{-\tau_0+l}\frac{P + K\rho}{\rho\sqrt{l^2 - (\rho + \tau_0)^2}}d\rho = 1. \qquad (3.17)$$

Розглянемо перший доданок у лівій частині (3.17). Оскільки $P(\varphi) = -P(\varphi + \pi); \quad K(\varphi) = K(\varphi + \pi)$, маємо

$$S_1 = -\frac{C}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{P d\varphi}{\sqrt{K}}\int_0^{-\tau_0+l}\frac{1}{\rho\sqrt{l^2-(\rho+\tau_0)^2}}d\rho =$$

$$= -\frac{C}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{P d\varphi}{\sqrt{K}}\left[\int_0^{-\tau_0+l}\frac{1}{\rho\sqrt{l^2-(\rho+\tau_0)^2}}d\rho - \int_0^{-\tau_0-l}\frac{1}{\rho\sqrt{l^2-(\rho-\tau_0)^2}}d\rho\right]. \quad (3.18)$$

Після перетворень отримаємо

$$S_1 = -\frac{C}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{P d\varphi}{\sqrt{K}}\int_{-l}^{l}\frac{1}{(\rho-\tau_0)\sqrt{l^2-u^2}}du = 0,$$

бо внаслідок нерівності $-\sqrt{\tau_0^2+M} < \tau_0 < \sqrt{\tau_0^2+M}$ внутрішній інтеграл (3.18) дорівнює нулю.

Перетворивши аналогічно другий доданок (3.17), встановлюємо

$$S_2 = -\frac{C}{4\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{K}\,d\varphi\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{l^2-u^2}}du = -\frac{C}{4}\int_0^{\pi}\sqrt{K}\,d\varphi = -\frac{C}{2ab}\int_0^{\pi/2}\sqrt{b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}\,d\varphi$$

.

Звідси випливає, що $S_2$ виражається через повні еліптичні інтеграли другого роду.

Визначивши постійну C рівності $S_1 + S_2 = 1$, встановлюємо аналітичне рішення рівняння (3.15)

$$\Gamma(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2b}{E(e)}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}; & e=\sqrt{1-b^2/a^2}; \quad a>b \\ -\dfrac{2a}{E(e)}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}; & e=\sqrt{1-a^2/b^2}; \quad a<b, \end{cases} \quad (3.19)$$

де e ексцентриситет еліпса.

При a=b=R отримуємо аналітичне рішення для кола з радіусом R

$$\Gamma(x,y) = -\frac{4}{\pi}\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,. \qquad (3.20)$$

Рівняння (3.15) для кола було вирішено чисельно для перевірки збіжності методу. Область інтегрування розбивалася на чотирикутні та трикутні підобласті (див. рис. 3.3), всередині яких щільність Γ( x ) вважалася постійною. Відрізки [0,2 π] і [0, R ] ділилися на $N_\phi$ та $N_R$ частин.

У табл. 3.1 представлені результати розрахунків за R =1.

Перший стовпець являє собою аналітичні значення густини, отримані за формулою (3.20), другий – значення густини в центрах ваги чотирикутних елементів уздовж радіусу при $N_\phi$= 30 і $N_R$ = 20, третій – відповідає чисельному рішенню при $N_\phi$= 60 і $N_R$ = 20. У четвертому стовпці наведено результати, отримані під час використання спеціальних кінцевих елементів.

Щільність усередині цих спеціальних елементів приймалася такою:

$$\Gamma_k(x,y) = A_k\sqrt{d(x,y)},$$

де d ( x , y ) - Відстань від точки ( x , y ) до межі k -го елемента;

Ak – сталі постійні.

Таблиця 3.1

Порівняння аналітичного та чисельного рішень

| $R$ | Аналітичне рішення | $N_\phi$= 30, $N_R$ = 20 | $N_\phi$= 60 $N_R$ = 20 | $N_\phi$= 60 $N_R$ = 20 асимптотика |
|---|---|---|---|---|
| 0.025 | -1.272841595 | -1.213396484 | -1.273952973 | -1.273954563 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.075 | -1.269653508 | -1.209761792 | -1.270651029 | -1.270667829 |
| 0.125 | -1.263253198 | -1.202545777 | -1.264094861 | -1.264067861 |
| 0.175 | -1.253591463 | -1.191673197 | -1.254215530 | -1.254256769 |
| 0.225 | -1.240592108 | -1.177062644 | -1.240936569 | -1.240936768 |
| 0.275 | -1.224148808 | -1.158612217 | -1.224155712 | -1.224154412 |
| 0.325 | -1.204120483 | -1.136197363 | -1.203738835 | -1.203745635 |
| 0.375 | -1.180324648 | -1.109666767 | -1.179513952 | -1.179589002 |
| 0.425 | -1.152527968 | -1.078835438 | -1.151263146 | -1.151864448 |
| 0.475 | -1.120432713 | -1.043474687 | -1.118711021 | -1.118990549 |
| 0.525 | -1.083657011 | -1.003297919 | -1.081507875 | -1.081998055 |
| 0.575 | -1.041705273 | -0.957940054 | -1.039204438 | -1.040216789 |
| 0.625 | -0.993922301 | -0.906926547 | -0.991213849 | -0.991245670 |
| 0.675 | -0.939418708 | -0.849624564 | -0.936749875 | -0.936967840 |
| 0.725 | -0.876942292 | -0.785161655 | -0.874723790 | -0.874907122 |
| 0.775 | -0.804638032 | -0.712280507 | -0.803557805 | -0.804246706 |
| 0.825 | -0.719549337 | -0.629054699 | -0.720815022 | -0.719081502 |
| 0.875 | -0.616404444 | -0.532257534 | -0.622361850 | -0.612361856 |
| 0.925 | -0.483789142 | -0.415668766 | -0.500051262 | -0.480051262 |
| 0.975 | -0.282920015 | -0.263781438 | -0.301128610 | -0.283011286 |

З наведених результатів зрозуміло, що при збільшенні кількості граничних елементів чисельне рішення сходиться до аналітичного.

Аналогічні результати були отримані під час вирішення гіперсингулярного рівняння (3.15) для еліпса. Зазначимо, що за e <1/10 спостерігалася втрата точності чисельного рішення.

### 3.3. Чисельне визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі тріщини нормального відриву у формі правильного чотирикутника

Розглянемо нескінченне тіло, ослаблене плоскою тріщиною у формі правильного чотирикутника S (рис. 3.4).

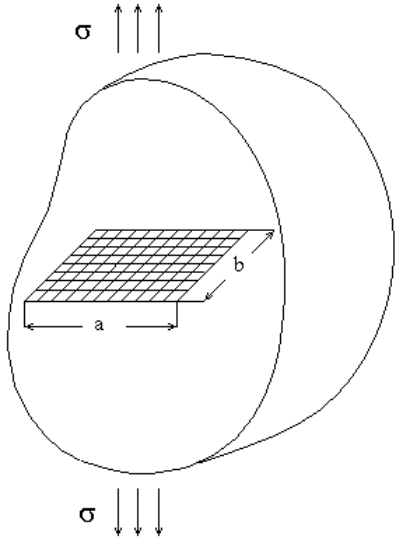



Рис. 3.4. Пружне тіло з плоскою тріщиною у вигляді прямокутника

Було показано, що розглянута задача описується наступним гіперсингулярним рівнянням:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\alpha_3(\xi)}{|x-\xi|^3} d_\xi S = Mp(x); \quad M = \frac{1-\nu}{G}, \tag{3.21}$$

де $\alpha_3(\xi)$– невідома функція, що характеризує зміщення протилежних точок поверхонь тріщини вздовж осі $Ox_3$;

x і ξ- точки області S з координатами ( $x_1$ , x2 ) і ( $\xi_1$ , $\xi_2$ ), відповідно ;

p ( x ) - відома функція;

G і ν– константи матеріалу.

При розв'язанні задач теорії тріщин необхідно обчислити значення коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі тріщини. Якщо задані тільки

напруження, що розтягують, то відмінним від нуля буде лише коефіцієнт $k_1(x)$. Він виражається через компоненти вектору переміщень:

$$k_1(\boldsymbol{x}) = \lim_{r \to 0} \sqrt{\pi / 2r}\, \frac{G}{1-\nu} u_3(\xi); \quad \xi \in S,$$

де $r = |\boldsymbol{x} - \xi|$ - відстань від довільної точки $\xi$ області S до фіксованої точки x контуру тріщини.

Встановлюємо, що

$$u_3(\xi) = \frac{\alpha_3(\xi)}{2}.$$

Тоді

$$k_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{G}{1-\nu} \lim_{r \to 0} \frac{\alpha_3(\xi)}{\sqrt{2r}}; \quad \xi \in S. \tag{3.22}$$

Гіперсингулярне рівняння (3.21) вирішено чисельно. Потім за формулою (3.22) визначався коефіцієнт інтенсивності напружень $k_1$ (x). Розглядалася тріщина у вигляді квадрата S = {–111 ≤ξ; ≤ξ–121 ≤}. Передбачалося, що p ( x ) = $p_0$ = const.

На рис. 3.5 показано залежність $k_1(\boldsymbol{x}) = k_1(\boldsymbol{x}) / k_\infty; \quad k_\infty = \frac{2p_0}{\sqrt{\pi}} \frac{G}{1-\nu}$. Тут представлені значення $k_1$(x), обчислені зазначеним методом при розбиття області S на 400 граничних елементів з постійною апроксимацією щільності та введення кінцевих елементів. Подальше збільшення кількості елементів не призвело до суттєвої зміни результатів. Наведено графіки коефіцієнта інтенсивності лише з одного боку квадрата, оскільки всі його боку перебувають у однакових умовах.

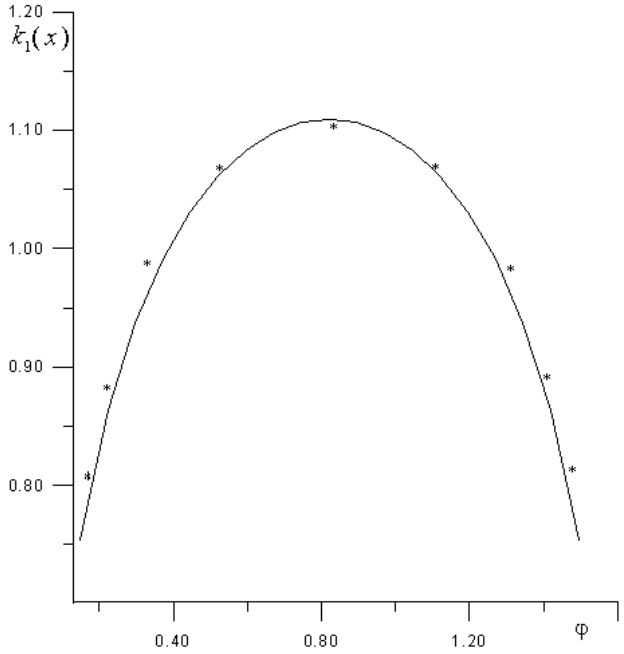



Рис. 3.5. Порівняння коефіцієнта інтенсивності напруги з даними роботи [46]

Суцільна лінія є результатами обчислення $k_1$ (x), проведеного автором . Крапками показані значення, наведені у [46]. Для зручності порівняння з даними [46] на рисунку наведено значення кутової координати $\phi(0< \phi< \pi/2)$ точки x = (1,0).

Бачимо, що результати, отримані за двома методиками, досить близькі. Певна розбіжність має місце у вершинах квадрата S . Це пояснюється зміною характеру поведінки густини при прагненні точки спостереження до кутової точки. Ця зміна не враховується у межах запропонованого варіанта чисельного методу розв'язання гіперсингулярного рівняння.

### 3.4. Метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь у задачі визначення стаціонарного поля температур у тілі з тріщиною

Задача визначення стаціонарного поля температур у тривимірному тілі без тріщин за допомогою методів теорії потенціалу вирішувалося багатьма авторами. Розроблено ефективні чисельні алгоритми. У цьому підрозділі задача визначення температурного поля в тілі з тріщиною зведена до

гіперсингулярного рівняння. Надано його чисельне рішення.

Нехай необмежене тривимірне тіло ослаблене тріщиною, що займає обмежену плоску область S. Вважаємо, що розподіл температури $T_0(x)$ у тілі без тріщини відомий. Тоді температуру в тілі з тріщиною $T(\boldsymbol{x})$ можна подати у вигляді

$$T(\boldsymbol{x}) = T_0(\boldsymbol{x}) + t(\boldsymbol{x}),$$

де $t(\boldsymbol{x})$ – обурене температурне поле, спричинене наявністю тріщини.

Внаслідок того, що функції $T(\boldsymbol{x})$ та $T_0(x)$ гармонічні, необхідно, щоб функція, що описує збурену температуру, задовольняла рівняння Лапласа.

Задача знаходження стаціонарного поля температур у тілі з розрізом S зводиться до визначення функції $t(\boldsymbol{x})$ та описується такими рівняннями:

$$\Delta t(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial t(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}^{\pm}} = -\frac{\partial T_0(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}}, \ \boldsymbol{x} \in S, \tag{3.24}$$

$$\operatorname{grad} t(\boldsymbol{x}) \Big|_{\infty} = 0, \tag{3.25}$$

де n - нормаль до S.

Як інтегральне уявлення для вирішення задачі (3.23)–(3.25) виберемо потенціал подвійного шару, поширений по поверхні S

$$t(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \vartheta(\xi) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_\xi} \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \xi|} dS_\xi, \tag{3.26}$$

де невідома щільність $\vartheta(\xi)$ - Функція, визначена на S .

Як зазначалося, потенціал подвійного шару всюди поза S задовольняє рівнянню Лапласа (3.23), на нескінченності – умові Зоммерфельда, тобто. умові (3.25); при переході через S потенціал t( x ) зазнає розриву і має безперервну нормальну похідну, якщо похідні щільності $\vartheta(\xi)$ задовольняють умові Гельдера. Таким чином, якщо як інтегральне уявлення вибрати потенціал подвійного шару (3.26), то для повного вирішення завдання залишається лише вимагати виконання співвідношення (3.25).

Вважатимемо, що стаціонарне поле температур у тілі без тріщини індукується джерелом тепла, розташованим на відстані d від площини тріщини в точці з координатами ($x_0$, $y_0$, d ) (рис. 3.6) . Тоді функція $T_0$( x ) та її похідна за нормаллю до S представлені у вигляді

$$T_0(\boldsymbol{x}) = \frac{\alpha}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+d^2}}, \qquad \frac{\partial T_0(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}} = \frac{\alpha d}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+d^2}^3}$$

,

де α- інтенсивність джерела тепла.

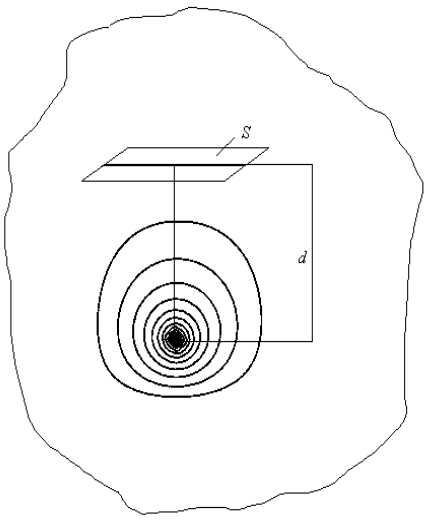



Рис. 3.6. Температурне джерело в тілі з тріщиною

Підставляючи інтегральне уявлення (3.26) у співвідношення (3.25), приходимо до гіперсингулярного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \vartheta(\xi)\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{n}_x \partial \boldsymbol{n}_\xi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\xi|}dS_\xi = \frac{\partial T_0(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}} \qquad (3.27)$$

З вищевикладеного ясно, що потенціал подвійного шару найбільш зручний як інтегральне уявлення розв'язання задачі.

Завдання (3.23) - (3.25) вирішено чисельно для тріщини, що займає квадратну область S = [0,2]×[0,2]. Джерело тепла поміщався в точку з координатами $(x_0, y_0) = (1,1)$ .

На рис. 3.7 показані графіки розподілу перепаду температури на поверхнях тріщини (на середній лінії квадрата) при різному видаленні джерела тепла від тріщини. Криві 1 - 5 відповідають значенням d = 10; 5; 2.5; 1.25; 0.625 відповідно.

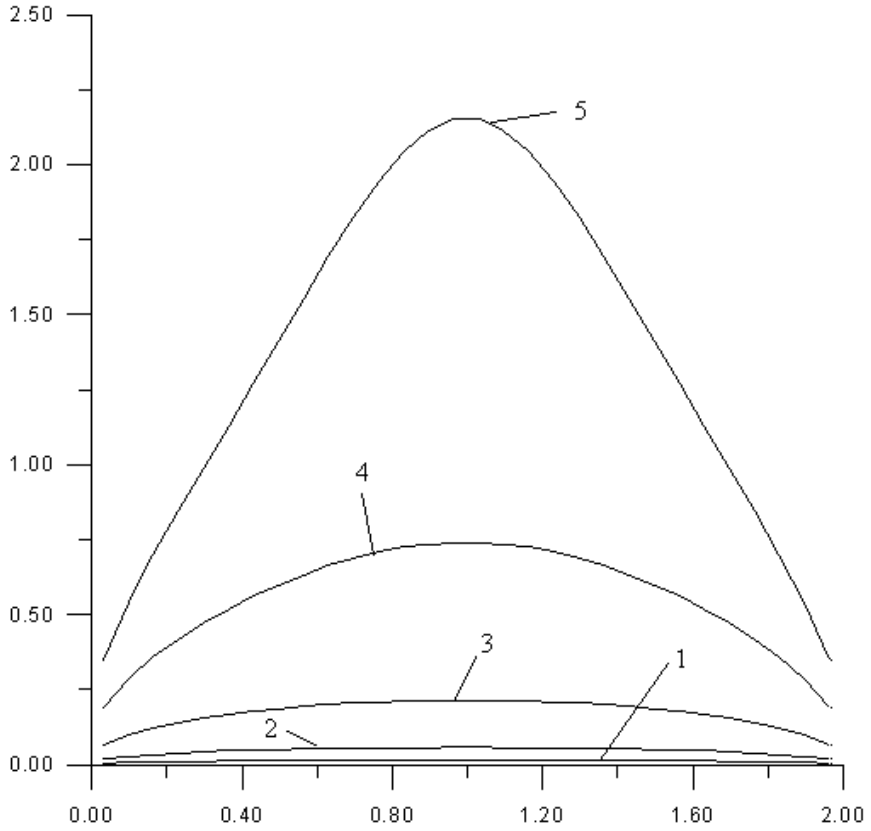



Рис. 3.7. Перепад температури на поверхнях тріщини

Таким чином, метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь вдалося застосувати для вирішення завдання визначення температури в тілі з тріщиною.

### 3.5. Висновки за розділом

У цьому розділі розглянуто плоскі та просторові завдання, які зводяться до граничних інтегральних рівнянь, для яких або вдається побудувати аналітичні рішення, або опубліковані експериментальні дані.

Побудовано низку аналітичних рішень гіперсингулярних рівнянь, що виникають у плоских та просторових задачах. До них відносяться аналітичне, рішення гіперсингулярного рівняння, що описує температурне поле в задачі про визначення стаціонарного поля температур в пластині з тріщиною при дії джерела тепла.

Чисельно визначено коефіцієнти концентрації напружень в околі тріщини нормального відриву у формі правильного чотирикутника.

Показано, що чисельні рішення гіперсингулярних рівнянь добре узгоджуються з аналітичними та чисельними результатами інших авторів.

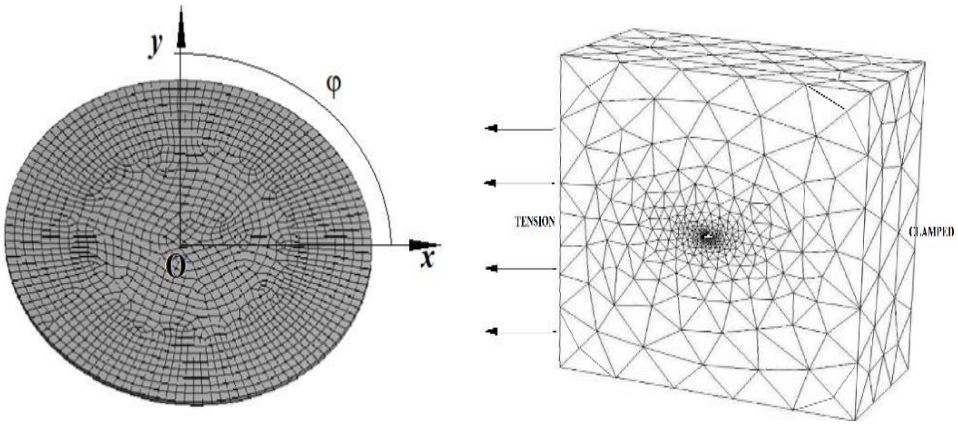
Наведені дані дозволяють судити про достовірність одержаних результатів.

# 4. РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

Хоча МСЕ дають більш точні результати, їх застосування обмежується більш простими конструкціями. Тому важливим кроком є проведення тестових розрахунків на простих прикладах для оцінки необхідної кількості скінченниxx елементів, що забезпечує проведення розрахунків складних конструкцій з необхідною точністю.

## 4.1. Еталонний тест

Розглянуто тестовий приклад для центральної тріщині у формі «пенні» в необмеженому тілі, яке піддається рівномірному навантаженню, рис. 4.1.




а) б)

Рис. 4.1. Кругова тріщина а) МГЕ дискретизація б) МСЕ дискретизація

Для розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень використовуються різні чисельні методи, включаючи метод скінченних і граничних елементів. Потім результати порівнюються з аналітичним рішенням, що дозволяє визначити оптимальну кількість необхідних скінченних елементів.

Проаналізовано тріщину у формі кола радіусом R при одновісному розтягу σ. МГЕ використовується для моделювання тріщини в необмеженому тривимірному просторі за допомогою двох формулювань на основі гіперсингулярних інтегральних рівнянь.

Перше формулювання стосується рівняння (2.14), тоді як друге стосується аксіально-симетричного випадку, описаного рівнянням (2.17). Для чисельного моделювання були обрані параметри R=0.005m і σ=1 MPa. Дискретизація поверхні S на граничні елементи проілюстрована на рисунку 4.1a). Загальна кількість плоских трикутників і чотирикутників, використаних у чисельному розв'язуванні рівняння (2.14), склала $N_S$=9326. Цей інтервал [0,π] буде ділитись на $N_1$=120 одновимірні граничні елементи. Аналітичний розв'язок рівняння (2.17) з правою частиною $f(\rho_0) = -.1$ було отримано в [7] як $\alpha_3(\rho) = 4\sqrt{R^2 - \rho^2}/\pi$.

У аналізі лінійної пружної напруги коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) є ключовими параметрами, які описують поля напружень та зміщення поблизу вершини тріщини. Ці фактори відіграють важливу роль у прогнозуванні поширення тріщин і потенційного руйнування конструкції. Для випадку тріщин у формі кола для точного опису стану деформації у вершині тріщини необхідний лише коефіцієнт інтенсивності напружень $K_I$. Аналітичний вираз для $K_I$ для кругової тріщини радіусом R при одновісному розтягу σ має вигляд $K_I = 2\sigma\sqrt{\pi R}/\pi$ [7]. У контексті теорії гіперсингулярних інтегральних рівнянь [20] цей КІН можна виразити через компоненти вектора зміщення наступним чином:

$$K_1(\boldsymbol{x}) = \lim_{r\to 0}\sqrt{\pi/2r}\,\frac{\mu}{1-\nu}\,u_3(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y} \in S, \tag{4.1}$$

де $r = |x - y|$ являє собою відстань від довільної точки y біля вершини тріщини до точки x на контурі тріщини, при цьому компонента зміщення задовольняє $\lim_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}} u_3(\boldsymbol{y}) = \alpha_3(\boldsymbol{x})/2$. У таблиці 4.1 представлені числові результати для $K_I$, отримані з використанням розв'язків рівнянь (2.14) і (2.17), і порівняння їх із чисельним розв'язком з цим the МГЕ. Розглянутоє тріщину у

формі кола всередині прямокутного зразка, як показано на рисунку 4.2 a). Сітка скінченних елементів складається з 43930 елементів, половина сітки показана на рисунку 4.2 b). Результати в таблиці 4.1 демонструють точність і надійність як МСЕ, так і МГЕ. КІН розраховується в різних точках уздовж контуру тріщини, що відповідають різним кутам φ, як показано на рисунку 4.1 a).

Таблиця 4.1

Порівняння безрозмірних$K_1/\sqrt{R}$ числові та аналітичні оцінки

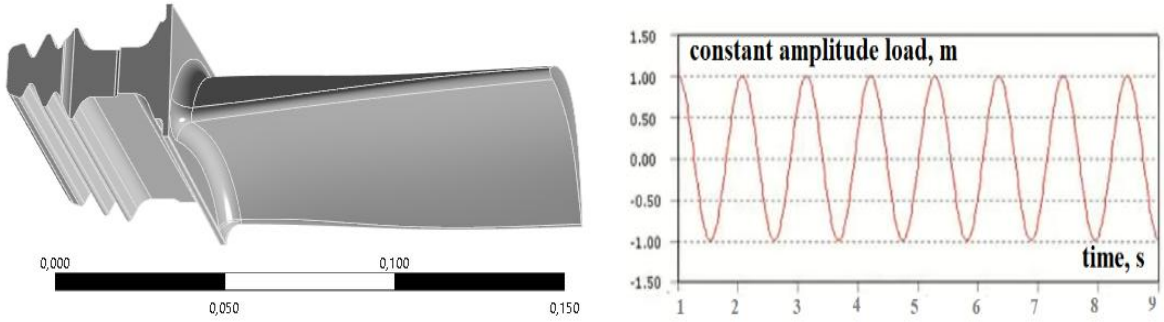
| Ступінь, ϕ | Аналітичні значення | МСЕ, двовимірний ГІР, (2.14) | МСЕ, одновимірний ГІР, (2.16) | МГЕ |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 1.1283 | 1.1322 | 1.1299 | 1.1422 |
| 30 | 1.1283 | 1.1295 | 1.1284 | 1.1421 |
| 50 | 1.1283 | 1.1288 | 1.1283 | 1.1420 |
| 70 | 1.1283 | 1.1284 | 1.1283 | 1.1420 |
| 90 | 1.1283 | 1.1283 | 1.1283 | 1.1420 |

Найбільш точні результати досягаються за допомогою одновимірного ГІР. Однак метод обмежено лише круговими та еліптичними областями інтегрування.

### 4.2. Поширення тріщини в агрегатах силових машин

Проаналізовано міцність і залишковий ресурс лопатки турбінного двигуна. Лопатка працює в турбінному двигуні зі швидкістю обертання 3500 об/хв і піддається дії відцентрових сил. Вона надійно закріплений на диску радіусом 1 метр за допомогою фіксуючого механізму, рисунок 4.2. На рисунку 4.2 a) показана спрощена модель лопаті гідротурбіни, що містить фіксуючий механізм і галтель в точці кріплення, де лопатка з’єднується з ободом. В якості матеріалу використано сталь 12Х13, яка має такі механічні властивості:

щільність 7720 кг/м³, Модуль Юнга 210 ГПа, коефіцієнт Пуассона 0,3, межа текучості в діапазоні від 580 до 620 МПа.



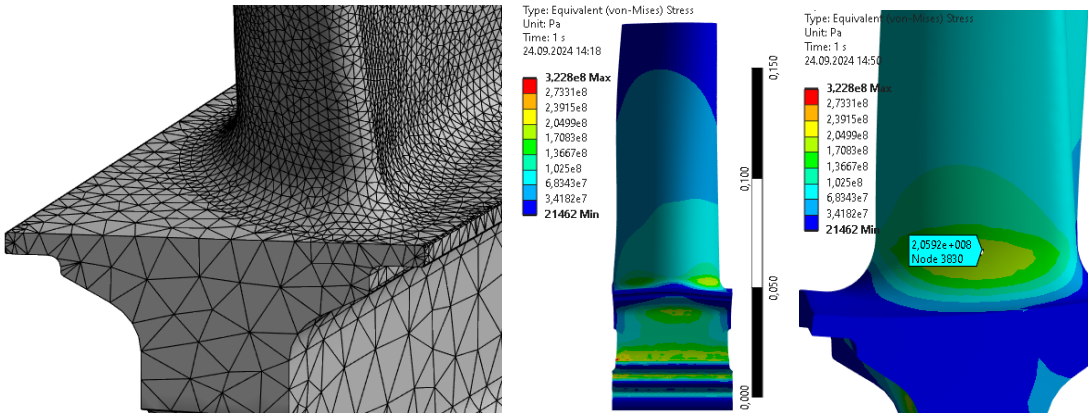

а) б)

Рис. 4.2. Геометрична модель лопатки турбіни (а) і розподіл навантаження (б)

Геометричні розміри: висота лопаті 120 мм, довжина 50 мм, максимальна товщина 10 мм, загальна висота з механізмом фіксації 175 мм. Лопатка працює в турбінному двигуні зі швидкістю обертання 3500 об/хв, відчуваючи відцентрові сили. Вона жорстко закріплений на диску радіусом 1 метр за допомогою замкового механізму. У процесі роботи лопатка піддається стаціонарним циклічним навантаженням, викликаним пульсаціями, зміною умов роботи, зупинками та іншими факторами.

Навантаження, які виникають, є нестаціонарними. Однак цей розподіл можна отримати лише шляхом експериментальних вимірювань. Отже, стаціонарний циклічний розподіл, показаний на рисунку 2 б), будемо використовувати як спрощений аналог. Спочатку було виконано аналіз напружень-деформації для елемента конструкції без дефектів згідно з рівняннями (2.4). Метод скінченних елементів був застосований для вирішення рівнянь (2.4), як описано в [9], [10]. Для аналізу міцності була створена тетраедральна сітка скінченних елементів із різними розмірами елементів, що містить 124 000 елементів, частково показана на рисунку 4.3 а). Результати аналізу без тріщини виявили розподіл навантаження по лопаті. Максимальне навантаження, яке становило 206 МПа, спостерігалося в корені лопаті, зокрема

на переході між радіусом виточки та тілом лопаті, рис. 4.3 б). Максимальні напруги, що спостерігаються в конструкції, значно нижчі межі текучості матеріалу, що свідчить про достатню міцність лопаті та очікуваний тривалий термін служби. Аналіз втоми при циклічному навантаженні [26], [27] з амплітудою від -1 до 1 продемонстрував високу довговічність, що перевищує $10^6$ циклів.




а) б)

Рис. 4.3. Сітка скінчкнних елементів (а) та еквівалентний розподіл напружень (б).

Як показав попередній аналіз, конструкція без дефектів демонструє відмінну міцність і довговічність. Більшість конструкцій повністю відповідають виробничим стандартам і не мають значних дефектів. Але що, якщо тріщина утворюється в точці максимального навантаження на лопасть? Щоб дослідити це, ми вводимо напівеліптичну тріщину з радіусами 0,35 мм і 0,15 мм в область майже максимального навантаження в поточному режимі кінцевих елементів, рис. 4.4.

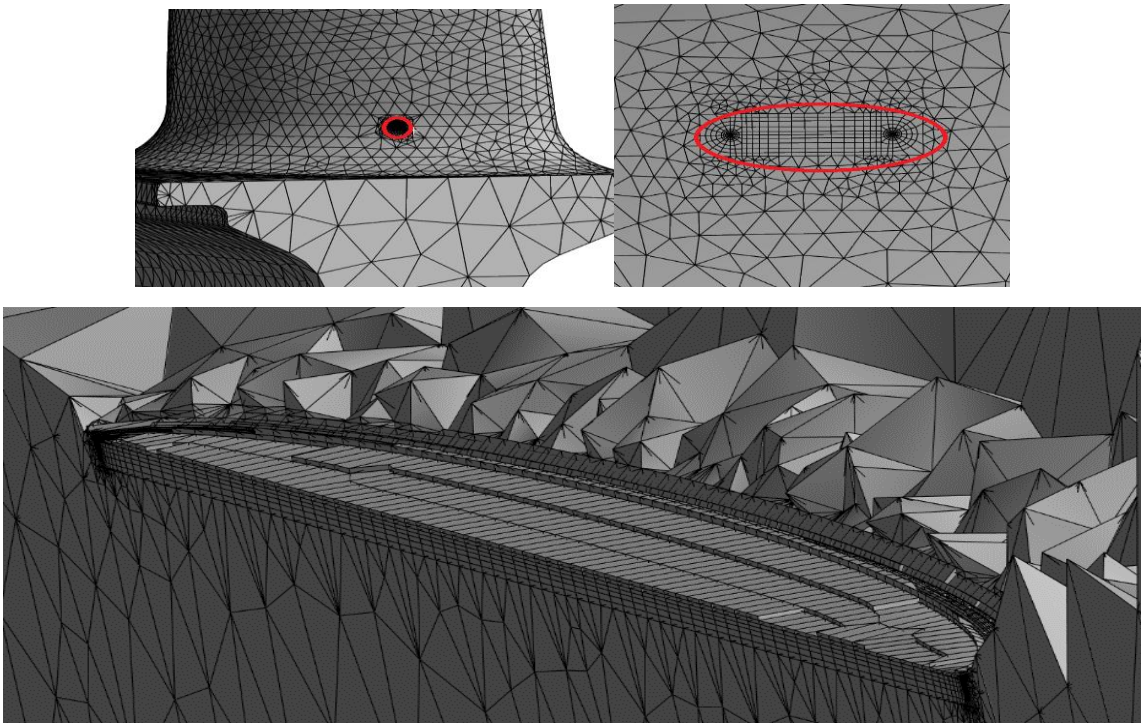
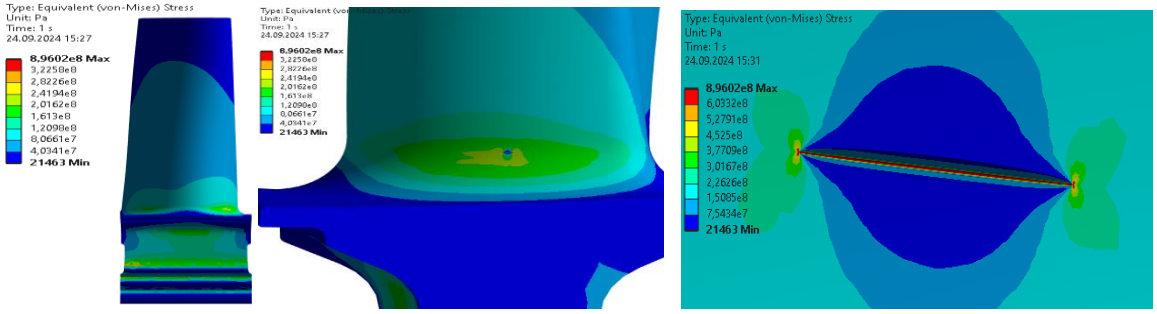


Рис. 4.4. Скінченно-елементна сітка лопатки газової турбіни з напівеліптичною тріщиною

Отриманий розподіл еквівалентних напружень фон Мізеса в конструкції дуже нагадує розподіл моделі без тріщин. Однак значний сплеск напруженеь, досягаючи максимум 896 МПа, виникає поблизу тріщини. При цьому рівень і розташування мінімального напруження залишаються незмінними (рис. 4.5 а). Розглянемо область навколо тріщини на рис. 4.5 б).




а) б)

Рис. 4.5. Еквівалентний розподіл напружень в лопаті з тріщиною: (а) в цілому (б) поблизу тріщини

Важливо відзначити, що скачки напружень виникають із зони контакту між фронтом тріщини та поверхнею лопаті. Глобальне максимальне напруження 896 МПа в області розташоване майже посередині фронту тріщини, як показано на рис. 4.6.

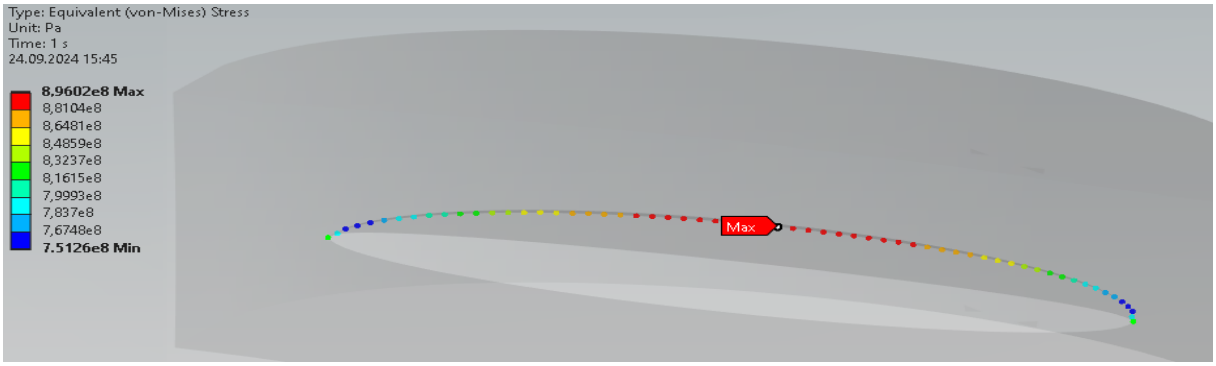



Рис. 4.6. Розподіл еквівалентних напружень по фронту росту тріщини

Рисунок 4.7 ілюструє розподіл значень J-інтегралу вздовж фронту тріщини, що забезпечує оцінку швидкості розсіювання енергії, пов’язаної з ростом тріщини.

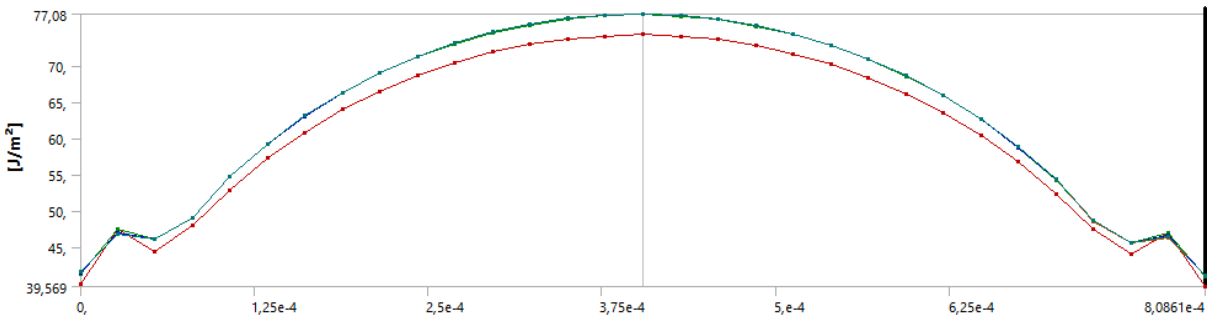
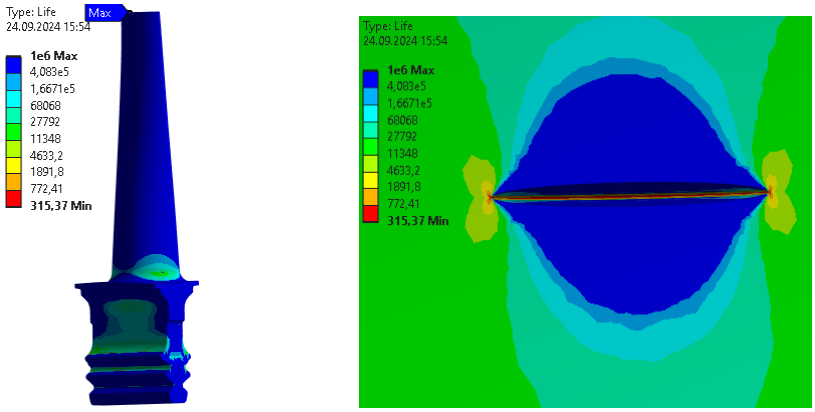



Рис. 4.7. Розподіл значень J-інтегралу по фронту тріщини

Аналіз втоми при циклічному навантаженні з амплітудою від -1 до 1 показав високий термін служби лопаті поза тріщиною, що перевищує $10^6$ значення.

Однак значне скорочення очікуваного терміну служби до руйнування спостерігається поблизу тріщини, як показано на рис. 4.8.




а) б)

Рис. 4.8. Розподіл очікуваної кількості циклів до руйнування по всій лопаті: (а) для всієї лопаті та (б) поблизу тріщини

Як показано на рисунку 4.8, кількість циклів до руйнування є найнижчою в сильно напружених областях фронту росту тріщини, досягаючи лише 315 циклів. Хоча навантаження застосовувалося рівномірно циклічно в діапазоні від 1 до -1, реальні нестаціонарні цикли можуть різко вплинути на залишкову міцність і витривалість конструкції. Один скачок збільшення навантаження може призвести до значного погіршення, але ретельне використання конструкції може допомогти зберегти її цілісність, оскільки пульсації в стаціонарних режимах зазвичай демонструють набагато менші амплітуди, ніж ті, що використовуються в цьому аналізі.

# ВИСНОВКИ

Запропоновано методику розрахунку втомної міцності елементу конструкції з тріщиною.

Використовується метод зважених нев’язок, що дозволяє застосовувати як метод скінченних елементів, так і метод граничних елементів.

Для аналізу напружень у конструкціях із тріщиноподібними дефектами використовуються методи граничних та скінченних елементів. Формулювання методу граничного елемента базується на гіперсингулярних інтегральних рівняннях.

Розрахунки еталонних тестів показали, що реалізація МСЕ досягає високої точності. Порівняння розрахунків МСЕ і МГЕ підтвердило достовірність і точність методу МСЕ. Розрахунки еталонних тестів також дозволяють визначити необхідну кількість скінченних елементів і вказати їх типи, необхідні для аналізу втоми.

Аналіз втомної міцності показав, що наявність мікродефекту в найбільш навантаженій частині конструкції призводить до різкого скорочення залишкового ресурсу.

Слід зазначити, що, незважаючи на те, що навантаження прикладалося рівномірно в циклічному порядку від 1 до -1, фактичні нестаціонарні цикли можуть значно вплинути на залишкову міцність і довговічність конструкції.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. B.B. Xu, X.W. Gao, W. Jiang, M., Cui, L. Jun, Galerkin free element method and its application in Fracture Mechanics, Engineering Fracture Mechanics, 218, 106575, 2019. doi: 10.1016/j.engfracmech.2019.106575.

2. P. Bertolini, M. A. Eder, L. Taglialegne, P. S. Valvo, Stresses in constant tapered beams with thin-walled rectangular and circular cross sections. Thin-Walled Structures, 137, pp. 527–540, 2019. doi: 10.1016/j.tws.2019.01.008.

3. V. Rokach, Smoothed finite element method for stress intensity factor estimation: benefits and limitations, Computational Engineering, Finance, and Science, 2019. CoRR abs/1903.11401.

4. Y. Yang, H. Yang, Z. Fan, Z. Mu, Crack Propagation Law of Reinforced Concrete Beams, Appl. Sci14, 409, 2024. doi:10.3390/app14010409.

5. F. Simionato, C. H. Daros, Boundary element method analysis for mode III linear fracture mechanics in anisotropic and nonhomogeneous media, Z Angew Math Mech. 99, e201800211 2019. doi:10.1002/zamm.201800211.

6. S. Palladino, L. Esposito, P. Ferla and V. Minutolo, Functionally Graded Plate Fracture Analysis Using the Field Boundary Element Method, Appl. Sci.,11, 8465, 2021. doi: 10.3390/app11188465.

7. J.Zhang, R. Xu, Y. He, W. Yang, Direct Computation of 3-D Stress Intensity Factors of Straight and Curved Planar Cracks with the P-Version Finite Element Method and Contour Integral Method, Materials,14(14), 3949, 2021. doi:10.3390/ma14143949.

8. Yi, W., Rao, Q., Li, Z., and Chun-Lin, C., A New Method for Predicting the Crack Propagation Process of Brittle Rock Under Thermo-Hydro-Mechanical Loading Conditions, IEEE Access, 9, 2021. doi:10.1109/ACCESS.2021.3076001.

9. R. Moskalenko, O. Zaydenvarg, O. Strelnikova, V. Gnitko, Software development for the computational analysis of crack propagation and durability of

structures, 2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), pp. 509-514, 2020. doi: 10.1109/KhPIWeek51551.2020.9250089.

10. A. Bergara, J. Dorado, A. Martin-Meizoso, J. Martínez-Esnaola, Fatigue crack propagation in complex stress fields: Experiments and numerical simulations using the Extended Finite Element Method (XFEM). Int. J. Fatigue, 103, pp. 112–121, 2017. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2017.05.026.

11. C. Wang, K. Pereira, D. Wang, A. Zinovev, D. Terentyev, M.A. Wahab, Fretting fatigue crack propagation under out-of-phase loading conditions using extended maximum tangential stress criterion. Tribology International, 187, 108738, 2023. doi: 10.1016/j.triboint.2023.108738.

12. R. Zhao, R. Pan, W. Gao, D. Zhang, X. Xiao, P. Zhao, X. Zhu, Finite Element Analysis of Crack Propagation in Precise Separation Process of Tubing Eccentric Loading Fatigue Fracture. Appl. Sci. 12, 5111, 2022. doi:10.3390/app12105111.

13. J. Bu, X. Chen, L. Hu, Experimental Study on Crack Propagation of Concrete Under Various Loading Rates with Digital Image Correlation Method, Int J Concr Struct Mater, 14(25), 2020. doi:10.1186/s40069-020-00400-5.

14. L. Zong, and G. Shi, Three-dimensional fatigue crack propagation analysis of welded steel beam based on global-local numerical model. Advances in Bridge Eng., 2(4), pp. 1-17, 2021. doi: 10.1186/s43251-020-00029-0.

15. W. Chen, Z. He, J. Zhang, Online monitoring of crack dynamic development using attention-based deep networks, Automation in Construction, 154, 105022, 2023. doi: 10.1016/j.autcon.2023.105022.

16. J. Oh, Y. Matsumoto, K. Arai, Development of Crack Detection and Crack Length Calculation Method using Image Processing, International Journal of Advanced Computer Science and Applications, 14(12), pp. 330-337, 2023. doi: 10.14569/IJACSA.2023.0141234.

17. A.M. Alshoaibi, Y.A. Fageehi, A Comparative Analysis of 3D Software for Modeling Fatigue Crack Growth: A Review. Appl. Sci. 14, 1848, 2024. doi:10.3390/app14051848.

18. A. Rusanov, O. Khorev, Y. Agibalov, Y. Bykov, P. Korotaiev, Numerical and Experimental Research of Radial-Axial Pump-Turbine Models with Spliters in Turbine Mode, In: ICTM 2020, Lecture Notes in Networks and Systems, 188, 2021. doi:10.1007/978-3-030-66717-7_36.

19. V. Gnitko, K. Degtyariov, V. Naumenko, E. Strelnikova, BEM and FEM analysis of the fluid-structure interaction in tanks with baffles. International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements; Southampton, 5(3), pp. 317-328, 2017. doi:10.2495/CMEM-V5-N3-317-328.

20. S.J. Obaiys, R.W. Ibrahim, A.F. Ahmad, Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study. In: Differential and Integral Inequalities. Springer Optimization and Its Applications, 151, 2019. doi:10.1007/978-3-030-27407-8_25.

21. V. Gnitko, A. Karaiev, K. Degtyariov, I. Vierushkin, E. Strelnikova, Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis. WIT Transactions on Engineering Sciences, WIT Press, 134, pp. 67-79, 2022. doi:10.2495/BE450061.

22. A. Karaiev, E. Strelnikova, Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method. Z Angew Math Mech. 101, e201800339, 2021. doi:10.1002/zamm.201800339.

23. S.J. Obaiys, R.W. Ibrahim, A.F. Ahmad, Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study, In: Differential and Integral Inequalities. Springer Optimization and Its Applications, 151, 2019. doi:10.1007/978-3-030-27407-8_25.

24. B.P. Zaitsev, T.V. Protasova, N.V. Smetankina, D.V. Klymenko, I.F. Larionov, D.V. Akimov, Oscillations of the Payload Fairing Body of the Cyclone-

4M Launch Vehicle during Separation. Strength Mater. 52(6), pp. 849-863, 2020. doi:10.1007/s11223-021-00239-5.

25. V. Gnitko, A. Karaiev, K. Degtyariov, E. Strelnikova, Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells, WIT Transactions on Engineering Sciences, WIT Press, 126, pp. 189-200, 2019, doi:10.2495/BE420171

26. O. Herasymchuk and O. Herasymchuk, Theoretical estimation of fatigue life under regular cyclic loading, Mech. Adv. Technol. 1(79), pp. 49–56,

27. H., Oezdemir, C., Stephan, E. P.: A time-dependent FEM-BEM coupling method for fluid-structure interaction in 3d. Applied Numerical Math.,152, 49 – 65, (2020), https://doi.org/2017. doi:10.20535/2521-1943.2017.79.96183. Gimperlein 10.1016/j.apnum.2020.01.023.

28. Hewett, D. P., Langdon, S. and Chandler-Wilde, S. N.: A frequency-independent boundary element method for scattering by two-dimensional screens and apertures, IMA J. Numer. Anal., 35, pp. 1698–1728, (2015), https://doi.org/10.1093/imanum/dru043.

29. Sumbatyan, M.A., Mescheryakov, K.I.: Two-dimensional integral equation for a thin wind turbine blade rotating in the round tunnel, Mechanics Research Communications, 85, pp. 1-4, (2017), https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2017.07.007.

30. Sierikova, O., Strelnikova, E., Degtyariov, K.: Numerical Simulation of Strength and Aerodynamic Characteristics of Small Wind Turbine Blades. In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds) Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering - 2022. ICTM 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, 657. Springer, Cham. (2022), https://doi.org/10.1007/978-3-031-36201-9_31.

31. Salvatore, F., Sarichloo, Z., Calcagni, D.: Marine Turbine Hydrodynamics by a Boundary Element Method with Viscous Flow Correction.

Journal of Marine Science and Engineering. 6(2),53. (2018), https://doi.org/10.3390/jmse6020053.

32. Sierikova O., Strelnikova E., Gnitko V. and Degtyarev K.: Boundary Calculation Models for Elastic Properties Clarification of Three-dimensional Nanocomposites Based on the Combination of Finite and Boundary Element Methods,2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Kharkiv, Ukraine, 351-356 (2021), doi: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570086.

33. Elahi, M. Mahmoudi,Y., Salimi Shamloo. A., Jahangiri Rad, M. On projection method for numerical solution of hypersingular integral equations of the first kind combined with quadrature methods, Physica Scripta, 98(4), 045229, (2023), DOI :10.1088/1402-4896/acc493

34. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F, Wrobel, L.C.: Boundary Element Techniques, Springer-Verlag: Berlin and New York, (1984).

35. Brebbia, C.A.: The birth of the boundary element method from conception to application, Engineering Analysis with Boundary Elements, 77, iii-x, (2017), https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.12.001.

36. Rizzo, F. J. and Shippy, D. J., A boundary integral approach to potential and elasticity problems for axisymmetric bodies with arbitrary boundary conditions, Mech. Res. Comm., 6, pp. 99-103, (1979). https://doi.org/10.1016/0093-6413(79)90022-3.

37. Novin, R., Fariborzi A.: Hypersingular integral equations of the first kind: A modified homotopy perturbation method and its application to vibration and active control. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. 38(2), 706-727. (2019), DOI:10.1177/1461348419827378.

38. Setukha, A.: Method of Boundary Integral Equations with Hypersingular Integrals in Boundary-Value Problems, Journal of Mathematical Sciences, 257(1), 114-126, (2021), DOI: 10.1007/s10958-021-05475-3.

39. Kostenko, O. V.: A numerical method for solving a complete hypersingular integral equation of the second kind and its justification. Mathematical

Modelling and Analysis, 28(4), 689–714. (2023). https://doi.org/10.3846/mma.2023.14761.

40. Obaiys, S.J., Ibrahim, R.W., Ahmad, A.F.: Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study. In: Andrica, D., Rassias, T. (eds) Differential and Integral Inequalities. Springer Optimization and Its Applications, 151, (2019). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-27407-8_25.

41. Gnitko, V.I., Karaiev, A. O., Degtyariov, K. G., Vierushkin, I.A., Strelnikova, E. A.: Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis, WIT Transactions on Engineering Sciences, 134, 67-79, (2022), DOI: 10.2495/BE450061.

42. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., Gnitko, V., Degtyarev, K.: Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations, Engineering Analysis with Boundary Elements, 111, 2020, 78-87, https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.10.008.

43. Langrenne, C., Garcia, A., Bonnet, M.: Solving the hypersingular boundary integral equation for the Burton and Miller formulation. Journal of the Acoustical Society of America, 2015, 138 (3332-3340), ff10.1121/1.4935134ff. ffhal-01233994f.

44. Groh, G.G., A theorem on the potential of a double layer, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 161(2), (1991), pp. 576-586, https://doi.org/10.1016/0022-247X(91)90352-Z.

45. Станкевич В. З., Михаськів В. В. Інтенсивність динамічних напружень поздовжнього зсуву у періодично шаруватому композиті з круговими тріщинами. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2020. Т. 63, № 3. С. 46-54. URL: http://jnas.nbuv.gov.ua/article/UJRN-0001248985