МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

Леонов О.С, Гах А.Г.

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ, ЗБІРНИК ЗАДАЧ
ІЗ ПРИКЛАДАМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ У ДВОХ ЧАСТИНАХ

Частина 1

Навчальний посібник

Харків – 2019

УДК 517.1/.3(078.8)
М 34

Рецензенти:
В. О. Золотарьов – доктор фіз.-мат. наук, професор, провідний науковий співробітник фізико-технічного інституту низьких температур імені Б. І. Вєркіна;
В. М. Кадець – доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри фундаментальної математики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна;
Ю. В. Куліш – доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої математики Українського державного університету залізничного транспорту.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 1 від 16 січня 2019 року)

М 34 **Математичний аналіз. Теоретичні відомості, збірник задач із прикладами розв'язання у двох частинах.** Частина 1 : навчальний посібник О. С. Леонов, А.Г. Гах – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2019. – 158 с.

До збірки входять завдання, які розв'язувалися на практичних заняттях із загального курсу «Математичний аналіз» студентами 1 курсу фізико-технічного факультету Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Кожен розділ поділено на чотири параграфи: «Основні поняття та властивості», «Контрольні питання та завдання», «Приклади розв'язування задач» і «Задачі для самостійного розв'язку».

Навчальний посібник призначений для студентів фізичних та інженерно-фізичних спеціальностей університетів України.

УДК 517.1/.3(078.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Цей навчальний посібник створено на основі багаторічного досвіду авторів із читання лекцій і проведення практичних занять із математичного аналізу на фізико-технічному факультеті Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

Зазначимо, що існує багато добре написаних підручників і задачників із математичного аналізу. Водночас недостатньо посібників, які б у лаконічній формі поєднували як теоретичні відомості, так і задачі з прикладами їх розв'язання. Маючи на меті систематизування того матеріалу, що має бути засвоєний під час першого семестру цей посібник має допомогти студентам у самостійній роботі та сприяти всебічному засвоєнню ними предмету. Специфікою цього курсу є поєднання стислого викладення з необхідною глибиною та шириною охоплення матеріалу. Його можна використовувати як конспект для довідки про теоретичні основи математичного аналізу, а також і як практичний посібник для розвитку навичок розв'язання задач. Обраний формат має свої переваги, його призначено для оптимізації навчання студентів. Загалом навчальний посібник складено так, аби задовольнити вимогам, які постають перед математичною освітою сучасного фізика.

Ця перша частина посібника містить п'ять розділів, що присвячені елементам математичної логіки та теорії множин, теорії границь та неперервності, диференціальному численню функцій однієї змінної та його застосуванню, комплексним числам та неозначеним інтегралам. Також у якості пам'ятки посібник перед першим розділом має додаток із необхідними формулами елементарної математики, які студенти мають знати зі шкільного курсу та якими мають оволодіти перед початком роботи з новим матеріалом.

Кожен із розділів поділено на чотири параграфи. У першому параграфі «Основні поняття та властивості» наведено основні теоретичні відомості (визначення, теореми, формули та властивості), які є необхідними для засвоєння основ курсу та подальшого самостійного розв'язування відповідних задач четвертого параграфу. У другому параграфі «Контрольні питання та завдання» наведені питання на перевірку розуміння теорії першого параграфу. «Приклади розв'язування задач» – третій

параграф, що є допомогою до параграфу чотири – «Задачі для самостійного розв'язку».

Ця структура посібника сприяє вирішенню поставлених вище навчально-методичних завдань. Кожний із розділів є самодостатнім і використовує незначну кількість матеріалу попередніх розділів. Отже, може вивчатися незалежно.

Так, перший розділ – «Елементи математичної логіки та теорії множин» має, на перший погляд, суто абстрактний і додатковий характер. Наступні розділи застосовують знання логічних зв'язків, кванторів та операцій над множинами лише у якості зручних позначок, що спрощують запис математичних висловлювань. Водночас ми вважаємо, що все ж таки сучасний фізик мусить мати уяву про фундамент математики – теорію множин та її мову – математичну логіку. Крім того, ця досить абстрактна частина курс, має свої прикладні застосування у фізиці. Так, до розділу входять задачі на моделювання електричного ланцюга за допомогою висловлювань математичної логіки. Отже, ми не далеко відходимо від концепції, що «математика – це інструмент фізика».

У другому розділі «Теорія границь. Неперервність» теорію границь викладено у стислому вигляді, де теорія границь послідовності розглядається не окремо, а як часткова границя функції. Так, не втрачаючи в охопленні матеріалу, можливо заощадити час на засвоєння теоретичних основ. Водночас детально розглядається логічна структура граничних переходів для різних випадків, входять задачі на розуміння та засвоєння цього базового означення, а також задачі на границі послідовностей. Достатньо великий обсяг матеріалу присвячено визначенню асимптотичної поведінки функції (головний член, еквівалентності, *O*-символіка). Останнє має істотне значення для аналізу та розуміння властивостей функції. У якості застосувань навички із теорії границь використовують під час дослідження на неперервність та побудові ескізу графіка функції.

Розділ третій «Диференційне числення та його застосування» присвячений виробленню навички пошуку похідних, розкладенню за формулою Тейлора, дослідженню властивостей функцій та побудові графіків функцій та кривих. У розділ входять основні теореми диференційного числення, задачі, що їх ілюструють, та декілька задач на прикладне геометричне та фізичне застосування диференційного числення, а також задачі на диференціювання нерівностей або доведення їх за допомогою означення опуклості функції.

Розділ четвертий «Комплексні числа» подається для першого знайомства, він не призначений охопити весь курс теорії функцій комплексної змінної. Хоча відомості цього розділу мають більше алгебраїчний характер, і його можна пропустити без суттєвих втрат, все ж таки ми наводимо основну теорему алгебри та її наслідки про розкладення полінома на множники для того, щоб обґрунтувати розкладення правильного дробу на простіші для подальшого інтегрування у наступному розділі.

В останньому п’ятому розділі цієї частини навчального посібника «Первісна. Неозначений інтеграл» показані загальні властивості неозначеного інтеграла, а також основні методи інтегрування раціональних функцій, деяких ірраціональностей, раціональної залежності від тригонометричних функцій та від експоненти. До розділу включено декілька спеціальних функцій, як приклади первісних, що не можна виразити через елементарні функції, для того, щоб студенти вже від самого початку їхньої вищої математичної освіти звикали до частої появи цих функцій у подальших курсах.

Автори під час складання цього посібника прагнули врахувати та інтегрувати досвід інших авторів. Також корисною допомогою у його створенні були методичні матеріали викладачів минулих років, що також читали лекції та проводили практичні заняття з математичного аналізу на фізико-технічному факультеті Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серед них ми насамперед із вдячністю згадуємо Миколу Романовича Бєляєва та Володимира Григоровича Зиму. Це видання присвячене саме їх пам’яті.

ДОДАТОК. ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА

1. Формули скороченого множення і розкладання на множники

1. $\left(a \pm b\right)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$

2. $\left(a+b+c\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$

3. $\left(a \pm b\right)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$

4. $\left(a+b+c\right)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc;$

5. $a^2 - b^2 = \left(a-b\right)\left(a+b\right);$

6. $a^3 \pm b^3 = \left(a \pm b\right)\left(a^2 \mp ab + b^2\right).$

2. Квадратне рівняння

1. $ax^2 + bx + c = 0;\ \ a \neq 0;\ \ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};\ \ D = b^2 - 4ac;$

   $D > 0$ – 2 різних дійсних корені ($x_1 \neq x_2$);

   $D = 0$ – 2 співпадаючих корені ($x_1 = x_2$);

   $D < 0$ – нема дійсних коренів.

2. $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right).$

3. Зведене квадратне рівняння: $x^2 + px + q = 0.$

   Th (Вієт): $x_1 + x_2 = -p;\ \ x_1 \cdot x_2 = q.$

3. Степені та корені

1. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n};$ 2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y};$ 3. $a^x : a^y = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$

4. $\left(a^x\right)^y = a^{xy};$ 5. $\left(ab\right)^x = a^x b^x;$ 6. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a};$ 7. $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k};$

8. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|;$ 9. $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a;$ 10. $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a};$

11. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n\cdot k]{a};$ 12. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x};$ 13. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$

14. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$ 15. $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}.$

4. Логарифми

1. $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \ (b>0,\ \ a>0,\ \ a\neq 1)$; 2. $a^{\log_a b} = b$;

3. $\log_a a = 1$; 4. $\log_a 1 = 0$;

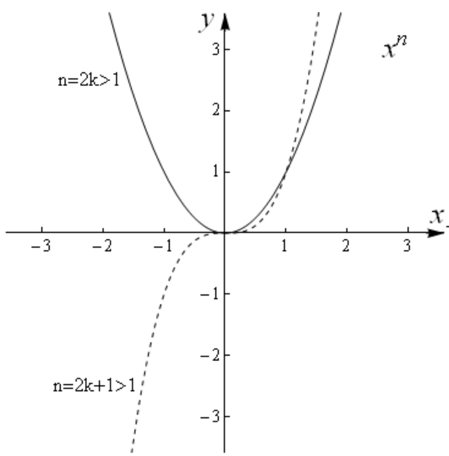
5. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$; 6. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;

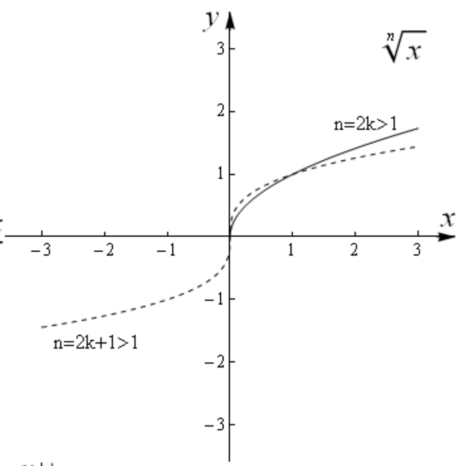
7. $\log_a b^p = p\log_a b$; 8. $\log_{p^q} a = \dfrac{1}{q}\log_p a$;

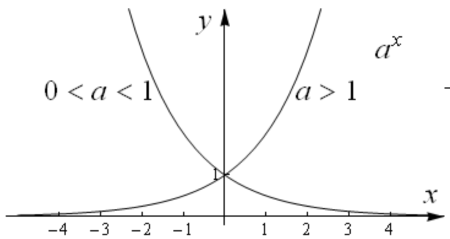
9. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$; 10. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$;

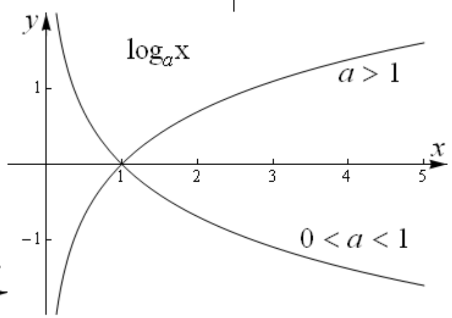
11. $\log_{10} x = \lg x$; 12. $\log_e x = \ln x$.

5. Графіки степеневої, показникової та логарифмічної функцій









6. Прогресії

Арифметична прогресія

1. $a_{n+1} = a_n + q$; 2. $a_n = a_1 + q(n-1)$; 3. $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$;

4. $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$; 5. $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$.

Геометрична прогресія

1. $b_{n+1} = b_n \cdot q$; 2. $b_n = b_0 \cdot q^n$; 3. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$;

4. $S_n = b_0 + b_1 + ... + b_n = \dfrac{b_0\left(1-q^{n+1}\right)}{(1-q)}$; 5. $S_\infty = \dfrac{b_0}{(1-q)}$ $(|q|<1)$.

7. Тригонометрія

Основні тригонометричні формули

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; 2. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; 3. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

4. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$; 5. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; 6. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

7. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$;

8. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;

9. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$;

10. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

11. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$;

12. $\operatorname{tg}(2\alpha) = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$;

13. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; 14. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

15. $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha \mp \beta}{2}$;

16. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$;

17. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$;

18. $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$;

19. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right];$

20. $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right];$

21. $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2};$ 22. $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2};$

23. $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$ 24. $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$ 25. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};$

26. $\sin\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$ 27. $\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$ 28. $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$

Тригонометричні рівняння

1. $\sin x=\alpha\ \ (|\alpha|<1)\ \Rightarrow\ x=(-1)^k\arcsin\alpha+k\pi,\ \ k\in\mathbf{Z};$
2. $\cos x=\alpha\ \ (|\alpha|<1)\ \Rightarrow\ x=\pm\arccos\alpha+2\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z};$
3. $\mathrm{tg}\,x=\alpha\ \Rightarrow\ x=\mathrm{arctg}\,\alpha+k\pi,\ \ k\in\mathbf{Z};$
4. $\mathrm{ctg}\,x=\alpha\ \Rightarrow\ x=\mathrm{arcctg}\,\alpha+k\pi,\ \ k\in\mathbf{Z}.$

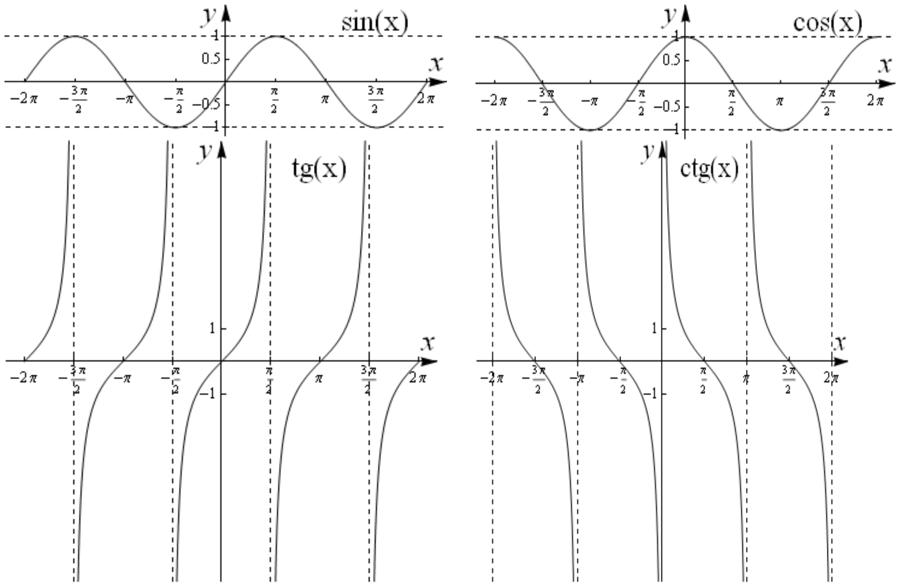
Формули зведення

β	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\pi\pm\alpha$	$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\beta$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

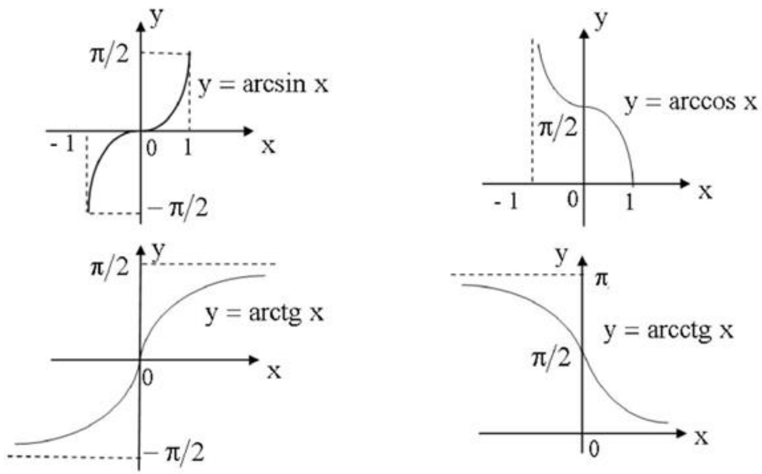
Значення тригонометричних функцій

x	0° 0	30° $\pi/6$	45° $\pi/4$	60° $\pi/3$	90° $\pi/2$	180° π	270° $3\pi/2$	360° 2π
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\mathrm{ctg}\,x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	∞	0	∞

Графіки тригонометричних функцій



Для отримання графіків зворотних тригонометричних функцій треба відобразити наведені графіки для тригонометричних функцій щодо бісектриси $y = x$.



РОЗДІЛ 1.
ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ ТА ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1. Основні поняття та властивості

Елементи математичної логіки

Прості та сполучені висловлювання. Логічні зв'язки

Оповідальне речення, яке за змістом є істиною або неправдою, називають *висловлюванням* (приклад: $2 \times 2 = 4$ – висловлювання, що є істиною; $2 \times 2 = 5$ – це висловлювання, що є неправдою). Прості висловлювання позначають літерами (маленькими або великими грецькими або латинськими A, B, C, D, …) та називають *пропозиціональними змінними*. За допомогою операцій логічного зв'язку можна створювати *складні висловлювання* та формули. Змістовно виправдано використання 5-ти логічних зв'язків[1], які вказано у порядку пріоритету:

унарний:

1) заперечення « $\neg$ » ($\neg A$, не A);

бінарні:

2) кон'юнкція « $\wedge$ » ($A \wedge B$, A і B);
3) диз'юнкція « $\vee$ » ($A \vee B$, A або B);
4) імплікація « $\Rightarrow$ » ($A \Rightarrow B$, якщо A то B, із A випливає B);
5) еквіваленція « $\Leftrightarrow$ » ($A \Leftrightarrow B$, A еквівалентно B).

Для значень «істина» та «неправда» використовують скорочення «і» та «н» або «1» та «0» відповідно. Результати застосування 5-ти логічних зв'язків до висловлювань наведемо у таблиці (таблиці істинності):

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

[1] Додаткові логічні зв'язки:
« | » – антикон'юнкція (штрих Шефера): $A \mid B \Leftrightarrow \neg (A \wedge B)$;
« $\downarrow$ » – антидиз'юнкція (стрілка Пірса): $A \downarrow B \Leftrightarrow \neg (A \vee B)$.

Отже, мова математичної логіки складається із наступного *алфавіту*: $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3$, де $\sigma_1 = \{A_0, A_1, A_2, ...\}$ – змінні висловлювання або пропозиціональні змінні, $\sigma_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ – логічні зв'язки; $\sigma_3 = \{(,)\}$ – додаткові символи.

Взаємозв'язок логічних зв'язків:

Кожний зв'язок можна виразити через три основні $\neg$, $\wedge$, $\vee$:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B);$$

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A).$$

Алгебраїчні властивості зв'язків:

1. $a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$ – комутативний закон (всі бінарні зв'язки, крім імплікації, є комутативними);
2. $\left.\begin{array}{l} a \vee (b \vee c) \Leftrightarrow (a \vee b) \vee c \\ a \wedge (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \wedge c \end{array}\right\}$ – асоціативні закони ($\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ є неасоціативними);
3. $\left.\begin{array}{l} a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{array}\right\}$ – дистрибутивні закони;
4. $\left.\begin{array}{l} \neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b \\ \neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b \end{array}\right\}$ – закони де Моргана;
5. Транзитивність $\Rightarrow$ (так саме і $\Leftrightarrow$): $a \Rightarrow b$ та $b \Rightarrow c$, тоді $a \Rightarrow c$;
6. Закон подвійного заперечення: $\neg(\neg a) \Leftrightarrow a$;
7. Принцип тотожності: $\neg a \vee a \Leftrightarrow 1$, $\neg a \wedge a \Leftrightarrow 0$;
8. Правила поглинання: $a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$, $a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a$;
9. Закони 0 та 1: $0 \wedge a \Leftrightarrow 0$, $1 \wedge a \Leftrightarrow a$, $0 \vee a \Leftrightarrow a$, $1 \vee a \Leftrightarrow 1$.

Формули та їх класифікація

Формула: = {пропозиціональна змінна | $\neg U$ | $(U \wedge V)$ | $(U \vee V)$ | $(U \Rightarrow V)$ | $(U \Leftrightarrow V)$}, де U і V – формули або висловлювання.

Def. Формула може бути:

а) *здійсненною* – якщо існує набір параметрів (значень змінних), за яких формула є істинною;
б) *тавтологією* (тотожна істина) – якщо для будь-якого набору параметрів формула є істинною;
в) *спростованою* – якщо існує набор параметрів, за яких формула є неправдивою;

г) *протиріччя* (тотожна неправда) – якщо для будь-якого набору параметрів формула є неправдивою.

Формула називається *формулою з тісними запереченнями*, якщо в ній немає символів $\Rightarrow$ та $\Leftrightarrow$, і заперечення стосується тільки пропозиціональних змінних.

Довільну кон'юнкцію (диз'юнкцію) формул, кожна з яких є пропозиціональною змінною або її запереченням, називають *елементарною кон'юнкцією* (*диз'юнкцією*).

Def. Довільну диз'юнкцію елементарних кон'юнкцій називають *диз'юнктивною нормальною формою*, а довільну кон'юнкцію елементарних диз'юнкцій називають *кон'юнктивною нормальною формою* (д.н.ф. і к.н.ф. відповідно).

Def. Д.н.ф. (к.н.ф.) називають *досконалою* – д.д.н.ф. (д.к.н.ф.), якщо кожна змінна формули входить до елементарної кон'юнкції (диз'юнкції) рівно один раз із запереченням або без нього.

Зауваження: д.к.н.ф. дає можливість сказати, що вихідна формула є неправдивою лише у випадку, коли A, B і C – неправдиві. Знаючи д.к.н.ф., легко написати і д.д.н.ф., якщо врахувати, що окремі елементарні кон'юнкції описують випадки істинності форми

$$((A \vee B \vee C) \Leftrightarrow (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)).$$

У записаній формулі ліворуч від $\Leftrightarrow$ стоїть д.к.н.ф., а праворуч – д.д.н.ф.

Обчислити складне висловлювання, тобто встановити, чи є воно істинним або неправдимим за різних значеннь пропозиціональних змінних, можливо не тільки за допомогою таблиць істинності, але і за допомогою репрезентуючих функцій. Водночас обчислення висловлювань роблять за допомогою арифметичних дій із 0 та 1.
Нехай f (істина) = 1, f (неправда) = 0, тоді

$f(\neg A) = 1 - f(A)$; $\quad f(B \vee A) = f(B) + f(A) - f(A) \cdot f(B)$;

$f(A \wedge B) = f(A) \cdot f(B)$; $\quad f(B \Rightarrow A) = 1 - f(B) + f(A) \cdot f(B)$;

$f(A \Leftrightarrow B) = 1 - f(A) - f(B) + 2f(A) \cdot f(B)$.

Обчислити висловлювання можна також, якщо змоделювати вихідне складене висловлювання еквівалентною електричною схемою. Для цього, записавши вихідну формулу як формулу з тісними запереченнями, можна замінити її еквівалентним електричним ланцюгом. Так кон'юнкцію $A \wedge B$ можна промоделювати послідовним включенням до ланцюга двох вимикачів A і B, а диз'юнкцію $A \vee B$ – паралельним. Провідність ланцюга визначається істинністю формули, що дає можливість: а) спрощувати ланцюги (зменшувати кількість розмикачів), спрощуючи відповідні формули з використанням алгебраїчних властивостей зв'язків; б) будувати ланцюги із заданою функцією провідності від положень (станів) пакетних перемикачів.

Квантори

Квантор – кількісна логічна операція (символ), що перетворює твердження про певну властивість у об'єктів деякого класу в твердження про кількість об'єктів, що володіють цією властивістю.
Важливими для використання є такі квантори:
$\forall$ – квантор загальності (від англ. All, Any);
$\exists$ – квантор існування (від англ. Exist);
$\exists!$ – квантор існування й одиничності;

$\forall x\ A(x)$ – для всіх x виконується властивість $A(x)$;
$\exists x\ A(x)$ – існує x, для якого виконується властивість $A(x)$;
$\exists! x\ A(x)$ – існує тільки один x, для якого виконана властивість $A(x)$.

Алгебраїчні властивості кванторів:

1. $\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \neg\exists x\ \neg A(x)$,
   $\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \neg\forall x\ \neg A(x)$;
2. Комутування кванторів із запереченням
   $\neg\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg A(x)$,
   $\neg\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x\ \neg A(x)$;
3. Комутування однойменних кванторів за різними змінними
   $\forall x\, \forall y\, A(x, y) \Leftrightarrow \forall y\, \forall x\, A(x, y)$,
   $\exists x\, \exists y\, A(x, y) \Leftrightarrow \exists y\, \exists x\, A(x, y)$;

Різнойменні квантори, взагалі кажучи, не комутують, але
   $\exists x\, \forall y\, A(x, y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, A(x, y)$, хоча зворотної імплікації нема;

4. Дистрибутивність $\forall$ відносно $\wedge$ та $\exists$ відносно $\vee$
   $\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$,

$\exists x\,(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x\,A(x) \vee \exists x\,B(x)$;

5. $\forall x\,A(x) \vee \forall x\,B(x) \Rightarrow \forall x\,(A(x) \vee B(x))$,
$\exists x\,(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\,A(x) \wedge \exists x\,B(x)$,
$\exists x\,(A(x) \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x\,A(x) \Rightarrow \exists x\,B(x)$,
$\forall x\,(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x\,A(x) \Rightarrow \forall x\,B(x)$;

6. Властивості кванторів щодо ототожнення
$\forall x\,\forall y\,A(x, y) \Rightarrow \forall x\,A(x, x)$,
$\exists x\,A(x, y) \Rightarrow \exists x\,\exists y\,A(x, y)$;

7. Дистрибутивність кванторів щодо $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ коли одне із висловлювань не залежить від кванторної змінної
$\forall x\,(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x\,A(x) \wedge B$,
$\exists x\,(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x\,A(x) \wedge B$,
$\forall x\,(A(x) \Rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x\,A(x) \Rightarrow B$,
$\forall x\,(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \Rightarrow \forall x\,B(x)$;

8. Квантор існування й одиничності $\exists!$
$\exists! x\,A(x) \Leftrightarrow \exists x\,A(x) \wedge \forall y\,(A(y) \Rightarrow y = x)$;

9. Релятивізовані квантори:
$\forall_R\, x\,A(x) \Leftrightarrow \forall x\,(R(x) \Rightarrow A(x))$ «для всіх x таких, що $R(x)$ тоді $A(x)$»,
$\exists_R\, x\,A(x) \Leftrightarrow \exists x\,(R(x) \wedge A(x))$ «існує x такий, що $R(x)$ і $A(x)$».

Елементи теорії множин

Множина – це об'єднання в одне ціле певних, цілком розпізнавальних об'єктів (*елементів*) нашого сприйняття або думки[1].

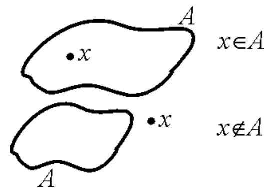
Елементи множин здебільшого позначатимуться малими літерами із латинського алфавіту: $a, b, c, \ldots; x, y, z, \ldots$. А множини – великими літерами латинського алфавіту: $A, B, C, \ldots; X, Y, Z, \ldots$. Звісно, послідовно витримувати цю угоду загалом неможливо, оскільки множини самі можуть бути елементами інших множин.

[1] Наведене поняття (Г. Кантор) не є означенням множини, воно лише пояснює його, пов'язуючи з іншими. Поняття множини належить до базових понять, що не визначаються. Після відкриття парадоксів «наївної теорії множин», на початку XX століття були запропоновані різні системи аксіом, серед яких найпоширенішою є система Цермело-Френкеля з аксіомою вибору (ZFC, див. задачу 22 цього розділу).

Множина задається сукупністю своїх елементів, які перелічуються у фігурних душках: $M = \{x, y, z\}$, $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Часто множина задається за допомогою *класифікатора* («|» або «:»), після якого описується властивість, що характеризує елементи цієї множини: $M \equiv \{x \mid P(x)\}$ – «множина M є множиною об'єктів x, для яких виконана властивість $P(x)$».

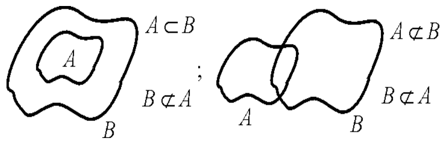
Наведемо основні позначення та ілюстрації до них за допомогою діаграм Ейлера – Венна (множини – фігури на площині, елементи – точки):

$x \in A$ – елемент x *належить* множині A, або
$A \ni x$ – множина A *містить* елемент x;
$x \notin A \Leftrightarrow \neg\,(x \in A)$ – x *не належить* множині A,
або $A \not\ni x$ – множина A *не містить* елемента x.



Відношення *рівності* й *включення*

1. $A = B$ «множина A *дорівнює* множині B» $\Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
   а) рефлексивність: $A = A$;
   б) симетрія: $A = B \Rightarrow B = A$;
   в) транзитивність: $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$.
2. $A \subset B$ «множина A *міститься* у множині B»,
   (A – *підмножина*, B – *надмножина*)
   $\Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$.
   $A \supset B$ «*A містить B*» $\Leftrightarrow B \subset A$



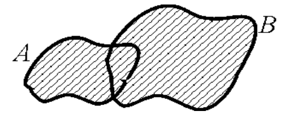
   а) рефлективність: $A \subset A$;
   б) антисиметрія: $A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$;
   в) транзитивність: $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Перелічені властивості означають, що відношення рівності та включення визначають *часткову впорядкованість* на множинах.
Зауваження: якщо $x \in A$, то $\{x\} \subset A$, але $x \neq \{x\}$.

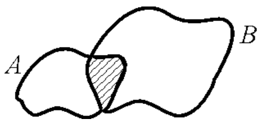
Порожня множина $\varnothing$ – це множина, яка не має елементів: $\forall x\ \ x \notin \varnothing$, зокрема $\forall X\ \ \varnothing \subset X$.

Операції над множинами

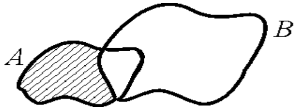
1. $A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$
   $A \cup B$ – *об'єднання множин*;



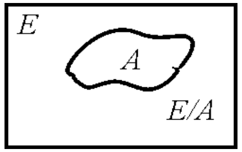
2. $A \cap B = \{x\in A \wedge x\in B\}$,
$A \cap B$ – *перетин множин*;



3. $A \setminus B = \{x\in A \wedge x\notin B\}$,
$A \setminus B$ – *різниця множин*;



Доповнення до множини на множині E
$E \setminus A \equiv C_E A = \bar{A}$.



При цьому
$\overline{A\cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A\cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

4. *Симетрична різниця*
$A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$

5. *Декартов (прямий) добуток* множин
$A \times B = \{(a, b) \mid a\in A \wedge b\in B\}$,

тут (a, b) – *упорядкована пара* елементів a і b на відміну від $\{a, b\}$, де порядок a і b не важливий.

Властивості операцій

Об'єднання та перетин множин комутативні, асоціативні і дистрибутивні стосовно одне одного:

1. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;
2. $((A \cup B) \cup C) = (A \cup (B \cup C))$; $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$); $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$).
4. Об'єднання і перетин *ідемпотентні* $A \cup A = A \cap A = A$; $A \cup \varnothing = A$;
$A \setminus \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $\varnothing \setminus A = \varnothing$; $A \setminus A = \varnothing$.
5. Різниця дистрибутивна щодо об'єднання, перетину і різниці
$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.
6. Прямий добуток не комутує та не є асоціативним $(A \times B) \times C \neq$
$\neq A \times (B \times C)$; $A \times B \neq B \times A$; також $A \times A = A^2$; $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$;

$$\left.\begin{array}{l} A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C) \\ (A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C) \end{array}\right\} \text{дистрибутивність } \cup;$$

$$\left.\begin{array}{l} A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C) \\ (A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C) \end{array}\right\} \text{дистрибутивність } \cap.$$

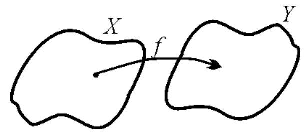
Приклади множин[1]

$\varnothing$ – порожня множина;
$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – натуральний ряд;
$\mathbf{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$ – множина цілих чисел;
$\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z}\right\}$ – множина раціональних чисел;
$\mathbf{R}$ = множина дійсних чисел;
$\mathbf{R}_+ = \{x\in\mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ – множина невід'ємних дійсних чисел;
$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ – декартова площина;
$\mathbf{C} = \{z \mid z = x + iy;\ x, y\in\mathbf{R},\ i^2 = -1\}$ – множина комплексних чисел.

Числові проміжки

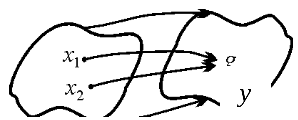
а) інтервал: $(a, b) = \{x\in\mathbf{R} \mid a < x < b\}$;
б) напівінтервали: $[a, b) = \{x\in\mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x\in\mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$;
в) сегмент (або відрізок): $[a, b] = \{x\in\mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

Відображення множин



Нехай X та Y – довільні множини, f – закон або правило, за яким кожному елементу множини X встановлюється у відповідність один елемент множини Y: $\forall x \in X\ \exists! y \in Y\ y = f(x)$, тоді говорять, що задано *відображення* (або, у разі числових множин, *функція*) $f : X \to Y$ множини X на Y. Множина X називається *областю визначення* відображення f і позначається D_f; множина елементів $y\in Y$, які поставлені у відповідність елементам множини X, називається *областю значень* відображення f і позначається E_f. Відображення від множини це $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$, тоді маємо $E_f = f(D_f)$.

Типи відповідностей між множинами:

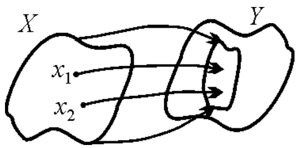


1. $f : X \to Y$ – *сюр'єкція* (f -sur, відображення «на»), якщо $Y \subset E_f$,

тобто $\forall y\in Y\ \exists x\in X\ y = f(x)$;
↑ (x не обов'язково $\exists!$)

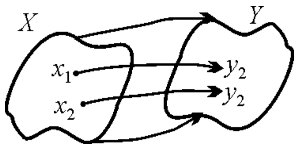
[1] Зауважимо, що тут ми не наводимо аксіоматичних означень перелічених множин. Детальніше про множину **R** див. нижче у цьому розділі, про **C** у розділі 4.

2. $f : X \to Y$ – *ін'єкція* (f-inj, вкладення або відображення «в»), якщо



$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$

3. $f : X \to Y$ – *бієкція* (f-bij, взаємооднозначне відображення), якщо



f-sur $\wedge$ f-inj;

або $\quad E_f = Y \quad$ та $\quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;

тобто $\quad \forall y \in Y \quad \exists! x \in X \quad y = f(x)$;

а це те саме, що у f є *обернене* до неї відображення $f^{-1} : Y \to X$.

Def. Множини X і Y називаються *рівнопотужними* ($X \cong Y$), якщо існує бієкція між X та Y (взаємнооднозначна відповідність).

Def. Множина рівнопотужна множині натуральних чисел **N** називається *зліченною*. Множина рівнопотужна інтервалу (0,1) називається множиною *потужності континуум*.

Множина дійсних чисел **R** рівнопотужна інтервалу (0,1), отже є множиною потужності *континуум*.

Th 1.1. Множина **Q** раціональних чисел – зліченна.

Th 1.2. Множина дійсних чисел **R** як і інтервал (0,1) не є зліченними.

Зауважимо, що існування або відсутність множин потужності більше за зліченну та менше за континуум не випливає з аксіом теорії множин (ZFC, див. задачу 22 цього розділу) і може бути прийнято як ще одна аксіома теорії множин.

Дійсна числова пряма. R – повне впорядковане поле

Множину дійсних чисел **R** наділено операціями додавання і добутку, тобто відображеннями $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, з наступними властивостями:

1. $a + b = b + a$ і $a \cdot b = b \cdot a$ (комутативний закон);
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ і $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot a)$ (асоціативний закон);
3. $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (дистрибутивний закон);
4. Існують різні елементи 0 і 1 такі, що $0 + a = a$, $1 \cdot a = a$ для всіх a.
5. Для кожного a існує *протилежний* $-a$ такий, що $a + (-a) = 0$; для кожного $a \neq 0$ існує *зворотний* елемент a^{-1} такий, що $a \cdot (a^{-1}) = 1.$

Множина з двома операціями, що задовольняють аксіомам 1 – 5, називається *полем*. Множина **Q** раціональних чисел, як **R** і **C**, є поле.

Відношення порядку ≤

Множина дійсних чисел *впорядкована* відношенням $\leq$ з такими властивостями:

6. Для кожної пари дійсних чисел a і b виконується $a \leq b$ або $b \leq a$ (якщо $a \leq b$ і $b \leq a$ одночасно, то $a = b$);
7. Якщо $a \leq b$ і $b \leq c$, то $a \leq c$ (транзитивність);
8. Якщо $a \leq b$, то $a + c \leq b + c$ для будь-якого c, та якщо $0 \leq c$, то $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Поле з відношенням порядку, що задовольняє 6 – 8 є впорядкованим полем. Поле **Q** раціональних чисел, як і **R**, є впорядкованим.

Найважливішою аксіомою для математичного аналізу дійсних чисел є дев'ята *аксіома повноти*. Перед тим як її сформулювати нам знадобляться ще декілька означень.

Грані числових множин

Def. Множина X називається *обмеженою зверху* (*знизу*), якщо існує дійсне число L – *верхня грань* (l – *нижня грань*) таке, що L більше (l менше) кожного елементу X.

Обмежена зверху: $\exists L \in \mathbf{R} \quad \forall x \in X \quad x \leq L.$

Обмежена знизу: $\exists l \in \mathbf{R} \quad \forall x \in X \quad x \geq l.$

Множина *обмежена*, якщо вона обмежена зверху і знизу, тобто

$\exists L, l \in \mathbf{R} \quad \forall x \in X \quad l \leq x \leq L$ або $\exists A \in \mathbf{R} \quad \forall x \in X \quad |x| < A.$

Def. Найменша з верхніх граней множини, якщо вона існує, називається *супремумом* або *точною верхньою гранню* L^* множини X і позначається: $L^* = \sup X$. Найбільша з нижніх граней, якщо існує, називається *інфімумом* або *точною нижньою гранню* l^* множини X і позначається: $l^* = \inf X$.

Th 1.3. (критерій супремума й інфімума)

$L^* = \sup X \iff$ 1) $\forall x \in X \quad x \leq L^*$ і 2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X \ \ x > L^* - \varepsilon.$

$l^* = \inf X \iff$ 1) $\forall x \in X \quad x \geq l^*$ і 2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X \ \ x < l^* + \varepsilon.$

Def. Якщо $L^* \in X$, тоді L^* називається *максимальним елементом* множини X: $L^* = \max X$. Аналогічно, якщо $l^* \in X$, то l^* називається *мінімальним елементом* множини X: $l^* = \min X$.

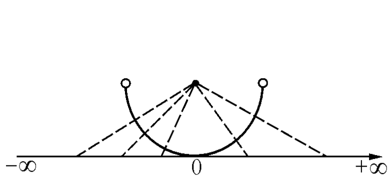
Аксіома повноти. Якщо непорожня множина в **R** обмежена зверху (знизу), то вона має точну верхню (нижню) грань в **R**.

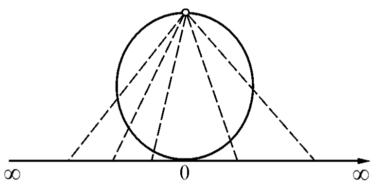
Розширена числова пряма

Числову пряму **R** можна розширити, додаючи до неї нескінченість ∞, або дві нескінчености –∞, +∞ (*невласні елементи*):

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\} \text{ або } \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Наступні рисунки ілюструють той факт, що $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ топологічно еквівалентна[1] півколу із крайніми точками дуги або відрізку, а $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ топологічно[2] еквівалентна колу.





На $\overline{\mathbf{R}}$ кожна непорожня множина має точну верхню (нижню) грань (можливо невласну).

Приклади

1. $X = \mathbf{N}$ $\inf X = \min X = 1$, $\sup X = +\infty$, $\max X$ не існує.
2. $X = \mathbf{Q}$ $\inf X = -\infty$, $\sup X = +\infty$, $\max X$ і $\min X$ не існують.

---

[1] Тобто існує бієкція, що зберігає відкриті множини.

[2] Взагалі, т*опологічний простір* – це пара (X, Γ), де X – множина, а Γ – система підмножин множини X (їх називають *відкритими*, а Γ – *топологією*), що задовольняє таким умовам:

- порожня множина ∅ та множина X належать Γ;
- об'єднання довільного набору множин із Γ також належить Γ;
- перетин скінченного набору множин із Γ також належить Γ.

Тоді (відкритим) *околом точки* називається будь-яка відкрита множина, що містить цю точку.

Аналогічно топологію можна задавати за допомогою *бази околів*, як сім'ю підмножин $\{B(x) \mid x \in X\}$, що задовольняють властивостям:

- для кожного $x \in X$ $B(x) \neq \varnothing$, і для кожного $U \in B(x)$ $x \in U$;
- якщо $U \in B(x)$ та $y \in U$, то існує $V \in B(y)$ такий, що $V \subset U$;
- перетин скінченної кількості елементів із $B(x)$ містить деякий елемент із $B(x)$.

Тоді означення *відкритої множини* – це множина, всі точки якої містяться в неї із деяким своїм околом (тобто *внутрішні*, див. *Def.* нижче).

Обмеженість, числові грані, супремум (*інфімум*) *функції f* визначаються як відповідні властивості для множини її значень E_f.

Околи точок

Def. *Відкритим околом* точки a (позначаємо U_a) називається будь-який інтервал, що її містить.

Def. Нехай задано деяке ε > 0. *Відкритим ε-околом* точки a називається інтервал $O(a, \varepsilon) \equiv (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$.

Def. *Проколотим околом* точки a називається множина $\widehat{U}_a = U_a \setminus \{a\}$.

Відповідно, *проколотим ε-околом* точки a є множина

$$\widehat{O}(a, \varepsilon) \equiv (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < |x - a| < \varepsilon\}.$$

Def. *Однобічним околом* точки a називається перетин околу a і однією із напівпрямих, на які a розбиває числову пряму

$$U_a^+ = [a, +\infty) \cap U_a, \quad U_a^- = (-\infty, a] \cap U_a;$$

$$\hat{U}_a^+ = (a, +\infty) \cap U_a, \quad \hat{U}_a^- = (-\infty, a) \cap U_a.$$

Для невласних елементів та ε > 0 околи визначаються у такий спосіб

ε-окіл ∞: $O(\infty, \varepsilon) \equiv (-\infty, \varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| > \varepsilon\}$,

лівий ε-напівокіл $+\infty$: $O(+\infty, \varepsilon) \equiv (\varepsilon, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > \varepsilon\}$,

правий ε-напівокіл $-\infty$: $O(-\infty, \varepsilon) \equiv (-\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -\varepsilon\}$.

Розташування точок відносно множини

Def. Точка a називається *внутрішньою* точкою множини M, якщо вона належить множині M разом із деяким околом: $\exists U_a \mid U_a \subset M$.

Множина всіх внутрішніх точок M називається *внутрішністю* M і позначається $\overset{\circ}{M}$. Якщо $M = \overset{\circ}{M}$, то M називається *відкритою* множиною (тобто всі її точки внутрішні).

Def. Точка a називається *точкою дотику* множини M, якщо будь-який її окіл має спільні точки з множиною M: $\forall U_a \mid U_a \cap M \neq \varnothing$.

Сукупність точок дотику M називається *замиканням* множини M і позначається $\overline{M}$. Якщо $M = \overline{M}$, то M називається замкненою (містить всі його точки дотику).

Def. Точка a називається *точкою згущення* множини M (*гранична точка*), якщо будь-який проколотий окіл a має з M спільні точки: $\forall \widehat{U}_a \mid \widehat{U}_a \cap M \neq \varnothing$.

Множина всіх граничних точок M називається *похідною множиною* і позначається M'.

Def. Точка a називається *ізольованою точкою* множини M, якщо існує її окіл, що не має з M спільних точок, окрім точки a: $\exists \widehat{U}_a \mid \widehat{U}_a \cap M = \varnothing$.

Def. Точка a називається *точкою межі* множини M, якщо кожний її окіл має точки, що належать множині M і точки, що не належать M:

$$\forall U_a \mid \exists x \in U_a \cap M \wedge \exists y \in U_a \mid y \notin M.$$

Сукупність точок межі утворює *межу* множини M і позначається ∂M.

Def. Точка a називається *зовнішньою точкою* множини M, якщо існує її окіл, що не має з M спільних точок: $\exists U_a \mid U_a \cap M = \varnothing$.

Крім усього, числова пряма має дві важливі властивості (аксіоми[1]):
1. Напіввідокремленість точок: $\forall a, b \in \mathbf{R},\ a \neq b\ \ \exists U_a \mid b \notin U_a$;
2. Відокремленість точок: $\forall a, b \in \mathbf{R},\ a \neq b\ \ \exists U_a,\ \exists U_b \mid U_a \cap U_b = \varnothing$.

Операції над функціями. Послідовності

Нехай

$$f : D_f \to E_f; \qquad D_f \subset \mathbf{R}, \qquad E_f \subset \mathbf{R},$$
$$g : D_g \to E_g; \qquad D_g \subset \mathbf{R}, \qquad E_g \subset \mathbf{R}.$$

Операції над числовими функціями числового аргументу вводяться поточково, тобто
1. $(f+g)(x) \equiv f(x) + g(x), \qquad D_{f+g} = D_f \cap D_g$;
2. $(\alpha f)(x) \equiv \alpha f(x), \qquad D_{\alpha f} = D_f$;
3. $(f \cdot g)(x) \equiv f(x) \cdot g(x), \qquad D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$;
4. $(f/g)(x) \equiv f(x)/g(x), \qquad D_{f/g} = D_f \cap D_g \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$;
5. $(f \circ g)(x) \equiv f(g(x)), \qquad D_{f \circ g} = D_g \setminus \{x \mid g(x) \notin D_f\}$.

Остання операція називається *композицією* або *суперпозицією* f і g.

Def. Дійсно-значна функція натурального аргументу f: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ називається *послідовністю*. Кожному натуральному числу n відповідає дійсне $x_n = f(n)$. Послідовність позначається $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ або просто (x_n), де x_n називається *елементом* або *членом* послідовності, а n – *індексом* або *номером* x_n.

Сума та інші арифметичні операції над послідовностями визначаються поелементно, композиція двох послідовностей за умови, що одна (права, тобто внутрішня) з них має натуральні значення, називається *підпослідовністю* та позначається (x_{n_k}).

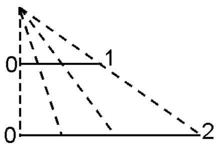
[1] Властивість 2 для загальних топологічних просторів називається *відокремленість за Гаусдорфом*, а відповідний топологічний простір – *гаусдорфовим*. Вона забезпечує одиничність границі за умови її існування і часто додається у якості аксіоми в означення топологічного простору.

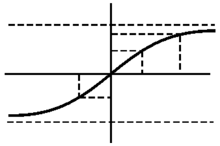
1.2. Контрольні питання та завдання

1. Що таке висловлювання?
2. Які є операції над висловлюваннями, якими є їхні властивості? Який порядок виконання операцій у висловлюванні $(\neg P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow (Q \wedge P))$?
3. Перелічити три основні квантори. Як заперечення діє на висловлювання з кванторами? Чи комутують квантори (навести приклади)?
4. Поняття множини, її опис та зображення. Що таке класифікатор та діаграми Ейлера – Венна? Перелічити відносини та основні операції над множинами та їх властивості.
5. Які з операцій над множинами комутують, а які ні? Навести приклади.
6. Аксіоматика дійсних чисел **R**: аксіоми поля, упорядкованість, повнота. Визначення верхньої і нижньої та точної верхньої і нижньої грані множини їх критерії.
7. Чим відрізняються max X та sup X? Навести приклад множини X у якої нема max X, але є sup X.
8. Записати означення множини:
   а) обмеженої зверху; б) обмеженої знизу;
   в) обмеженої; г) необмеженої зверху;
   д) необмеженої знизу; е) необмеженої.
9. Записати твердження, що функція $f(x)$ на множині X є:
   а) обмеженою зверху; б) обмеженою знизу;
   в) обмеженою; г) необмеженою зверху;
   д) необмеженою знизу; е) необмеженою.
10. Сформулювати означення та критерії інфімуму та супремуму функції (для множини її значень) на проміжку.
11. Що таке невласні елементи **R** та розширена числова пряма?
12. Навести означення функції. Що таке область визначення та область значення функції? Які є операції між функціями та як змінюються відповідні області визначення?
13. Запишіть означення inj, sur, bij відображень f. Що таке $f^{-1}: Y \to X$?
14. Що таке злічена множина та множина потужності континуум?

15. Як встановити рівнопотужність множин?

16. Навести функції, що здійснюють бієкції: а) інтервалу $(0, 1)$ та інтервалу $(0, 2)$; б) $(-1, 1)$ та $\mathbf{R}$ (див. рисунки нижче).





17. Навести приклад множини, що є об'єднанням замкненого проміжку, відкритого проколотого околу та ізольованої точки, що попарно не перетинаються. Які точки цієї множини є внутрішніми, граничними, зовнішніми та точками межі?

18. Відобразити на числовій вісі, записати як проміжок та у вигляді множини: а) проколотий 1-окіл точки 5; б) правий 0,5-окіл точки 1; в) лівий 2-окіл точки 0; г) 1-окіл $+\infty$; д) 8-окіл $-\infty$.

19. Сформулюйте властивість відокремленості точок $\mathbf{R}$. Поясніть її на прикладі точок -1 та 0.

20. Що таке послідовність? Підпослідовність? Наведіть приклади двох послідовностей та операцій між ними. Наведіть приклад послідовності та її підпослідовності за непарними індексами. Вкажіть композицію, яка утворює цю підпослідовність.

1.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити висловлювання: $((A \underset{1}{\Rightarrow} B) \underset{5}{\Rightarrow} (\underset{3}{\neg} (C \underset{2}{\vee} A) \underset{4}{\Rightarrow} B))$.

Цифри 1–5 вказують порядок операцій.

Спосіб 1. За допомогою формули $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ позбавимось спочатку від імплікацій 1, 4: $(\neg A \vee B) \Rightarrow (C \vee A \vee B)$. Далі від 5: $\neg(\neg A \vee B) \vee C \vee A \vee B$. Та застосуємо закон де Моргана: $(A \wedge \neg B) \vee C \vee A \vee B$ – отримана формула є формулою з тісними запереченнями. Запишемо її у вигляді $(A \wedge \neg B) \vee (C) \vee (A) \vee (B)$, розтлумачуючи кожну скобку як елементарну кон'юнкцію, бачимо диз'юнкцію елементарних кон'юнкцій, тобто д.н.ф. Вона не є досконалою, оскільки у кожні дужки входять не всі змінні формули.

Запишемо останню формулу у вигляді $(A \wedge \neg B) \vee (C \vee A \vee B)$ і застосуємо дистрибутивний закон: $(A \vee C \vee A \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee A \vee B)$, тобто $(A \vee C \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee A \vee B)$. Висловлювання у останній дужці є тавтологією, тому отримуємо: $(A \vee B \vee C)$, що є елементарною диз'юнкцією, а отже ми маємо д.к.н.ф. Це висловлювання є завжди істиною, крім випадку, коли всі змінні одночасно набувають значення «неправда».

Спосіб 2. Таблиця істинності:

A	*B*	*C*	1	2	3	4	5
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1

У 5-му стовпчику записано істинність всього сполученого висловлювання за різних значень істинності A, B і C.

Приклад 2. Задайте множину $A = \{x \mid x$ – ціле невід'ємне та $x + 2 = 5\}$ у інший спосіб.

Корінь рівняння $x + 2 = 5$ дорівнює 3 – ціле невід'ємне число. Отже, воно і тільки воно є елементом цієї множини. *Відповідь*: $A = \{3\}$.

Приклад 3. З'ясуйте, чи є рівними множини:

a) $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 1\}$.

b) A – множина всіх рівнобічних трикутників; B – множина всіх рівнокутних трикутників.

c) $A = \{1, 5, 8\}$; $B = \{1, 8\}$.

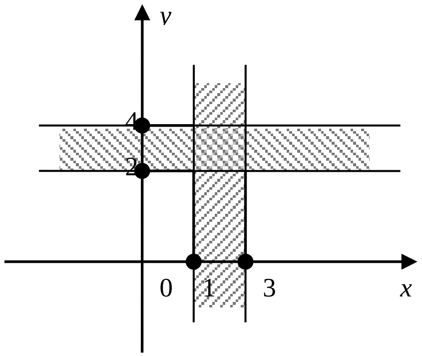
d) $A = \{0, 1\}$; $B = \{\{0, 1\}\}$.

Розв'язок: *a)* множини складаються із однакових елементів, отже $A = B$;
b) оскільки у рівнобічного трикутника всі кути рівні, а у рівнокутного трикутника всі сторони рівні, то $A = B$;
c) $A \neq B$, оскільки ці множини містять різну кількість елементів. Всі елементи множини B є також в A, отже $B \subset A$;
d) $A \neq B$, оскільки A – двохелементна, а B – одноелементна множина.

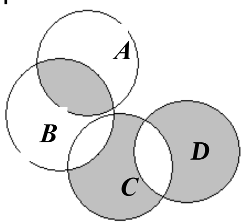
Приклад 4. Для двох множин $A = \{x|\ x \in \mathbf{R},\ 1 \le x \le 3\}$ і $B = \{x|\ x \in \mathbf{R},\ 2 \le x \le 4\}$ запишемо результати різних операцій над ними:

$A \cup B = \{x|\ x \in \mathbf{R},\ 1 \le x \le 4\}$;
$A \cap B = \{x|\ x \in \mathbf{R},\ 2 \le x \le 3\}$;
$A \setminus B = \{x|\ x \in \mathbf{R},\ 1 \le x < 2\}$;
$B \setminus A = \{x|\ x \in \mathbf{R},\ 3 < x \le 4\}$;
$A\ \Delta\ B = \{x|\ x \in \mathbf{R},\ 1 \le x < 2$ і $3 < x \le 4\}$;
$\bar{A} = \{x|\ x \in \mathbf{R},\ x < 1$ або $x > 3\}$;
$A \times B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [1, 3],\ y \in [2, 4]\}$.

Проілюструємо останню операцію на декартовій площині (див. перетин полос на рис. праворуч).



Приклад 5. Запишемо формулою множину, що задано графічно діаграмою Ейлера-Вена (див. рис. праворуч)



$$A \cap B \cup (C \setminus B) \setminus D \cup D \setminus C.$$

Приклад 6. Для множин $A=\{1, 2\}$ і $B=\{a, b\}$ знайдемо $A \times B$ та $B \times A$:
$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$; $B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2)\}$.

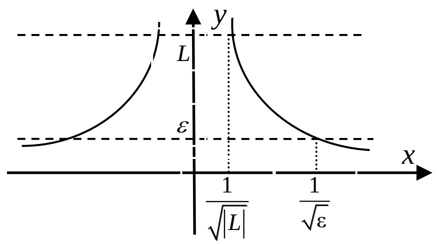
Приклад 7. Довести формулу $A \cap B \subset A$.
Розпишемо відповідне твердження $((x \in A \cap B) \Rightarrow (x \in A)) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \Rightarrow (x \in A))$ та позначимо $x \in A \Leftrightarrow \alpha$, $x \notin A \Leftrightarrow \bar{\alpha}$, $x \in B \Leftrightarrow \beta$, $x \notin B \Leftrightarrow \bar{\beta}$, тоді твердження перетворюється на тотожну істину $(\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha) \Leftrightarrow (\neg(\alpha \wedge \beta) \vee \alpha) \Leftrightarrow (\bar{\alpha} \vee \bar{\beta} \vee \alpha) \Leftrightarrow (1 \vee \bar{\beta}) \Leftrightarrow 1.$

Приклад 8. Визначити точну нижню та верхню грані функції $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ на множині $\mathbf{R}$ та обґрунтувати за допомогою критерію супремума та інфімума.

Розв'язок: робимо ескіз графіку функції (див. рис. нижче). Оскільки значення $f(x)$ завжди додатні та можуть бути як завгодно малими, припустимо, що $\inf f(x) = 0$. Водночас, якщо x малі, то значення $f(x)$ як завгодно великі, отже $\sup f(x) = +\infty$. Доведемо це за критерієм інфімуму та супремуму функції (Th 1.3 для $X = f(\mathbf{R})$, завдання 10 цього розділу):

$\inf f(x) = 0 \Leftrightarrow$ 1) $\forall x \in \mathbf{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \ge 0$, що вочевидь виконується, та 2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in \mathbf{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2} < 0 + \varepsilon$. Тобто треба навести $x < -\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ або $x > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, наприклад підходить $x = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1$.

$\sup f(x) = +\infty \Leftrightarrow f(x)$ необмежена зверху $\Leftrightarrow \forall L \in \mathbf{R}$ $\exists x \in \mathbf{R}$ $f(x) > L \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall L$ $\exists x \underset{\text{наприклад}}{=} \dfrac{1}{\sqrt{|L|+1}} \in \mathbf{R}$, що $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = |L| + 1 > L$. Твердження доведено.



1.4. Задачі для самостійного розв'язку

Елементи математичної логіки

1. Побудувати таблиці істинності:
а) $(\neg(P \Rightarrow \neg (Q \wedge P)) \Rightarrow (P \vee R))$;
б) $((P \wedge (Q \Rightarrow P)) \Rightarrow \neg P)$;
в) $(((P \wedge \neg Q) \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q))$;
г) $((P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \Rightarrow P) \vee Q))$.
2. Довести здійснимість формул:
а) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$;
б) $((Q \Rightarrow (P \wedge R)) \wedge \neg((P \vee R) \Rightarrow Q))$.
3. Довести тотожну істинність (тавтологію):
а) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q)))$;
б) $((\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$;
в) $(((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$;
г) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)))$.
4. Довести еквівалентності:
а) $(A \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow \neg A$;
б) $(A \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$;
5. На питання, хто з трьох студентів вивчав логіку, було отримано правильну відповідь: «якщо вивчав 1-ий, то вивчав і 3-ій; але неправда, що, якщо вивчав 2-ий, то вивчав і 3-ій». Хто з студентів вивчав логіку?
6. Хто з чотирьох студентів здав екзамен за одночасного виконання умов:

- якщо 1-ий здав, то і 2-ий здав;
- якщо 2-ий здав, то і 3-ій здав або 1-ий не здав;
- якщо 4-ий не здав, то 1-ий здав, а 3-ій не здав;
- якщо 4-ий здав, то і 1-ий здав.

7. Змоделюйте електроланцюг із трьома перемикачами, що вмикає світло за умови:
а) якщо усі перемикачі ввімкнено;
б) якщо будь-який із перемикачів увімкнено;
в) якщо перший перемикач вимкнено, а два інших увімкнено, або коли перший включено (не залежно від останніх двох);
г) якщо 1-ий ввімкнено, а 2-ий вимкнено; або якщо 1-ий ввімкнено, 2-ий ввімкнено, а 3-ій вимкнено; або 3-ій ввімкнено; або 1-ий вимкнено.

8. Вимагається, щоб вмикання світла в кімнаті здійснювалось за допомогою трьох різних перемикачів у такий спосіб, щоб кожен із них вмикав світло, якщо воно не горить, і вимикав його, якщо світло горить. Запишіть, без моделювання електроланцюга, відповідну формулу.
9. У деякій місцевості кожний місцевий житель завжди говорить істину або завжди бреше, а на питання незнайомців відповідає односкладно «так» або «ні». Турист підійшов до розвилки доріг, де стоїть місцевий житель. Яке питання, що вимагає односкладну відповідь, треба задати туристу, щоб дізнатися правильну дорогу? Використати обчислення висловлювань.
10. Перевірити чи є тавтологіями формули обчислення висловлювань:
а) $(\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C})) \Rightarrow ((\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C}))$;
б) $(\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C})) \wedge\neg ((\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \Rightarrow \mathrm{A})$;
в) $(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C}) \Rightarrow ((\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C}) \Rightarrow ((\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \Rightarrow \mathrm{C}))$.
11. Побудуйте формулу обчислення висловлювань від трьох змінних, яка істинна тоді й тільки тоді, коли рівно дві змінні набувають значення «неправда».
12. Побудуйте формулу обчислення висловлювань від трьох змінних, яка має значення істинності тоді, коли і більшість її змінних.
13. Побудуйте формулу обчислення висловлювань від трьох змінних, яка має значення істинності протилежно до більшості змінних.
14. Зведіть до д.к.н.ф. формули:
а) $(\mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{A}) \Rightarrow (\neg (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \Rightarrow \mathrm{A})$;
б) $(\neg(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \Rightarrow \mathrm{A}) \vee (\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}))$;
в) $\neg(\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{C})) \Rightarrow ((\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee \mathrm{C})$.
15. Зведіть до д.д.н.ф. формули:
а) $(\neg\mathrm{A} \Rightarrow \neg\mathrm{B}) \Rightarrow ((\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \Rightarrow (\mathrm{A} \wedge \mathrm{C}))$;
б) $((\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow \neg\mathrm{A}) \Rightarrow (\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}))$;
в) $(\neg(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \Rightarrow \neg \mathrm{A}) \wedge \neg((\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \Rightarrow \neg\mathrm{B})$.
16. Знайти формулу X обчислення висловлювань, для якої тотожно виконуються такі формули:
а) $((\mathrm{X} \wedge \mathrm{B}) \Rightarrow \neg\mathrm{A}) \Rightarrow ((\mathrm{A} \Rightarrow \neg\mathrm{B}) \Rightarrow \mathrm{A})$;
б) $((\mathrm{C} \Rightarrow (\neg\mathrm{B} \wedge \mathrm{A})) \Rightarrow \mathrm{X}) \Rightarrow (\mathrm{X} \wedge (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \wedge \mathrm{C})$.
17. Троє підозрюваних з метою заплутати слідство домовились називати у показаннях правдиво або марку, або колір автомобіля, причетного до злочину. Слідчий встановив правду за наступними показаннями: 1) автомобіль – синій "Daewoo"; 2) автомобіль – чорний

"BMW"; 3) автомобіль – "Tesla", але не синій. Встановіть, як і слідчій, правду, використовуючи обчислення висловлювань.

18. Дайте означення квантора існування та одиничності (розпишіть $\exists!$ через $\exists$ та $\forall$) та з'ясуйте дію заперечення на нього.

Елементи теорії множин

19. Встановити безпосередньо тавтології обчислення висловлювань для таких рівностей теорії множин:

а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

б) $X \cap Y = Y \cap X$;

в) $CCX = X$;

г) $C(X \cap Y) = CX \cup CY$.

20. На які твердження теорії множин перетворюються наступні тавтології обчислення висловлювань:

а) $(A \wedge (\neg A \vee B)) \Rightarrow B$; б) $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$;

в) $A \vee \neg A$; г) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$;

д) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$; е) $A \Leftrightarrow (A \wedge (B \vee \neg B))$;

є) $(A \wedge B) \vee A \Leftrightarrow A$; ж) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$;

з) $\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$; и) $\neg (A \wedge \neg A)$.

21. Запишіть у логічних символах твердження про те, що послідовність (x_n) не є зростаючою, як заперечення того, що послідовність (x_n) зростає, та у позитивному сенсі як формулу зі щільними запереченнями.

22. Запишіть у логічних символах аксіоми теорії множин (ZFC):

а) аксіома об'ємності: дві множини рівні тоді й тільки тоді, коли вони мають ті самі елементи;

б) аксіома порожньої множини: існує порожня множина, що не містить жодного елемента;

в) аксіома об'єднання: для кожного сімейства множин є множина, яка містить в собі всі елементи кожної множини сімейства і тільки їх;

г) аксіоми пари: для двох будь-яких множин існує множина, яка складається із цих і тільки цих множин;

д) аксіома булеана або множини підмножин: для кожної множини існує множина всіх її підмножин;

е) аксіома нескінченості: індуктивні нескінчені множини існують, тобто існує така множина A, що містить пусту множину $\varnothing$ та для будь-якого належного їй елемента b містить також і множину, сформовану як об'єднання b та її синґлетону $\{b\}$;

ж) аксіомна схема виділення: якщо є деяке математичне твердження, що може бути застосованим до будь-якого з елементів деякої множини, то можна виділити принаймні одну підмножину цієї множини, застосувавши це твердження;

з) аксіома підстановки: функціональне відношення, що може бути застосоване до кожного з елементів деякої множини, визначає також множину;

и) аксіома регулярності: в будь-якій непорожній множині A є елемент B, що як множина не перетинається із А. Як наслідок: жодна множина не є елементом самої себе;

к) аксіома вибору: для будь-якого набору непорожніх множин, що не перетинаються можна побудувати множину, кожен елемент якої є елементом однієї і тільки однієї з множин цього набору.

23. Наведіть приклади, що демонструють не зворотність імплікацій:

а) $\forall x\, \forall y\; F(x, y) \Rightarrow \forall x\, F(x, x)$;

б) $\exists x\; F(x, x) \Rightarrow \exists x, y\; F(x, y)$;

в) $\exists x\; (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\; A(x) \wedge \exists x\, B(x)$;

г) $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$.

24. Опишіть словами елементи таких множин та намалюйте їх:

$$\text{а) } A \cap B \cap C; \quad \text{б) } (A \cup B) \cap \overline{C}.$$

25. Нехай $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$; $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Знайдіть:

$$A \cup C,\ B \cap C,\ A \setminus C,\ B \Delta C.$$

26. Нехай $E = \{1, 2, 3, 4\}$; $A = \{1, 3, 4\}$; $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 4\}$. Знайдіть:

$$\overline{A} \cup \overline{B},\ \overline{A \cap B},\ A \cap \overline{B},\ (B \setminus A) \cup \overline{C}.$$

27. Зобразити на числовій прямій перетин, об'єднання та різницю наступних множин: $X_1 = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 - 1 \le 0\}$ и $X_2 = \{x \mid |x| < 1\}$.

28. Виконайте всі відомі операції над заданими множинами:

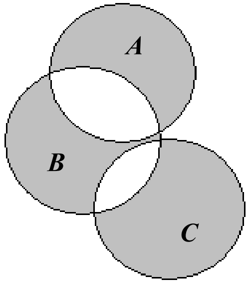
а) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 3, 5\}$, $C = \{5, 6\}$;

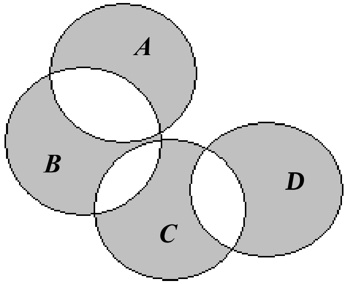
б) $A = \{a, b, d\}$, $B = \{b, d, e, h\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;

в) $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{3, 6, 9\}$, $C = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$;

г) $A = [2, 6)$, $B = [5, 7]$, $C = \{1\} \cup (6, 7)$.

29. Запишіть формулами графічно зображені множини:





30. Для множин A = {x, y} і B = {1, 2, 3}. Знайдіть декартові добутки:

A × B, B × A, B × B, A × A, B × A × B, A × B × A.

31. Відобразити на площині декартові добутки: A × B, B × A, B × B.

а) A = $\{x|\ x\in[0, 1]\}$, B = $\{y|\ y\in(-1, 1)\}$;

б) A = $\{x|\ x\in\mathbf{R},\ x^2>1\}$, B = $\{y|\ y\in\mathbf{R},\ y\in[1,+\infty)\}$.

32. Побудуйте множину $A^2 = A \times A$, якщо:

а) A = [0, 1);
б) A = {x, y, z};
в) A = {0, 2, 4, 6, 8};
г) A = {1, 3, 5, 7};
д) A = {день, ніч};
е) A = {a, b, c, d}.

33. Перелічіть елементи таких множин:

A = $\{x|\ x\in\mathbf{Z},\ 10\le x\le 17\}$;

C = $\{x|\ x\in\mathbf{Z},\ 6x^2+x-1=0\}$;

B = $\{x|\ x\in\mathbf{Z},\ x^2<24\}$;

D = $\{x|\ x\in\mathbf{R},\ 6x^2+x-1=0\}$.

34. Дайте означення за допомогою характеристичної властивості (класифікатора) такі множини:

S = {2, 5, 8, 11, …}; T = $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \ldots\right\}$.

35. Довести тотожності (за допомогою діаграм Ейлера – Венна та використовуючи обчислювання висловлювань):

а) $A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$; б) $A\setminus(A\setminus B)=A\bigcap B$;

в) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\bigcup(A\bigcap C)$; г) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\bigcup C)$;

д) $A\bigcap(B\Delta C)=(A\bigcap B)\Delta(A\bigcap C)$; е) $A\bigcup B=(A\Delta B)\bigcup(A\bigcap B)$;

є) $(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)=(A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B)$; ж) $A\bigcup(B\setminus C)\supset(A\bigcup B)\setminus C$.

36. Довести за допомогою обчислювання висловлювань, що:

а) $A\bigcup B=B\Leftrightarrow A\subset B$; б) $A\bigcap B=A\Leftrightarrow A\subset B$;

в) $A\setminus B\subset C\Leftrightarrow A\subset B\bigcup C$; г) $A\bigcup B=A\bigcap B\Rightarrow A=B$;

д) $A\bigcap B\subset C\Leftrightarrow A\subset\overline{B}\bigcup C$; е) $A\subset B\bigcup C\Leftrightarrow A\bigcap\overline{B}\subset C$;

є) $(A\setminus B)\bigcup B=A\Leftrightarrow B\subset A$; ж) $A\subset B\Rightarrow A\bigcup C\subset B\bigcup C$.

37. Для множин X і Y визначити тип включення $(X\subset Y, Y\subset X, X=Y)$:

а) $X=A\bigcup(B\setminus C)$, $Y=(A\bigcup B)\setminus(A\bigcup C)$;

б) $X=(A\bigcap B)\setminus C$, $Y=(A\setminus C)\bigcap(B\setminus C)$;

в) $X=A\setminus(B\bigcup C)$, $Y=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$.

38. Довести, що для кожного відображення $f: X\to Y$ і будь-яких підмножин $A, B\subset X$ виконуються:

а) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

б) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$;

в) навести приклад, коли $f(A\cap B)\ne f(A)\cap f(B)$;

г) $f: X\to Y$ ін'єкція $\Leftrightarrow\forall A,B\subset X\ \ f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

39. Вкажіть бієкцію проміжку [0, 1) на проміжок [–1, 2) та на $\mathbf{R}_+$.

40. Довести зліченість множини раціональних чисел (Th 1.1.).

41. Довести, що множина дійсних чисел – незлічена (Th 1.2.).

42. Знайдіть співвідношення між нижньою та верхньою гранями множини та її під(над)множини.

43. Знайдіть $\sup(A\cup B)$ та $\inf(A\cup B)$ через $\sup A$, $\sup B$ та $\inf A$, $\inf B$.

44. Довести ірраціональність чисел:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; б) 0,121221222122221222221…

45. Довести, що множина A чисел кратних 3 рівнопотужна множині раціональних чисел **Q**. Навести приклади функцій, що здійснюють бієкцію A і **N;** A і **Z**.

46. Довести, що множина всіх підмножин **N** (позначається $2^{\mathbf{N}}$) має потужність континуум.

47. Нехай A – множина всіх раціональних чисел a таких, що $a^3 < 3$ і B – множина всіх інших раціональних чисел. Довести, що в множині A нема максимального числа, а в B – мінімального. Чому дорівнюють $\sup A$, $\sup B$ та $\inf A$, $\inf B$ в $\mathbf{R}$?

48. Визначити операції «+» та «·» таким чином, щоб множина $\mathbf{F}_2 = \{0,1\}$ стала полем.

49. Визначити точну нижню та верхню грані функції на вказаній множині та обґрунтувати за допомогою критерію супремума та інфімума.

а) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbf{R}$;

б) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $x \in (0,+\infty)$;

в) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$;

г) $f(x) = e^{-x}$, $x \in (0,+\infty)$.

РОЗДІЛ 2.
ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ

2.1. Основні поняття та властивості

Границя за Коші

Def (мовою околів). Число b називається границею функції $f(x)$, коли x прямує до a, де a точка згущення області визначення функції $f(x)$, якщо для будь-якого околу $U_\varepsilon(b) = \{y\in\mathbf{R} \mid |y-b| < \varepsilon\}$ точки b знайдеться проколотий окіл $\widehat{V}_\delta(a) = \{x\in\mathbf{R} \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ точки a, образ якого належить $U_\varepsilon(b)$, тобто $f(\widehat{V}_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(b)$.

Def. (Скорочено, мовою «ε – δ»): $f(x) \to b$ коли $x \to a$ або

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \underline{\forall\varepsilon>0}\ \exists\delta>0\ |_{\forall x}\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow \underline{|f(x)-b|<\varepsilon}.$$

У цьому означенні лінією підкреслено частину, що стосується граничного переходу $f(x) \to b$, а крапками підкреслено частину, що стосується умови $x \to a$.

Інші граничні переходи, зокрема *однобічні* та для невласних елементів, можна отримати за допомогою такого «словника»:

$f(x)\to b$	$\forall\varepsilon>0$	…………………………	$\lvert f(x)-b\rvert<\varepsilon$
$f(x)\to b+0$	$\forall\varepsilon>0$	…………………………	$b\le f(x)<b+\varepsilon$
$f(x)\to b-0$	$\forall\varepsilon>0$	…………………………	$b-\varepsilon<f(x)\le b$
$f(x)\to\infty$	$\forall\varepsilon$	…………………………	$\lvert f(x)\rvert>\varepsilon$
$f(x)\to+\infty$	$\forall\varepsilon$	…………………………	$f(x)>\varepsilon$
$f(x)\to-\infty$	$\forall\varepsilon$	…………………………	$f(x)<\varepsilon$
$x\to a$	______	$\exists\delta>0 \mid 0<\lvert x-a\rvert<\delta\Rightarrow$	____________
$x\to a+0$	______	$\exists\delta>0 \mid a<x<a+\delta\Rightarrow$	____________
$x\to a-0$	______	$\exists\delta>0 \mid a-\delta<x<a\Rightarrow$	____________
$x\to\infty$	______	$\exists\delta \mid \lvert x\rvert>\delta\Rightarrow$	____________
$x\to+\infty$	______	$\exists\delta \mid x>\delta\Rightarrow$	____________
$x\to-\infty$	______	$\exists\delta \mid x<\delta\Rightarrow$	____________

Зауважимо, що для невласних елементів ∞, $+\infty$ в означенні границі можна не змінювати умови $\varepsilon > 0$ та $\delta > 0$. Для $-\infty$, якщо залишити $\varepsilon > 0$ або $\delta > 0$, треба писати $f(x) < -\varepsilon$ та $x < -\delta$ відповідно. Тобто можна запам'ятати наступну структуру означення не змінною

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ |_{\forall x}\quad *_\delta\quad\Rightarrow\quad *_\varepsilon},$$

та підставляти відповідні значення із таблиць нижче

$x\to$	$*_\delta$
a	$0<\lvert x-a\rvert<\delta$
$a+0$	$a<x<a+\delta$
$a-0$	$a-\delta<x<a$
∞	$\lvert x\rvert>\delta$
$+\infty$	$x>\delta$
$-\infty$	$x<-\delta$

$f(x)\to$	$*_\varepsilon$
b	$\lvert f(x)-b\rvert<\varepsilon$
$b+0$	$b\le f(x)<b+\varepsilon$
$b-0$	$b-\varepsilon<f(x)\le b$
∞	$\lvert f(x)\rvert>\varepsilon$
$+\infty$	$f(x)>\varepsilon$
$-\infty$	$f(x)<-\varepsilon$

Th 2.1. Якщо у функції існує границя у деякій точці, то ця границя єдина.

Усунути необхідність наперед знати границю для перевірки її існування допомагає наступна теорема.

Th 2.2. (Критерій Коші). $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)\ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ |_{\forall\, x',x''\in\hat{V}_\delta(a)}$ $\Rightarrow\ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

Часткова, верхня та нижня границі

Обмеженням функції f на множину X називається функція $f|_X$, що співпадає з f на $X\cap D_f$, тобто область визначення якої звужено на X.

Def. *Частковою границею* функції $f(x)$, коли x прямує до a називається границя обмеження функції $f|_X$ для деякої множини X, такої, що a є точкою згущення $X\cap D_f$.

Права та ліва границі функції є прикладами часткових границь. Границя функції існує тоді й тільки тоді, коли існують всі часткові границі та співпадають. Найбільша серед всіх часткових границь називається *верхньою границею* функції: $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\,f(x)=\lim\limits_{x\to a}\sup f(x).$

Найменша часткова границя – *нижня границя* функції: $\underline{\lim\limits_{x\to a}}\,f(x)=\lim\limits_{x\to a}\inf f(x)$. Отже, границя існує і дорівнює b тоді й тільки тоді, коли $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\,f(x)=\underline{\lim\limits_{x\to a}}\,f(x)=b.$

Границя послідовності. Границя за Гейне

Def. Границею послідовності (x_n) називається границя функції натурального аргументу $f(n)=x_n$ коли $n\to+\infty$. Мовою «$\varepsilon-\delta$»

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=b\ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbf{N}\ |\ n>N\Rightarrow\ |x_n-b|<\varepsilon.$$

Якщо послідовність має скінчену границю, то вона називається *збіжною*, якщо не має – *розбіжною*. Частковою границею послідовності є границя підпослідовності $\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}$, де індекси n_k – це зростаючі натуральні числа. Послідовність (x_n) *обмежена*, якщо вона обмежена як множина, тобто існує така $C>0$, що для всіх натуральних n виконується $|x_n|<C$.

Th 2.3. (Больцано – Вейерштрасса). У будь-якої обмеженої послідовності (x_n) існує збіжна підпослідовність (x_{n_k}).

Def. (Границя за Гейне). Число b називається границею за Гейне функції $f(x)$, коли x прямує до a, якщо для будь якої послідовності $x_n\to a$, $x_n\ne a$ границя функції за послідовністю $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=b$.

Th 2.4. Означення границі функції за Коші та за Гейне співпадають.

Отже, можливо переходити від границь функцій до границь послідовностей і навпаки.

Арифметичні властивості границі

Th 2.5. Границя суми, різниці, добутку та відношення (позначимо ці операції *) двох функцій $f(x)$ і $g(x)$ дорівнюють додатку, різниці, добутку та відношенню границь $f(x)$ і $g(x)$ відповідно:

$$\lim_{x\to a}f(x)*g(x)=\lim_{x\to a}f(x)*\lim_{x\to a}g(x)\qquad(2.1)$$

за умови існування границь праворуч, які не дають *невизначеності* $\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$.

Водночас для $a\ne0$ визначені такі операції з невласними елементами $\infty+\infty=\infty,\ \frac{\infty}{0}=\infty,\ \infty\cdot\infty=\infty,\ a\cdot\infty=\infty,\ \frac{a}{0}=\infty,\ \frac{a}{\infty}=0.$

Для композиції двох функцій за умови злагодженості їх областей визначення теорема також вірна та набуває значення зміни змінної:

$$\lim_{x\to a}f(g(x))=\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a}g(x)=b\\ \text{Заміна }g(x)=y\end{array}\right|=\lim_{y\to b}f(y).\qquad(2.2)$$

Неперервні функції

Def. Функція $f(x)$ *неперервна* у точці x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$. Функція $f(x)$ називається *неперервною праворуч* (*ліворуч*) у точці x_0 її області визначення, якщо $x_0\in D(f)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)=f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)=f(x_0)$).

В ізольованій точці області визначення функція вважається неперервною за означенням. Із неперервності у точці x_0 випливають неперервність праворуч та ліворуч у x_0 і навпаки. Функція $f(x)$ називається *неперервною на множині* X (пишуть $f(x)\in C(X)$), якщо вона неперервна у кожній точці $x_0\in X$ цієї множини. Якщо $X=[a, b]$, то неперервність у $x=a$ розуміють ліворуч, а у точці $x=b$ праворуч.

Елементарні функції

Def. *Основні елементарні* функції це – константи, степеневі, показні, логарифмічні, тригонометричні і функції зворотні до них. *Елементарні* функції – це функції, отримані з основних елементарних за допомогою кінцевого числа арифметичних операцій (+, –, ·, /) і суперпозицій.

Th 2.6. (про неперервність елементарних функцій). Елементарні функції неперервні в області їх визначення.

Із цієї теореми випливає, що для елементарних функцій (це більшість задач, що розглядаються у цьому посібнику) підчас обчислення границі правомірно підставляти у функцію відповідне до граничного переходу значення x_0, якщо це не приводить до невизначеності. Усувати невизначеності можна за допомогою арифметичних та інших дій, спрощуючи вираз та використовуючи вже відомі границі, серед яких найважливішими є *перша* та *друга чудові границі*.

Коли $\underline{\boldsymbol{x\to 0}}$

Перша чудова границя $\boxed{\lim \dfrac{\sin x}{x}=1}$.

Її основні наслідки

$$\lim\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1;\quad \lim\frac{\arcsin x}{x}=1;\quad \lim\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1;\quad \lim\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Друга чудова границя $\boxed{\lim (1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$.

Її наслідки

$$\lim\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\quad \lim\frac{e^x-1}{x}=1;\quad \lim\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\quad \lim\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu.$$

Якщо аргумент функції прямує до будь-якого іншого окрім 0 числа або до невласного елемента, можна звести вираз до одного з наведених вище за допомогою зміни змінної (див. формулу (2.2)).

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\left|\dfrac{1}{x}=t\right|=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$.

Зауважимо, що друга чудова границя стосується невизначеності 1^∞. Також підчас розглядання степенево-показних виразів виникають невизначеності 0^0, ∞^0. Водночас для $a>1$ виконуються рівності $a^{+\infty}=+\infty$; $a^{-\infty}=+0$; та для $a>0$ рівності $(+0)^a=+0$; $(+\infty)^a=+\infty$; $(+0)^{-\infty}=+\infty$. Зручним в процесі роботи зі степенево-показними функціями є наступне перетворення

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}, \qquad (2.3)$$

що використовує неперервність функції e^x.

Символи асимптотичного порівняння, *O*-символіка

Наступне поняття та теорема дають змогу значно спростити обчислення границь.

Def. Функції $f(x)$ і $g(x)$ називаються *еквівалентними*, пишемо $f(x)\sim g(x)$, коли $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

Th 2.7. При обчисленні границі добутку або частки скінченної кількості функцій будь-яку з них можна замінити на еквівалентну.

Зауважимо, що для різниці, суми або композиції це взагалі не правда.

Із першої та другої чудових границь та їх наслідків випливають наступні

Чудові еквівалентності ($\boldsymbol{x\to 0}$)

$$\sin x\sim x;\quad \operatorname{tg} x\sim x;\quad \arcsin x\sim x;\quad \operatorname{arctg} x\sim x;\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2};$$

$(1+x)^{1/x} \sim e$; $\ln(1+x) \sim x$; $e^x - 1 \sim x$; $a^x - 1 \sim x\ln a$;
$(1+x)^{\mu} \sim 1 + \mu x$.

Def. $f(x) = o(g(x))$, коли $x \to a \Leftrightarrow f(x) = g(x)o(1)$, де $o(1)$ – це *нескінченно мала* величина, тобто будь-яка функція $h(x)$, що прямує до 0 коли $x \to a$. (*Читаємо*: $f(x)$ є нескінченно малою величиною щодо $g(x)$).
Def. $f(x) = O(g(x))$, коли $x \to a \Leftrightarrow f(x) = g(x)O(1)$, де $O(1)$ – це *обмежена* в точці a функція $h(x)$, тобто існує $\varepsilon > 0$, що в околі точки a функція $h(x)$ за модулем менша за ε. (*Читаємо*: $f(x)$ є обмеженою величиною щодо $g(x)$).
Def. Функції $f(x)$ і $g(x)$ називаються *функціями одного порядку* коли $x \to a$, пишемо $f(x) \asymp g(x)$, якщо $f(x) = O(g(x))$ і $g(x) = O(f(x))$. Зокрема це виконується, якщо границя відношення $f(x)$ і $g(x)$, коли $x \to a$, є скінченною величиною, відмінною від 0: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$.
Def. Функція $f(x)$ *відокремлена від нуля*, коли $x \to a$, якщо $1/f(x) = O(1)$.
Def. Функція $f(x)$ є *нескінченно великою,* коли $x \to a$, якщо $1/f(x) = o(1)$, тобто $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.
Інший спосіб говорити про еквівалентності – це застосування рівностей із додаванням нескінченно малої: $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$.

Чудові рівності

$\sin x = x + o(x)$; $\operatorname{tg} x = x + o(x)$; $\arcsin x = x + o(x)$;

$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1)$; $\ln(1+x) = x + o(x)$; $e^x = 1 + x + o(x)$;

$a^x = 1 + x\ln a + o(x)$; $(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + o(x)$.

Def. Якщо за умови $x \to a$ функцію $f(x)$ можна подати у вигляді $f(x) = f_0(x) + o(f_0(x))$, де перший доданок $f_0(x)$ не дорівнює нулю, то $f_0(x)$ називається *головним членом* або *асимптотикою* функції $f(x)$. Головний член – це інша назва для еквівалентної функції.
Зазвичай шукають найпростішу асимптотику, а саме головний член у вигляді $f_0(x) = C(x-a)^{\lambda}$, якщо $x \to a$; та $f_0(x) = Cx^{\lambda}$, якщо $x \to \infty$ або $x \to 0$. Тут $C \neq 0$, λ – показник зростання/спадання функції $f(x)$.

Зауважимо, що головний член елементарної функції не завжди можна представити степеневою функцією, він також може мати логарифмічний або експоненціальний вигляд, або бути добутком/відношенням, складеним із цих трьох функцій. Це можна легко зрозуміти, спираючись на шкалу зростання, що наведена нижче та факт, що головний член добутку/відношення – це добуток/відношення головних членів (наслідок Th 2.7).

Одним із наслідків диференційного числення є наступний зручний спосіб усунення невизначеностей вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, коли існує границя відношення похідних функцій.

Правило Лопіталю: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left| \frac{0}{0} \vee \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

З цього правила можна довести таку шкалу зростання.

Шкала асимптотичного порівняння (шкала зростання)

$x \to +\infty \quad \forall \alpha, \beta, \gamma > 0 \qquad \boxed{(\ln x)^{\alpha} << x^{\beta} << e^{x\gamma}}$,

відношення $f(x) << g(x)$ означає $f(x) = o(g(x))$, тобто $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Іншим важливим результатом диференційного числення (див. наступний розділ цього посібника) є формула і ряд Тейлора та її окремий випадок – формула та ряд Маклорена, коли $x \to 0$. Наступні формули є узагальненнями чудових рівностей.

П'ять основних розкладань за формулою Маклорена

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o(x^n);$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{k!}x^n + o(x^n).$$

Зауважимо, що у кожному із п'яти розкладень можна *o*-маленьке замінити на *O*-велике, у якому *x* вже є у степені на 1 порядок більше.

Монотонні функції та послідовності

Def. Функція $f(x)$ називається *зростаючою* (*спадною*) на *X*: $f(x)\nearrow(\searrow)$ на *X*, якщо $\forall x_1 < x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ $(\ge)$. Функція $f(x)$ *строго зростаюча* (*строго спадна*) $f(x)\uparrow(\downarrow)$, якщо остання нерівність строга $f(x_1) < f(x_2)$ ($>$ відповідно). Зростаюча або спадна функція називається *монотонною*, строго зростаюча або строго спадна – *строго монотонною*.

Для послідовності означення трохи спрощується:

$(x_n)\nearrow(\searrow)$, якщо $\forall n \in \mathbf{N}$ $x_n \le x_{n+1}$ $(\ge)$, або $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \ge 1$ $(\le)$. Для строгої монотонності останні нерівності – строгі.

Додавання однойменно монотонних, добуток невід'ємних однойменно монотонних функцій та перехід до взаємно оберненої функції – залишає тип монотонності не змінним. Змінення знаку функції або знаку аргументу або перехід до арифметично зворотної функції – змінює тип монотонності на протилежний. Композиція однойменно монотонних – не строго зростає, різнойменно – не строго спадає.

Аналогом правила Лопіталю для послідовностей є наступна теорема.

Th 2.7. (Штольц). Нехай послідовність (y_n) строго монотонна та необмежена, тоді, якщо існує границя праворуч, то існує границя ліворуч та вони співпадають («$\Leftarrow|$»): $\lim \dfrac{x_n}{y_n} \;\Leftarrow|\; \lim \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

Th 2.8. (Вейерштрасс, про границю монотонної та обмеженої послідовності). Монотонна та обмежена послідовність має скінчену

границю. Для монотонно зростаючої достатньо вимагати тільки обмеженість зверху, для спадної – знизу.

Зауважимо, що цю теорему можна сформулювати і для функцій: якщо $f(x)$ монотонна у правому (лівому) околу точки і обмежена в ньому, то існує права (ліва) границя функції у цій точці.

Сформулюємо ще декілька важливих означень та тверджень. Вони досить абстрактні та відіграють фундаментальну роль у теорії топологічних та метричних просторів.

Згадаємо Th 2.2 та сформулюємо критерій Коші для послідовностей: $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ |_\forall\ n, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$. Висловлювання праворуч є означенням *фундаментальної послідовності* або *послідовності Коші*. Отже, критерій Коші для послідовностей говорить, що будь-яка фундаментальна послідовність дійсних чисел збігається[1].

Th 2.9. (Принцип вкладених множин). Будь-яка послідовність вкладених замкнутих проміжків, довжини яких прямують до нуля, стягується до єдиної спільної точки: $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_k, b_k] \supset \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0 \;\Rightarrow\; \exists!c\ \ c \in [a_k, b_k],\ \forall k \in \mathbf{N}$.

Def. Множина *K* у **R** називається компактом, якщо із будь-якого нескінченного відкритого покриття *K* можна виділити скінчене підпокриття[2]. Тобто якщо $\forall M_\alpha$, де M_α – відкрити множини, α пробігає деяку нескінчену множену *A*, та $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$, тоді існує скінчена множина $B \subset A$ така, що $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in B} M_\alpha$.

У теоремі 2.10, що наведена нижче, еквівалентність 1 та 2 називають лемою Бореля – Лебега, а еквівалентність 2 і 3 – це вже відома нам Th 2.3 Больцано – Вейерштрасса.

---

[1] У загальному випадку простору *X* це не так (контрприклад **Q**). Метричні простори з наявністю цієї властивості називаються *повними*. Для цих просторів також виконується принцип вкладених множин.

[2] Це є означенням компакту для будь-якого хаусдорфового топологічного простору. У Th 2.10 характеризація 2 Бореля – Лебега правдива для скінченовимірних евклідових просторів, а 3 – для повних метричних просторів.

Th 2.10. Наступні умови еквівалентні.

1. K компакт у **R**;
2. K замкнена та обмежена множина у **R**;
3. Будь-яка послідовність (x_n) із K має (x_{n_k}) – збіжну в K підпослідовність.

Основні теореми про неперервність функцій

Теорему про неперервність елементарних функцій ми вже формулювали. Запишемо ще декілька важливих теорем.

Th 2.11. (1, 2 теореми Вейєрштрасса). Якщо $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то

1) $f(x)$ обмежена на $[a,b]$;

2) $f(x)$ досягає своїх інфімуму та супремуму на $[a,b]$, тобто існують $x_m, x_M \in [a,b]$ такі, що $f(x_m) = \min f(x) = \inf f(x)$ на $[a,b]$ та $f(x_M) = \max f(x) = \sup f(x)$ на $[a,b]$.

Th 2.12. (Больцано – Коші, про проміжні значення). Якщо функція неперервна на проміжку, то вона сюр'єктивна на $[a, b]$, тобто набуває всіх своїх проміжних значень.

Th 2.13. (Критерій неперервності монотонної функції). Нехай $f(x)$ монотонна на проміжку $[a,b]$. Тоді $f(x) \in C[a,b] \Leftrightarrow f(x)$ -sur на $[a,b]$.

Th 2.14. (Про неперервність оберненої функції). Якщо $y = f(x)$ визначена, строго монотонна та неперервна на проміжку X, то на відповідному проміжку Y значень цієї функції існує обернена функція $x = f^{-1}(y)$, також строго монотонна та неперервна.

Загальним висновком теорії границь є змога перевіряти неперервність різних функцій та досліджувати їхню асимптотичну поведінку в околі точки або нескінченності. Це, зокрема, дає змогу побудови ескізу графіку функції.

Нагадаємо умову неперервності функції $f(x)$ у точці $x = x_0$

(2.5) $$f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$$

Якщо ця умова порушується, то функція $f(x)$ має розрив у точці $x = x_0$.

Класифікація точок розриву функції

Розриви *1-го роду* (коли ліва та права границі існують та скінченні):

- *усувний тип*, якщо $f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$;
- *типу стрибок*, якщо $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$.

Розриви *2-го роду* (коли хоча би одна з однобічних границь дорівнює ∞ або не існує):

- *нескінченний тип*, якщо $f(x_0-0)$ та $f(x_0+0)$ існують та хоча б одна з них дорівнює ∞;
- *не існує границі*, якщо $f(x_0-0)$ або $f(x_0+0)$ не існує.

Алгоритм дослідження функції на неперервність і побудова ескізу:

1. Встановити, чи є функція елементарною;
2. Знайти область визначення D_f. Виписати точки x_0 на границі D_f;
3. Знайти праву та ліву границі функції $f(x)$ для кожної точки x_0;
4. Класифікувати точки розриву;
5. Подивитися границі у $\pm\infty$;
6. Побудувати ескіз графіка функції, з'єднуючи, за неперервністю $f(x)$ на D_f, отримані значення границь функції у досліджених точках та у $\pm\infty$.

Якщо функція не є елементарною, перевірка її на розриви здійснюється за означенням, із використанням специфіки та властивостей цієї функції.

Зазначимо, що на множині X часто актуальнішою за звичайну неперервність є наступна, більш вимоглива властивість.

Def. Функція $f(x)$ називається *рівномірно неперервною* на X, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x, a \in X \cap D_f\ \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Th 2.15. (Кантора, про рівномірну неперервність). Із неперервності на замкненому проміжку випливає і рівномірна неперервність на ньому.

Коливання функції та її зв'язок із неперервністю

Def. *Коливанням функції* $f(x)$ *на множині* M називається величина:
$$\omega(f)\big|_M = \omega(f, M) = \sup_{x,x' \in D(f)\cap M} |f(x) - f(x')|.$$

Якщо $\exists \lim\limits_{\delta\to 0} \omega(f, O(a,\delta)) = \omega(f,a) \geq 0$, то величину $\omega(f,a)$ називають *коливанням функції в точці*.

Th 2.16. $f(x) \in C(\{a\}) \Leftrightarrow \omega(f,a) = 0$.

Def. *Модулем неперервності* функції $f(x)$ на множині M називається:
$$\omega(f,\delta) = \sup_{\substack{x,x' \in M \\ |x-x'|<\delta}} |f(x) - f(x')|.$$

Th 2.17. Функція $f(x)$ рівномірно неперервна на M тоді й тільки тоді, коли її модуль неперервності має нульову границю, коли $\delta \to +0$.

2.2. Контрольні питання та завдання

1. Записати визначення границі числової функції і послідовності. Як змінюються означення для однобічних випадків та для невласних елементів?
2. Записати критерій Коші існування границі числової послідовності та функції.
3. Чи може бути у функції або послідовності декілька границь? Декілька часткових границь?
4. Як пов’язані часткові границі з границею функції. Що таке верхня та нижня межа послідовності і функції?
5. Як формулюється визначення границі функції за Гейне, який її зв’язок з визначенням границі за Коші?
6. Які можуть виникати невизначеності коли шукаєш границю?
7. Сформулювати визначення неперервності функції. Які бувають розриви у функції (класифікація)?
8. Що таке елементарна функція та що відомо про її неперервність/розриви?
9. Що таке монотонна функція та що відомо про її неперервність/розриви?
10. Які теореми відомі про границі обмеженої (монотонної) послідовності? Проілюструвати їх на прикладі.
11. Навести приклади застосування правила Лопіталю та теореми Штольца.
12. Записати першу і другу чудові границі та інші границі, що з ними пов’язані.
13. Які функції називаються еквівалентними, а які функціями одного порядку?
14. Що означає записи $f(x) = o(g(x))$ та $f(x) = O(g(x))$, коли $x \to a$?
15. Що таке шкала зростання?
16. Що таке головний член функції та як його можна використовувати під час обчислення границь?
17. Навести приклад, коли не можна змінювати функцію на її головний член під час обчислення границь.
18. Навести відомі приклади асимптотичних рівностей та відповідних еквівалентностей.
19. Виписати асимптотичні розкладення за формулою Маклорена для 5-ти основних елементарних функцій.

20. Що таке коливання функції на множині та у точці?
21. Чим відрізняються визначення звичайної неперервності та рівномірної неперервності функції на множині? Яка залежність від замкненості/відкритості множини, що розглядається? Навести приклади.
22. Що таке компакт та які є його характеризації в **R**?
23. Довести, що будь-який поліном непарного степеня має хоча б один дійсний корінь.
24. Сформулювати теорему про неперервність оберненої функції. Проілюструвати її на прикладі обернених тригонометричних і гіперболічних функцій.
25. Яка функція та на якому проміжку обов’язково набуває своїх найбільших та найменших значень?

2.3. Приклади розв’язування задач

Якщо під час обчислення границі, коли $x \to a$, виникає невизначеність $\frac{0}{0}$, то це означає, що $x = a$ є коренем чисельника та знаменника. Отже, треба виділити у чисельнику та знаменнику множник вигляду $(x-a)^{\lambda}$, що після скорочення усуває невизначеність. Для поліномів наведена вказівка означає розкладення на множники за допомогою розв’язань рівнянь у чисельнику та знаменнику або за допомогою ділення в стовпчик на $(x-a)$.

Приклад 1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^4-2x^2+1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x^2-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{4}.$$

Для дробів із ірраціональностями для виділення необхідного множника треба усунути ірраціональність, помножуючи для парних коренів на спряжене для доповнення до різниці квадратів та на неповний квадрат для коренів третього степеня.

Приклад 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{3}{2}.$$

У невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$ треба визначити найбільші зі зростаючих функцій чисельника та знаменника та винести їх за дужки. Зокрема для поліномів та загальних степеневих виразів, треба виносити за душки змінну старшого степеню.

Приклад 3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{9x^4-2x}+1+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2\left(1+\sqrt{2/x^3+1/x^4}\right)}{3x^2\left(\sqrt{1-2/x^3}+1/x^2+1/x\right)}=\frac{2}{3}\,.$$

Якщо невизначеність $\frac{0}{0}$ виникає у виразах, що містять тригонометричні функції, то треба застосовувати наслідки першої чудової границі. У випадку логарифмічних, складних степеневих чи показникових функцій треба використовувати наслідки другої чудової границі. Також друга чудова границя виникає за невизначеності 1^{∞} та у степенево-показних виразах.

Приклад 4.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{3^x-3^{\pi}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{3^{\pi}\left(3^{x-\pi}-1\right)}=\left|\begin{array}{l}\textit{Заміна}\\ t=x-\pi\\ x\to\pi\Leftrightarrow t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{3^{\pi}\left(3^t-1\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{3^{\pi}t\ln 3}=-\frac{1}{3^{\pi}\ln 3}.$$

Приклад 5.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cancel{x}}\left(\frac{-5\cancel{x}}{x^2+3x+1}\right)}=e^{-5}.$$

Більш загальним за чудові еквівалентності виявляється застосування розкладень за формулою Тейлора або використання правила Лопіталю та шкали росту. Якщо функції, що стоять у деякому виразі мають вже відомі розкладення за формулою Тейлора або ці розкладення можна легко отримати, то їх слід використовувати під час обчислення границь. Якщо отримання зазначених розкладень пов’язано із значними технічними труднощами, то більш зручним для обчислення границь із діленням виявляється застосування правила Лопиталю.

Приклад 6.

Спосіб 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-1+x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-2x}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2+6\cdot o(1)}{1+6\cdot o(1)} = 2.$$

Спосіб 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\frac{0}{0}=\left|\begin{matrix}\textit{за правилом}\\ \textit{Лопіталю тричі}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

Для наступних задач на знаходження головного члену або еквівалентності простішого вигляду можна вживати всі вищенаведені заходи, окрім правила Лопіталю.

В загальному випадку пошук головного члену виконується для відображення поведінки функції в околі точки, до якої прямує x за допомогою спрощеної функції.

Проаналізуємо можливу поведінку функції. Вона може мати:

- скінчену границю, що не дорівнює нулю;
- мати нульову границю;
- мати нескінчену границю.

В першому випадку, скінчена не нульова границя $C \neq 0$ і є головний член функції $f(x)$, що добре узгоджується з означенням. В останніх двох випадках треба вказати, як саме функція прямує до 0 або ∞. Натомість 0 або ∞ (**головний член не може дорівнювати 0 або ∞**), треба за допомогою арифметичних дій та відомих еквівалентностей знайти простішу функцію, що має таку саме швидкість зростання/спадання до 0 або ∞, як у $f(x)$.

Зазвичай шукають найпростішу асимптотику, а саме головний член у вигляді $f_0(x)=C(x-a)^{\lambda}$, якщо $x\to a$; та у вигляді $f_0(x)=Cx^{\lambda}$, якщо $x\to\infty$ або $x\to 0$. Тут $C\neq 0$, λ – показник зростання/спадання функції $f(x)$. Зауважимо, якщо λ = 0, ми отримаємо перший випадок $f(x)\sim C$; якщо λ > 0, то це другий випадок коли, $f(x)\sim C(x-a)^{\lambda}\xrightarrow[x\to a]{}0$; якщо λ < 0, то це третій випадок $f(x)\sim C(x-a)^{\lambda}\xrightarrow[x\to a]{}\infty$.

Також зазначимо, якщо функція $f(x)$ складається із множників, то

головний член можна шукати для кожного із множників окремо: головний член добутку або частки дорівнює добутку/частці головних членів.

Приклад 7. Знайти головний член (еквівалентність найпростішого вигляду) для функції $\dfrac{(x^e-1)\cdot(e^x-1)\cdot\ln x\cdot\left(1+\cos\pi x\right)}{\sin x\cdot\sqrt{x^3-1}}$, коли $x\to 1$.

Розв'язок: Оскільки вихідна функція складається із 6 множників – 4 у чисельнику та 2 у знаменнику, то задачу можна розбити на 6 простіших:

1) $x^e-1\xrightarrow[x\to 1]{}0$, але 0 не може бути головним членом, отже, треба еквівалентними діями зводити функцію до вигляду $C(x-1)^{\lambda}$. Додамо та віднімемо 1 та використаємо відому еквівалентність $(1+t)^{\mu}-1\underset{t\to 0}{\sim}\mu t$, отримуємо $x^e-1=(1+(x-1))^e-1\underset{x\to 1}{\sim}e(x-1)$, це і є найпростіший вигляд ($C = e$, λ = 1);
2) e^x-1 хоча і схожа на відому еквівалентність, але $x\to 1$, а не до 0. Оскільки підстановка $x=1$ не приводить до 0 або ∞, то $e^x-1\underset{x\to 1}{\sim}e-1$ і є головним членом, що ми шукали;
3) так само як і у 1): $\ln x=\ln(1+(x-1))\underset{x\to 1}{\sim}(x-1)$;
4) $\left(1+\cos\pi x\right)\xrightarrow[x\to 1]{}0$, щоб застосувати еквівалентність $1-\cos t\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{t^2}{2}$ для косинуса, треба зробити так щоб аргумент косинусу прямував до 0, а не до π. Для цього додамо та віднімемо π і застосуємо формулу зведення
$$\left(1+\cos\pi x\right)=1+\cos((\pi x-\pi)+\pi)=1-\cos(\pi x-\pi)\underset{\substack{x\to 1\Leftrightarrow\\ \pi x-\pi\to 0}}{\sim}$$
$$\sim\frac{(\pi x-\pi)^2}{2}=\frac{\pi^2}{2}(x-1)^2;$$
5) як і в 2) відому еквівалентність $\sin x\sim x$ тут застосовувати не можна, тому що аргумент не прямує до 0. Отже, $\sin x\sim\sin 1$, що є приблизно $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

6) $\sqrt{x^3-1}\to 0$, отже шукаємо перетворення до простішого вигляду. Для цього треба позбутися степеню 3 у x: $\sqrt{x^3-1}=\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$. Бачимо два множника під коренем. Перший прямує до 0 та вже є простішим за виглядом, а другий прямує до 3, отже, $\sqrt{x^3-1}\sim\sqrt{3}(x-1)^{\frac{1}{2}}$.

Відповідь: $e(x-1)\,(e-1)\,(x-1)\,\frac{\pi^2}{2}(x-1)^2:(\sin 1\,\sqrt{3}(x-1)^{\frac{1}{2}})$, тобто $\frac{e(e-1)\pi^2}{2\sqrt{3}\sin 1}(x-1)^{\frac{7}{2}}$.

Приклад 8. Знайти головний член (еквівалентність найпростішого вигляду) для функції $\frac{(x^e-1)\cdot(e^x-1)\cdot\ln x\cdot\left(1+\cos\pi x\right)}{\sin x\cdot\sqrt[5]{x^3-1}}$, коли $x\to 0$.

Розв'язок: так само розбиваємо задачу на 6 простіших:

1) $x^e-1\underset{x\to 0}{\sim}-1$;
2) $e^x-1\sim x$;
3) $\ln x\underset{x\to 0}{\to}-\infty$. Ця функція є виключенням, тому що не може бути зведена до Cx^λ, і так само, як і експонента є зі своїм унікальним «зростанням» у **шкалі асимптотичного порівняння:** $\boxed{(\ln x)^\alpha << x^\beta << e^{x\gamma}}$, коли $x\to+\infty$ $\forall\alpha\ \beta,\gamma>0$. Отже, у відповіді, крім Cx^λ може бути $C\left(\ln x\right)^\alpha$ та/або $Ce^{\gamma x}$;
4) $\left(1+\cos\pi x\right)\sim 2$;
5) $\sin x\sim x$;
6) $\sqrt[5]{x^3-1}\sim -1$.

Відповідь: $2\ln x$.

Приклад 9. Знайти головний член (еквівалентність найпростішого вигляду) для функції $(x^{10}+\ln^{100}x+e^x)\cdot\sqrt[5]{x^{10}+x+3}\cdot(2^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x+1}})\cdot\operatorname{tg}\frac{2x+1}{x^2-3}$, коли $x\to+\infty$.

Розв'язок: розбиваємо задачу на 4:

1) $(x^{10}+\ln^{100}x+e^x)\sim e^x$, за шкалою асимптотичного порівняння саме експонента визначає, як цей вираз прямує до нескінченості. Для степеневих виразів, зокрема поліномів, якщо $x\to+\infty$ головний член – це доданок із найбільшим степенем x;
2) $\sqrt[5]{x^{10}+x+3}=x^2\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^9}+\frac{3}{x^{10}}}\sim x^2$, оскільки останній корінь прямує до 1;
3) $2^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x+1}}=2^{\frac{1}{x+1}}(2^{\frac{1}{x(x+1)}}-1)\sim 1\cdot\frac{1}{x(x+1)}\ln 2\sim x^{-2}\cdot\ln 2$;
4) оскільки у знаменнику $\frac{2x+1}{x^2-3}$ степінь більший за чисельник, то весь аргумент прямує до 0, отже, $\operatorname{tg}\frac{2x+1}{x^2-3}\sim\frac{2x+1}{x^2-3}\sim\frac{2x}{x^2}=2x^{-1}$.

Відповідь: $2\ln 2\,x^{-1}e^x$.

Приклад 10.

$$\ln\left(\frac{1+x}{5+x}\right)\cdot\arcsin\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}x\underset{x\to+\infty}{\sim}\left(\frac{1+x}{5+x}-1\right)\frac{1}{x}\frac{\pi}{2}=\frac{-4}{5+x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\pi}{2}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{-2\pi}{x^2}.$$

Еквівалентності та розкладення за формулою Тейлора також зручно використовувати під час обчислення границь із добутком та у більш складних виразах. Наприклад, у разі невизначеності $0\cdot\infty$, коли правило Лопіталю вимагає додаткових попередніх перетворень.

Приклад 11.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1+x}{5+x}\right)\cdot\arcsin\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}x\cdot\left(3x^2+2x+7\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\pi}{x^2}\cdot 3x^2=-6\pi.$$

Приклад 12. Дослідити функцію на неперервність: визначити точки розриву та з'ясувати їх характер. Намалювати ескіз графіка функції.

$$y=\frac{e^{\sin x}-1}{\operatorname{tg}(2x)}\operatorname{arctg}\frac{1}{|x|-\pi}.$$

Знайдемо область визначення цієї функції. Функція визначена всюди за виключенням точок де знаменники дорівнюють нулю, $\operatorname{tg}(2x)=0$ і

$|x|-\pi=0$, а також де невизначена функція $\mathrm{tg}(2x)$. Отже маємо три набори точок: $x\neq\frac{1}{2}\pi k, k\in\mathbf{Z},\quad x\neq\pm\pi$ та $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbf{Z}.$ Для визначення типу розриву обчислимо однобічні границі у вказаних точках.

Для першого набора точок маємо два випадки: k парне або непарне.

1) Розглянемо випадок парного k, тобто $k=2m, m\in\mathbf{Z}.$ Тоді $x\neq\pi m, m\in\mathbf{Z}.$

Обчислимо праву границю:

$$\lim_{x\to\pi m+0}\frac{e^{\sin x}-1}{\mathrm{tg}(2x)}\mathrm{arctg}\frac{1}{|x|-\pi}=\mathrm{arctg}\frac{1}{\pi(|m|-1)}\lim_{x\to\pi m+0}\frac{e^{\sin x}-1}{\mathrm{tg}(2x)},$$

$$\lim_{x\to\pi m+0}\frac{e^{\sin x}-1}{\mathrm{tg}(2x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix}\textit{за правилом}\\ \textit{Лопиталю}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\pi m+0}\frac{e^{\sin x}\cos x}{2\frac{1}{\cos^2(2x)}}=$$

$$=\frac{e^{\sin(\pi m+0)}\cos(\pi m+0)}{2\frac{1}{\cos^2 2(\pi m+0)}}=\frac{1}{2}\cos(\pi m+0)=\begin{cases}+1/2, & m-\textit{парне}\\ -1/2, & m-\textit{непарне}\end{cases}.$$

Отже $\lim\limits_{x\to\pi m+0}y(x)=\mathrm{arctg}\frac{1}{\pi(|m|-1)}\cdot\begin{cases}+1/2, & m-\textit{парне}\\ -1/2, & m-\textit{непарне}\end{cases}$. Зауважимо, що це вірно для випадку $m\neq\pm1$.

Обчислимо ліву границю:

$$\lim_{x\to\pi m-0}\frac{e^{\sin x}-1}{\mathrm{tg}(2x)}\mathrm{arctg}\frac{1}{|x|-\pi}=\mathrm{arctg}\frac{1}{\pi(|m|-1)}\lim_{x\to\pi m-0}\frac{e^{\sin x}-1}{\mathrm{tg}(2x)},$$

$$\lim_{x\to\pi m-0}\frac{e^{\sin x}-1}{\mathrm{tg}(2x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix}\textit{за правилом}\\ \textit{Лопиталю}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\pi m-0}\frac{e^{\sin x}\cos x}{2\frac{1}{\cos^2(2x)}}=$$

$$=\frac{e^{\sin(\pi m-0)}\cos(\pi m-0)}{2\frac{1}{\cos^2 2(\pi m-0)}}=\frac{1}{2}\cos(\pi m-0)=\begin{cases}+1/2, & m-\textit{парне}\\ -1/2, & m-\textit{непарне}\end{cases}.$$

Отже $\lim\limits_{x\to\pi m-0}y(x)=\mathrm{arctg}\frac{1}{\pi(|m|-1)}\cdot\begin{cases}+1/2, & m-\textit{парне}\\ -1/2, & m-\textit{непарне}\end{cases}.$

Таким чином у випадку $x=\pi m,\ m\in\mathbf{Z},\ m\neq\pm1\ \lim\limits_{x\to\pi m-0}y(x)=\lim\limits_{x\to\pi m+0}y(x).$

З цього виходить, що точки $x=\pi m,\ m\in\mathbf{Z},\ m\neq\pm1$ є усувними розривами 1-го роду.

Розглянемо випадок $m=\pm1$, тобто $x=\pm\pi$ – це наш другий набір точок.

Обчислимо праву границю:

$$\lim_{x\to\pi+0}\frac{e^{\sin x}-1}{\mathrm{tg}(2x)}\mathrm{arctg}\frac{1}{|x|-\pi}=\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{+0}\right)\cdot\lim_{x\to\pi+0}\frac{e^{\sin x}-1}{\mathrm{tg}(2x)}=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

Обчислимо ліву границю:

$$\lim_{x\to\pi-0}\frac{e^{\sin x}-1}{\mathrm{tg}(2x)}\mathrm{arctg}\frac{1}{|x|-\pi}=\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{-0}\right)\cdot\lim_{x\to\pi-0}\frac{e^{\sin x}-1}{\mathrm{tg}(2x)}=-\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=+\frac{\pi}{4}.$$

Аналогічно маємо для $x=-\pi$.

Таким чином у випадку $x=\pm\pi$: $\lim\limits_{x\to\pm\pi-0}y(x)\neq\lim\limits_{x\to\pm\pi+0}y(x)$. З цього виходить, що точки $x=\pm\pi$ є розривами 1-го роду типу стрибок.

2) Розглянемо випадок непарного k, тобто $k=2m+1,\ m\in\mathbf{Z}.$ Тоді $x\neq\pi(m+1/2),\ m\in\mathbf{Z}.$

Обчислимо праву границю:

$$\lim_{x\to\pi(m+1/2)+0}\frac{e^{\sin x}-1}{\mathrm{tg}(2x)}\mathrm{arctg}\frac{1}{|x|-\pi}=\frac{e^{\sin\pi(m+1/2)+0}-1}{\mathrm{tg}(\pi(2m+1)+0)}\mathrm{arctg}\frac{1}{|\pi(m+1/2)+0|-\pi}=$$

$$=\begin{cases}-\infty, & m=0,1,\pm3,\pm5\ldots\\ +\infty, & m=-1,\pm2,\pm4\ldots\end{cases}.$$

Обчислимо ліву границю:

$$\lim_{x\to\pi(m+1/2)-0}\frac{e^{\sin x}-1}{\mathrm{tg}(2x)}\mathrm{arctg}\frac{1}{|x|-\pi}=\frac{e^{\sin\pi(m+1/2)-0}-1}{\mathrm{tg}(\pi(2m+1)-0)}\mathrm{arctg}\frac{1}{|\pi(m+1/2)-0|-\pi}=$$

$$=\begin{cases}+\infty, & m=0,1,\pm3,\pm5\ldots\\ -\infty, & m=-1,\pm2,\pm4\ldots\end{cases}.$$

З цього виходить, що точки $x=\pi(m+1/2),\ m\in\mathbf{Z},$ є розривами нескінченного типу 2-го роду.

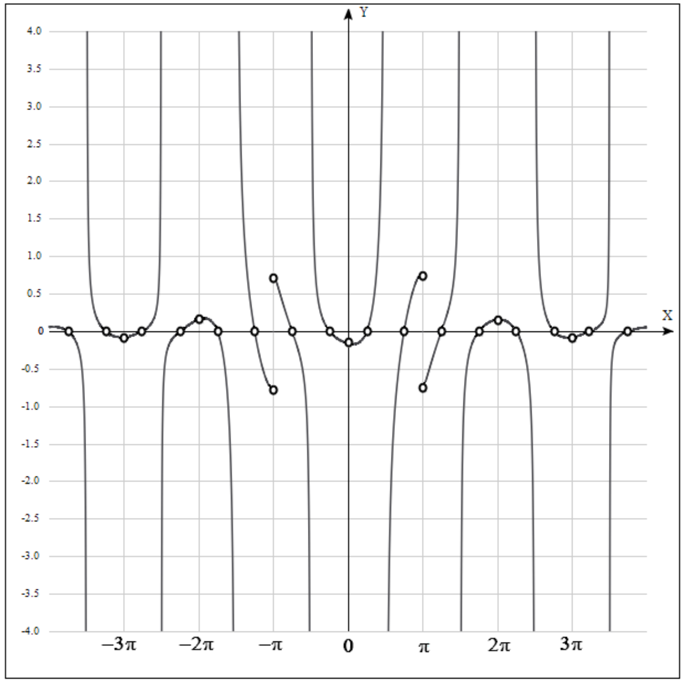
Розглянемо третій набір точок: $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}.$

Обчислимо границю функції в цих точках.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}} \frac{e^{\sin x}-1}{\operatorname{tg}(2x)}\operatorname{arctg}\frac{1}{|x|-\pi} = \frac{e^{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)}-1}{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{\left|\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right|-\pi} = 0.$$

Таким чином, точки $x \neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, є усувними розривами 1-го роду.

Виходячи з проведеного аналізу ми можемо побудувати ескіз графіку функції.



Розглянемо ще одну задачу на перевірку рівномірної неперервності.

Приклад 13. Доведемо, що функція $f(x)=\dfrac{1}{x}$ не є рівномірно неперервною на проміжку $X=(0,+\infty)$, хоча і неперервна на ньому.

$$\forall\delta>0 \quad f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_2x_1}=\frac{\delta}{x_1(x_1+\delta)}\xrightarrow{x_1\to+0}+\infty.$$

2.4. Задачі для самостійного розв'язку

Означення величин та границь мовою «ε – δ»

1. Мовою «ε – δ» довести, вказуючи правило знаходження δ за заданим ε, що

а) $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \sin x = 1/2$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^2}=+\infty$.

2. Що означають наступні висловлювання:

а) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0 \mid 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$;
б) $\exists\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0 \mid 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$;
в) $\forall\varepsilon\quad \exists\,\delta>0 \mid 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$;
г) $\forall\varepsilon>0\ \forall\delta>0 \mid 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$;
д) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta \quad \mid 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$;
е) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0 \mid |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$;
є) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0 \mid |x-a|>\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$;
ж) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0 \mid 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|>\varepsilon$;
з) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0 \mid 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)-b>\varepsilon$;
и) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0 \mid 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>\varepsilon$;
і) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0 \mid 0< x <\delta \Rightarrow f(x)<-\varepsilon$;
ї) $\forall\varepsilon\quad \exists\,\delta \quad \mid x<\delta \Rightarrow f(x)>\varepsilon$;
к) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0 \mid 0<x-a<\delta \Rightarrow 0\le f(x)-b<\varepsilon$.

3. Перевести у висловлювання на мові «ε – δ»:

а) $y\to b-0,\quad x\to a$; б) $y\to b-0,\quad x\to\infty$;
в) $y\to b-0,\quad x\to a+0$; г) $y\to b-0,\quad x\to-\infty$;
д) $y\to b+0,\quad x\to a-0$; е) $y\to b+0,\quad x\to+\infty$;
є) $y\to\infty,\quad x\to a-0$; ж) $y\to-\infty,\quad x\to+\infty$.

4. Мовою «ε – δ» для $x\to a$ та для $x\to\infty$ записати твердження, що функція $f(x)$

а) обмежена; б) не обмежена;
в) відокремлена від нуля; г) не відокремлена від нуля;
д) має скінченну границю; е) не має скінченної границі;
є) нескінченно мала; ж) не нескінченно мала;
з) нескінченно велика; и) не нескінченно велика.

Обчислення границь

Обчислити наступні границі.

5 (а, б, в, г, д). $\lim \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ $\quad x\to 1,\quad x\to 2$ $\quad x\to 5,\quad x\to 3,\quad x\to\infty.$

6 (а, б, в, г, д). $\lim \dfrac{3x^2+9x+6}{20+6x-2x^2}$ $\quad x\to 0,\quad x\to -1$ $\quad x\to 5,\quad x\to -2,\quad x\to\infty.$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-5x+3}{4+2x-6x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+20)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+5x^6+x^{12})^{1/4}}{(2x-1)^3}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^4-4x+3}$.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$.

15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

16. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

18. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

20. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

21. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}},\ (a>0)$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

26. Знайти сталі a і b з умови: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$.

Обчислити, застосовуючи першу чудову границю та її наслідки.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

32. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$.

33. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx},\quad (m,n\in\mathbf{Z})$.

34. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$.

35. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\mathrm{tg}(2x)\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

36. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

37. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

40. $\lim\limits_{x\to -\infty}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

41. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$.

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x\cdot\mathrm{arctg}2x}{2\arccos x-\pi}$.

43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

44. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin 6x}{2\sin x-1}\sqrt{\mathrm{arctg}\dfrac{1}{(6x-\pi)^2}}$.

45. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\cos\dfrac{\pi x+1}{x-2}\right)\dfrac{5x-1}{\sin\frac{\pi}{x}}$.

46. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

Обчислити, застосовуючи другу чудову границю та її наслідки.

47. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$.

48. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x+9}\right)^{x^2\sin\frac{1}{x}}$.

49. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

50. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^{\frac{x}{(x-2\pi)^2}}$.

51. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

52. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

53. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

54. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

55. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

56. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3y}{2x+z}\right)^{x+1}$.

57. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

58. $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$.

59. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

60. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x^2}}$.

Границі пов’язані із логарифмічними, показними та степеневими функціями.

61. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a},\ (a>0)$.

62. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x\right]$.

63. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{\ln\left(x^{10}+x+1\right)}$.

64. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(2+e^{3x}\right)}{\ln\left(3+e^{2x}\right)}$.

65 (а, б). $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\ln\left(1+3^x\right)}{\ln\left(1+2^x\right)}$.

66. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2^x\right)\cdot\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

68. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$.

69. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a},\ (a>0)$.

70. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

71. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(4^{1/x}-4^{1/(x+1)}\right)$.

72. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(10^{\frac{1}{x}}-10^{-\frac{2}{x+1}}\right)\sqrt{x^2+1}$.

73. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2^{\frac{1}{x}}-2^{-\frac{1}{x}}\right)$.

74. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{9^{tgx^2}-1}{\ln\cos x}\right)^{\frac{1}{3}}$.

75. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[7]{1+8x}-1}{7^{8x}-1}$.

76. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(1+\sin x)^e-1}{\sqrt{1+\cos x}}$.

77. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(1+\cos\pi x)^{\pi}-2^{\pi}}{(x-2)^2}$.

78. $\lim\limits_{x\to+1}\dfrac{\sin^2\left(\pi\cdot 2^x\right)}{\ln\left[\cos\left(\pi\cdot 2^x\right)\right]}$.

79 (а, б). $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x)$.

80 (а, б). $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{th}x$.

81. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\operatorname{ch}x)$.

82. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th}x}$.

83. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

84. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

85. $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right),\ (x>0)$.

86. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left((2e)^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}-2\right)$.

Обчислення границь із застосуванням правила Лопіталю та розкладень за формулами Тейлора (Маклорена).

87. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$.

88. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x^2}$.

89. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

90. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

91. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x}\left(1-\dfrac{x^2+1}{x}\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)$.

92. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3},\ (a>0)$.

93. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x\sqrt{1-x}}{x^3}$.

94. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{1}{e}-\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\right)$.

95. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+(1-3x)^{\frac{1}{3}}-2\cos x}{x^2}$.

96. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

97. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\left(e^x+1\right)-2\left(e^x-1\right)}{x^3}$.

98. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

99. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

100. $\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{ctg}x)^{\sin x}$.

101. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin x-\cos x+1}{x^3}$.

102. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

103. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$.

104. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

105. $\lim\limits_{x\to1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$.

106. $\lim\limits_{x\to0}(\arcsin x)^{\mathrm{tg}\,x}$.

107. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1000x^3+100x^2+10x+1\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$.

108. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$.

109. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

110. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

111. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

112. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x-(1-x)\sin x}{x^3}$.

113. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

114. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\ln x}}{\ln^x x}$.

115. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

116. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\,\dfrac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}\right]$.

117. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{1/x}-\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{1/x}}{x^n}$.

Границі послідовностей

Обчислити границі.

118. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{10\,000n}{n^2+1}$.

119. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

120. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\,\sin n!}{n+1}$.

121. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

122. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{n^2+n}\right)$.

123. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n/2}+(n+1)!}{n\left(3^n+n!\right)}$.

124. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

125. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}\right)$.

126. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$.

127. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

128. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right)$.

129. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

130. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

131. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right)$.

132. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$.

133. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n$.

134. За теоремою Штольца довести наступні рівності (тут символ «$\Leftarrow|$» позначає існування границі ліворуч за умови існування границі праворуч та їх рівність, $x_k\ge0$):

а) $\lim \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \Leftarrow \Big| \lim x_n$;

б) $\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \Leftarrow \Big| \lim x_n$;

в) $\lim \sqrt[n]{x_n} \Leftarrow \Big| \lim \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$;

г) за допомогою в) обчислити $\lim \sqrt[n]{n}$;

д) обчислити $\lim \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

135. За Th 2.8 **(**Вейерштрасса, про границі монотонної та обмеженої послідовності) довести збіжність послідовностей і знайти їх границі:

а) $x_n = \left(\dfrac{10}{1} \cdot \dfrac{11}{3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n+9}{2n-1}\right)$;

б) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \ldots \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$;

в) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (k \cdot k!) / (n+1)!$;

г) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, …, $x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n\ \text{коренів}}$, …[1];[2]

д) знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$.

Обчислити наступні границі у вигляді функцій із трьома крапками.

136. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x - 1}$.

137. $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots\left(1+x^{2^n}\right)$, $|x| < 1$.

138. $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{x}{2} \cdot \cos\dfrac{x}{4} \cdot \ldots \cdot \cos\dfrac{x}{2^n}$.

---

[1] Як альтернативний спосіб, довести спочатку, що $x_n = 2\cos(\pi / 2^{n+1})$.

[2] Узагальнити на випадок довільного a натомість 2 під коренями.

139. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\ldots\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{(1-x)^{n-1}}$.

140. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$

Для послідовностей (x_n) знайти $\varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n$ та $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n$:

141. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$;

142. $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{\pi n}{2}$;

143. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$;

144. $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$.

Знайти $\varliminf\limits_{x\to 0} f(x)$ та $\varlimsup\limits_{x\to 0} f(x)$:

145. $f(x) = \sin^2\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

146. $f(x) = \left(1 + \cos^2\dfrac{1}{x}\right)^{\sec^2(1/x)}$;

147. $f(x) = \left(2 - x^2\right)\cos\dfrac{1}{x}$.

O-символіка. Асимптотичні порівняння. Головний член

148. Показати, що за умови $x \to a$:

а) $o(o(f(x))) = o(f(x))$;
б) $O(o(f(x))) = o(f(x))$;
в) $o(O(f(x))) = o(f(x))$;
г) $O(O(f(x))) = O(f(x))$.

149. Нехай $x \to 0$, довести, що

а) $2x - x^2 = O(x)$;
б) $x\sin\sqrt{x} = O\left(x^{3/2}\right)$;
в) $x\sin\dfrac{1}{x} = O(|x|)$;
г) $\ln x = o\left(\dfrac{1}{x^{\varepsilon}}\right)$ $(\varepsilon > 0)$;
д) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}$;
е) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = O(1)$.

150. Показати, що за умови $x \to +\infty$:

а) $2x^3-3x^2+1=O(x^3)$; б) $\dfrac{x+1}{x^2+1}=O\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

в) $x+x^2\sin x=O(x^2)$; г) $\dfrac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}=O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

151. Довести, що за достатньо великих $x>0$ наявні нерівності:

а) $x^2+10x+100<0{,}001x^3$; б) $\ln^{1000}x<\sqrt{x}$; в) $x^{10}e^x<e^{2x}$.

152. Знайти головний член, коли $x\to 0$:

а) $2x-3x^3+x^5$; б) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$;

в) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$; г) $\operatorname{tg}x-\sin x$;

д) $\ln\dfrac{2+x}{2+3x}$; е) $\cos\dfrac{\pi(x+2)}{x+4}$;

є) $\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg}x)$; ж) $(1+x)^x-1$.

153. Знайти головний член, коли $x\to 1$:

а) x^3-3x+2; б) $\sqrt{x}-1$; в) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$; г) $\ln x$;

д) e^x-e; е) x^x-1; є) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$; ж) $\dfrac{\cos\pi x+x}{x^e-1}$;

з) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; и) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$; і) $\dfrac{1}{\sin\pi x}$; ї) $\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}$.

154. Нехай $x\to+\infty$. Знайти головний член та визначити порядок зростання/спадання:

а) $x^2+100x+10000$; б) $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$;

в) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$; г) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$;

д) $\dfrac{x+1}{x^4+1}$; е) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$;

є) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$; ж) $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

155. Знайти головний член, коли $x\to+\infty$:

а) $\left(\dfrac{2x}{2x+3}\right)^{\pi}-1$; б) $\sin\dfrac{\pi(x+1)}{x+2}$; в) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x+2}{1+3x}$;

г) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x+2}{1+2x}$; д) $5^{\frac{1}{x}}-5^{\frac{1}{x+1}}$; е) $x^{100}+\ln x+e^x$.

156. Знайти головний член простішого вигляду для величин:

а) $\ln(x^2+e^x)\cdot\arcsin\operatorname{tg}\dfrac{1}{x^2}$ $(x\to\pm\infty)$;

б) $\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right)\left[\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{\pi}-1\right]\cdot\cos\dfrac{x+2}{x+3}$ $(x\to\infty)$;

в) $\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x^3}\right)\cdot\cos\dfrac{\pi(x-1)}{2}\cdot\ln(2+x)$ $(x\to\pm 0)$;

г) $\operatorname{arctg}x^3\cdot\sin\left(2^{x^2}-1\right)\cdot\left[(\cos x+x^2)^{\pi}-1\right]$ $(x\to 0)$;

д) $\ln\dfrac{2}{1+x^2}\cdot\sin\dfrac{\pi(x+2)}{3}\cdot(a^x-1)$, $(x\to 1)$;

е) $\left[(3+x)^{\sqrt{2}}-1\right]^2\cdot\ln(9+x^3)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$, $(x\to -2)$;

є) $\sin x\cdot\ln\dfrac{1+x}{1+\pi}\cdot(e^x-1)\cdot(\pi^x-\pi^{\pi})$, $(x\to\pi)$.

Неперервність, розриви та їх класифікація

Дослідити на неперервність: визначити точки розриву та з'ясувати їх характер. Намалювати ескізи графіків функцій.

157. $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$. **158**. $y=\dfrac{x+1}{x^2-5x-6}$.

159. $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$. **160**. $y=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$.

161. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$.

162. $y=\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

163. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

164. $y=\dfrac{\operatorname{sgn}\left(x^2+5x+6\right)}{x+1}$.

165. $y=\dfrac{\operatorname{sgn}\left(x^2-8x+7\right)}{x-3}$.

166. $y=\dfrac{\operatorname{arcctg}\dfrac{3}{x-1}}{x+1}$.

167. $y=\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x+1}}{x-3}$.

168. $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$.

169. $y=\dfrac{x}{\cos x}$.

170. $y=\dfrac{2}{1-2^x}$.

171. $y=\dfrac{\cos(\pi x/2)}{x^3-x^2}$.

172. $y=\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

173. $y=\operatorname{sgn}\left(x^2-2x\right)$.

174. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{\sin\pi x}$.

175. $y=\dfrac{e^{\sin x}-1}{x-\pi}\cdot e^{-\frac{1}{\cos^2 x}}$.

176. $y=\dfrac{x^{\sqrt{2}}-1}{\operatorname{tg}\pi x}\cdot 3^{\frac{1}{\sin x}}$.

177. $y=\dfrac{(x-3)^2}{1+\cos\pi x}$.

178. $y=\dfrac{\ln|1+x|}{\operatorname{tg}2x}$.

179. $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$.

180. $y=\operatorname{th}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

181. $y=x-[x]$.

182. $y=[x]\sin\pi x$.

183. $y=x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

184. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n},\quad (x>0)$.

185. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x\operatorname{arctg}(n\operatorname{ctg}x)\right)$.

186. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

187. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$.

188. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+e^{nx}}{1+xe^{nx}}$.

189. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n,\ (x\ge 0)$.

190. $y=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{\ln(t/x)}{t-x},\ (x>0)$.

191. Показати, що рівняння $\operatorname{ctg}x=kx$, $\forall k\in\mathbf{R}$ та $x\in(0,\pi)$ має єдиний неперервний корінь $x=x(k)$.

192. Дослідити функцію на неперервність в залежності від значення параметра $\alpha\in\mathbf{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\arcsin(\sin x)\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sin x}, & x\ne\pi n\\ \alpha, & x=\pi n\ \ (n\in\mathbf{Z})\end{cases}.$$

193. Навести приклад розривної в кожній точці функції, квадрат якої є неперервною функцією.

194. Довести, що наступна функція Діріхлє розривна у кожній точці: $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$.

195. Модифікувати функцію Діріхлє із попереднього номера так, щоб отримати функцію розривну у кожній точці **R,** крім 0.

196. Дослідити на неперервність функції $xD(x)$ та $x^2D(x)$, де $D(x)$ – це функція Діріхлє.

197. Довести, що функція Томе[1] неперервна у кожній ірраціональній точці та розривна у кожній раціональній точці. Ця функція визначається так

$$t(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ \text{(нескоротний дріб)},\ p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N}\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}.$$

198. Довести наступні властивості[2] функції Томе $t(x)$, що визначена у попередньому номері, побудувати ескіз її графіка на проміжку $(0,1)$:

[1] C. J. Thomae (1840–1921) – німецький математик. Ця функція має багато інших назв: функція Рімана, модифікована функція Діріхле, поп-корн функція, краплева функція, функція злічених хмар (countable cloud), лінійкова функція (ruler), зірки над Вавилоном (stars over Babylon).
[2] Серед інших властивостей функції Томе: ніде не диференційованість із локальними максимумами у кожній раціональній точці (номер 147 наступного розділу 3) та інтегрованість за Ріманом (див. частину 2).

а) функція Томе обмежена та відображає всі дійсні числа в одиничний проміжок: $t(x):\mathbf{R}\to[0,1]$;

б) функція $t(x)$ періодична з періодом 1: $t(x+n)=t(x),\ \forall x\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{N}$.

199. Показати, що наступні функції не є рівномірно неперервними на проміжку $(0,1)$: а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$; б) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$.

Чи будуть вони рівномірно неперервні на проміжку $\left(\dfrac{1}{10},1\right)$, аргументувати відповідь?

РОЗДІЛ 3.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

3.1. Основні поняття та властивості

Похідна та диференціал функції. Диференційованість

Нехай $x\in\overset{\circ}{D}(f)$, внутрішня точка області визначення функції.

Def. Похідною функції f у точці x називається

$$f'(x)=\lim_{\hat{x}\to x}\frac{f(\hat{x})-f(x)}{\hat{x}-x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x},$$

де $\Delta x=\hat{x}-x$, $\Delta f=\Delta f(x,\Delta x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ – приріст аргументу та функції відповідно.

Якщо $y=f(x)$, для похідної зазвичай використовують такі позначення:

$$y',\quad y'_x,\quad f'(x),\quad f'_x(x),\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Однобічні похідні визначаються відповідною однобічною границею

$$f'_{\pm}=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Функція має похідну у точці тоді й тільки тоді, коли вона має рівні однобічні похідні у цій точці.

***Def*.** Функція $f(x)$ називається диференційованою в точці x_0 (пишемо $f(x)\in D(x_0)$), якщо її приріст можна подати у вигляді головної лінійної частини плюс нескінченно малої щодо $\Delta x=x-x_0$

$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$, де A є сталою, що не залежить від Δx.

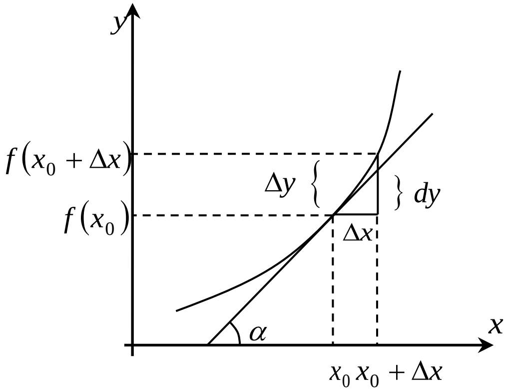
Головна лінійна частина позначається $df=df(x)$ і називається диференціалом функції: $df=A\cdot\Delta x$. Коли x – незалежна змінна Δx вважається фіксованою величиною та позначається dx.

Th. Функція однієї змінної диференційована у точці x тоді й тільки тоді, коли має скінчену похідну у цієї точці і $A=f'(x)$.

C. $df(x)=f'(x)dx$, отже, похідна це відношення диференціала функції до диференціала аргументу.

Th. (Формула нескінченно малих приростів). $\Delta f\approx df$.

Геометричний зміст похідної: похідна функції у точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка $f(x)$, що проведена в точці $(x_0, f(x_0))$:



$\boxed{f'(x_0) = tg\alpha}$.

Геометричний зміст диференціала – приріст ординати дотичної.

Рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ в точці x_0

$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$.

Із формули нескінченно малих прирощень отримуємо формулу $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, що наближує функцію її дотичною.

Фізичний зміст похідної функції – це миттєва швидкість змінення функції за змінною x у точці x_0.

Арифметичні властивості (правила диференціювання)

1. $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$; 2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$; 4. $(f(g(x)))' = f'_{g(x)}(g(x)) \cdot g'_x(x)$.

Зазначимо, що похідну функції $y = f(x)$, яка є добутком або часткою іноді зручно шукати за допомогою похідної від логарифма $f(x)$. Ця похідна називається *логарифмічною похідною*: $(\ln|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Таблиця похідних

1. $(const)' = 0$.

2. $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$.

3. $(e^x)' = e^x$; $(a^x)' = a^x \ln a$.

4. $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$; $(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x\ln a}$.

5. $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$.

6. $(\text{sh } x)' = \text{ch } x$; $(\text{ch } x)' = \text{sh } x$.

7. $(\text{tg } x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(\text{ctg } x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

8. $(\text{th } x)' = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$; $(\text{cth } x)' = -\dfrac{1}{\text{sh}^2 x}$.

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $(\text{arctg } x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $(\text{arcctg } x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

11. $(\text{arsh } x)' = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

$(\text{arch } x)' = \left(\ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

12. $(\text{arth } x)' = \left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}$;

$(\text{arcth } x)' = \left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{x-1}\right)' = -\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Друга та вищі похідні явної функції $y = f(x)$ визначаються так: $f''(x) = (f'(x))' = f^{(2)}(x)$, $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'_x$. Зручно ототожнювати саму функцію та її нульову похідну. Зауважимо також, що у наведеному означенні друга похідна береться за точкою x, в якій було знайдено першу похідну і яку далі розглядають як змінну для пошуку другої похідної. Водночас точку, в якій знайдено другу похідну позначено так само x.

Def. Функція $f(x)$ називається (n-кратно) *диференційованою* на множині X (пишемо $f(x) \in D^n(X)$), якщо $f(x)$ та її $n-1$ похідні диференційовані для кожного $x_0 \in X$. Функція $f(x)$ *неперервно диференційована* або *гладка* порядку n (пишемо $f(x) \in C^n(X)$), якщо існують $f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ і неперервні разом із $f(x)$ у кожній точці X.

Таблиця деяких похідних вищого порядку

1. $(e^x)^{(n)} = e^x$; $\quad (a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$.

2. $(x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$.

3. $(\ln|x|)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$; $\quad (\log_a|x|)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\dfrac{1}{\ln a}$.

4. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x+n\dfrac{\pi}{2})$; $\quad (\cos x)^{(n)} = \cos(x+n\dfrac{\pi}{2})$.

Арифметичні властивості

1. $\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)^{(n)} = \alpha f^{(n)}(x)+\beta g^{(n)}(x)$.

2. **Th.** (Формула Лейбниця похідної добутку вищого порядку).

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x), \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Інваріантність форми першого диференціала та не інваріантність форми вищих диференціалів відносно заміни змінної

Нехай $y = f\left(g\left(x\right)\right)$. Тоді $dy(x) = y'_x(x)dx = f'_g(g)g'_x(x)dx = f'_g(g)dg$, тобто

$$dy = y'_x(x)dx \quad \text{та} \quad dy = y'_g(g)dg\,.$$

Тут x – незалежна змінна, а g – функція, залежна від x. Однак формули для першого диференціалу однакові – отже, форма інваріантна.

Як і похідні, диференціали вищого порядку визначаються індуктивно: $d^n f(x) = d(d^{n-1}f(x))$.

Якщо x – незалежна змінна: $\qquad d^2y(x) = y''_{x^2}(x)dx^2$.

Для залежної змінної g: $\quad d^2y(g) = y''_{g^2}(g)dg^2 + y'_g(g)d^2g$.

Це означає не інваріантність форми другого (та, звісно, вищих) диференціала відносно заміни змінної.

Похідні функцій, що задані параметрично, неявно та від оберненої функції

Система рівнянь

(3.1) $$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad t \in T$$

задає функцію $y = f(x)$ *параметрично*, якщо $x(t)$ неперервна та строго монотонна на проміжку T. Дійсно, за теоремою про обернену

функцію, $t = t(x)$ і $y = y(t(x)) = f(x)$.

Якщо $x(t), y(t) \in C(T)$, функція $x(t)$ строго монотонна в околі точці t_0, обидві функції диференційовані у цьому околі та $x'(t) \neq 0$, тоді існує функція $y = f(x)$, що задана параметрично і диференційована в околі t_0, та її похідна дорівнює $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Якщо за наведених умов $x(t), y(t) \in D^n(T)$, то $y = f(x)$ також n-кратно диференційована та її n-у похідну можна раціонально виразити через n перших похідних функцій $x(t)$ і $y(t)$

$$y''_{xx} = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{\left(x'(t)\right)^3}, \quad y'''_{xxx} = \frac{dy''_{xx}}{dx} = \frac{\ldots}{\left(x'(t)\right)^4}.$$

Рівняння $\quad F(x,y) = 0 \qquad (3.2)$

задає функцію $y = y(x)$ *неявно* в деякому околу точки x_0, якщо в ньому рівняння перетворюється на тотожність $F(x, y(x)) \equiv 0$. До того ж, якщо функція $F(x,y)$ неперервно диференційована за x та y в околі (x_0, y_0), $F(x_0, y_0) \equiv 0$ та $F'_y(x,y) \neq 0$, y'_x можна виразити явно $y'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$. З практичної точки зору знаходження похідної функції, що задана неявно можна здійснювати прямим диференціюванням за змінною x рівняння (3.2) вважаючи $y = y(x)$. Друга та вищі похідні знаходяться диференціюванням знайденого y'_x.

Th. (Диференціювання оберненої функції). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна і строго монотонна у деякому околі точки x_0, та існує $f'(x_0) \neq 0$, тоді у околі точці $y_0 = f(x_0)$ визначена обернена функція $x = f^{-1}(y)$ – неперервна, строго монотонна та диференційована у точці y_0, крім того

$$x'_y = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{y'_x}.$$

Якщо за наведених умовах існує y''_{xx}, то $x''_{yy} = \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{y'_x}\right) = \dfrac{-y''_{xx}}{(y'_x)^3}$.

<u>Основні теореми диференціального числення та їх застосування</u>

Th. (Дарбу). Якщо $f(x)\in D[a,b]$, то $f'(x)-\text{sur}$ на $[a,b]$.

C. Якщо $f'(x)$ визначена на $[a,b]$, та не має розривів 2-го роду, то вона неперервна на $[a,b]$.

C. Якщо у кожній точці x проколотого околу деякої точки a існують скінченна похідна функції f і скінченна її однобічна границя, то $f_{\pm}'(a)=\lim\limits_{x\to a\pm 0} f'(x)$. Отже, якщо $f'(x)$ має стрибок у точці a, то f не диференційована в a, якщо розрив другого роду – треба перевіряти диференційованість за означенням.

Th. (Ролля). Якщо $f(x)\in C[a,b]$, $f(x)\in D(a,b)$ та $f(a)=f(b)$, то існує $\gamma\in(a,b):\ f'(\gamma)=0$.

Th. (Лагранжа). Якщо $f(x)\in C[a,b]$ та $f(x)\in D(a,b)$, то існує $\gamma\in(a,b):\ f'(\gamma)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Тобто існує точка, де дотична паралельна хорді.

C. (Формула скінчених приростів). $\Delta f = df(x+\theta\Delta x)$, де $\exists\theta\in(0,1)$.

Узагальненням теореми Лагранжа для кривих є теорема Коші.

Th. (Коші). Якщо $x(t),\ y(t)\in C[\alpha,\beta]$ та $x(t), y(t)\in D(\alpha,\beta)$, $x(\alpha)\ne x(\beta)$ та $x_t'\ne 0$, то існує $\gamma\in(\alpha,\beta):\ \dfrac{y_t'(\gamma)}{x_t'(\gamma)}=\dfrac{y(\beta)-y(\alpha)}{x(\beta)-x(\alpha)}$.

Th. (Диференціювання нерівностей).

Якщо $f(x), g(x)\in C^n\left([x_0,x_1)\right)$ та виконуються нерівності $f^{(k)}(x_0)\ge g^{(k)}(x_0)$, $k=0,1,\dots,n-1$; і $\forall\, x\in[x_0,x_1)$ $f^{(n)}(x)\ge g^{(n)}(x)$, тоді $\forall\, x\in[x_0,x_1)$ $f(x)\ge g(x)$.

Th. (Формула Тейлора). Нехай $f(x)\in C^{n+1}(U(x_0))$, тоді в околі $U(x_0)$ функцію можна подати у вигляді

$$\boxed{f(x)=P_n+R_n} \qquad (3.3) \quad \text{(формула Тейлора)},$$

де $P_n=P_n(f,x_0,x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ – поліном Тейлора, а $R_n=R_n(f,x_0,x)\equiv f(x)-P_n$ – залишковий член формули Тейлора.

Існує декілька форм запису залишкового члену, наведемо дві з них.

Форма Пеано: $R_n=\left[\begin{array}{l} o\left((x-x_0)^n\right) \\ O\left((x-x_0)^{n+1}\right)\end{array}\right.$.

Форма Лагранжа: $R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $\exists\gamma\in U(x_0)$.

Формула Тейлора з залишковим членом у формі Пеано має локальний характер та показує асимптотичну поведінку функції, наближуючи її поліномом, коли $x\to x_0$. А формула із залишковим членом у формі Лагранжа має вже глобальний характер та використовується для оцінки абсолютної похибки наближення функції поліномом Тейлора на деякому проміжку $U(x_0)$. Якщо підставити у формулу Тейлора (3.3) із залишковим членом у формі Пеано відповідної функції та $x_0=0$, то, зокрема, отримуємо п'ять основних розкладань Маклорена, що наведені у попередньому розділі. Якщо замість залишкового члену продовжувати додавання до нескінченності, то отримаємо *ряд Тейлору*:
$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Локальні екстремуми функції

Нехай $x\in\mathring{D}(f)$ – внутрішня точка області визначення функції.

Def. Точка x_0 називається точкою *локального мінімуму* (*максимуму*), якщо існує окіл U точки x_0 такий, що для будь-якого $x\in U$ виконується нерівність $f(x_0)\le f(x)$ ($f(x_0)\ge f(x)$). Якщо нерівність строга, то мінімум (максимум) також строгий. Точка, у якій є локальний мінімум ($loc\min$) або локальний максимум ($loc\max$) називається точкою *локального екстремуму* (loc extr).

Th. (Ферма). У точці loc extr похідна функції, якщо вона існує і є скінченною, дорівнює нулю (*стаціонарна* точка).

Точка x_0 називається *критичною* точкою функції $f(x)$, якщо вона стаціонарна або $f'(x_0)=\infty$, або похідної $f'(x_0)$ не існує.

C. (Необхідна умова loc extr). Точки loc extr є критичними.

Th. (Перша достатня умова loc extr). Якщо $f'(x)$ під час переходу змінної x через точку x_0 змінює знак з "$-$" на "$+$", то у точці x_0 $loc\min$ функції $f(x)$; якщо з "$+$" на "$-$", то $loc\max$.

Th. (Друга достатня умова loc extr). Нехай $f(x)\in D^n(\{x_0\})$, $f^n(x_0)>0$ (<0) та $f^{(k)}(x_0)=0$, $k=1,\ldots,n-1$. Якщо n – непарне, то в x_0 немає loc extr; якщо n – парне, то в x_0 є loc min (відповідно loc max) $f(x)$.
Для x із деякого проміжку X та $f(x)\in D(X)$ виконується $f'(x)=0 \Leftrightarrow f\equiv const$, а також наступне твердження.
Th. (Умова монотонності диференційованої функції).
$f(x)\nearrow(\searrow)\Leftrightarrow f'(x)\geq 0$ (≤ 0). Якщо $f'(x)>0$ (<0), то $f(x)\uparrow(\downarrow)$.

Опуклість функції
Def. Функція $f(x)$ називається *опуклою донизу*, $f(x)$"$\cup$", (*догори* – $f(x)$"$\cap$"), якщо її дуга не вища (не нижча) за хорду, що стягує її
$f(x)$"$\cup$": $\quad f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\leq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$, для
$\forall\,\alpha_1,\alpha_2\geq 0:\ \alpha_1+\alpha_2=1$
(якщо $f(x)$"$\cap$", то нерівність $\geq$ відповідно).
Th. (Достатня умова опуклості). Нехай $f(x)\in C^2(X)$). Тоді на проміжку X $f(x)$"$\cup$" ($f(x)$"$\cap$"), якщо $f''(x)>0$ (<0).
Def. Точками *перегину* функції називаються точки, в яких змінюється напрямок опуклості функції.

Деякі чудові нерівності математичного аналізу[1]
Далі всі числові коефіцієнти невід'ємні: $\alpha_i\geq 0$, $x_k>0$, $p,q>0$ $a_i,b_i>0$.

1. *Нерівність Ієнсена.* Для $f(x)$"$\cap$" на проміжку I та $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$
$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n)\geq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\ldots+\alpha_nf(x_n)$.
2. *Нерівність Коші.* Для $n\in\mathbf{N}$ $\quad\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1,x_2,\ldots x_n}$.
3. *Нерівність Юнга.* Для $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ $\quad\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}\geq a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}$.
4. *Нерівність Гьольдера.* Для $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ $\quad\left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\geq\sum a_ib_i$.

[1] Нерівності 4 – 6 мають аналоги для означених інтегралів та відіграють важливу роль як у класичному, так і у функціональному аналізі.

5. *Нерівність Коші – Буняковського – Шварца.* $\sum a_ib_i\leq\sqrt{\sum a_i^2}\cdot\sqrt{\sum b_i^2}$.
6. *Нерівність Мінковьского.* $\left(\sum(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Побудова графіка функції
Def. Графіком функції $y=f(x)$ називається множина
$$\Gamma=\{(x,y)\mid y=f(x)\}.$$
Схема дослідження для функції, заданої явно
0. Перевірка функції на схожість із відомими.
1. Область визначення D_f функції, парність, непарність, періодичність.

Парність – симетрія відносно осі абсцис, непарність – симетрія відносно початку координат. Періодичність – достатність дослідження і побудови графіка функції в періоді.
2. Нулі функції, проміжки знакопостійності (метод інтервалів).
Перетин з OY: $x=0$, $y=f(0)$, з OX: $y=0$, x знаходимо із рівняння $f(x)=0$.
3. Дослідження функції на неперервність (див. попередній розділ).
Асимптоти:
Вертикальна. Якщо $x\to a$ та $f(x)\to\infty$, то функція має вертикальну асимптоту $x=a$.
Горизонтальна. Якщо $x\to\infty$ та $f(x)\to b$, то функція має горизонтальну асимптоту $y=b$.
Похила. Якщо $x\to\infty$ та $f(x)\to\infty$, то можливо існує похила асимптота $y=kx+b$. Для її існування необхідним і достатнім є існування та скінченність двох границь
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\qquad\text{і}\qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$
4. Дослідження на loc extr та проміжки монотонності функції.
5. Дослідження на проміжки опуклості та точки перегину функції.
6. Область значення E_f функції. Таблиця.
7. Графік функції.

Зауважимо, що ця схема може бути як доповнена, так і скорочена залежно від функції. Найбільш важливими пунктами є 3 та 4, таблиця зібраної інформації (пункт 6) може також значно допомогти під час побудови графіка функції.

Побудова графіка кривої

Def. Графік кривої, заданої параметрично системою (3.1) – це множина

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in T\}.$$

Для побудови графіка кривої, заданої системою (3.1) треба провести дослідження для обох функцій та зіставити отримані дані.

Схема дослідження для кривої заданої параметрично

0. Загальні спостереження відносно функцій $x(t)$, $y(t)$.

1. Області визначення $D_{x(t)}, D_{y(t)}$ функцій, їх парність, непарність, періодичність. Парність $x(t)$ і непарність $y(t)$ – симетрія відносно осі абсцис; непарність $x(t)$ і парність $y(t)$ – симетрія відносно осі ординат, парність $x(t)$ і $y(t)$ – самонакладення кривої; непарність $x(t)$ і $y(t)$ – симетрія відносно початку координат. Загальний період у функцій $x(t)$ і $y(t)$ – замкнена або самонакладена крива.

2. Нулі функції, проміжки знакопостійності (метод інтервалів).
Перетин з OY: $x(t)=0$, з OX: $y(t)=0$.

3. Дослідження функцій $x(t)$ і $y(t)$ на неперервність. Значення $t=\omega$ (скінченні або нескінченні) на границях $D_{x(t)}, D_{y(t)}$, за яких $x(t)$ або $y(t)$ прямує до нескінченості.

Асимптоти:

Вертикальна. Якщо за умови $t \to \omega \in \overline{\mathbf{R}}$ $x(t) \to a$, $y(t) \to \infty$, то функція має вертикальну асимптоту $x=a$.

Горизонтальна. Якщо за умови $t \to \omega \in \overline{\mathbf{R}}$ $x(t) \to \infty$, $y(t) \to b$, то функція має горизонтальну асимптоту $y=b$.

Похила. Якщо за умови $t \to \omega \in \overline{\mathbf{R}}$ $x(t) \to \infty$, $y(t) \to \infty$, то можливо існує похила асимптота $y = kx + b$. Для її існування необхідним і достатнім є існування та скінченність двох границь

$$k = \lim_{t\to\omega} \frac{y(t)}{x(t)} \quad \text{і} \quad b = \lim_{t\to\omega}\left(y(t) - kx(t)\right).$$

4. Дослідження loc extr, проміжки монотонності функцій $x(t)$ і $y(t)$.

5. Дослідження на проміжки опуклості та точки перегину функції. Для цього треба визначити знак y''_{x^2} для функції, заданої параметрично.

6. Області значення $E_{x(t)}, E_{y(t)}$. Таблиця.

t	$-\infty$	$(-\infty, \omega_1)$	ω_1	(ω_1, ω_2)	...	$+\infty$
$x(t)$	x_0	$\nearrow (\searrow)$ “∩”(“∪”)	x_1 max	…	…	…
$y(t)$	y_0	$\searrow (\nearrow)$	y_1 min	…	…	…

7. Графік функції.

Зауважимо, що поведінка кривої у точках loc extr функції $x(t)$ виглядає як «)» для loc max та «(» для loc min $x(t)$. Точки (x_0, y_0), у яких обидві функції $x(t)$ та $y(t)$ мають loc extr називаються *точками повернення.* Також зазначимо, що під час побудови кривої параметр t можна розглядати як час, у процесі перебігу якого і змінюються координати $(x(t), y(t))$. Отже, на графіку кривої параметр t не відображається, хоча його можна вказати для окремих точок.

Криву, задану у полярній системі координат можна розглядати як окремий випадок параметрично заданої кривої

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in T,$$

проте дослідження можна спростити.

Схема дослідження для кривої $r = r(\varphi)$, заданої у полярній системі координат

0. Перевірка функції на схожість із відомими.

1. Область визначення $D_{r(\varphi)} = \{\varphi : r(\varphi) \ge 0\}$, область значення $E_{r(\varphi)}$. Парність $r(\varphi)$ – симетрія відносно осі абсцис, непарність – нічого. Періодичність – достатність дослідження в періоді і побудова кривої у відповідному секторі. Періодичність з періодом π – симетрія відносно початку координат.

2. Перетин з $OY: \varphi = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, з $OX: \varphi = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

3. Дослідження функції $r(\varphi)$ на неперервність.

Асимптоти:

Кругова. Якщо за умови $\varphi \to \infty$ функція $r(\varphi) \to a$, то крива намотується на коло $r = a$.

Похила. Якщо за умови $\varphi \to \omega$ функція $r(\varphi) \to +\infty$, то можливо існує похила асимптота $y = kx + b$. Для її існування необхідним і достатнім є існування та скінченність

$$k = \operatorname{tg}\omega \qquad \text{і} \qquad b = \lim_{\varphi\to\omega} \frac{r(\varphi)\sin(\varphi-\omega)}{\cos\omega}.$$

4. Дослідження на loc extr та проміжки монотонності функції $r(\varphi)$.
5. Таблиця.
6. Графік функції.

Нагадаємо, що змінна φ – це кут, що відкладається від додатного напряму вісі OX проти годинникової стрілки, а $r(\varphi)$ – це відстань від початку координат. Отже, побудова графіку кривої на декартовій площині XOY робиться відкладанням відповідної відстані в процесі руху проти годинникової стрілки.

3.2. Контрольні питання та завдання

1. Визначення похідної функції в точці, її геометричний і фізичний зміст. Однобічні похідні.
2. Що таке диференційованість функції у точці?
3. Що таке диференціал функції у точці? Його зв’язок із похідною та приростом функції, геометричний зміст.
4. Виписати таблицю похідних. Виписати правила диференціювання. Що таке логарифмічна похідна? Навести приклади.
5. Визначення похідних та диференціалів порядку, більшого за перший. Таблиця похідних вищого порядку, похідні $n^{\text{го}}$ порядку для
а) a^x; б) $\sin x$; в) $\cos x$; г) x^m $(m\in\mathbf{Z})$; д) $\ln x$; е) $1/x$.
6. Правила обчислення похідних $n^{\text{го}}$ порядку від лінійної комбінації двох функцій та добутку двох функцій (формула Лейбниця). Навести приклади застосування.
7. Що таке інваріантність форми першого та не інваріантність форми другого та вищих диференціалів відносно зміни змінної?
8. Навести формули обчислення 1-ої і 2-ої похідної складної функції.
9. Навести формули обчислення 1-ої і 2-ої похідної зворотної функції. Які умови існування, монотонності та диференційованості зворотної функції?
10. Навести формули обчислення 1-ої і 2-ої похідної функції, що задана параметрично. Вивести формули для обчислення 1-ої і 2-ої похідної функції, заданої у полярній системі координат.
11. Теорема Дарбу про диференційовану функцію на проміжку. Її наслідки про розриви та неперервність похідної.
12. Теорема Ролля про диференційовану функцію на проміжку. Її геометрична інтерпретація.
13. Теорема Лагранжа про диференційовану функцію на проміжку. Її геометрична інтерпретація. Формула скінченних приростів.
14. Сформулювати теорему Коші про дотичну, що паралельна хорді до гладкої кривої, подібно теоремі Лагранжа, із врахуванням формули похідної функції, що задана параметрично.

15. Як можна з'ясувати нерівність між двома функціями на проміжку (a, b) за умови, що вони співпадають у точці a та відомої нерівності між їх похідними?
16. Виписати формулу Тейлора в околі точки x_0 із залишковим членом у формі Лагранжа. Замінити похідні, помножені на приріст аргументу, на диференціали. Отримана формула називається *формулою Тейлора у термінах диференціалів*.
17. Виписати формули Тейлора в околі $x_0 = 0$ (формули Маклорена) із залишковим членом у формі Пеано для функцій: а) e^x; б) $\sin x$; в) $\cos x$; г) $\ln(1 + x)$; д) $(1 + x)^{\alpha}$.
18. Дати означення $loc\,\mathrm{extr}$ функції. Сформулювати необхідну та першу достатню умови $loc\,\mathrm{extr}$ диференційованої функції.
19. Сформулювати другу достатню умову $loc\,\mathrm{extr}$ диференційованої функції. Записати окремий випадок цієї теореми для $n = 2$.
20. Виписати умову (строгої) монотонності функції.
21. Означення опуклої донизу (догори) функції, її геометричний зміст.
22. Сформулювати достатню умову опуклості. Що означає ця умова у термінах першої похідної?
23. Що таке точка перегину функції? Із означення та попередніх властивостей отримати необхідну та достатні умови точки перегину функції. Який її геометричний зміст?
24. Записати нерівності Ієнсена, Коші та Юнга.
25. Записати нерівності Гьольдера, Коші – Буняковського – Шварца та Мінковського.
26. Виписати схему дослідження явно заданої функції для побудови її графіку.
27. Як з'ясувати наявність вертикальної, горизонтальної та похилої асимптот у явно заданої функції?
28. Виписати схему дослідження кривої, що задана параметрично, для побудови її графіку. Які є умови симетрії?
29. Як з'ясувати наявність вертикальної, горизонтальної та похилої асимптот у кривої, що задана параметрично?
30. Як враховується та відображається змінення параметра t при побудові графіка $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in T\}$.

31. Виписати схему дослідження кривої, що задана у полярній системі координат, для побудови її графіку. Яке обмеження є на область визначення $r(\varphi)$?
32. Які асимптоти шукають для кривої, що задана у полярній системі координат, як з'ясувати їх наявність?
33. Згадати геометричний зміст змінної φ і $r(\varphi)$ у полярній системі координат та сформулювати, як виглядає процес побудови графіку кривої на декартової площині XOY.

3.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. $y=(1-5x)^{\operatorname{tg}3x}\cdot\ln\arcsin\frac{x}{2}-f\left(\frac{\sqrt{x+\varphi(x)}}{\psi(x^2)-1}\right),\ y'_x-?$

$$y'_x=\underbrace{\left((1-5x)^{\operatorname{tg}3x}\cdot\ln\arcsin\frac{x}{2}\right)'_x}_{A}-\underbrace{\left(f\left(\frac{\sqrt{x+\varphi(x)}}{\psi(x^2)-1}\right)\right)'_x}_{B};$$

$$A=\left((1-5x)^{\operatorname{tg}3x}\right)'\cdot\ln\arcsin\frac{x}{2}+(1-5x)^{\operatorname{tg}3x}\cdot\left(\ln\arcsin\frac{x}{2}\right)'=$$

$$=\left(e^{\operatorname{tg}3x\ln(1-5x)}\right)'\cdot\ln\arcsin\frac{x}{2}+(1-5x)^{\operatorname{tg}3x}\cdot\frac{1}{\arcsin\frac{x}{2}}\cdot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)'=$$

$$=e^{\operatorname{tg}3x\ln(1-5x)}\cdot\left(\operatorname{tg}3x\cdot\ln(1-5x)\right)'\cdot\ln\arcsin\frac{x}{2}+\frac{(1-5x)^{\operatorname{tg}3x}\frac{1}{2}}{\arcsin\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}=$$

$$=e^{\operatorname{tg}3x\ln(1-5x)}\cdot\left(\frac{3}{\cos^2 3x}\cdot\ln(1-5x)+\operatorname{tg}3x\frac{1}{1-5x}\cdot(-5)\right)\cdot\ln\arcsin\frac{x}{2}+$$

$$+\frac{(1-5x)^{\operatorname{tg}3x}\frac{1}{2}}{\arcsin\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}};\qquad B=f'\left(\frac{\sqrt{x+\varphi(x)}}{\psi(x^2)-1}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x+\varphi(x)}}{\psi(x^2)-1}\right)'=$$

$$=f'(\ldots)\cdot\frac{\left(\sqrt{x+\varphi(x)}\right)'\cdot\left(\psi(x^2)-1\right)-\sqrt{x+\varphi(x)}\left(\psi(x^2)-1\right)'}{\left(\psi(x^2)-1\right)^2}=$$

$$=f'(\ldots)\cdot\frac{\frac{1+\varphi'(x)}{2\sqrt{x+\varphi(x)}}\cdot\left(\psi(x^2)-1\right)-\sqrt{x+\varphi(x)}\left(\psi'(x^2)\cdot 2x\right)}{\left(\psi(x^2)-1\right)^2}.$$

Отже, підставляючи, отримуємо відповідь $y'_x=A-B$.

Нагадаємо, що *логарифмічною похідною* функції $y=f(x)$ називається $\left(\ln|f(x)|\right)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$. Вона – зручний інструмент пошуку похідних від функцій вигляду $y(x)=f^{\alpha}(x)g^{\beta}(x)\ldots h^{\gamma}(x)$, де $\alpha,\beta,\ldots,\gamma\in\mathbf{R}$, а $f(x),\ g(x),\ \ldots,\ h(x)$ – диференційовані додатні функції:

$\ln y(x)=\ln f^{\alpha}(x)\cdot g^{\beta}(x)\cdot\ldots\cdot h^{\gamma}(x)=\alpha\ln f(x)+\beta\ln g(x)+\ldots+\gamma\ln h(x).$

Диференціюємо цю рівність $\frac{y'(x)}{y(x)}=\alpha\frac{f'(x)}{f(x)}+\beta\frac{g'(x)}{g(x)}+\ldots+\gamma\frac{h'(x)}{h(x)}\Rightarrow$

$$y'(x)=y(x)\left(\alpha\frac{f'(x)}{f(x)}+\beta\frac{g'(x)}{g(x)}+\ldots+\gamma\frac{h'(x)}{h(x)}\right).$$

Якщо, $\alpha(x),\ \beta(x),\ \ldots,\ \gamma(x)$ – також функції від x, то:

$$y'(x)=y(x)\cdot\left(\alpha(x)\frac{f'(x)}{f(x)}+\beta(x)\frac{g'(x)}{g(x)}+\ldots+\gamma(x)\frac{h'(x)}{h(x)}\right)+$$
$$+y(x)\cdot\left(\alpha'(x)\ln f(x)+\beta'(x)\ln g(x)+\ldots+\gamma'(x)\ln h(x)\right).$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y=\frac{(3x+5)^2(7x-9)^3}{(x^2+x-29)^4(x-1)}$.

Розв'яжемо цю задачу за допомогою логарифмічної похідної:

$\ln y=2\ln(3x+5)+3\ln(7x-9)-4\ln(x^2+x-29)-\ln(x-1)$,

диференціюємо обидві частини рівності за змінною x $\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{6}{3x+5}+\frac{21}{7x-9}-\frac{4(2x+1)}{x^2+x-29}-\frac{1}{x-1}$. Помножимо результат на y та підставимо замість неї вихідну функцію, отримаємо відповідь:

$$y'=\frac{(3x+5)^2(7x-9)^3}{(x^2+x-29)^4(x-1)}\cdot\left[\frac{6}{3x+5}+\frac{21}{7x-9}-\frac{4(2x+1)}{x^2+x-29}-\frac{1}{x-1}\right].$$

Приклад 3. Знайти $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

Спосіб 1. $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)'_x dx}{(x^2)'_x dx}=\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2\cdot 2x}$.

Спосіб 2. $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\left|\begin{matrix}\text{Заміна}\\ x^2=t\end{matrix}\right|=\left(\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right)'_t=$

$$=\frac{\sqrt{t}\cos\sqrt{t}\cdot(\frac12 t^{-\frac12})-\sin\sqrt{t}\cdot(\frac12 t^{-\frac12})}{t}=\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2\cdot 2x}.$$

Приклад 4. Для функції $y=\sin x^4$ знайти y''_{x^2}. Послідовно диференціюємо функцію:

$$y'=\left(\sin x^4\right)'_{x^4}\cdot\left(x^4\right)'_x=4x^3\cos x^4;$$

$$y''=12x^2\cos x^4+4x^3\left(\cos x^4\right)'_{x^4}\cdot\left(x^4\right)'_x=12x^2\cos x^4-16x^6\sin x^4.$$

Приклад 5. Знайти $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(n)}$. Застосуємо формулу Лейбниця

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\sin x)^{(n)}\left(x^{-1}\right)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\left(x^{-1}\right)^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)x^{n-k}\left[(-1)(-2)(-3)...(n-k)\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!n!}{(n-k)!k!}x^{n-k-1}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}k\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!}x^{n-k-1}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}k\right).$$

Приклад 6. Знайти другий диференціал функції $y=f(1+x^2)$ у два способи: 1) через dx та d^2x, де x незалежна змінна; 2) через dt та d^2t, де $x=\sin t$.

Знайдемо перший диференціал: 1) $dy=f'(1+x^2)\cdot 2x\,dx$. Оскільки перший диференціал є інваріантним відносно зміни змінної, то для 2) можна підставити у нього відповідне значення $x=\sin t$:

2) $dy=f'(1+\sin^2 t)\cdot 2\sin^2 t\,d\sin t=f'(1+\sin^2 t)\cdot 2\sin^2 t\cos t dt$.

Знайдемо другий диференціал:

1) $d^2y=d\left(f'(1+x^2)\cdot 2x\,dx\right)=\left(f''(1+x^2)\cdot 4x^2+f'(1+x^2)\cdot 2\right)(dx)^2$.

Другий диференціал вже не є інваріантним відносно зміни змінної, тобто треба його шукати безпосередньо для незалежної змінної t:

2) $d^2y=d\left(f'(1+\sin^2 t)\cdot 2\sin^2 t\cos t dt\right)=$

$$=\left(f''(\ldots)\cdot(2\sin^2 t\cos t)^2+f'(\ldots)\cdot 4\sin t\cos^2 t+f'(\ldots)\cdot(-2)\sin^3 t\right)(dt)^2.$$

Приклад 7. Знайти x''_{y^2}, якщо $y=x+e^x$.

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{1+e^x};\qquad x''_{y^2}=\left(\frac{1}{y'_x}\right)'_y=\left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x\cdot x'_y=\left(\frac{1}{1+e^x}\right)'_x\cdot\frac{1}{y'_x}=\frac{-e^x}{(1+e^x)^3}.$$

Приклад 8. Знайти $y'_x,\ y''_{x^2}$, якщо $e^{x^2+y^3}+x\sin\left(xy^2\right)=0$.

Диференціюємо праву та ліву частини рівності за змінною x, маючи на увазі, що $y=y(x)$. Отримаємо

$$e^{x^2+y^3}\left(2x+3y^2y'\right)+\sin\left(xy^2\right)+x\cos\left(xy^2\right)\left(y^2+2xyy'\right)=0.$$

Розв'язуємо це рівняння відносно y'

$$y'\left(3y^2e^{x^2+y^3}+2xyx\cos\left(xy^2\right)\right)+\left(2xe^{x^2+y^3}+\sin\left(xy^2\right)+y^2x\cos\left(xy^2\right)\right)=0.$$

Звідки: $y'=-\frac{\left(2xe^{x^2+y^3}+\sin\left(xy^2\right)+y^2x\cos\left(xy^2\right)\right)}{\left(3y^2e^{x^2+y^3}+2xyx\cos\left(xy^2\right)\right)}$. Для знаходження y''_{x^2} треба ще раз диференціювати отриманий вираз для y' за змінною x, та підставити в результат для y''_{x^2} вже знайдений вираз для y'_x.

Приклад 9. Для функції заданої параметрично $x=5\cos t,\ y=5\sin t$ знайти y'''_{x^3}.

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{5\cos t}{-5\sin t}=-\text{ctg}t;\qquad y''_{x^2}=\left(y'_x\right)'_t\cdot t'_x=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\frac{\left(-\text{ctg}t\right)'_t}{-5\sin t}=-\frac{1}{5\sin^3 t};$$

$$y'''_{x^3}=\left(y''_{x^2}\right)'_t\cdot t'_x=\frac{\left(y''_{x^2}\right)'_t}{x'_t}=-\left(\frac{1}{5\sin^3 t}\right)'_t\frac{1}{-5\sin t}=-\frac{3\cos t}{25\sin^5 t}.$$

Приклад 10. Функцію $y=\left|\left(x-5\right)\left(x-6\right)^2\right|$ перевірити на диференційованість у точках $x=5$ та $x=6.$ Похідні $y'_+\left(5\right),\ y'_-\left(5\right),\ y'_+\left(6\right),y'_-\left(6\right)$ знайти безпосередньо та за допомогою наслідку теореми Дарбу об однобічній похідній.

Безпосередньо

$$y'_\pm\left(5\right)=\lim_{x\to5\pm0}\frac{|(x-5)(x-6)^2|}{x-5}=\pm1;\qquad y'_\pm\left(6\right)=\lim_{x\to6\pm0}\frac{|(x-5)(x-6)^2|}{x-6}=0.$$

За наслідком теореми Дарбу об однобічних похідних

$$y'\underset{x\neq0}{=}\text{sgn}\left(x-5\right)\cdot\left((x-6)^2+(x-5)\cdot2(x-6)\right);$$

$$y'_\pm\left(5\right)=\lim_{x\to5\pm0}y'(x)=\text{sgn}(\pm0)\cdot1=\pm1;\qquad y'_\pm\left(6\right)=\lim_{x\to6\pm0}y'(x)=\text{sgn}(1)\cdot0=0.$$

Приклад 11. Отримати розкладення функцій $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\text{arctg}\,x$ у ряд Маклорена.

Кожну із формул можна отримати із формули для суми нескінченної спадаючої геометричної прогресії або із відомого розкладення $\left(1+x\right)^{\mu}$.

$$\frac{1}{1+x}=\left(1+x\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k x^k=\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k x^k+\text{o}\left(x^{n+1}\right),\ x_0=0.$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\sum_{k=0}^{n}x^k+\text{o}\left(x^{n+1}\right),\quad x_0=0.$$

$$f\left(x\right)=\text{arctg}x\quad\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+...$$

$$\Rightarrow f\left(x\right)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Приклад 12. Розкласти за формулою Тейлора із залишковим членом у формі Пеано функцію $y=e^{1-\cos(x+2)^2}-\cos x\sin2-\cos2\sin x,$ якщо $x\to-2,$ до $o\left(x+2\right)^6$.

Буде зручніше шукати відповідне розкладення не за загальною формулою Тейлора, а використовуючи готові формули Маклорена для e^t, $\cos t,\ \sin t,$ де $t\to0.$ Спочатку помітимо, що $\cos x\sin2+\cos2\sin x$ – це $\sin(x+2).$ Розкладаємо за формулою Маклорена

$$\sin(x+2)=\left|\begin{array}{l}t=(x+2)\xrightarrow[x\to-2]{}0,\\ \sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+o(t^6)\end{array}\right|=(x+2)-\frac{(x+2)^3}{3!}+\frac{(x+2)^5}{5!}+o(x+2)^6.$$

Далі, $$\cos\left(x+2\right)^2=\left|\begin{array}{l}\left(x+2\right)^2=t\xrightarrow[x\to-2]{}0,\\ \cos t=1-\frac{t^2}{2}+o(t^3)\end{array}\right|=1-\frac{\left(x+2\right)^4}{2}+o(x+2)^6.$$

Отже,

$$e^{1-\cos(x+2)^2}=e^{\frac{(x+2)^4}{2}+o(x+2)^6}=\left|\begin{array}{l}\frac{\left(x+2\right)^4}{2}+o(x+2)^6=t,\\ t\to0,\quad e^t=1+t+o(t)\end{array}\right|=1+\frac{\left(x+2\right)^4}{2}+o(x+2)^6.$$

Підставляючи все у вихідну функцію, отримуємо відповідь

$$y=1+\frac{\left(x+2\right)^4}{2}+o(x+2)^6-(x+2)+\frac{(x+2)^3}{3!}-\frac{(x+2)^5}{5!}-o(x+2)^6=$$

$$=1-(x+2)+\frac{(x+2)^3}{6}+\frac{\left(x+2\right)^4}{2}-\frac{(x+2)^5}{5!}+o(x+2)^6.$$

Приклад 13. А. Оцінити похибку наближеної формули

$$\ln\left(1+x\right)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},\ x_0=0,\ x\in[0,1/5].$$

Б. Знайти $\ln1{,}3$ з точністю 10^{-2}.

Для обох задач випишемо загальну оцінку залишкового члену у формі Лагранжа: $\left|R_n\left(\ln,0;x\right)\right|=\left|\frac{\left(-1\right)^n n!x^{n+1}}{\left(1+\gamma\right)^{n+1}(n+1)!}\right|\underset{\gamma=0}{\leq}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$. Зауважимо, що цю оцінку можна сформулювати як те, що абсолютна похибка розкладення не перевищує наступного доданку ряду Маклорена, на якому поліном було обірвано. Таке ж правило можна запам'ятати для $\sin x$ та $\cos x$.

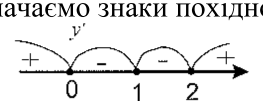
Отже, для пункту А.: $|R_3| \le \frac{|x|^4}{4} \underset{x=1/5}{\le} 4 \cdot 10^{-4}$.

Для пункту Б., якщо застосувати формулу Маклорена для ln(1 + x), то $x = 0{,}3$ та $|R_n| \le \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \underset{x=0,3}{\le} \frac{3^{n+1}}{10^{n+1}(n+1)}$. Отже, підберемо n таке, щоб залишковий член не перевищував 10^{-2}, це $n = 2$. Отримаємо $\ln(1+0{,}3) \approx 0{,}3 - \frac{(0{,}3)^2}{2} = 0{,}255 \approx 0{,}26$ с точністю 10^{-2}.

Приклад 14. Дослідження функцію $y = \frac{x^2}{2(x-1)}$ на loc extr та проміжки монотонності.

Необхідна умова: $y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{4(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{4(x-1)^2} = 0.$

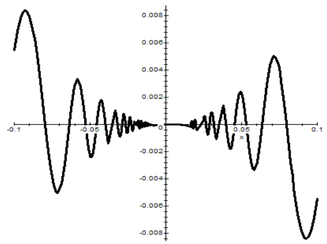
Прирівнюючи до нуля маємо точки підозрілі на екстремум: x=0; x=2. Методом інтервалів визначаємо знаки похідної:



Досліджувана функція зростає на інтервалах $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ та спадає на $(0,1)$, $(1,2)$. Отже, x = 0 – точка локального максимуму, x = 2 – локального мінімуму.

Приклад 15. Знайти екстремуми функції $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Необхідна умова у випадку $x \ne 0$: 1) $f' = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = 0$ або $2x = \mathrm{ctg}\frac{1}{x}$. Можна показати, що це трансцендентне рівняння має нескінчену кількість розв'язків, у яких похідна змінює знак, і отже, функція має екстремум. Проте це також свідчить, що зручніше вказати ці екстремуми за допомогою графіка вихідної функції:



Залишається недослідженою точка $x = 0$. Перевіримо за означенням: якщо $x > 0$ $f(x) - f(0) = x^2 \sin\frac{1}{x} > 0$, інакше – якщо $x < 0$, вираз $f(x) - f(0) < 0$. Отже, екстремуму у 0 немає.

Приклад 16. Побудувати графік кривої заданої неявно $x^3 + y^3 = 3xy$.

Введемо змінну $t = \frac{y}{x}$, підставимо $y = xt$ в рівняння та отримаємо: $x^3(1+t^3) = 3tx^2$. Отже, маємо вже параметрично задану криву:

$x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$. Перевіримо основні пункти дослідження.

1. ОДЗ: $t \ne -1$.
2. Перетин із початком координат відбувається за умови t = 0. Зміна знака $x(t)$ під час переходу t через –1 (з «+» на «–») та під час переходу через 0 (з «–» на «+»). Зміна знака $y(t)$ під час переходу t через –1 (з «–» на «+»). Отже, графік кривої за умови $t \in (-\infty, -1)$ знаходиться у IV чверті, потім за умови $t \in (-1, 0)$ – у II, далі за умови $t \in (0, +\infty)$ – у I. Крім того, він прямує до початку координат із I та II чверті.
3. Дослідження функцій $x(t)$ і $y(t)$ на границях області визначення $D_{x(t)}, D_{y(t)}$, коли t прямує до –1, а також до нескінченості. Для –1

   $$\lim_{t\to -1\pm 0} x(t) = \lim_{t\to -1\pm 0} \frac{3t}{1+t^3} = \mp\infty; \qquad \lim_{t\to -1\pm 0} y(t) = \lim_{t\to -1\pm 0} \frac{3t^2}{1+t^3} = \pm\infty.$$

   Це свідчить про те, що крива може мати похилі асимптоти. Перевіряємо:

   $$k = \lim_{t\to -1\pm 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to -1\pm 0} \frac{3t^2}{3t} = -1,$$

   $$b = \lim_{t\to -1\pm 0} \left(y(t) - kx(t)\right) = \lim_{t\to -1\pm 0} \left(\frac{3t^2}{t^3+1} + \frac{3t}{t^3+1}\right) = -1.$$

   Отже, $y = -x - 1$ – це похила асимптота.

Для нескінченості

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = \lim_{t\to\pm\infty}\frac{3t}{1+t^3} = +0, \qquad \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim_{t\to\pm\infty}\frac{3t^2}{1+t^3} = \pm 0 .$$

Тобто графік прямує до початку координат із I та IV чверті, але початку координат не досягає.

4. Дослідження loc extr, проміжки монотонності:

$$y_t' = \frac{6t\left(1+t^3\right)-3t^2\cdot 3t^2}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{3t\left(2-t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}, \qquad x_t' = \frac{3\left(1+t^3\right)-3t^2\cdot 3t}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{3\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}.$$

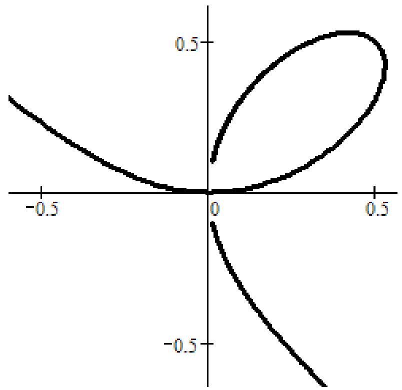
$y_t'(t)=0$ за умови 1) $t=0;\ x=0;\ y=0$, та 2) $t=\sqrt[3]{2};\ x=\sqrt[3]{2};\ y=\sqrt[3]{4}$.

$x_t'(t)=0$ за умови $t=1/\sqrt[3]{2};\ x=\sqrt[3]{4};\ y=\sqrt[3]{2}$.

У випадку 1) функція $y(t)$ має мінімум, а у випадку 2) – максимум. У точці $t=1/\sqrt[3]{2};\ x=\sqrt[3]{4};\ y=\sqrt[3]{2}$ функція $x(t)$ має максимум. Дослідження на проміжки опуклості та точки перегину у цьому прикладі виконувати не будемо.

t	$-\infty$	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(-1,0)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2},+\infty)$	$+\infty$
$x(t)$	+0	$\nearrow$ $+\infty$	асимптота	$\nearrow$ -0	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$ max	$\searrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	+0
$y(t)$	- 0	$\searrow$ $-\infty$	$y=-x-1$	$\searrow$+0	0 min	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$ max	$\searrow$	+0

Графік цієї кривої наведено нижче, вона має назву «лист Декарта».



3.4. Задачі для самостійного розв'язку

Обчислення першої похідної

Знайти похідні y' функцій, що задані явно $y = y(x)$.

1. $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

2. $y=\dfrac{x^2(1-x)^3}{1+x}$.

3. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

4. $y=2\sqrt[5]{x^3}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

5. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2+\sqrt[3]{x^2}}$.

6. $y=x\sqrt{1+x^2}$.

7. $y=(1+x)\cdot\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}$.

8. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

9. $y=e^x\left(x^2-2x+2\right)$.

10. $y=x^a+a^x$.

11. $y=e^{-x^2}$.

12. $y=e^x+e^{e^x}$.

13. $y=\left(2-x^2\right)\cos x+2x\sin x$.

14. $y=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}-\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}$.

15. $y=e^x\left(1+\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}\right)$.

16. $y=\dfrac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$.

17. $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

18. $y=\dfrac{1}{4x^4}\ln\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{16x^4}$.

19. $y=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

20. $y=\log_2 x\cdot\log_x e+\log_2 x\cdot\ln 2$.

21. а) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; б) $y=\ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)$.

22. а) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$, $(a>0)$;

б) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|$.

23. $y=\sin^2 x-\cos x^2$.

24. $y=\sin\left(\cos^2 x\right)+\cos\left(\sin^2 x\right)$.

25. $y=\dfrac{1}{\arccos^2(\sqrt{x})}$.

26. $y=\dfrac{\arcsin x}{\mathrm{arctg}\, x}-\dfrac{\arccos x}{\mathrm{arctg}\, x}$.

27. $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2 x\right)$.

28. $y = \ln \arccos \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

29. $y = \sin(\sin(\sin x))$.

30. $y = \ln\left(\ln\left(\ln x\right)\right)$.

31. $y = \sin\left(\cos^2\left(\operatorname{tg}^3 x\right)\right)$.

32. $y = \sqrt[7]{x^3} + \left(\dfrac{3}{7}\right)^x$.

33. $y = a^{\ln 2x}$.

34. $y = \log_x 2^x$.

35. $y = f(x)^{g(x)}$.

36. $y = x^x$.

37. $y = \sqrt[x]{x}$.

38. $y = \left(x^2 + x + 1\right)^{x^2 - x + 1}$.

39. $y = (\sin x)^{\cos x}$.

40. $y = x^{x^2} + x^{2^x}$.

Знайти похідні y' від функцій $y(x)$, що містять невідомі функції:

41. $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$.

42. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

43. $y = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$.

44. $y = \log_{\varphi(x)} \psi(x)$.

45. а) $y = f\left(x^2\right)$; б) $y = f\left(\sin^2 x\right) + f\left(\cos^2 x\right)$;

в) $y = f\left(e^x\right) \cdot e^{f(x)}$; г) $y = f\left(f\left(f(x)\right)\right)$.

46. $y = a^{f(x)} + \left(g(x)\right)^n$.

47. $y = \operatorname{arctg}\left(\varphi\left(x^2\right) + \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}\right) - \sin(3x - 2) \cdot x^{\psi(2x)}$.

48. $y = (\operatorname{tg} x)^{2x-1} \cdot \ln \arcsin \dfrac{x}{3} - f\left(\dfrac{x + 3^x}{\varphi\left(\sqrt[3]{x}\right) - 1}\right)$.

49. $y = \pi^x \cdot \operatorname{ctg}\left((x+1)^x - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right) + \varphi\left(\sin x^2 \cdot \psi^2(\cos x)\right)$.

Знайти y', побудувати графіки $y(x)$ та $y'(x)$:

50. $y = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 1 + x & 0 \le x \le 3 \\ x^2 - 5 & x > 3 \end{cases}$.

51. $y = \begin{cases} 1 - x & x < 1 \\ (1 - x)(2 - x) & 1 \le x \le 2 \\ x - 2 & x > 2 \end{cases}$.

52. $y = |x|$.

53. $y = x|x|$.

54. $y = \arccos \dfrac{1}{|x|}$.

55. $y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & |x| \le 1 \\ \dfrac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \dfrac{x - 1}{2}, & |x| > 1 \end{cases}$.

56. Знайти суму: $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}$.

57. Знайти логарифмічні похідні від $y(x)$:

а) $y = x\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$; б) $y = \dfrac{x^2}{1 - x}\sqrt[3]{\dfrac{3 - x}{(3 + x)^2}}$;

в) $y = \dfrac{(x - 8)^{\frac{5}{7}}}{3 + 2x}\sqrt[5]{\dfrac{x^3}{(3 - x)^2}}$; г) $y = \dfrac{(x^2 + 2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\sin x}} \cdot \dfrac{\sqrt[6]{(1 + \operatorname{tg} x)^5}}{(3 - 6x)^{\pi}}$;

д) $y = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^n$; е) $y = (x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2} \cdots (x - a_n)^{\alpha_n}$.

Геометричний зміст похідної

58. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$ у точках: A(–1,0); B(2,3) і C(3,0).

59. Визначити кут між лівою та правою дотичними до кривих:

а) $y = \sqrt{1 - e^{-\alpha^2 x^2}}$ в точці $x = 0$; б) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$ в точці $x = 1$.

60. Під якими кутами перетинаються криві:

а) $y = x^2$ і $x = y^2$. б) $y = \sin x$ і $y = \cos x$.

61. Визначити значення параметра α за якого парабола $y = \alpha x^2$ торкається кривої $y = \ln x$.

62. Довести, що у астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ довжина дотичної, що розташована між вісями координат є сталою величиною.

63. Довести, що дотична до логарифмічної спіралі $r = ae^{m\varphi}$ ($a, m = const$) утворює постійний кут із радіус-вектором точки дотику.

Диференціал функції

Знайти перший диференціал dy функції y:

64. а) $y=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$; б) $y=\arcsin\frac{x}{a}$.

65. а) $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$; б) $y=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$.

66. а) $y=\frac{u}{v^2}$; б) $y=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$; в) $y=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}$.

67. Знайти:

а) $d(xe^x)$; б) $d(\sin x-x\cos x)$; в) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$;

г) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$; д) $d\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)$; е) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

є) $d\ln(1-x^2)$; ж) $d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)$; з) $d\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)$.

68. Знайти:

а) $\frac{d(\operatorname{tg}x)}{d(\operatorname{ctg}x)}$; б) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$; в) $\frac{d(\operatorname{arctg}x)}{d(\operatorname{arcctg}x)}$.

69. Знайти:

а) $(\sin x)'_{\cos x}$; б) $\frac{d}{dx^3}\left(x^3-2x^6-x^9\right)$; в) $(x+\ln x)'_{x+e^x}$.

70. Приблизно обчислити за допомогою формули нескінченно малих приростів:

а) $\sqrt{0{,}98}$; б) $\sqrt[3]{1{,}02}$; в) $\sin 29°$; г) $\operatorname{arctg}1{,}05$; д) $\lg 11$.

71. Довести формулу наближень:

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}\quad (a>0),$$

де $|x|<<a$, та з її допомогою обчислити:

а) $\sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[4]{80}$; в) $\sqrt[7]{100}$; г) $\sqrt[10]{1000}$.

Похідні та диференціали вищого порядку

Знайти вказані похідні та диференціали вищого порядку від функцій, що задані явно $y=y(x)$.

72. $y=\operatorname{tg}x$, y''_{x^2} – ?

73. $y=(1+x^2)\operatorname{arctg}x$, y''_{x^2} – ?

74. $y=\frac{a}{x^m}$, y'''_{x^3} – ?

75. $y=x(\sin\ln x+\cos\ln x)$, y''_{x^2} – ?

76. $y=\frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$, y'''_{x^3} – ?

77. $y=f(x^2)$, y'''_{x^3} – ?

78. $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$, y'''_{x^3} – ?

79. $y=f(\ln x)$, y'''_{x^3} – ?

80. $y=\ln f(x)$, y'''_{x^3} – ?

81. $y=\frac{\ln x}{x}$, d^2y – ?

82. $y=x^x$, d^2y – ?

83. $y=\ln\frac{u}{v}$, d^2y – ?

84. $y=\sqrt{x}$, $y^{(10)}$ – ?

85. $y=x(2x-1)^2(x+3)^3$, $y^{(6)}$, $y^{(7)}$ –?

86. $y=\frac{\ln x}{x}$, $y^{(5)}$ – ?

87. $y=\frac{x^2}{1-x}$, $y^{(8)}$ – ?

88. $y=e^x\cos x$, y^{IV} – ?

89. $y=\frac{e^x}{x}$, $y^{(10)}$ – ?

90. $y=x\cos 2x$, $d^{10}y$ – ?

91. $y=(x^2-x)\cos 3x$, $y^{(101)}$– ?

92. $y=x^2\sin 2x$, $y^{(50)}$ – ?

93. $y=x^2e^{2x}$, $y^{(20)}$ – ?

94. $y=x\sin x\cos 2x$, $y^{(100)}(0)$ – ?

У номерах 95 – 110 знайти $y^{(n)}$.

95. $y=\frac{1}{x(1-x)}$.

96. $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$.

97. $y=\frac{3-2x^2}{2x^2+3x-2}$.

98. $y=x^{n-1}e^{1/x}$.

99. $y=\ln\frac{2+3x}{3-5x}$.

100. $y=\sin 3x\cos 5x$.

101. $y=\sin^2 x$.

102. $y=\cos^3 x$.

103. $y=x^2\sin ax$.

104. $y=e^x\sin x$.

105. $y=e^{ax}\cos(bx+c)$.

106. $y=e^{2x}\sin^2 x$.

107. $y=\sin^2 ax\cos^2 bx$.

108. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

109. $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

110. $y=(2x-1)2^{3x}3^{2x}$.

111. $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$, $d^{10}y\left(\dfrac{\pi}{6},\, dx\right)$ – ?

112. Довести, що $\left(x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, если $\exists f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

113. Знайти другий диференціал вказаних функцій у два способи:
1) через dx та d^2x; 2) через dt та d^2t:

а) $y=f\left(2^{\arcsin x}\right)$; $x=\ln\left(3+t^2\right)$.

б) $y=f\left(\operatorname{arctg}3^x\right)$; $x=\operatorname{ctg}2t$.

в) $y=f\left(\arccos(\ln x)\right)$; $x=\sin t$.

Похідні першого та вищого порядку від обернених функцій

114. Визначити область існування обернених функцій $x=x(y)$ та знайти x'_y, x''_{y^2}, x'''_{y^3}, якщо:

а) $y = x + \ln x$; б) $y = \operatorname{sh}x$; в) $y = x + e^x$; г) $y = \operatorname{th}x$;

д) $y=e^x+\ln x$; е) $y=x\cdot\sin x$; є) $y=\sqrt{x+\cos x}$; ж) $y=\dfrac{x}{e^x}$.

115. Знайти x''_{y^2}, якщо а) $y=x^{x^x}$; б) $y = (\ln x)^{2x}$; в) $y = (\operatorname{tg}2x)^{\sin x}$.

116. Нехай функція $y=f(x)$ диференційована чотири рази. Знайти x', x'', x''', x^{IV} оберненої функції $x=f^{-1}(y)$.

Похідні першого та вищого порядку від функцій, що задані неявно

Знайти y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} функцій $y(x)$, що задані неявно.

117. $x^2+2xy-y^2=2x$.

118. $x^2+y^2=25$.

119. $x^2-xy+y^2=1$.

120. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ (парабола).

121. $\sqrt{y}+\sqrt{x}=\operatorname{arctg}(xy)$.

122. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (астроїда).

123. $y+\exp(xy)=2x$.

124. $x+\cos(xy)=y^2$.

125. $y^2+2\ln y=x^4$.

Похідні першого і вищого порядку від параметрично заданих функцій та функцій заданих у полярній системі координат

Знайти y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} $(a>0)$ для параметрично заданих функцій.

126. $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.

127. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

128. $x=\dfrac{1}{\cos t}$, $y=\operatorname{tg}t-t$.

129. $x=-te^t$, $x=te^{-t}$.

130. $x=\dfrac{t^2}{1-t^2}$; $y=\dfrac{1}{1+t^2}$.

131. $\begin{cases}x=t+e^{-t}\\ y=2t+e^{-2t}\end{cases}$.

132. $\begin{cases}x=\sin^2 t\\ y=\cos^2 t\end{cases}$.

133. $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$.

134. $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$.

135. $\begin{cases}x=f'(t)\\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$.

136. $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$.

137. $\begin{cases}x=a\cos 2t\\ y=a\cos 3t\end{cases}$.

138. $x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

139. Знайти загальні формули для обчислення y'_x, y''_{x^2} функції $y(x)$, що задана через $\rho=\rho(\varphi)$ у полярній системі координат.

140. Знайти y'_x, y''_{x^2}, якщо дана $\rho=\rho(\varphi)$ у полярній системі координат:

а) $\rho=a\varphi$ (спіраль Архімеда); б) $\rho=ae^{m\varphi}$ (логарифмічна спіраль);

в) $\rho=a(1+\cos\varphi)$ (кардіоїда); г) $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$;

д) $\rho=\dfrac{1}{\varphi}$; е) $\rho=a\sin 3\varphi$; ж) $\rho=a\cos 4\varphi$; з) $\rho=\dfrac{1}{\sin 3\varphi}$.

Основні теореми диференціального числення та їх застосування

Дослідження на диференційованість.

141. Дослідити на диференційованість за допомогою наслідку з теореми Дарбу:

а) $y=\left|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right|$; б) $y=|\cos x|$;

в) $y=\left|\pi^2-x^2\right|\sin^2 x$; г) $y=\arcsin(\cos x)$.

142. Визначити значення параметрів α і β, за яких наступні функції всюди неперервні і диференційовані.

а) $y=\begin{cases}\alpha x^3+\beta x, & |x|\le 2\\ \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{1}{x}, & |x|>2\end{cases}$. б) $y=\begin{cases}(x+\alpha)e^{-\beta x}, & x<0\\ \alpha x^2+\beta x+1, & x\ge 0\end{cases}$.

143. Визначити значення параметрів α і β ($\beta>0$) за яких функція

$$y=\begin{cases}|x|^{\alpha}\sin\left(1/|x|^{\beta}\right), & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases},$$

в точці $x=0$: а) неперервна; б) має похідну; в) має неперервну похідну.

144. Знайти ліву $f'_-(0)$ та праву $f'_+(0)$ похідні у точці 0, також знайти $\lim\limits_{x\to\pm 0} f'(x)$. Пояснити, чому результати співпадають або ні.

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{1+e^{1/x}} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$;

в) $f(x)=\begin{cases}x\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right| & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$; г) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

145. Знайти ліву та праву похідні у вказаних точках для функцій:

а) $y=\left|2^x-2\right|$, $x=1$; б) $y=\sqrt{\sin x^2}$, $x=0$, $x=\sqrt{\pi}$.

146. Визначити, якого порядку похідні є в точці $x=0$ у функції $y=\begin{cases}1-\cos x, & x<0\\ \ln(1+x)-x, & x\ge 0\end{cases}$. Обчислити відповідні похідні у цій точці.

147. Довести, що функція Томе (див. номер 193 попереднього розділу) ніде не диференційована та має строгі loc max у раціональних числах.

148. Довести за допомогою теореми Роля: якщо всі корені полінома $P_n(x)$ із дійсними коефіцієнтами дійсні, то і $P_n'(x)$ має тільки дійсні корені.

149. Показати, що всі корені полінома Лежандра $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left\{\left(x^2-1\right)^n\right\}$ дійсні та належать інтервалу (–1, 1).

150. Довести наступну теорему за допомогою теореми Лагранжа. Якщо:

1) $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ n-кратно неперервно диференційовані $\forall x\ge x_0$;

2) $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)$, $k=0, 1, 2, \ldots n-1$;

3) $\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$, $\forall x>x_0$,

то виконується нерівність: $\varphi(x)>\psi(x)$, $\forall x>x_0$.

151. За допомогою номеру 150 перевірити нерівності на вказаних множинах:

а) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$ $(x>0)$; б) $\operatorname{tg}x>x+\dfrac{x^3}{3}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$;

в) $\operatorname{ch}x\ge 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ $(x\in\mathbf{R})$; г) $\operatorname{sh}x<x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$ $(x<0)$;

д) $e^x\ge ex$ $(x\in\mathbf{R})$; е) $\operatorname{arctg}x\le x$ $(x\ge 0)$;

ж) $(\lg x)\cdot\cos(\lg x)<\sin(\lg x)$ $(1<x<100)$;

з) $1-\dfrac{1}{|\arcsin x|^{\pi}}\le\pi\ln|\arcsin x|$ $(0<|x|<\sin 1)$;

і) $(\ln x)\cdot\cos(\ln x)>\sin(\ln x)$ $\left(\dfrac{1}{e}<x<1\right)$;

к) $1-5\ln\sin^2 x\le\dfrac{1}{\sin^{10}x}$ $(x\ne k\pi,\ k\in\mathbf{Z})$;

л) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\sqrt{2}<\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{x^2+1}$ $(x>1)$.

Розкласти функції у ряд Тейлора в околі точки $x=x_0$.

152. а) $y=x^2+3x-3$, $x_0=0$; б) $y=x^2+3x-3$, $x_0=1$.

153. $y=e^{x^2-x}$, $x_0=0$, до x^5. **154**. $y=\sqrt{x}$, $x_0=1$, до $(x-1)^3$.

155. $y=\ln(1+\sin x)$, $x_0=0$, до x^5. **156**.[1] $y=\dfrac{x}{e^x-1}$, $x_0=0$ до x^4.

157. $y=\operatorname{tg}x$ до x^5. **158**. $y=\sin(\sin x)$ до x^3.

159. $y=\ln\cos x$ до x^6. **160**. $y=x^x-1$ до $(x-1)^3$.

161. $y=\sqrt{1+x^2}-x$ до $\dfrac{1}{x^3}$. **162**. $y=\operatorname{arctg}x$, $x_0=0$ (весь ряд).

163. $\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^3}$ до x^3.

164. $y=\ln(1+x+x^2+x^3)$, $x_0=0$, до x^5.

165. $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{2+x^2}{x^4-3x^2+2}}$, $x_0=0$, до x^6.

166. $y=\dfrac{1-2x\sqrt{e}+ex^2}{\sqrt{-\ln\left(2x-x^2\sqrt{e}\right)}}$, $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, до $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^9$.

167. $y=\left(x^2-1\right)^{1000}$, $x_0=1$, до $(x-1)^{1000}$.

168. $y=\left(6-\sqrt{1-10x^4}\right)^{\cos 2x^3}$, до x^9.

169. $y=\begin{cases} x^6\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $x_0=0$, до членів найбільшого порядку.

170. $y=\sin\dfrac{x^2-x}{2e^x}$, $x_0=0$, два члена розкладення.

171. Знайти три члена асимптотики функції $y=x^2e^{2/(x+1)}$ за умови $x\to\infty$.

Розкласти за формулою Тейлора із залишковим членом у формі Пеано.

172. $y=e^{1-\cos x^2}-\sqrt{1+\sin^2 x}$, $x\to 0$, до $o\left(x^6\right)$.

---

[1] Довести, що для чисел Бернуллі B_n, які визначаються з розкладу $x/e^x-1=\sum_0^\infty B_n\,x^n/n!$, виконана рівність $B_0=1$, $C_n^0B_0+C_n^1B_1+\ldots+C_n^{n-1}B_{n-1}=0$, $n\geq 2$. Записати повний розклад через числа Бернуллі для функції номеру 159.

173. $y=x^\pi-\pi^x$, $x\to 1$, до $o\left((x-1)^4\right)$.

174. $y=\ln\dfrac{1}{x}+e^{x^2}$, $x\to 1$, до $o\left((x-1)^3\right)$.

175. $y=\ln\dfrac{x+2}{x}+2^{1+\frac{1}{x}}$, $x\to\infty$, до $o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

176. $y=\left(3+3x+x^2\right)^{3/5}-\ln\left(\dfrac{1}{-x}\right)$, $x\to -1$, до $o\left((x+1)^4\right)$.

177. $y=(3+x)^\pi+\sin 2\cdot\cos x+\cos 2\cdot\sin x$, $x\to -2$, до $o\left((x+2)^4\right)$.

178. За яких значень параметрів a та b функція $x-(a+b\cos x)\sin x$ буде нескінченно малою 3-го порядку відносно x?

Знайти найбільше n та константи A, B, C,… такі, що у разі $x\to 0$ виконуються наступні формули.

179. $e^x=\dfrac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}+\mathrm{O}\left(x^n\right)$. **180**. $\operatorname{arctg}x=\dfrac{x+Ax^3}{1+Bx^2}+\mathrm{O}\left(x^n\right)$.

181. $\ln(1+x)=\dfrac{x+Ax^2}{1+Bx}+\mathrm{O}(x^n)$. **182**. $\arcsin x=\dfrac{x+Ax^3}{1+Bx^2}+\mathrm{O}(x^n)$.

183. $\cos x=\dfrac{1+Ax^2}{1+Bx^2}+\mathrm{O}(x^n)$. **184**. $\operatorname{ctg}x=\dfrac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+\mathrm{O}(x^n)$.

185. $(1+x)^x=\dfrac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx}+\mathrm{O}(x^n)$. **186**. $\sqrt[x]{1+x}=\dfrac{e+Ax}{1+Bx}+\mathrm{O}(x^n)$.

У наступних завданнях застосувати формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа.

187. Для яких x виконується, с точністю до 0,0001, наближена формула $\cos x\approx 1-\dfrac{x^2}{2}$?

Оцінити абсолютну похибку формул.

188. а) $e^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}$, $x\in\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$; б) $\operatorname{tg}x\approx x+\dfrac{x^3}{3}$ $\left(|x|\leq 0{,}1\right)$;

в) $\sin 2x \approx 2x - \dfrac{4x^3}{3}$, $x \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$; г) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$, $x \in [0,1]$.

189. $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$; $|x| \le 1$. **190**. $\mathrm{arctg} x \approx \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x}$; $|x| > 10^2$.

191. $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}} \approx 1 + \dfrac{2}{3x}$; $|x| > 10^3$.

192. Виписати поліном Тейлора функції e^x у нулі, який дозволяє обчислити значення e^x на відрізку $[-1, 2]$ із точністю 10^{-3}.

Обчислити вказані значення із заданою точністю:

193. а) e до 10^{-4}; б) $\sqrt{e}$ до 10^{-5}; в) $\sqrt[3]{e}$ до 10^{-6}; г) $\sqrt[4]{e}$ до 10^{-5}.

194. а) $\sqrt{1,2}$ до 10^{-5}; б) $\sqrt[4]{16,03}$ до 10^{-5}; в) $\dfrac{1}{\sqrt{105}}$ до 10^{-4}; г) $\sqrt{5}$ до 10^{-3}.

195. а) ln1,2 до 10^{-3}; б) ln2 до 10^{-2}; в) ln0,8 до 10^{-4}.

196. а) cos1° до 10^{-5}; б) sin85° до 10^{-6}; в) cos9° до 10^{-3}.

197. а) tg48° до 10^{-3}; б) arcsin0,56 до 10^{-3}; в) arctg0,8 до 10^{-3}.

Дослідити функції на екстремум.

198. $y = 2 + x - x^2$. **199**. $y = (x + 1)^{10}e^{-x}$. **200**. $y = x(x - 1)^2(x - 2)^3$.

201. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$. **202**. $y = \sqrt{x}\ln x$. **203**. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

204. $y = |x|^{1/\sqrt{2}} \cdot |1 - x|^{1-1/\sqrt{2}}$. **205**. $y = xe^{-x}$. **206**. $y = \cos^{100}x + \mathrm{ch}^{100}x$.

207. Визначити проміжки монотонності функції: $y = x + |\sin 2x|$.

Знайти найбільше і найменше значення $(\sup, \inf)$ на множині:

208. $y = x^2 - 4x + 6,$, $x \in [-3,10]$. **209**. $y = e^{-x^2}\cos x^2$, $x \in \mathbf{R}$.

210. $y = 2\sin x + \sin 2x$, $x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$. **211**. $y = 2^x$, $x \in [-1,5]$.

212. $y = |x^2 - 3x + 2|$, $x \in [-10,10]$. **213**. $y = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$, $x \in (0,+\infty)$.

214. Знайти найбільший член послідовності $x_n = \sqrt[n]{n}$.

215. Знайти точні верхню и нижню грані функції $f(\xi) = \dfrac{1+\xi}{3+\xi^2}$ на інтервалі $x < \xi < +\infty$. Побудувати графіки функцій $M(x) = \sup\limits_{x<\xi<+\infty} f(\xi)$; $m(x) = \inf\limits_{x<\xi<+\infty} f(\xi)$.

Визначити кількість дійсних коренів рівнянь, вказати їх проміжки.

216. $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$. **217**. $x^3 + 3x^2 + 2x - 12 = 0$.

218. $3x^3 - 9x^2 + 9x + 7 = 0$. **219**. $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$.

220. Визначити кількість дійсних коренів рівняння: $x^3 - x + a = 0$ за різних значень параметра a.

221. Відобразити на площині $(p,\ q)$ області, в яких рівняння $x^3 + px + q = 0$ має: а) один; б) три дійсних кореня.

222. В чашку, що має форму півкулі радіуса a, опущено стрижень довжини l ($2a < l < 4a$). Знайти положення рівноваги стрижня.

223. Вивести закон переломлення світла (закон Снелла), що проходить від точки А до точки В скрізь границю двох середовищ: $n_1 \sin\theta_1 = n_1 \sin\theta_1$, де θ_1 – кут падіння, θ_2 – кут заломлення, n_1 та n_2 показники заломлення двох середовищ.

224. Із якого сектора круга радіуса R можна згорнути воронку найбільшої місткості?

225. На горизонтальній площині стоїть наповнена водою посудина з вертикальною стінкою висоти h. З отвору в стінці посудини тече струмінь. Визначити положення отвору, при якому відстань, на яку буде бити струмінь, є найбільшою, якщо швидкість рідини, що витікає, дорівнює $\sqrt{2gx}$, де x є віддаллю від поверхні води до отвору.

226. У кулю радіуса R вписати циліндр найбільшого об'єму.

227. Знайти фігуру найбільшої площі, діаметр якої дорівнює одиниці (діаметром опуклої фігури називають найбільшу відстань між будь-якими двома її точками).

228. Знайти відстань від початку координат до дотичної кривої:

а) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$; б) $\rho = ae^{k\varphi}$.

Довести нерівності.

229. $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$, $x > 0$, $y > 0$.

230. $\frac{1}{2}\left(x^{\mu}+y^{\mu}\right)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\mu}$ $\quad \begin{matrix} x>0, & y>0 \\ x\neq y, & \mu>1 \end{matrix}$.

231. $\frac{\pi}{3}\sin x+\frac{2\pi}{3}\sin y\le \pi\sin\frac{x+2y}{3}, \quad x,\ y\in[0,\frac{\pi}{2}].$

232. $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}\le\sqrt[n]{x-y}, \qquad x\ge y\ge 0.$

233. $\frac{e^x+3e^y}{4}>e^{\frac{x+3y}{4}}, \quad (x\neq y)$.

234. $\left(x^{\alpha}+y^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}>\left(x^{\beta}+y^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ $\quad \begin{matrix} x>0, \quad y>0 \\ 0<\alpha<\beta \end{matrix}$.

Дослідження функцій та побудова графіків

Побудувати графіки функцій.

235. $y=(x+1)(x-2)^2$. 236. $y=\frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$. 237. $y=\frac{x^4}{(1+x)^3}$.

238. $y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$. 239. $y=\frac{x(x-1)}{x+1}$. 240. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

241. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$. 242. $y=\left(1+x^2\right)e^{-x^2}$.

243. $y=e^{-2x}\sin^2 x.$ 244. $y=\sin x+\cos^2 x.$

245. $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$. 246. $y=(7+2\cos x)\sin x.$

247. $y=\arcsin x+3\arccos x+\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$

248. $y=\frac{2x-1}{2}-\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\,\frac{2x-1}{2}\pi\right).$

249. $y=2\mathrm{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

250. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$. 251. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n+|y|^n}=1$.

Побудувати графіки кривих, що задані неявно.

252. $x^4-6x^2y+25y^2-16x=0$. 253. $y^2-x^4+x^6=0$.

254. $y^2=x^3(2-x)$. 255. $x^4+y^4=8xy^2$.

256. $x^y=y^x, \quad (x,y>0)$. 257. $4y^2=4x^2y+x^5$.

258. $x^3+y^3-3axy=0$ (лист Декарта). Вказівка: параметризувати зміною $t=\frac{y}{x}$.

Побудувати графіки кривих, що задані параметрично $(a>0)$.

259. $x=\frac{(t+1)^2}{4}; \quad y=\frac{(t-1)^2}{4}$. 260. $\begin{cases} x=\cos t-2\cos 2t \\ y=\sin t\cdot e^{\cos t}\end{cases}$.

261. $x=a\cos 2t; \quad y=a\cos 3t, \quad (a>0)$ (крива Лесажу).

262. $x=-te^t, \quad y=te^{-t}$. 263. $\begin{cases} x=\frac{t^2}{1-t^2} \\ y=\frac{1}{1+t^2}\end{cases}$. 264. $\begin{cases} x=t+e^{-t} \\ y=2t+e^{-2t}\end{cases}$.

265. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ (циклоїда). 266. $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ (астроїда).

Побудувати графіки кривих у полярній системі координат $(a>0)$.

267. а) $\rho=a\varphi$ (спіраль Архімеда); б) $\rho=ae^{m\varphi}$ (логарифмічна спіраль).

268. а) $\rho=a\sin 3\varphi$ (трилисник); б) $\rho=a\cos 4\varphi$ (чотирилисник).

269. а) $\rho=a\,\mathrm{tg}(3\varphi/5)$; б) $\rho=a\cos(5\varphi/6)$.

270. а) $\rho=a(1+\sin\varphi)$; б) $\rho=a(1+\cos\varphi)$ (кардіоїда).

271. а) $\rho=\frac{1}{\varphi}$; б) $\rho=\frac{1}{\sin 3\varphi}$;

в) $\rho=-1+\frac{2}{\cos\varphi}$; г) $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (лемніската Бернулі).

РОЗДІЛ 4.
КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

4.1. Основні поняття та властивості

Поле комплексних чисел

Def. **C** $= \{ z \mid z = x + iy; \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad i^2 = -1\}$ – множина комплексних чисел, де запис $z = x + iy$ називається *алгебраїчною формою* комплексного числа; $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ називаються *дійсна* (або *реальна*) та *уявна* частини числа z відповідно.

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$, тоді $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$. Визначимо асоціативні та комутативні операції «+», «·», що як і для дійсних чисел пов'язані дистрибутивним законом:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \qquad z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

В множині **C** існують різні елементи 1, 0 нейтральні за «+» та «·» відповідно: $1 = 1 + i0$; $0 = 0 + i0$. А також для кожного $z \in \mathbf{C}$ існує протилежний елемент $-z = -x + i(-y) = -x - iy$; та для кожного $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ існує обернений $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\,\dfrac{-y}{x^2 + y^2}$.

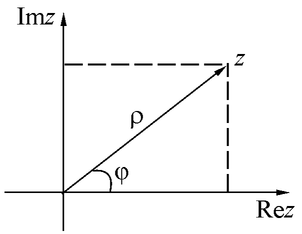
Отже, множина **C** утворює *поле* за операціями «+», «·».

Def. Величина $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ називається *модулем* комплексного числа z. Для $z = x + iy$ *спряженим* комплексним числом називається $\bar{z} = z^* = x - iy$. Основні властивості операції спряження:

1. $(z^*)^* = z$; 2. $zz^* = |z|^2$; 3. $\dfrac{z + z^*}{2} = \operatorname{Re} z$; 4. $\dfrac{z - z^*}{2i} = \operatorname{Im} z$;

5. $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$; 6. $(z_1z_2)^* = z_1^*z_2^*$; 7. $(z^{-1})^* = (z^*)^{-1} \underset{\text{за 2.}}{=} \dfrac{z}{|z|^2}$.

Геометрична інтерпретація комплексних чисел



Розглянемо декартову площину та поставимо у відповідність кожній точці $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ комплексне число $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Отже, комплексні числа можна розглядати як точки або радіус-вектора на площині (**C** називається *комплексною площиною*).

Тригонометрична форма запису

Перейдемо від декартової системи координат до полярної:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Тоді отримаємо *тригонометричну форму* запису комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Величина $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ задає відстань від точки z до початку координат (довжину радіус-вектора z), а величина φ задає кут між додатнім напрямком осі абсцис та радіус-вектором z. Остання називається аргументом комплексного числа і позначається $\operatorname{Arg} z$, вона знаходиться неоднозначно, з точністю до величини, кратної 2π

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ де } \arg z = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ x \ge 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ x \le 0 \end{array}\right. \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Зауважимо, що $z = 0 \Leftrightarrow \rho = 0$, а аргумент φ не визначено.

Th. Нехай $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тоді

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\rho_1 = \rho_2) \wedge (\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z})$;
2. $z_1z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Геометрична інтерпретація добутку комплексних чисел – це поворот та розтягнення.

Формула Муавра. $(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

C. $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, тут $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Отже, для будь-якого ненульового комплексного числа існує рівно n різних значень кореня n-го степеня, та ці n значень розташовані у вершинах правильного многокутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{\rho}$.

Визначимо розширення ще деяких функцій на комплексну площину (нескінчені суми нижче розуміємо як границі скінчених):

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}; \qquad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!};$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}; \qquad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z};$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \qquad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Формули Ейлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z; \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

C. $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

C. (Показникова форма запису комплексного числа**).**

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} = \rho e^{i\varphi}.$$

Логарифм комплексного числа

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k \in \mathbf{Z}$.

Також позначають $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ – головне значення логарифму комплексного числа.

Нарешті введемо операцію піднесення будь-якого комплексного числа до будь-якого комплексного степеня: $z_1^{z_2} = e^{z_2 \operatorname{Ln} z_1}$.

Th (основна теорема алгебри**).** Кожен поліном не нульового степеня $P_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, $z, c_k \in \mathbf{C}$, має хоча б один комплексний корінь z_0: $P_n(z_0) = 0$.

Принцип Руше. Приріст Arg $f(z)$ під час руху вздовж замкненого контуру C в додатному напрямку дорівнює $2\pi n$, де n – кількість нулів функції $f(z)$ всередині області, що обмежена C.

Def. *Поділити* поліном $P(z)$ на $S(z)$ означає знайти поліноми $Q(z)$ – *неповну частку* та $R(z)$ – *остачу* такі, що: $P(z) = S(z)Q(z) + R(z)$. Водночас deg $Q(z)$ = deg $P(z)$ – deg $S(z)$; deg $R(z)$ < deg $S(z)$; де deg – це число $n \in \mathbf{N} \bigcup \{0\}$, *степінь поліному*, що є найбільшим степенем його одночленів $c_n z^n$ із $c_n \neq 0$ (deg *Const* = 0). *Ділене* $P(z)$ ділиться на *дільник* $S(z)$ націло, якщо остача тотожно дорівнює 0; ділення неможливе, якщо дільник дорівнює 0. Поліном завжди націло ділиться на *Const*.

Th. (Безу). Остача від ділення поліному $P_n(z)$ на двочлен $z - c$ дорівнює значенню полінома $P_n(z)$ в точці $z = c$.

C1. Якщо $z = c$ – корінь полінома $P_n(z)$, то $P_n(z)$ ділиться на $z - c$ без остачі та навпаки.

C2. Якщо $z = c$ – корінь полінома $P_n(z)$, то $P_n(z)$ можна розкласти на множники: $P_n(z) = (z - c)Q_{n-1}(z)$.

Розкладання над полем комплексних чисел

Якщо $P_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n$ поліном з комплексними коефіцієнтами, то його можна розкласти на лінійні множники в **C** $P_n(z) = c_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$. З урахуванням кратності отримуємо $P_n(z) = c_n \prod_{i=1}^{r} (z - z_i)^{k_i}$, де $\sum_1^r k_i = n$.

Розкладання поліному над полем дійсних чисел

Якщо $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ поліном з коефіцієнтами із **R**, то із кожним z_0 – комплексним коренем, $\overline{z}_0$ – також його корінь та $P_n(z)$ можна розкласти на лінійні та квадратичні множники в **R**:

$$P_n(z) = a_n \prod_{i=1}^{r} (z - x_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{s} (z^2 + p_j z + q_j)^{l_j}, \qquad \text{де} \qquad p_j = -2 \operatorname{Re} z_j,$$

$q_j = |z_j|^2 \in \mathbf{R}$ для не дійсних коренів $z_j \in \mathbf{C}$ та $\sum_1^r k_i + \sum_1^s 2 l_j = n$.

Основна теорема алгебри гарантує наявність коренів у поліному степені вище за нульову. А які існують формули для знаходження цих коренів через коефіцієнти поліному? Для першого та другого степенів ці формули добре відомі зі шкільного курсу математики. Для третього степеня існують так звані формули Кардано. Для розв’язку рівнянь у випадку поліномів четвертого степеня є метод Феррарі. Однак виявляється, що починаючи із 5-го степеня, спроби знайти загальний розв’язок будуть марними, що стверджує наступна теорема.

Th. (Теорема Абеля). У загальному випадку для рівнянь 5-го та вище степеня неможливо подати корені рівнянь через радикали (виразити через скінчену кількість добувань коренів та алгебраїчних операцій із коефіцієнтами полінома).

4.2. Контрольні питання та завдання

1. Які є форми запису комплексного числа?
2. Що таке дійсна та умовна частини комплексного числа?
3. Яке комплексне число називається спряженим до поданого?
4. Як знайти частку двох комплексних чисел?
5. Що таке аргумент і модуль комплексного числа?
6. Записати формули переходу від алгебраїчної до тригонометричної і показової форми запису комплексного числа.
7. Які правила множення і ділення двох комплексних чисел, що задані у тригонометричній формі? Записати формулу Муавра.
8. Як визначається операція знаходження кореня n-го степеня з комплексного числа?
9. Надати геометричну ілюстрацію до комплексного числа, пояснити, що робить множення/ділення на інше комплексне число, піднесення до натурального степеня та добування кореня n-го степеня?
10. Навести формули Ейлера зв'язку між sinz, cosz і e^z. Перевірити, що $\sin iz = i\cdot \mathrm{sh}z$; $\mathrm{tg}iz = i\cdot \mathrm{th}z$; $\mathrm{sh}iz = i\cdot\sin z$; $\mathrm{th}iz = i\cdot \mathrm{tg}z$; $\cos iz = \mathrm{ch}z$; $\mathrm{ch}iz = \cos z$; $\mathrm{ctg}iz = -i\mathrm{cth}z$; $\mathrm{cth}iz = -i\mathrm{ctg}z$.
11. Навести формулу для обчислення логарифма Ln z комплексного числа та формулу піднесення комплексного числа до комплексного степеня $z_1^{z_2}$.
12. Сформулювати основну теорему алгебри.
13. Що таке принцип аргументу (проілюструвати його для функції $f(z)=z$)?
14. Що таке ділення полінома на поліном (навести означення)?
15. Сформулюйте теорему Безу.
16. Записати розкладання полінома на незвідні множники над полем комплексних та дійсних чисел.
17. Довести, що якщо $P_n(z)$ – поліном із дійсними коефіцієнтами, то із кожним z_0 комплексним коренем, $\overline{z}_0$ – також його корінь.
18. Сформулювати теорему Абеля про можливість розв'язку у радикалах рівняння п'ятого та вище степеня.

4.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 1.

$$\frac{1-2i}{3+4i}=\frac{(1-2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{3-10i+8i^2}{3^2-(4i)^2}=\frac{3-10i-8}{9+16}=\frac{-5-10i}{25}=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i..$$

Приклад 2. Знайти модуль та головне значення аргументу комплексного числа $z=-\sqrt{3}+i$, записати z в тригонометричній та показниковій формі.

Модуль z дорівнює $\rho=|z|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{4}=2$, аргумент дорівнює $\varphi=\arg z=\pi-arctg\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right)=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$. Отже, у тригонометричній формі $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, а у показниковій $z=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Приклад 3.

$$\sqrt[6]{1}=\sqrt[6]{1(\cos 0+i\sin 0)}=(\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6})=\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3},$$

k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Усі корені шостого степеня від одиниці лежать на колі одиничного радіусу у вершинах правильного шестикутника і дорівнюють:

$1;\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ \ -1;\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ \ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

Приклад 4.

а) $\mathrm{Ln}2=\ln 2+i\cdot 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z};$

б) $\mathrm{Ln}(-2)=\ln 2+i(\pi+2k\pi),\ k\in\mathbf{Z}.$

Приклад 5.

а) $$(1+i)^{\frac{1}{5}}=e^{\frac{1}{5}\mathrm{Ln}(1+i)}=e^{\frac{1}{5}\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)}=e^{\frac{1}{5}\ln\sqrt{2}}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)}=$$
$$=\sqrt[10]{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)}.$$

б) $$(1+i)^i=e^{i\,\mathrm{Ln}(1+i)}=e^{i\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)}=e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\cdot e^{i\ln\sqrt{2}}.$$

в) $$(1+i)^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln(1+i)}}=e^{\sqrt{2}\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)}=e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}\cdot e^{i\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}.$$

г) $(1+i)^{\sqrt{2}+i\sqrt{3}} = e^{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})} = e^{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} =$

$= e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}-\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} \cdot e^{i\left(\sqrt{3}\ln\sqrt{2}+\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)}.$

д) $i^i = e^{i\mathrm{Ln}i} = e^{i\left(\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}.$

е) $2^2 = e^{2\mathrm{Ln}2} = e^{2\left(\ln 2+i\cdot 2k\pi\right)} = e^{2\ln 2}\cdot e^{i\cdot 4k\pi} = e^{2\ln 2} = 4.$

Зробимо декілька спостережень із розглянутих прикладів. У пункті а) отримано п'ять різних рішень, що лежать на колі радіуса $\sqrt[10]{2}$ у вершинах правильного п'ятикутника. У задачі б) нескінчена кількість розв'язків. Усі вони лежать на промені $\varphi = \ln\sqrt{2}$ та за модулем утворюють нескінчену (в обидва боки: до 0 та ∞) геометричну послідовність із знаменником $e^{2\pi}$. У задачі в) всі розв'язки лежать на колі радіуса $e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}$ та щільно покривають її. У задачі г) розв'язки лежать на спіралі та щільно наближуються до 0 та ∞. Пункт д) є дивний факт: чисто уявне число в чисто уявному степені є нескінченою множиною дійсних додатних чисел. Пункт е) говорить, що все ж таки двічі два дорівнює чотирьом.

Приклад 6. Знайти геометричне місце точок *z*, що задовольняють співвідношенню: а) $\frac{\pi}{6} < \arg\frac{1-i}{z^4} < \frac{3\pi}{2}$; б) $1 < \mathrm{Re}\left(e^{3-2i}z\right) < 5$.

Розглянемо пункт а). Запишемо число $\frac{1-i}{z^4}$ у показниковій формі $\frac{1-i}{z^4} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\rho^4 e^{i4\varphi}} = \sqrt{2}\rho^{-4}e^{i(-\frac{\pi}{4}-4\varphi)}$. Отже, $\arg\frac{1-i}{z^4} = -\frac{\pi}{4} - 4\varphi$ та умова задачі перетворюється на $-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) > \varphi > -\frac{1}{4}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, тобто $-\frac{5}{48}\pi > \varphi > -\frac{7}{16}\pi$. Схематично відповідь можна зобразити рисунком «а» нижче.

Розглянемо пункт б). Запишемо у алгебраїчній формі $e^{3-2i}z = \left(e^3\cos 2 - ie^3\sin 2\right)\left(x+iy\right) = xe^3\cos 2 + ye^3\sin 2 + i(ye^3\cos 2 - xe^3\sin 2)$.

Отже, $\mathrm{Re}\left(e^{3-2i}z\right) = \; = xe^3\cos 2 + ye^3\sin 2$ та умова задачі перетворюється на $y < \frac{5}{e^3\sin 2} - x\,\mathrm{ctg}\,2$ одночасно із $y > \frac{1}{e^3\sin 2} - x\,\mathrm{ctg}\,2$. Або приблизно $\frac{3}{2} + x\,\mathrm{tg}(205^\circ) < y < 7 + x\,\mathrm{tg}(205^\circ)$, тобто це область, що знаходиться між двома паралельними прямими (див. схематичний рисунок «б» нижче).

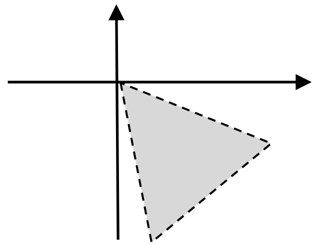


Рис. «а»

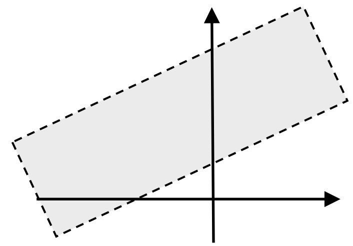


Рис. «б»

Приклад 7. Розкласти на незвідні множники над полем комплексних та над полем дійсних чисел поліном $x^6 - 1$.

Знайдемо всі корені полінома, тобто розв'яжемо рівняння $z^6 - 1 = 0$. Корені цього рівняння знайдені у прикладі 3 цього розділу. Отримаємо

$$z^6 - 1 = (z-1)(z+1)(z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i),$$

тобто розкладення над полем комплексних чисел. Не дійсні корені z_j у полінома з дійсними коефіцієнтами групуються зі своїми спряженими z_j^*, що з розкриттям дужок $(z - z_j)(z - z_j^*)$ дає $z^2 - 2\mathrm{Re}\,z_j + |z_j|^2$. Отже, $x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, що є розкладенням на незвідні множники над полем дійсних чисел. Зауважимо, що для цього прикладу відповідь можна було отримати простіше, за формулами різниці кубів та квадратів.

4.4. Задачі для самостійного розв'язку

1. Виконати зазначені дії над комплексними числами в алгебраїчній формі: $z_1 = 2+3i,\ z_2 = 2-3i,\ z_3 = -2+6i.$

$z_1+z_2;\quad z_1-z_2;\quad 3z_1-2z_3;\quad z_1\cdot z_2;\quad \dfrac{z_1}{z_2};\quad \dfrac{z_1}{z_3};\quad z_1^2;\quad z_2^3.$

2. Виконати зазначені дії: $\dfrac{2}{1-3i};\quad \left(1+i\sqrt{3}\right)^3;\quad \left(\dfrac{\sqrt{3}i+1}{i-1}\right)^6.$

3. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} z_1+2z_2=1+i \\ 3z_1+iz_2=2-i \end{cases}.$

4. Визначити, за яких дійсних значень x і y будуть спряжені такі комплексні числа: $z_1 = y^2-7y-9xi$ та $z_2 = -12+20i+x^2i.$

5. Знайти розв'язок системи рівнянь: $|z+1-i| = |3+2i-z| = |z+i|.$

6. Записати в тригонометричній формі комплексні числа $1+i;\quad 2-2i;$ $-1-i;\quad 1-\sqrt{3}i;\quad \sqrt{3}+i;\quad i;\quad 3i;\quad 5;\ -8;\quad 3-4i;\quad 3+4i;\quad 1-\sin\alpha+i\cos\alpha,$ $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right).$

7. Знайти модуль та головне значення аргументу чисел $2+5i;\ -2+5i;$ $-2-5i;\ 2-5i;\ -\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5};\ \cos\alpha-i\sin\alpha,\ \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right).$

8. Використовуючи тригонометричну форму, виконати над комплексними числами $z_1 = 1+i,\ z_2 = -1+\sqrt{3}\,i$ такі дії

$z_1\cdot z_2;\quad \dfrac{z_1}{z_2};\quad \dfrac{z_2}{z_1};\quad z_1^{40};\quad z_2^{66}.$

9. Розв'язати рівняння $z^* = z^{n-1}\quad (n\neq 2,\ n\in\mathbf{N}).$

10. Знайти всі значення коренів і побудувати їх.

$\sqrt[3]{1};\ \sqrt[4]{-8};\ \sqrt[3]{i};\ \sqrt{1-i};\ \sqrt[5]{1+i};\ \sqrt{3+4i};\ \sqrt[3]{-2+2i};\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}.$

11. Знайти всі значення: $\sqrt[3]{-8}+\sqrt{2i};\quad \sqrt{i+\sqrt{-1}};\quad \left(\sqrt[4]{(1+i)^2}\right)^2.$

12. Розв'язати рівняння: $z^5 = 1+\sqrt{3}i.$

13. Записати комплексні числа в показовій формі:

$\pm1;\ \pm i;\ \pm1\pm i;\ 1-\sqrt{3}\,i;\ -2+2i;\ 4i;\ 5;\ -8;\ \sin\alpha-i\cos\alpha,\ \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right).$

14. Обчислити: $e^{\pm\frac{\pi i}{2}},\ e^{k\pi i}$ (k = 0, ±1, ±2, …).

15. Знайти модулі та головні значення аргументів чисел:

$e^{2+i};\quad e^{2-3i};\quad e^{3+4i};\quad e^{-3-4i};\quad -ae^{i\varphi}$ ($a > 0,\ |\varphi| \le \pi$);

$e^{-i\varphi}$ ($|\varphi| \le \pi$); $\quad e^{i\alpha}-e^{i\beta}$ ($0 \le \beta < \alpha \le 2\pi$).

16. Знайти дійсні та уявні частини комплексних чисел:

а) $e^{2+3i};\ \cos i;\ \sin i;\ \mathrm{tg}\, i;$ б) $\cos(2+i);\ \sin(3-2i);\ \mathrm{tg}(3+2i).$

17. Виразити $\sin^5\varphi$ через тригонометричні функції кратних кутів, а $\sin 5\varphi$ через степені $\sin\varphi$ та $\cos\varphi$.

18. Знайти суми:

а) $1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx;$

б) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx;$

в) $\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x;$

г) $\sin x-\sin 2x+\ldots+(-1)^{n-1}\sin nx;$

д) $\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\ldots+n\sin nx.$

19. Довести, що а) $\sin^2 z+\cos^2 z=1;$ б) $\sin z = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right).$

20. Обчислити: $\mathrm{Ln}\,4;\quad \mathrm{Ln}(-1);\quad \ln(-1);\quad \mathrm{Ln}\,i;$

$\ln i;\quad \mathrm{Ln}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}};\quad \mathrm{Ln}(2-3i);\quad \mathrm{Ln}(-2+3i).$

21. Знайти всі значення: а) $1^{\pi};$ б) $i^i.$

22. Обчислити (знайти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$) та відобразити на комплексній площині: $1^{\sqrt{2}}$; $(-2)^{\sqrt{2}}$; 2^i; 1^{-i}; i^i;

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}; \quad (3-4i)^{1+i}; \quad (-3+4i)^{1+i}.$$

23. Обчислити (знайти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$) та відобразити на комплексній площині: $2^{\sqrt{2}}$; $(-1)^{\sqrt{2}}$; 3^i; i^i; π^{1-i};

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}; \quad \left(\sqrt{3}+i\right)^{i-1}; \quad 2^{2-i}; \quad (-e)^{\sqrt{3}+i}.$$

24. Знайти комплексні числа, що лежать на бісектрисі кута, утвореного векторами $z_1 = 6+8i$, $z_2 = 4-3i$.

25. Довести нерівності з геометричних міркувань. Довести ці ж нерівності алгебраїчним шляхом. З'ясувати, коли наявний знак рівності:

а) $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$; б) $|z_1-z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|$;

в) $\left|\dfrac{z}{|z|}-1\right| \le |\arg z|$; г) $|z-1| \le \big||z|-1\big| + |z|\cdot|\arg z|$.

26. Знайти геометричні місця точок z (ГМТ):

а) $\operatorname{Re}(z+2) > 1$; б) $\operatorname{Re}(z+2) \ge 1$; в) $\operatorname{Im}(z-2+i) > 1$;

г) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1$; д) $|z| \le 3$; е) $2 \le |z-2+i| < 4$;

є) $\operatorname{Re}\{z(1+i)\} = 2$; ж) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = 1$; з) $0 < \arg z \le \pi/4$;

и) $0 < \arg(z-i) \le \pi/4$; і) $0 < \arg\{z(1-i)\} \le \pi/4$;

27. Визначити сімейства ліній на комплексній площині, що задаються рівняннями:

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z} = C; \quad \operatorname{Im}\frac{1}{z} = C; \quad \operatorname{Re} z^2 = C; \quad \operatorname{Im} z^2 = C, \quad (C \in \mathbf{R}).$$

28. З'ясувати геометричний зміст зазначених співвідношень:

а) $|z-3| = |z-1|$; б) $|z-z_1| = |z-z_2|$;

в) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$; г) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$;

д) $\operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z-2} = 0$; е) $\operatorname{Im}\dfrac{z-z_1}{z-z_2} = 0$;

є) $\operatorname{Re}\dfrac{z-i}{z-3} = 0$; ж) $\operatorname{Re}\dfrac{z-z_1}{z-z_2} = 0$;

з) $|z| < \arg z$, $0 \le \arg z < 2\pi$; и) $|z| < \arg z$, $0 < \arg z \le 2\pi$;

і) $|z+i| + |z-i| = 4$.

29. Знайти геометричне місце точок z, що задовольняють співвідношенню: а) $\dfrac{\pi}{2} < \arg z^2 \le \pi$; б) $\operatorname{Re}\left(e^{-3i} z\right) < 1$;

в) $\dfrac{\pi}{4} < \arg\dfrac{1-i}{z^3} < \dfrac{\pi}{2}$; г) $0 < \operatorname{Re}\left(2e^{i\frac{\pi}{4}} z\right)$; д) $0 \le \arg\dfrac{z+i}{z-i} \le \dfrac{\pi}{2}$.

30. Знайти множину точок комплексної площини, що задані умовою $\left|e^{z^{20}}\right| \le 1$.

31. Знайти множину точок комплексної площини, що задані умовою

$$\left|\operatorname{Re}\left\{z\left(\cos 2^\circ + i\sin 2^\circ\right)\right\}\right| + \left|\operatorname{Im}\left\{z\left(\cos 2^\circ + i\sin 2^\circ\right)\right\}\right| \le 1.$$

32. Знайти множину точок комплексної площини, що задані умовою

$$|z-2|^2 + |z+2|^2 = 26.$$

33. Знайти множину точок комплексної площини, що задані умовою $|z|^2 + 3z + 3\bar{z} = 0$.

34. Яку криву в комплексній площині описує точка: $z = at + be^{i\omega t}$, якщо t, a, b, ω – дійсні.

35. Яку криву в комплексній площині описує точка: $z = (a+it)e^{it}$, якщо t, a – дійсні.

36. Знайти a і b, за яких поліном x^4+3x^2+ax+b ділиться на $x^2+2ax+2$.

37. Розв'язати рівняння: $z^6-z^3-2=0$.

38. Рівняння $3x^4-5x^3+3x^2+4x-2=0$ має корінь $1+i$. Знайти інші корені.

39. Розв'язати рівняння: $z^{10}-z^5-992=0$.

40. Розв'язати рівняння: $(z-i)z(z+i)(z+2i)=24$.

41. Розв'язати рівняння: $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^i=i$.

42. Розв'язати рівняння: $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$.

43. Розв'язати рівняння: $z^4-30z^2+289=0$.

44. Розв'язати рівняння: $(3-i)z^2-(8-i)z+(4+7i)=0$.

45. Знайти спільні корені рівнянь

$$z^6+2z^5+3z^4+2z^3+3z^2+2z+2=0,\quad z^4+3z^3+6z^2+6z+4=0.$$

46. Знайти остачу від ділення полінома $z^{1989}-1$ на z^2+1.

47. Знайти остачу від ділення $z^{1983}-1$ на $(z^2+1)(z^2+z+1)$.

48. Розкласти на незвідні множники над полем дійсних чисел поліном $z^{2n+1}-1$.

49. Розкласти на незвідні множники над полем дійсних чисел поліном $x^{2n}+1$.

50. Розкласти на незвідні множники над полем дійсних чисел поліном $x^{2n}-1$.

РОЗДІЛ 5.
ПЕРВІСНА. НЕОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

5.1. Основні поняття та властивості

Def. Рівняння, яке (крім аргументу та невідомої функції) містить похідні скінченого порядку шуканої функції, називається *звичайним диференційним рівнянням* (ЗДР). Причому найвищій порядок похідної, що входить в рівняння називається *порядком рівняння*.

Def. *Частковим рішенням* ЗДР на проміжку X називається будь-яка функція, яка у разі підстановки в рівняння перетворює його на тотожність на цьому проміжку. Множина всіх часткових рішень ЗДР називається *загальним рішенням* ЗДР.

Def. *Первісною* $F(x)$ *функції* $f(x)$ на проміжку X називається частковий розв'язок диференційного рівняння першого порядку вигляду $y'=f(x)$, тобто $\forall x\in X\ \ F'(x)=f(x)$. Загальне рішення цього рівняння називається *неозначеним інтегралом* функції $f(x)$ на проміжку X та позначається $\int f(x)dx$.

Первісна функції на проміжку є первісною на будь-якому підпроміжку.

Th. Будь-які первісні однієї функції відрізняються на константу.

C. $\int f(x)dx=\{F(x)+C\,|\,C=const\}$ або спрощено $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Властивості неозначеного інтегралу

1. Зв'язок із диференціюванням:

а) $\left(\int f(x)dx\right)'_x=f(x)$; б) $d\int f(x)dx=f(x)dx$;

в) $\int f'(x)dx=\int df(x)=f(x)+C$ або $\int dF(x)=F(x)+C$.

2. Лінійність неозначеного інтегралу:

$$\int \alpha f(x)+\beta g(x)dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx,\ \left(\alpha^2+\beta^2\neq 0\right).$$

3. Заміна змінної у неозначеному інтегралі:

$$\underbrace{\int f(x)dx=}_{\text{підстановка}\ \rightarrow}\left|x=\varphi(t);\ dx=\varphi'(t)dt\right|\underbrace{=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt}_{\leftarrow\ \text{введення нової змінної}}.$$

4. Формула інтегрування частинами:

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Таблиця неозначених інтегралів:

1. $\int 0dx = const,\qquad \int 1dx = x + C,\qquad \int adx = ax + C;$

2. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\quad (\alpha \neq -1);\qquad \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3. $\int e^{x}dx = e^{x} + C,\qquad \int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C;$

4. $\int \sin xdx = -\cos x + C,\qquad \int \cos xdx = \sin x + C;$

5. $\int \operatorname{sh} xdx = \operatorname{ch} x + C,\qquad \int \operatorname{ch} xdx = \operatorname{sh} x + C;$

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C\ \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right),$

$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C\ (x \neq \pi n, n \in \mathbf{Z});$

7. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,\qquad \int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases},\qquad \int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{|a|} + C;$

9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases},\qquad \int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C;$

10. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arth} x + C \\ \operatorname{arcth} x + C \end{array}\right.,$

$\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C;$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arsh} x + C \\ \operatorname{sgn} x \operatorname{arch} x + C \end{array}\right.,$

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

12. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{|a|} + C;$

13. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Інтегрування простіших (елементарних) дробів

Існує чотири типи елементарних дробів. Їх інтеграли такі:

I. $\int \dfrac{Adx}{x-a};$ **II.** $\int \dfrac{Adx}{(x-a)^k},\ k \in \mathbf{N}, k \neq 1;$

III. $\int \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}dx;$ **IV.** $\int \dfrac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^k},\ \begin{array}{l} k \in \mathbf{N}, k \neq 1 \\ p^2 - 4q < 0 \end{array}.$

Інтеграли перших двох типів – це табличні інтеграли:

I. $\int \dfrac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$ **II.** $\int \dfrac{Adx}{(x-a)^k} = \dfrac{A}{1-k}\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$

Для інтегрування дробів третього та четвертого типів використовують таку послідовність дій: 1) виділити повний квадрат; 2) зробити зміну змінної; 3) розбити дріб на два (інтеграли а), б) і в), г) нижче) із однорідним лінійним чисельником та з постійним чисельником відповідно:

III, IV. $\int \dfrac{Mx+N}{\left[(x+p/2)^2 + \left(q-p^2/4\right)^2\right]^k}dx = \left|\begin{array}{c} x + \dfrac{p}{2} = t,\ dx = dt, \\ \underbrace{q - p^2/4}_{+} = s^2 \end{array}\right| =$

$$= \int \frac{Mt + N - Mp/2}{\left(t^2+s^2\right)^k}dt = M\int \frac{tdt}{\left(t^2+s^2\right)^k} + \left(N - \frac{1}{2}Mp\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+s^2\right)^k}.$$

Інтегрування першого інтегралу:

а) $\int \dfrac{tdt}{t^2+s^2} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dt^2}{t^2+s^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left(t^2+s^2\right) + C;$

б) $\int \dfrac{tdt}{\left(t^2+s^2\right)^k} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dt^2}{\left(t^2+s^2\right)^k} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(-k+1)}\dfrac{1}{\left(t^2+s^2\right)^{k-1}} + C.$

Складність обчислення другого інтегралу залежить від показника степеня у знаменнику:

в) $I_1 = \int \dfrac{dt}{t^2+s^2} = \dfrac{1}{s}\operatorname{arctg}\dfrac{t}{s} + C;$

г) рекурентне співвідношення (формула зниження для показника)

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ks^2}\frac{t}{\left(t^2+s^2\right)^k} + \frac{2k-1}{2ks^2}I_k,\quad (k = 1, 2, 3, 4\ldots)$$

Алгоритм інтегрування дрібно-раціональних функцій $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$:

а) якщо $m > n$: тобто дріб під знаком інтегралу *неправильний*. Робимо ділення $P_m(x) = Q_n(x)S_{m-n}(x) + R_{n-1}(x)$ та отримуємо

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \int S_{m-n}(x)dx + \int \frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}dx,$$

де інтеграл $\int S_{m-n}(x)dx$ легко береться (інтеграл від поліному),

а інтеграл $\int \frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}dx$ – є інтегралом від *правильного* дробу;

б) розкладаємо поліном $Q_n(x)$ на множники над полем дійсних чисел, тобто на лінійні та квадратичні з від'ємним дискримінантом

(4.1) $$Q_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{s}(x-a_i)^{k_i} \prod_{t=1}^{j}(x^2 + p_t x + q_t)^{l_t},$$

де $a_i, x_i, p_t, q_t \in \mathbf{R}$, $\sum_1^s k_i + \sum_1^j 2l_t = n$;

в) **Th.** (Метод розкладення правильного дробу на простіші).

Правильний дріб $\frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}$, у якого знаменник $Q_n(x)$ подається у вигляді (4.1) можна розкласти на суму елементарних дробів I, II, III, IV типу. Тобто існують константи $A_{it}, M_{it}, N_{it} \in \mathbf{R}$ такі, що

$$\frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{21}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1 1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{1k_s}}{x-a_s} + \frac{A_{2k_s}}{(x-a_s)^2} + \ldots + \frac{A_{k_s k_s}}{(x-a_s)^{k_s}} +$$
$$+ \frac{M_{1l_1}x + N_{1l_1}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{M_{2l_1}x + N_{2l_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)} + \ldots + \frac{M_{l_1 l_1}x + N_{l_1 l_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{M_{1l_j}x + N_{1l_j}}{x^2 + p_j x + q_j} +$$
$$+ \frac{M_{2l_j}x + N_{2l_j}}{(x^2 + p_j x + q_j)^2} + \ldots + \frac{M_{l_j l_j}x + N_{l_j l_j}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}}.$$

Отже, неозначений інтеграл від раціональної функції існує на будь-якому проміжку, де знаменник дробу не обертається на нуль та може бути виражений лінійною комбінацією раціональних функцій, логарифмів й арктангенсів.

Для усунення складнощів інтегрування елементарних дробів типу IV застосовують наступний метод.

Th. (Метод Остроградського виділення раціональної частини інтегралу). Якщо знаменник $Q_n(x)$ правильного дробу $\frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}$ подається у вигляді (4.1), то

$$\int \frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}dx = \frac{L(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}(x-a_2)^{k_2-1}\ldots(x-a_s)^{k_s-1}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}\ldots(x^2+p_jx+q_j)^{l_j-1}} +$$
$$+ \int \frac{S(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_s)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_jx+q_j)}dx.$$

Тут $L(x)$ и $S(x)$ поліноми на 1 степінь нижче за поліноми у відповідних знаменниках. Інтеграл правої частини можна взяти методом розкладення дробу на суму простіших, причому II і IV типу серед них не буде.

Якщо розкладення $Q_n(x)$ на множники невідоме, то

$$\int \frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)}dx = \frac{L(x)}{НСК(Q_n, Q_n')} + \int \frac{S(x)}{Q_n(x)/НСК(Q_n, Q_n')}dx,$$

де $НСК(Q_n, Q_n')$ – найбільше спільне кратне полінома $Q_n(x)$ та його похідної.

Інтегрування деяких ірраціональностей

А. Дробово-лінійні ірраціональності

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right), \quad r_1, r_2, \ldots r_k \in \mathbf{Q}.$$

Щоб позбутися цієї ірраціональності, представимо $r_i = \frac{m_i}{N}$ (N-спільний знаменник $r_1, r_2, \ldots r_k$) та зробимо таку заміну змінної у інтегралі

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{ax+b}{cx+d} = t^N ; (ax+b) = t^N (cx+d) \\ x = \varphi(t) = \dfrac{dt^N - b}{a - ct^N} ; dx = \varphi'(t)\, dt \end{array} \right| = \int R\left(\varphi(t), t^{m_1}, \ldots, t^{m_k}\right) \varphi'(t)\, dt \cdot$$

Б. Диференційний біном (біноміальний диференціал)

$$x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$$

Th. (Чебишева). Якщо $m, n, p \in \mathbf{Q}$, то інтеграл від диференційного біному $\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$ може бути виражений через елементарні функції тоді й тільки тоді, коли виконується один із наступних трьох випадків, крім того відповідна *підстановка Чебишева* зводить інтеграл до інтегралу від раціональної функції:

1) $p \in \mathbf{Z} \;\Rightarrow$ підстановка $x = t^N$ (N – спільний знаменник m, n);

2) $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbf{Z} \;\Rightarrow$ підстановка $a + bx^n = t^N$ (N – знаменник p);

3) $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z} \;\Rightarrow$ підстановка $ax^{-n} + b = t^N$ (N – знаменник p).

В. Квадратичні ірраціональності

Th. (Ейлера). У інтегралах вигляду $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ такі *підстановки Ейлера* усувають ірраціональність

1) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}\, x + t \;\; (a > 0)$;

2) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c} \;\; (c > 0)$;

3) $\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_1) \;\; (a > 0)$ $(D > 0)$.

Хоча підстановки Ейлера мають універсальний характер, іноді вони призводять до складних раціональних виразів, та зручнішими виявляються інші методи.

Г. Інші способи інтегрування квадратичних ірраціональностей

1. $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$.

Для знаходження коефіцієнтів $Q_{n-1}(x)$ та λ треба диференціювати обидві частини рівності, звести до спільного знаменника та прирівняти поліноми у чисельниках дробів ліворуч та праворуч.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-p)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}} = \left| \begin{array}{l} \text{Заміна} \\ t = \dfrac{1}{x-p} \end{array} \right| = \int \frac{At^{k-1}}{\sqrt{\tilde{a}t^2 + \tilde{b}t + \tilde{c}}} dt$, отже, зводиться до 1. Якщо у чисельнику вихідного інтеграла стоїть поліном степеню, що більший за нуль, то його можна розкласти за степенями $(x - p)$ та почленним діленням звести до вихідного інтегралу.

3. У інтегралах вигляду $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{k + \frac{1}{2}}}$ використовують таку *підстановку Абеля*: $\left(\sqrt{x^2 + px + q}\right)' = t \;\Rightarrow\; \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}} = \dfrac{dt}{1 - t^2}$;

$x^2 + px + q = \dfrac{q - \frac{p^2}{4}}{1 - t^2}$. Зауважимо, що цей метод також працює для інтегралів вигляду $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + px + b)^k \sqrt{x^2 + px + q}}$.

4. $\displaystyle\int \frac{Mx + N}{\left(x^2 + q^2\right)^k \sqrt{ax^2 + b}} dx = \int \frac{Mx\,dx}{\left(x^2 + q^2\right)^k \sqrt{ax^2 + b}} + \int \frac{N\,dx}{\left(x^2 + q^2\right)^k \sqrt{ax^2 + b}}$.

У першому інтегралі робимо заміну: $ax^2 + b = t^2$, у другому $\left(\sqrt{ax^2 + b}\right)' = t$.

5. Інтеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2 + px + q\right)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ або зводиться до пункту 3 або (після заміни) до пункту 4. У загальному випадку (а саме, коли $b \neq ap$) роблять дробово-лінійну підстановку $x = \dfrac{\mu t + \nu}{1 + t}$ або $t = \dfrac{x - \nu}{\mu - x}$, ($\mu \neq \nu$) та знаходять μ та ν такі, щоб після заміни у квадратних трьохчленів не залишилось перших степенів t (випадок 4).

Зауважимо, що не всі неозначені інтеграли можна виразити через елементарні функції. Наприклад, це стосується інтегралів від диференціального біному, що не охоплені підстановками Чебишева. Також важливим класом інтегралів із ірраціональностями є наступні.

Д. Еліптичні інтеграли [1]

Взагалі інтеграли $\int R\left(x,\sqrt{P_3(x)}\right)dx$ і $\int R\left(x,\sqrt{P_4(x)}\right)dx$, де $P_3(x)$ і $P_4(x)$ – поліноми без кратних коренів 3-го та 4-го степеня відповідно, не виражаються через елементарні функції і називаються *еліптичними*. Ті з них, що можливо виразити через елементарні називаються *псевдоеліптичними*. Еліптичні інтеграли приводяться до *канонічного вигляду* $\int \frac{R(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$, який далі зводиться до *еліптичних інтегралів I, II та III роду*: I. $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$; II. $\int \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}dz$;

III. $\int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$, де $k\in(0,1)$, $z\in[0,1]$, $h\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

Останні, у свою чергу, зміною $z=\sin\varphi$, $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$ перетворюються на *еліптичні інтеграли у формі Лежандра*:

I. $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi}} = F(\varphi,k)+C$, II. $\int \sqrt{1-k^2\sin\varphi}\,d\varphi = E(\varphi,k)+C$,

III. $\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin\varphi}} = \Pi(\varphi,k,h)+C$, де первісні $F(\varphi,k)$, $E(\varphi,k)$ та $\Pi(\varphi,k,h)$ визначаються однозначно умовами (коли $\varphi=0$) $F(0,k)=E(0,k)=\Pi(0,k,h)=0$. А їх значення, якщо $\varphi=\pi/2$ називаються *повними еліптичними інтегралами* відповідного роду.

[1] З'являються під час знаходження довжини еліпса (а саме, інтеграла $E(\varphi,k)$).

Інтегрування раціональних дробів від тригонометричних функцій

Наступні підстановки зводять інтеграли вигляду $\int R(\sin x,\,\cos x)dx$ до інтегралів від раціональної функції.

1) $R(-\sin x,\,\cos x) = -R(\sin x,\,\cos x) \Rightarrow$ підстановка $\cos x = t$;
2) $R(\sin x,\,-\cos x) = -R(\sin x,\,\cos x) \Rightarrow$ підстановка $\sin x = t$;
3) $R(-\sin x,\,-\cos x) = R(\sin x,\,\cos x) \Rightarrow$ підстановка $\mathrm{tg}\,x = t$;

4) **універсальна тригонометрична підстановка:**

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t \Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ще деякі корисні формули для інтегрування $\int R(\sin x,\,\cos x)dx$:

1. $\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx=\int \frac{\alpha\cdot знам+\beta\cdot(знам)'}{a\sin x+b\cos x}dx$;

2. $\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}dx=\int \frac{\alpha\cdot знам+\beta\cdot(знам)'+\gamma}{a\sin x+b\cos x+c}dx$;

3. $\int \frac{a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cdot\cos x+c_1\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}dx=$

$$=\int \frac{\alpha\cos x\cdot знам+\beta\sin x\cdot знам+\gamma}{a\sin x+b\cos x}dx;$$

4. $\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin^2 x+2b\sin x\cdot\cos x+c\cos^2 x}dx=\alpha\int\frac{du_1}{k_1u_1^2+\lambda_1}+\beta\int\frac{du_2}{k_2u_2^2+\lambda_2}$,

де λ_1, λ_2 – корені рівняння $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0$, $k_i=\frac{1}{a-\lambda_i}$,

$u_i=(a-\lambda_i)\sin x+b\cos x$;

5. $\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}=\frac{\alpha\sin x+\beta\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}+\gamma\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}}$;

6. $\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{\alpha\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+\beta\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}+\gamma\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}$,

$(|a|\neq|b|)$.

Інтегрування раціональних дробів від експоненти

Для інтегралів виду $\int R(\mathrm{sh}x,\ \mathrm{ch}x)dx$ працюють такі самі підстановки, як і для тригонометричної залежності.

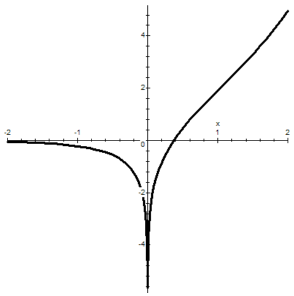
Універсальна гіперболічна підстановка

$$\mathrm{th}\frac{x}{2}=t \Rightarrow \ \mathrm{sh}x=\frac{2t}{1-t^2};\ \ \mathrm{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2};\ \ dx=\frac{2dt}{1-t^2}.$$

Взагалі для інтегралів виду $\int R(e^x)dx,$ та зокрема для $\int R(\mathrm{sh}x,\ \mathrm{ch}x)dx$, оскільки $R(\mathrm{sh}x,\ \mathrm{ch}x)=R(e^x)$, зручнішою є підстановка $e^x=t \Rightarrow \ dx=\frac{dt}{t}$.

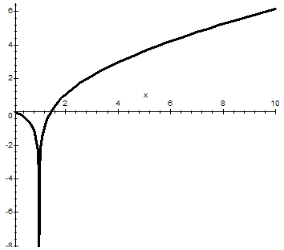
Інтеграли, які не можна виразити через елементарні функції

1. Інтегральна експонента: $\int\frac{e^x}{x}dx=Ei(x)+C$, $x\neq 0$, де *інтегральна експонента* – це первісна $Ei(x)$ із значенням $Ei(-\infty)=0$. Графік $Ei(x)$ наведено праворуч. До того ж $Ei(x)=\gamma+\ln|x|+o(x)$, якщо $x\to 0$, де $\gamma=0{,}5772156649...$ – *стала Ейлера*[1].



Рекурентна формула $I_n=\frac{e^x}{x^{n-1}}-I_{n-1}$ дозволяє отримувати інтеграли вигляду $I_n=\int\frac{e^x}{x^n}dx$.

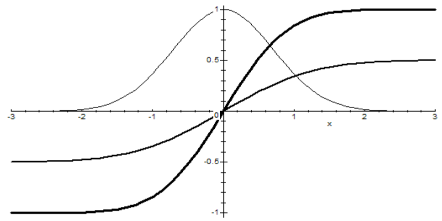
2. Інтегральний логарифм: $\int\frac{dx}{\ln x}=Li(x)+C,\ \ x>0,\ x\neq 1$, де *інтегральний логарифм* – це первісна $Li(x)$ із граничним значенням $Li(0)=0$. Графік $Li(x)$ наведено праворуч. Зазначимо зв’язок $Li(x)=Ei(\ln x)$ та $Ei(x)=Li(e^x)$, а також формулу $\int\frac{x^n dx}{\ln x}=Li(x^{n+1})+C$.



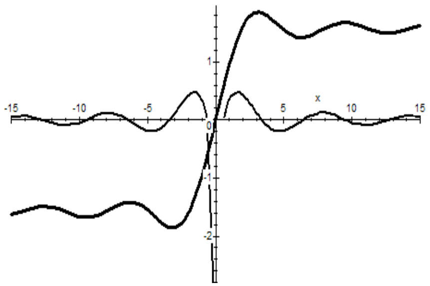
[1] $\gamma=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+1/2+1/3+...+1/n\ -\ \ln n)$

3. Інтеграл похибок – функція помилок: $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-t^2}dt=erf(x)+C,$ де *функція помилок*[2] – це первісна $erf(x)$, що фіксується значенням $erf(0)=0$. Зазначимо, що вона непарна: $erf(-x)=-erf(x)$; та $erf(+\infty)=1$. Функція, що пов’язана із функцією помилок, $\Phi_0(x)=\frac{1}{2}erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ називається *інтегралом імовірності* або інтегралом *Ейлера – Пуассона*.

На рисунку праворуч зображені: функція $y=e^{-x^2}$ – крива Гауса (найбільш тонкою лінією «дзвіночок»); функція $y=erf(x)$ – найбільш товстою лінією, її амплітуда вдвічі більша за амплітуду інтеграла імовірності (зображено середньою за товщиною лінією).

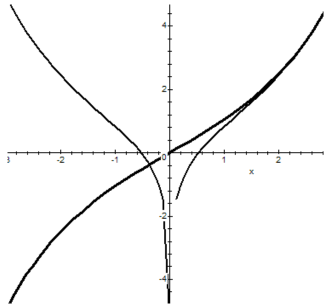


4. Інтегральні синус та косинус та гіперболічні інтегральні функції: $\int\frac{\sin x}{x}dx=Si(x)+C$ та $\int\frac{\cos x}{x}dx=Ci(x)+C,\ x\neq 0,$ де *інтегральний синус* – це первісна $Si(x)$ із значенням $Si(0)=0,$ а *інтегральний косинус* – це первісна $Ci(x)$ із значенням $Ci(\infty)=0$. Зазначимо, що $Si(x)$ непарна: $Si(-x)=-Si(x)$; а $Ci(x)$ парна: $Ci(-x)=Ci(x)$, та у разі $x\to 0$ має асимптотику $Ci(x)=\gamma+\ln|x|+o(x),$ як і $Ei(x)$. На рисунку праворуч графік функції $Si(x)$ проходить через початок координат, а $Ci(x)$ симетричний відносно осі ординат.

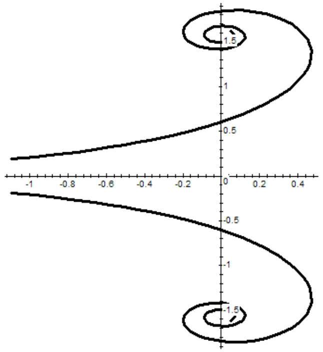


[2] Від англ. *error function* – функція помилок.

Аналогічно $\int \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx = Shi(x) + C$ та $\int \frac{\operatorname{ch} x}{x} dx = Chi(x) + C,\ x \neq 0,$ де *інтегральний синус гіперболічний* – це первісна $Shi(x)$ із значенням $Shi(0) = 0,$ а *інтегральний косинус гіперболічний* – це первісна $Chi(x)$ із асимптотикою $Chi(x) = \gamma + \ln|x| + o(x),$ якщо $x \to 0.$ На рисунку праворуч графік функції $Shi(x)$ проходить через початок координат, а $Chi(x)$ симетричний відносно осі ординат. Як і звичайні інтегральний синус та косинус, функція $Shi(-x) = -Shi(x)$ – непарна, а функція $Chi(-x) = Chi(x)$ – парна.



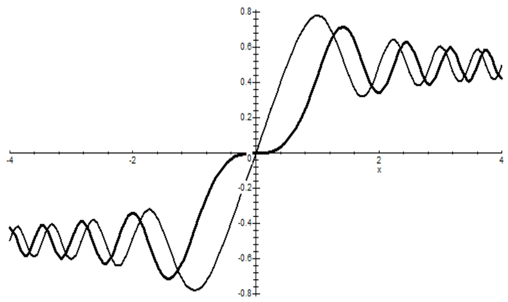
На рисунку праворуч наведено графік кривої $\{x = Ci(t), y = Si(t)\},$ заданої параметрично («вуса» симетричні відносно осі абсцис).



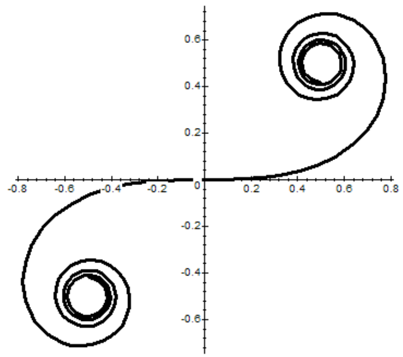
5. Інтеграли Френеля:

$\int \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx = S(x) + C;$ $\int \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx = C(x) + C,$ де первісні $S(x)$ та $C(x)$ фіксуються значеннями $S(0) = 0$ та $C(0) = 0.$ Ці функції непарні: $S(-x) = -S(x);\ C(-x) = -C(x).$

На рисунку праворуч наведено графік функцій $y = C(x)$ и $y = S(x)$ (функція $S(x)$ має в початку координат нульову похідну).



На рисунку праворуч побудовано графік кривої $\{x = C(t), y = S(t)\},$ що задана параметрично («вуса» симетричні відносно початку координат). Ця крива має назви: «спіраль Корню[1]» та «клотоїда[2]». У цієї кривій кривизна змінюється лінійно як функція від довжини дуги. Вона використовується як перехідна дуга під час будівництва доріг. Коли ділянка дороги має форму клотоїди, кермо повертається рівномірно. Така форма дороги дозволяє здійснювати поворот без суттєвого зниження швидкості.



[1] М. А. Корню – французький фізик, використовував цю криву для полегшення розрахунку дифракції в прикладних задачах оптики.

[2] Клотó (греч. Κλωθώ, «Пряха») – у давньогрецькій міфології одна з трьох богинь долі і призначення людей та богів, що пряла нитку життя.

5.2. Контрольні питання та завдання

1. Що таке первісна та невласний інтеграл?

2. Пояснити, чому у однієї функції $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ існує дві різні первісні:

$F(x)=\operatorname{arctg} x$ та $\forall x\neq 0 \quad F(x)=-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

3. Як пов'язані операції диференціювання та інтегрування?
4. Виписати таблицю первісних, довести її.
5. Записати формулу заміни змінної у невласному інтегралі та формулу інтегрування частинами. Довести їх.
6. Які дроби із дійсними коефіцієнтами є елементарними, та як обчислити від них інтеграли?
7. Що таке правильний та неправильний дроби?
8. Який алгоритм інтегрування довільної раціональної функції?
9. Як уникнути інтегрування елементарного дробу типу IV?
10. Записати метод Остроградського інтегрування раціональної функції.
11. Яка заміна зводить інтеграл із дробно-лінійною ірраціональністю до інтегралу від раціональної функції?
12. Які існують заміни, що зводять інтеграл із ірраціональністю типу диференціальний біном до інтегралу від раціональної функції?
13. Які існують заміни, що зводять інтеграл із квадратичною ірраціональністю до інтегралу від раціональної функції?
14. Які ще є методи, щодо інтегрування квадратичної ірраціональності?
15. Чи будь-який інтеграл із ірраціональністю зводиться до інтеграла від раціональної функції?
16. Які заміни та у яких випадках застосовують, щоб позбавитись раціональної залежності від тригонометричних функцій у неозначених інтегралах?
17. Які заміни та у яких випадках застосовують, щоб позбавитись експоненти або гіперболічних функцій у неозначених інтегралах?
18. Що таке еліптичні інтеграли? Їх загальний канонічний вигляд. Які є їх типи та запис у формі Лежандра?
19. Що таке інтегральна експонента та інтегральний логарифм?
20. Що таке функція похибок та інтеграл імовірності?
21. Що таке інтегральні синус та косинус та їх гіперболічні аналоги?
22. Як виглядають інтеграли Френеля, та що про них відомо?

5.3. Приклади розв'язування задач

***Приклади на заміну змінної*:**

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{d\ln x}{\ln x}=\left|t=\ln x\right|=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\ln x|+C$;

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}=\left|\begin{matrix}x=\cos t,\\ dx=-\sin t dt\end{matrix}\right|=\int\frac{-\sin t dt}{\sin^3 t}=\operatorname{ctg} t+C=\frac{\cos t}{\sin t}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$;

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}=\left|\begin{matrix}x=\operatorname{sh} t\\ dx=\operatorname{ch} t dt\end{matrix}\right|=\int\frac{\operatorname{ch} t dt}{\operatorname{ch}^3 t}=\int\frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t}=\operatorname{th} t+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$;

або у інший спосіб:

$$\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}=\int\frac{dx}{\left|x^3\right|\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}=\operatorname{sgn} x\cdot\int\frac{dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}=\left|\begin{matrix}1+\frac{1}{x^2}=t\\ x^2=\frac{1}{t-1}\end{matrix}\right|=\operatorname{sgn} x\cdot\int\frac{dt}{-t^{3/2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\operatorname{sgn} x\cdot\frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C=\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{t}}+C=\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+C=\frac{\operatorname{sgn} x\cdot|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Приклади на формулу інтегрування частинами

1. $\displaystyle\int\ln x dx=\left|\begin{matrix}u=\ln x,\ du=\frac{dx}{x}\\ v=x,\quad dv=dx\end{matrix}\right|=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C$;

2. Багатократне застосування:

$$\int x^2e^xdx=\int x^2de^x\underset{\substack{\text{інтегруємо}\\\text{частинами}}}{=}x^2e^x-\int e^xdx^2=x^2e^x-2\int xe^xdx=x^2e^x-2\int xde^x=$$

$$\underset{\substack{\text{інтегруємо}\\\text{частинами}}}{=}x^2e^x-2xe^x+2\int e^xdx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C;$$

3. Виключіть інтегрування неелементарної функції: $\int xCi(x)dx$.

$$\int xCi(x)dx=\int Ci(x)d\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}Ci(x)-\int\frac{x^2}{2}dCi(x)=\frac{x^2}{2}Ci(x)-\int\frac{x\cos x}{2}dx.$$

4. Рекурентні формули (формули зниження).
Нехай $n,m>0$, $n,m\neq-1$, тоді

$$I_{m,n}=\int x^m\ln^n x dx=\left|\begin{matrix}\ln^n x=u,\ du=\dfrac{n\ln^{n-1}x}{x}dx\\ x^m dx=dv,\quad v=\dfrac{x^{m+1}}{m+1}\end{matrix}\right|=\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x-\int\frac{x^{m+1}}{m+1}n\frac{\ln^{n-1}x}{x}dx$$

$$=\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x-\frac{n}{m+1}I_{m,n-1}=\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x-\frac{n}{m+1}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^{n-1}x-\frac{n-1}{m+1}I_{m,n-2}\right),$$

Водночас $I_{m,0}=\int x^m dx=\dfrac{x^{m+1}}{m+1}+C.$

5. Отримання рівняння із вихідним інтегралом:

$$I=\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{1}{b}\int e^{ax}d\sin bx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{1}{b}\int\sin bxde^{ax}=$$

$$=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}\int e^{ax}d\cos bx=$$

$$=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bxdx+C.$$

Отже, отримано рівняння: $I=\dfrac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\dfrac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\dfrac{a^2}{b^2}I+C,$ з якого випливає

$$I=\frac{e^{ax}\left(b\sin bx+a\cos bx\right)}{a^2+b^2}+C.$$

Приклад по типу «матрьошка» із інтегруванням частинами

$$\int\frac{2^x\cdot\ln\operatorname{arctg}2^x\cdot\cos\ln\operatorname{arctg}2^x}{\left(1+2^{2x}\right)\cdot\operatorname{arctg}2^x}dx=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{\ln\operatorname{arctg}2^x\cdot\cos\ln\operatorname{arctg}2^x}{\left(1+2^{2x}\right)\cdot\operatorname{arctg}2^x}d(2^x)\underset{|t=2^x|}{=}$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{\ln\operatorname{arctg}t\cdot\cos\ln\operatorname{arctg}t}{\left(1+t^2\right)\cdot\operatorname{arctg}t}dt=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{\ln\operatorname{arctg}t\cdot\cos\ln\operatorname{arctg}t}{\operatorname{arctg}t}d\operatorname{arctg}t=$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\int\ln\operatorname{arctg}t\cdot\cos\ln\operatorname{arctg}t\,d\ln\operatorname{arctg}t\underset{y=\ln\operatorname{arctg}t}{=}\frac{1}{\ln 2}\int y\cdot\cos y\,dy=$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\int y\,d\sin y\underset{\substack{\text{інтегрування}\\ \text{частинами}}}{=}\frac{1}{\ln 2}\left(y\sin y-\int\sin y\,dy\right)=\frac{1}{\ln 2}\left(y\sin y+\cos y\right)+C=$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\left(\ln\operatorname{arctg}2^x\cdot\sin\ln\operatorname{arctg}2^x+\cos\ln\operatorname{arctg}2^x\right)+C.$$

Приклади на обчислення інтегралів від раціональних функцій

1. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int\frac{x^6-x^2+2x+1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)}dx.$

Раціональний підінтегральний дріб неправильний, отже, спочатку ділимо з остачею. Для цього запишемо $x(x-1)\left(x^2+1\right)=x^4-x^3+x^2-x$. Ділимо у стовпчик

$$\begin{array}{l|l} x^6-x^2+2x+1 & x^4-x^3+x^2-x \\ \cline{2-2} \quad\ldots\ldots\ldots & x^2+x \\ \cline{1-1} \quad 2x+1 & \end{array}$$

, та маємо

$$\int\frac{x^6-x^2+2x+1}{x\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\int\frac{2x+1}{x\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)}dx.$$

Для обчислення останнього інтегралу, розкладемо дріб на суму простіших: $\dfrac{2x+1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{Mx+N}{x^2+1}=$

$$=\frac{(x-1)(x^2+1)A+x(x^2+1)B+x(x-1)(Mx+N)}{x(x-1)(x^2+1)}.$$

(A, B, M, N – невизначені коефіцієнти). Прирівнюємо чисельники

$$2x+1=\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)A+x\left(x^2+1\right)B+x\left(x-1\right)\left(Mx+N\right).$$

Два полінома дорівнюють тоді й тільки тоді, коли коефіцієнти за однакових степенів співпадають. Із цього критерію та останньої рівності отримуємо:

$$\left.\begin{array}{l} x^3: A+B+M=0\\ x^2: -A+N-M=0\\ x^1: A+B-N=2\\ x^0: -A=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} A=-1\\ B=3/2\\ M=-1/2\\ N=-3/2\end{array}\right.,$$

$$\int \frac{2x+1}{x(x-1)(x^2+1)}dx = -\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x+3}{x^2+1}dx.$$

Отже, $I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C$.

2. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$.

Розкладаємо дріб на суму простіших дробів

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{(1+x^2)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1},$$

можна знайти *A, B, C, D, E, F* як у попередній задачі, але можна й зробити такі перетворення

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx1}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x - \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Інтеграл, що залишився є інтегралом від елементарного дробу четвертого типу $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, та для його обчислення треба використовувати формулу зниження

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Далі ми будемо (та радимо) усувати інтеграли четвертого типу за допомогою методу Остроградського.

Приклад на метод Остроградського:

Обчислити $\int \frac{4x+3}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}dx$.

$НСД(Q_n, Q_n')$ можна знайти за допомогою алгоритму Евкліда. У цьому прикладі він дорівнює x^2+x+1. Тоді

$$\int \frac{4x+3}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}dx = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2+x+1}dx.$$

Для знаходження *A, B, C, D* диференціюємо обидві частини рівності:

$$\frac{4x+3}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} = \frac{A(x^2+x+1)-(Ax+B)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{A(x^2+x+1)-(Ax+B)(2x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2}.$$

Оскільки знаменники однакові, то і чисельники мають співпадати: $4x+3 = A(x^2+x+1)+(Ax+B)(2x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$.

Прирівнюємо коефіцієнти за відповідних ступенів x

$$\left.\begin{aligned} x^3&:\ C=0\\ x^2&:\ A-2A+C+D=0\\ x^1&:\ A-A-2B+C+D=4\\ x^0&:\ A-b+D=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C=0\\ D=2\\ A=2\\ B=1 \end{cases}.$$

Для вихідного інтеграла отримуємо

$$\int \frac{4x+3}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}dx = \frac{2x+1}{x^2+x+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{2x+1}{x^2+x+1} + 2\int \frac{d(x+1/2)}{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{2x+1}{x^2+x+1} + 4/\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2} + C$$

Приклади на позбавлення від дрібно-лінійних ірраціональностей:

1. $\int \frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}dx = \left| \begin{matrix} x+2=t^3, \\ dx=3t^2dt \end{matrix} \right| = \int \frac{(t^3-2)t\cdot 3t^2}{t^3+t-2}dt;$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}} = \int \sqrt[6]{\left(\frac{x-7}{x-5}\right)^5}\frac{dx}{(x-7)^2} =$

$$= \left| \frac{x-7}{x-5} = t^6,\ dx = \frac{12t^5 dt}{\left(1-t^6\right)^2},\ x = \frac{7-5t^6}{1-t^6},\ x = 5 + \frac{2}{1-t^6} \right| =$$

$$= \int t^5 \frac{12t^5\left(1-t^6\right)^2 dt}{\left(1-t^6\right)^2 \left(2t^6\right)^2} = 3\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{3}{t} + C.$$

Повертаючись до початкової змінної, отримаємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{\left(x-7\right)^7 \left(x-5\right)^5}} = -3\sqrt[6]{\frac{x-5}{x-7}} + C.$$

Приклади на підстановки Чебишева (диференційний біном):

1. $\int \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}} \cdot dx = \int x^{1/2}\left(1-x^{3/2}\right)^{1/4} dx =$

$$\left| \begin{matrix} m = 1/2;\ n = -3/2;\ p = 1/4;\ \frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z} \Rightarrow 2\ \textit{підстановка Чебишева} \\ 1 - x^{-3/2} = t^4;\ x = \left(1-t^4\right)^{-2/3};\ dx = \frac{2}{3}\left(1-t^4\right)^{-5/3} 4t^3 dt. \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \left(1-t^4\right)^{-1/3} \cdot t \cdot \frac{2}{3}\left(1-t^4\right)^{-5/3} \cdot 4t^3 dt = \frac{8}{3}\int \frac{t^4 dt}{\left(1-t^4\right)^2}.$$

Отримали раціональну функцію, яку можна проінтегрувати методом Остроградського;

2. $$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^5}} = \int x^{-2}\left(2+x^3\right)^{-5/3} dx = \left| \begin{matrix} m = -2;\ n = 3;\ p = -\frac{5}{3}; \\ \frac{m+1}{n} + p = -2 \in \mathbf{Z} \Rightarrow \\ 3\ \textit{підстановка Чебишева} \end{matrix} \right| =$$

$$= \left| \frac{2+x^3}{x^3} = t^3;\ \frac{2}{x^3} + 1 = t^3;\ dx = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{t^3-1}\right)^{2/3}\left(-\frac{2}{(t^3-1)^2}\right)3t^2 dt \right| =$$

$$\int \left(\frac{2}{t^3-1}\right)^{-7/3} \cdot t^{-5} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{2}{t^3-1}\right)^{-2/3} \cdot \frac{2(-3)t^2 dt}{\left(t^3-1\right)^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{t^3-1}{t^3} dt = -\frac{1}{4}t - \frac{1}{8t^2} + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{2+x^3}{x^3}} - \frac{1}{8}\left(\frac{2+x^3}{x^3}\right)^{-\frac{2}{3}} + C;$$

3. $$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[4]{\left(2+x^3\right)^5}} = \int x^{-2}\left(2+x^3\right)^{-5/4} dx = \left| p \notin \mathbf{Z};\quad \frac{m+1}{n} \notin \mathbf{Z};\quad \frac{m+1}{n} + p \notin \mathbf{Z} \right|.$$

Жодна з підстановок Чебишева не підходить – інтеграл не може бути виражений через елементарні функції.

Приклади на підстановки Ейлера (квадратичні ірраціональності):

1. $$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+x+2}} = \left| \begin{matrix} a > 0,\ 1\ \textit{підстановка Ейлера}: \sqrt{x^2+x+2} = -x + t \\ x^2 + x + 2 = x^2 - 2xt + t^2;\ x = \frac{t^2-2}{1+2t} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{t} d\left(\frac{t^2-2}{1+2t}\right) = \frac{1}{t}\cdot\frac{t^2-2}{1+2t} + \int \frac{t^2-2}{1+2t}\cdot\frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{t}\cdot\frac{t^2-2}{1+2t} + \int \frac{dt}{1+2t} - 2\int \frac{dt}{(1+2t)t^2}.$$

Отримано інтеграли від раціональних функцій;

2. $$\int \frac{1-\sqrt{1+x-x^2}}{x\sqrt{1+x-x^2}} dx = \left| \begin{matrix} c > 0,\ 2\ \textit{підстановка Ейлеру}: \sqrt{1+x-x^2} = xt + 1 \\ 1 + x - x^2 = 1 - 2xt + x^2t^2;\ x = \frac{1-2t}{t^2+1} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{-t \cdot \frac{1-2t}{t^2+1} d\left(\frac{1-2t}{t^2+1}\right)}{\frac{1-2t}{t^2+1}\cdot\left(\frac{1-2t}{t^2+1}\cdot t + 1\right)} = \int \frac{-2t(t^2-t-1)}{(t^2+1)(1+t-t^2)} dt.$$

Отримано інтеграл від раціональної функції;

3. $$\int \frac{\sqrt{-3+4x-x^2}}{x + 2\sqrt{-3+4x-x^2}} dx = \left| \begin{matrix} \underset{x_1=1,\ x_2=3;\ 3\ \textit{підстановка Ейлера}}{D > 0 \quad \Rightarrow} \sqrt{-\left(x-1\right)\left(x-3\right)} = t\left(x-1\right) \\ \sqrt{3-x} = t\sqrt{x-1};\ 3 - x = t^2\left(x-1\right);\ x = \frac{3+t^2}{t^2+1} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{t\left(\frac{3+t^2}{t^2+1}-1\right)}{\frac{3+t^2}{t^2+1}+2t\left(\frac{3+t^2}{t^2+1}-1\right)} d\,\frac{3+t^2}{t^2+1} = \int \frac{-8t^2dt}{(t^2+1)^2(t^2+4t+3)}.$$ Також інтеграл від раціональної функції.

Приклади на інші способи інтегрування квадратичних ірраціональностей:

1. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+x-3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{x^2+x+1}+\alpha\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}},$

$$\frac{x^3+2x^2+x-3}{\sqrt{x^2+x+1}} = \left(2ax+bx\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{\left(ax^2+bx+c\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}}+$$

$$+\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{\left(2ax+b\right)\left(x^2+x+1\right)+\left(ax^2+bx+c\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\alpha}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$x^3+2x^2+x-3=\left(2ax+b\right)\left(x^2+x+1\right)+\left(ax^2+bx+c\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l} x^3: 1=2a+a \\ x^2: 2=2a+b+\frac{a}{2}+b \\ x^1: 1=2a+b+c+\frac{b}{2} \\ x^0: -3=b+\frac{c}{2}+\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{7}{12} \\ c=-\frac{13}{24} \\ \alpha=-\frac{159}{48} \end{array}\right. .$$

Залишилось обчислити інтеграл

$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$ та підставити знайдений інтеграл та коефіцієнти у початковий вираз;

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x-1\right)^3\sqrt{x^2+2x+2}} = \left|t=\frac{1}{x-1},\ x=1+\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2}\right| =$

$\displaystyle\int\frac{-t^3\cdot t^{-2}dt}{\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}+2+\frac{2}{t}+2}} = \operatorname{sgn} t\cdot\int\frac{-t^2dt}{\sqrt{5t^2+4t+1}}$, отже, зведено до вигляду, як у попередньому прикладі 1.

Приклади на тригонометричні підстановки:

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{2+\cos x} = \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\right| = \int\frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int\frac{2dt}{2+2t^2+1-t^2} = 2\int\frac{dt}{3+t^2};$

2. $\displaystyle\int\frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}dx = \left|\sin x=t;\ dt=\cos x dx;\ \cos^2 x=1-\sin^2 x\right| = \int\frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^4}dt;$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{3\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x} = \int\frac{dx}{3\cos^2 x\left(3-2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2 x\right)} =$

$$=\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}x \\ dt=\left(1+t^2\right)dx \end{array}\right| = \int\frac{dt}{t^2-2t+3};$$

4. $\displaystyle\int\sin^r x\cdot\cos^s x\,dx = \left|\begin{array}{l} r,\ s\in\mathbf{Q};\ \sin^2 x=t \\ dt=2\sin x\cos x dx \end{array}\right| = \int\frac{1}{2}\frac{\sin^r x\cos^s x\,dt}{\sin x\cos x} =$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int\sin^{r-1}x\cos^{s-1}x dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{r-1}{2}}\left(1-t\right)^{\frac{s-1}{2}}dt$ – інтеграл від диференційного бінома.

Приклад на усунення експоненти/гіперболічних функцій

$\displaystyle\int\frac{e^{2x}+1}{2\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x}dx = \left|\begin{array}{l} e^x=t,\ x=\ln t \\ dx=\frac{dt}{t} \end{array}\right| = \int\frac{t^2+1}{t-t^{-1}+\frac{t+t^{-1}}{2}}\cdot\frac{dt}{t}$ – отже, отримано інтеграл від раціональної функції.

5.4. Задачі для самостійного розв'язку

Обчислити, застосовуючи таблицю інтегралів і тотожні перетворення.

1. $\int\left(3-x^2\right)^3 dx$.

2. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$.

3. $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$.

4. $\int\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}\,dx$.

5. $\int\frac{x^2dx}{1-x^2}$.

6. $\int\frac{x^2-3}{x^2+1}dx$.

7. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$.

8. $\int 2^{2x}e^x\,dx$.

9. $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

10. $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx\ \ (0\le x\le\pi)$.

11. $\int\sin^2 x\,dx$.

12. $\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

13. $\int(2x-3)^{10}dx$.

14. $\int\sqrt[3]{1-3x}\,dx$.

15. $\int\frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}$.

16. $\int\frac{dx}{2-3x^2}$.

17. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

18. $\int\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)dx$.

19. $\int\frac{dx}{1+\cos x}$.

20. $\int\frac{dx}{1+\sin x}$.

Обчислити шляхом належного перетворення підінтегрального виразу.

21. $\int\frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

22. $\int\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

23. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

24. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

25. $\int\frac{x^2dx}{\left(8x^3+27\right)^{2/3}}$.

26. $\int\frac{dx}{1+2e^x}$.

27. $\int\frac{dx}{x\ln x}$.

28. $\int\operatorname{tg}x\,dx$.

29. $\int\frac{dx}{\sin x}$.

30. $\int\frac{dx}{\cos x}$.

31. $\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$.

32. $\int\frac{x^{17/2}dx}{\sqrt{1+x^{19}}}$.

33. $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

Вказівка: $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=d\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

34. $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$.

35. $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

Обчислити застосовуючи метод розкладання.

36. $\int\frac{x^2}{1+x}dx$.

37. $\int\frac{x}{(2-x)^{15}}dx$.

38. $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$.

39. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

40. $\int\frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}dx$.

41. $\int x\sqrt{1+x}\,dx$.

42. $\int\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$.

43. $\int\operatorname{tg}^3 x\,dx$.

44. $\int\sin^3 x\,dx$.

45. $\int\sin^4 x\,dx$.

Знайти, застосовуючи відповідні підстановки.

46. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$.

47. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

48. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$.

49. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

50. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

51. $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$.

52. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

53. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$.

54. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{\operatorname{ch} x} dx$.

55. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin(2x)} dx$.

Обчислити застосовуючи метод інтегрування частинами.

56. $\int \ln x\, dx$.

57. $\int x^n \ln x\, dx, \quad (n \neq -1)$.

58. $\int \ln^2 x\, dx$.

59. $\int x^2 e^{-2x} dx$.

60. $\int x^2 \sin 2x\, dx$.

61. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$.

62. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx$.

63. $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

64. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

65. $\int \frac{x^2 dx}{\left(4+x^2\right)^2}$.

66. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

67. $\int x^5 e^{x^2} dx$.

68. $\int \sqrt{x^2+a}\, dx$.

69. $\int e^{ax} \sin(bx) dx$.

70. $\int \ln^n x\, dx$.

71. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx$.

Інтеграли за типом «матрьошка» із інтегруванням частинами.

72. $\int \frac{\ln(\ln \arccos x)}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} dx$.

73. $\int \frac{3^{\operatorname{arctg} x} \cdot \cos\left(3^{\operatorname{arctg} x}\right)}{1+x^2} dx$.

74. $\int e^{\sqrt{\arcsin \sqrt{x}}} \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

75. $\int \cos \ln\left(\ln\left(1+e^{x^2}\right)\right) \frac{x e^{x^2}}{1+e^{x^2}} dx$.

76. $\int \frac{2^x}{\cos^2 2^x} \ln\left(\operatorname{tg} 2^x + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2^x}\right) dx$.

77. $\int \frac{2^x \cdot \ln \operatorname{arctg} 2^x \cdot \cos \ln \operatorname{arctg} 2^x}{\left(1+2^{2x}\right) \cdot \operatorname{arctg} 2^x} dx$.

Інтегрування раціональних функцій

Розкладання на найпростіші дроби, метод невизначених коефіцієнтів.

78. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$.

79. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx$.

80. $\int \frac{x^5 dx}{x^6-x^3-2}$.

81. $\int \frac{x\, dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$.

82. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$.

83. $\int \frac{x dx}{(x+2)(x+3)}$.

84. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$.

85. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

86. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$.

87. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx$.

88. $\int \frac{dx}{\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-4x+5\right)}$.

89. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)^2\left(x^2+x+1\right)}$.

90. $\int \frac{x dx}{x^3-1}$.

91. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$.

92. $\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^3} dx$.

93. $\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$.

94. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$.

95. $\int \frac{x^5 dx}{x^4-2x^3+2x-1}$.

Знайти, застосовуючи метод Остроградського.

96. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

97. $\int \frac{dx}{\left(x^3+1\right)^2}$.

98. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

99. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)^2} dx$.

100. $\int \frac{dx}{x^2\left(2x^2+3\right)^3}$.

101. $\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2} dx$.

Інтегрування ірраціональних функцій

102. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

103. $\int \frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^4+1}}$.

104. $\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$.

105. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

106. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

107. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(2-x)}}$.

108. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$.

109. $\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}+\sqrt[3]{\frac{x+2}{2x+3}}}$.

110. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

111. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$.

112. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$.

113. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

114. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+2x+2}}$.

115. $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx$.

116. $\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

117. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$.

118. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

119. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

120. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

121. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$.

Знайти, застосовуючи підстановки Ейлера.

122. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

123. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

124. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

125. $\int \frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}$.

126. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

127. $\int \frac{\sqrt{x^2+3x+2}-x}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}dx$.

Обчислити, застосовуючи підстановки Чебишева.

128. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$.

129. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

130. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$.

131. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

132. $\int x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}\,dx$.

133. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

134. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^5}}$.

135. $\int \frac{dx}{x^{\pi+1}\sqrt[3]{1+x^\pi}}$.

136. Виразити через елементарні функції і функції $F(\varphi,k)$ та $E(\varphi,k)$ еліптичні інтеграли: а) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{36x^4-13x^2+1}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2-8x^4}}$.

Інтегрування тригонометричних функцій

Знайти за допомогою тригонометричних тотожностей.

137. $\int \sin 5x\cos x\,dx$.

138. $\int \sin^2 x\cos(3x+1)\,dx$.

139. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

140. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^3 x}$.

141. $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$.

142. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}dx$..

143. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

144. $\int \operatorname{tg} x\operatorname{tg}(x+a)\,dx$.

145. $\int \frac{dx}{\sin x-\sin a}$.

146. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$.

147. Вивести формули зниження для інтегралів $I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}$ та $K_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}$ $(n>2)$. З їх допомогою обчислити: а) I_5; б) K_7.

Обчислити за допомогою тригонометричних підстановок.

148. $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

149. $\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x)}$.

150. $\int\frac{\sin^2 x\,dx}{\sin x+2\cos x}$.

151. $\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}$.

152. $\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

153. $\int\frac{\sin x\cos x\,dx}{1+\sin^4 x}$.

154. $\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}dx.$

155. $\int\frac{\sin x}{\sin x-3\cos x}dx.$

156. $\int\frac{dx}{3+5\operatorname{tg}x}.$

157. $\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}dx.$

158. $\int\frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}dx.$

159. $\int\frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x+\sqrt{2}}$.

160. $\int\frac{\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+3\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx.$

161. $\int\frac{1-\sin 2x-4\cos^2 x}{2\sin x+\cos x}dx.$

162. $\int\frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx.$

163. $\int\frac{\sin x-2\cos x}{1+4\sin x\cos x}dx.$

164. $\int\frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x+\sin x)^2}$.

165. $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

166. $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}$.

Інтегрування різних трансцендентних функцій

167. $\int x|x|dx$.

168. $\int(x+|x|)^2\,dx$.

169. $\int\{|1+x|-|1-x|\}dx$.

170. $\int\max(1,x^2)dx$.

171. $\int[x]|\sin\pi x|dx\ (x\ge 0)$.

172. $\int|x|dx$.

173. $\int f(x)dx$, де $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|\le 1\\ 1-|x|, & |x|>1\end{cases}$.

174. За допомогою інтегрального логарифму $\mathrm{Li}(x)$ і елементарних функцій перетворіть інтеграли:

а) $\int\frac{1-x}{x}e^{-x}dx$; б) $\int\frac{e^{3x}}{x^3}dx$; в) $\int\frac{dx}{\ln^3 x}$; г) $\int\frac{x^{100}}{\ln x}dx$.

175. За допомогою інтегрального синусу $\mathrm{Si}(x)$ і елементарних функцій перетворіть інтеграли:

а) $\int\frac{\sin 3x}{x^3}dx$; б) $\int\frac{\sin^3 x}{x}dx$; в) $\int\frac{x\sin x-\cos x}{x^2}dx$.

176. За допомогою інтегралу похибок $erf(x)$ і елементарних функцій перетворіть інтеграли:

а) $\int e^{-(2x^2+2x+1)}dx$; б) $\int x^2e^{-x^2}dx$; в) $\int\frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$.

177. Виключіть інтегрування неелементарних функцій:

а) $\int\mathrm{Li}(x)dx$; б) $\int x\mathrm{Si}(x)dx$; в) $\int e^{-x^2/2}erf(x)dx$.

Знайти, застосовуючи різні прийоми

178. $\int\frac{xdx}{x^8-1}$.

179. $\int\frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$.

180. $\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

181. $\int\frac{x^4-1}{x^6+1}dx$.

182. $\int\frac{dx}{x^6(1+x^2)}$.

183. $\int\frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

184. $\int\frac{dx}{x^4-1}$.

185. $\int\frac{dx}{x^4+1}$.

186. $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$.

187. $\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$.

188. $\int x^7 e^{-x^2} dx.$

189. $\int x e^x \sin x \, dx.$

190. $\int \cos^2 \sqrt{x} dx.$

191. $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}.$

192. $\int \frac{dx}{1 + e^{x/2} + e^{x/3} + e^{x/6}}.$

193. $\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\left(1 + x^2\right)^{3/2}} dx.$

194. $\int x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot \ln\left(1 + x^2\right) dx.$

195. $\int x e^x \sin^2 x dx.$

196. $\int \ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right] \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$

197. $\int \frac{\left(\cos \frac{x+a}{2}\right)^{n-1}}{\left(\sin \frac{x-a}{2}\right)^{n+1}} dx$, а) $\cos a \neq 0$, б) $\cos a = 0$.

198. $\int \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x \, dx.$

199. $\int \sin \ln x \, dx.$

200. $\int \frac{x^4 - 3}{x\left(x^8 + 3x^4 + 2\right)} dx.$

201. $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}.$

202. $\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$

203. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx.$

204. $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} dx.$

205. $\int \frac{x^4 - 1}{x\left(x^4 - 5\right)\left(x^5 - 5x + 1\right)} dx.$

206. $\int \sqrt{(x-a)(x-b)} dx.$

207. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$

208. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}.$

209. $\int \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1} \cdot dx.$

210. $\int \frac{x + \sqrt{1 + x + x^2}}{1 + x + \sqrt{1 + x + x^2}} dx.$

211. $\int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2 + 3x + 1}}.$

212. $\int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{1 + 2x - x^2}}.$

213. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}.$

214. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}}.$

215. $\int x^5 \left(2 - 5x^3\right)^{2/3} dx.$

216. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2 + \left(\sqrt{1 + x^2}\right)^3}}.$

217. $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{1 + x^2}} dx.$

218. $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2} dx.$

219. $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{\left(a \sin x + b \sin x\right)^2} dx.$

220. $\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x \cos x} dx.$

221. $\int \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x}$, а) $0 < |\varepsilon| < 1$, б) $|\varepsilon| > 1$.

222. $\int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx.$

223. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$, а) $\cos(a-b) \neq 0$, б) $\cos(a-b) = 0$.

224. $\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 3x dx.$

225. $\int \operatorname{tg}^5 x dx.$

226. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$

227. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. «Сборник задач по теории функций комплексного переменного». – 4-е изд., перераб. – М., 2004.
2. Демидович В. П. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу». – М. : Наука, 1977.
3. Кудрявцев Л.Д. «Курс математического анализа». – Том 1, 2, 3. – М., Высшая школа, 1981.
4. Зорич В. А. «Математический анализ». – Том 1, 2. – М. : Наука, 1981, 1984.
5. Зима В. Г., Бєляєв М. Р. «Неозначений та означений інтеграли: Підручник для фізиків та інженерів. Книга 1. Теоретичні відомості». – К. : Майстер-клас, 2006. – 448 с.
6. Зима В.Г., Бєляєв М.Р. «Неозначений та означений інтеграли: Підручник для фізиків та інженерів. Книга 2. Задачі, розв'язання, вказівки». – К. : Майстер-клас, 2007. – 336с.
7. Ильин В. А., Позняк Э. Г. «Основы математического анализа». – М. : Наука (будь-яке видання).
8. Кудрявцев Л. Д. «Курс математического анализа». – М. : Высшая школа (будь-яке видання).
9. Кудрявцев Л.Д. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу». / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М. И. Шабунин // Часть 1. Пределы и непрерывность, Часть 2. Интегралы и ряды. – М. : Наука, 1973.
10. Ляшко И. И. «Справочное пособие по математическому анализу». / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач // – К. : Вища школа, 1983.
11. Макаров Б. М. «Избранные задачи по вещественному анализу». Учеб. пособие для вузов. – М. : Наука. Главн. ред. физ-мат. лит., 1992.
12. Фихтенгольц Г. М. «Курс дифференциального и интегрального исчисления». Т. 1, 2, 3. – М. : Наука, 1969.

Навчальне видання

Леонов Олександр Сергійович
Гах Андрій Генадійович

**МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ, ЗБІРНИК ЗАДАЧ
ІЗ ПРИКЛАДАМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ У ДВОХ ЧАСТИНАХ**

Частина 1
Навчальний посібник

Коректор *Б. О. Хільськи*
Комп'ютерне верстання
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60х84/16 Ум. друк. арк. 8,23. Наклад 100 пр. Зам. № 95/14.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32