МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАУКОВО-НАВЧАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ
Кафедра комп'ютерної фізики

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до кваліфікаційної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр

«Комп'ютерні моделі оболонкових конструкцій, частково заповнених рідиною, та їх застосування»

Виконав: студент 6 курсу, групи НФ-64
Журавльов Д. С.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Комп'ютерна фізика

Керівник: асист. Лістрова Д. В.

Науковий консультант: д. т. н., проф. Стрельнікова О.О.

Рецензент:

Харків – 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Навчально-науковий інститут комп’ютерної фізики та енергетики

Кафедра комп’ютерної фізики

Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магістр

Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Костянтин НЄМЧЕНКО

підпис

«___» _____ 2025 року

ЗАВДАННЯ

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

Журавльову Дмитру Сергійовичу

1. Тема роботи «Комп’ютерні моделі оболонкових конструкцій, частково заповнених рідиною, та їх застосування», керівник роботи: асистент Лістрова Дар'я Вадимівна, науковий консультант: професор, д.т.н Стрельнікова Олена Олександрівна, затверджені наказом по університету від 20 січня 2025 року №4201- 5/147.
2. Строк подання студентом роботи 19.05.2025.
3. Перелік питань, які потрібно розробити:
   - Аналіз сучасного стану досліджень оболонкових конструкцій, частково заповнених рідиною;
   - Огляд методів математичного та комп’ютерного моделювання коливань рідини в оболонкових резервуарах;
   - Формулювання задачі та методів розрахунку власних частот і форм коливань системи "оболонка-рідина";
   - Моделювання динаміки оболонок методом суперпозиції мод;

- Застосування чисельних методів (скінченних і граничних елементів) для розв’язання рівнянь взаємодії рідини з оболонкою;
- Аналіз чутливості до змін геометрії та рівня заповнення;
- Дослідження впливу динамічних навантажень, включаючи сейсмічні та імпульсні ефекти;
- Вивчення вимушених коливань у циліндричних і конічних резервуара;
- Розробка методу дослідження взаємодії оболонки з рідиною та проведення числових експериментів.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми, узгодження, а також затвердження її на кафедрі
2	Огляд літератури з комп’ютерного моделювання оболонкових конструкцій з рідиною та їх застосування.
3	Формулювання задачі дослідження, основних рівнянь та методів їх розв’язку
4	Розробка математичних моделей системи "оболонка-рідина"
5	Побудова методів розрахунку власних частот та форм коливань оболонкових конструкцій
6	Формування методу суперпозиції мод для моделювання динаміки системи "оболонка-рідина"
7	Застосування числових методів та проведення числових розрахунків
8	Дослідження параметричної чутливості системи "оболонка-рідина" до змін геометричних характеристик та рівня заповнення рідиною
9	Визначення та формулювання висновків та перспектив подальшого дослідження
9	Подача науковому керівнику
10	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
11	Попередній захист
12	Захист

Дата видачі завдання 15 січня 2025 року

Студент _____ Дмитро ЖУРАВЛЬОВ

підпис

Керівник роботи_____ Дар’я ЛІСТРОВА

підпис

ЗМІСТ

ВСТУП 5
1. ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ РІДИНОЮ 8
1.1 Класифікація оболонкових конструкцій, частково заповнених рідиною 8
1.2 Вплив рідини на динамічні характеристики оболонок 11
1.3 Числові методи розрахунку взаємодії оболонки з рідиною 16
1.4 Використання методів скінченних та граничних елементів 22
2. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ 27
2.1 Основні рівняння для опису динамічної поведінки системи "оболонка-рідина" 27
2.2 Метод суперпозиції мод 33
2.3 Спектральні задачі для рідинно-оболонкових систем 41
2.4 Формулювання крайових умов 47
3. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ .. 50
3.1 Визначення власних частот і форм коливань оболонок без рідини 50
3.2 Вплив рідини на коливальні характеристики конструкцій 53
3.3 Чисельні методи розв’язку рівнянь взаємодії рідини з оболонкою 55
3.4 Алгоритм реалізації розрахунку в середовищі чисельного аналізу 58
4. АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ 62
4.1 Аналіз спектрів власних коливань оболонкових конструкцій 62
4.2 Вплив рівня заповнення рідиною на динамічну поведінку конструкції 68
4.3 Чутливість параметрів моделі до змін геометричних характеристик 71
5. ВИСНОВКИ ТА РЕКОМЕНДАЦІЇ 79
5.1 Основні висновки дослідження 79
5.2 Практичні рекомендації щодо застосування отриманих результатів 79
5.3 Напрямки подальших досліджень 80
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 81

ВСТУП

Дослідження поведінки оболонкових конструкцій, частково заповнених рідиною, є актуальним завданням сучасної механіки деформівного твердого тіла. Такі конструкції широко використовуються в різних галузях промисловості, включаючи авіаційну, космічну, енергетичну та хімічну. Вони піддаються динамічним навантаженням, що можуть значно впливати на їхню міцність і довговічність.

Особливий інтерес викликає дослідження взаємодії рідини з оболонками, оскільки воно дозволяє точніше оцінювати напружено-деформований стан конструкцій. Коливання рідини можуть спричиняти додаткові навантаження, що впливають на стійкість та безпеку експлуатації резервуарів, трубопроводів та інших елементів інженерних споруд.

Важливість проблеми зумовлена необхідністю розробки ефективних чисельних методів для аналізу коливань рідини та оболонки. Традиційні аналітичні підходи мають обмежену застосовність, тому сучасні дослідження активно використовують методи скінченних і граничних елементів, які дозволяють враховувати складні геометричні та фізичні особливості конструкцій.

Актуальність теми також визначається зростаючими вимогами до безпеки та надійності інженерних систем, що працюють у складних умовах, таких як сейсмічно активні зони або високотемпературні середовища. Використання числового моделювання дозволяє прогнозувати поведінку оболонкових конструкцій у реальних експлуатаційних умовах та оптимізувати їхні параметри.

Дослідження коливань оболонкових конструкцій із частковим заповненням рідиною є необхідним і з точки зору розробки нових матеріалів та технологій. Визначення оптимальних конструктивних рішень сприяє зменшенню матеріаломісткості виробів, підвищенню їхньої ефективності та довговічності.

Таким чином, розгляд цієї проблеми має як теоретичне, так і практичне

значення, адже дозволяє розширити знання про динамічну взаємодію рідини та оболонки та застосувати отримані результати для вирішення конкретних інженерних задач.

Метою даного дослідження є розробка чисельних методів моделювання взаємодії рідини з оболонковими конструкціями та аналіз їхньої динамічної поведінки. Основними завданнями є: формулювання задачі дослідження, розробка математичних моделей системи "оболонка-рідина", застосування чисельних методів для розрахунку коливань та визначення параметричної чутливості конструкцій.

Об'єктом дослідження є динамічна взаємодія рідини з оболонковими конструкціями різної геометрії та наповнення.

Предметом дослідження є процеси коливань оболонкових конструкцій, частково заповнених рідиною, та вплив динамічних навантажень на їхній напружено-деформований стан.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи скінченних і граничних елементів, метод суперпозиції мод, а також чисельне моделювання за допомогою програмних комплексів ANSYS, ABAQUS та COMSOL Multiphysics.

Наукова новизна полягає у розробці комп’ютерних моделей для аналізу взаємодії рідини з оболонковими конструкціями, що дозволяють визначати власні частоти та форми коливань, оцінювати параметричну чутливість конструкцій до змін геометричних параметрів і рівня заповнення рідиною.

Практичне значення отриманих результатів: Отримані результати можуть бути використані при проектуванні резервуарів, трубопроводів, ємностей та інших конструкцій, що містять рідину, з метою підвищення їхньої безпеки та надійності. Використання запропонованих методів дозволить покращити прогнозування поведінки оболонкових конструкцій під дією динамічних навантажень, зокрема сейсмічних.

Структура і обсяг роботи. Робота складається з вступу, огляду літератури, опису математичних моделей та чисельних методів, результатів

числових досліджень та висновків. Загальний обсяг роботи становить 87 сторінок

1. ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ РІДИНОЮ

1.1 Класифікація оболонкових конструкцій, частково заповнених рідиною

Оболонкові конструкції, частково заповнені рідиною, представляють собою особливий клас інженерних систем, що поєднують механічні властивості твердотільних оболонок із гідродинамічними характеристиками рідин. Ці конструкції знаходять широке застосування в різноманітних галузях промисловості, включаючи аерокосмічну, суднобудівну, енергетичну та хімічну. Оболонкова конструкція з рідиною - це система, в якій тонкостінний елемент конструкції (оболонка) містить певний об'єм рідини, що частково або повністю заповнює внутрішній простір оболонки.

Першим критерієм класифікації оболонкових конструкцій з рідиною є геометрична форма оболонки. За цим параметром виділяють циліндричні, сферичні, конічні, тороїдальні, еліптичні та комбіновані оболонки. Кожна з цих форм має власні характеристики міцності, жорсткості та стійкості, що безпосередньо впливають на взаємодію з рідиною. Наприклад, циліндричні оболонки часто використовуються в паливних баках ракет, тоді як сферичні оболонки знаходять застосування в резервуарах високого тиску.

За характером заповнення рідиною оболонкові конструкції поділяються на повністю заповнені, частково заповнені та конструкції з перемінним рівнем заповнення. Частково заповнені оболонки характеризуються наявністю вільної поверхні рідини, що суттєво ускладнює їх динамічну поведінку через можливість виникнення коливань рідини (слошінг). При цьому ступінь заповнення є основним параметром, що визначає частоти власних коливань системи та характер розподілу гідродинамічних навантажень.

Третім головним критерієм класифікації є властивості рідини, що заповнює оболонку. За цим параметром розрізняють оболонки з ідеальною

(нев'язкою) рідиною, в'язкою рідиною, багатофазними рідинами та рідинами з вільною поверхнею. Властивості рідини, такі як густина, в'язкість, стисливість та поверхневий натяг, значною мірою визначають характер її взаємодії з оболонкою. В'язкість рідини, наприклад, впливає на демпфування коливань системи, а стисливість - на швидкість поширення хвиль тиску.

З точки зору динамічних характеристик оболонкові конструкції з рідиною класифікують на системи з малими коливаннями, системи з розвиненими коливаннями рідини та системи з вимушеними коливаннями. Малі коливання характеризуються лінійною поведінкою системи, тоді як розвинені коливання супроводжуються нелінійними ефектами, такими як хлюпання, утворення хвиль та бризок. Вимушені коливання виникають під дією зовнішніх періодичних навантажень і можуть призводити до резонансних явищ.

За типом зовнішніх навантажень виділяють оболонкові конструкції, що працюють під внутрішнім тиском, під зовнішнім тиском, при згинальних навантаженнях, при динамічних навантаженнях та при комбінованому навантаженні. Основним випадком є динамічне навантаження, що може призводити до гідропружних явищ - взаємодії між деформаціями оболонки та гідродинамічними силами, що виникають у рідині. Гідропружність є особливо важливою для тонкостінних оболонок з високою гнучкістю [1, с. 106].

Оболонкові конструкції з рідиною також класифікують за їх функціональним призначенням: резервуари для зберігання рідин, паливні баки транспортних засобів, технологічні ємності, теплообмінники, демпфери коливань та спеціалізовані конструкції. Кожна з цих категорій має власні специфічні вимоги щодо міцності, герметичності, теплоізоляції та експлуатаційних характеристик. Наприклад, паливні баки ракет-носіїв повинні забезпечувати стабільну подачу палива в умовах змінних перевантажень.

За матеріалом оболонки розрізняють металеві (сталеві, алюмінієві, титанові), композитні, полімерні та залізобетонні конструкції. Вибір матеріалу визначається умовами експлуатації, вимогами до міцності, корозійної стійкості та масових характеристик. Особливого значення набуває сумісність матеріалу

оболонки з рідиною, що міститься всередині, з точки зору можливих хімічних взаємодій, що можуть призводити до деградації властивостей матеріалу.

За умовами експлуатації оболонкові конструкції з рідиною поділяють на стаціонарні, мобільні, наземні, морські, космічні та спеціального призначення. Кожна категорія характеризується власним набором зовнішніх впливів, таких як температурні коливання, вібрації, сейсмічні навантаження або перевантаження. Наприклад, космічні конструкції повинні функціонувати в умовах невагомості або змінної гравітації, що кардинально змінює поведінку рідини.

Головним чинником класифікації є урахування теплофізичних процесів. За цим критерієм виділяють ізотермічні системи, системи з неізотермічними процесами, системи з фазовими переходами та системи з хімічними реакціями. Теплофізичні процеси можуть суттєво впливати на властивості рідини та механічні характеристики оболонки, особливо за екстремальних температур. Наприклад, кріогенні рідини, такі як зріджений водень або кисень, вимагають спеціальних теплоізоляційних рішень.

За ступенем інтеграції з іншими системами оболонкові конструкції з рідиною поділяють на автономні, інтегровані з силовою конструкцією, інтегровані з системами керування та багатофункціональні системи. Інтегрований підхід дозволяє оптимізувати масу та об'єм конструкції, але ускладнює аналіз її поведінки через необхідність урахування взаємовпливу різних систем. Прикладом можуть служити інтегральні паливні баки аерокосмічних апаратів, що одночасно виконують функцію несучої конструкції [2, с. 2319-2331].

З точки зору механіки оболонкових конструкцій з рідиною виділяють лінійні та нелінійні системи. Лінійні системи характеризуються пропорційністю між деформаціями та навантаженнями, тоді як нелінійні системи демонструють складнішу поведінку, що залежить від історії навантаження, геометричних ефектів великих деформацій та нелінійних властивостей матеріалів. Гідропружні явища в оболонкових конструкціях з

рідиною часто мають нелінійний характер, особливо при інтенсивних динамічних впливах.

За характером взаємодії рідини з оболонкою розрізняють системи з жорстким закріпленням рідини, системи з ковзанням рідини вздовж стінок та системи з вільним рухом рідини. Характер взаємодії визначається властивостями контактної поверхні, наявністю змочування, капілярними ефектами та граничними умовами. У випадку часткового заповнення особливого значення набуває моделювання контактної лінії - лінії перетину вільної поверхні рідини зі стінкою оболонки.

За методами розрахунку та проектування оболонкові конструкції з рідиною поділяють на такі, що розраховуються аналітичними методами, числовими методами та експериментальними методами. Аналітичні методи, як правило, застосовні лише для простих геометричних форм та граничних умов. Числові методи, такі як метод скінченних елементів та метод скінченних об'ємів, дозволяють моделювати складні геометричні конфігурації та нелінійні ефекти. Експериментальні методи залишаються незамінними для верифікації теоретичних моделей та дослідження складних фізичних явищ.

За ступенем загрози при руйнуванні оболонкові конструкції з рідиною класифікують на безпечні, помірно небезпечні та критично небезпечні. Ця класифікація визначає вимоги до надійності, безпеки та моніторингу стану конструкції. Для критично небезпечних систем, таких як ємності з токсичними або радіоактивними рідинами, застосовуються підвищені коефіцієнти запасу міцності, спеціальні методи діагностики та системи аварійного захисту. Розробка методів оцінки ризиків та прогнозування аварійних ситуацій є основним напрямком досліджень у галузі оболонкових конструкцій з рідиною [3, с. 135-149].

1.2 Вплив рідини на динамічні характеристики оболонок

Вплив рідини на динамічні характеристики оболонкових конструкцій є складним фізичним явищем, що виникає внаслідок гідропружної взаємодії між

пружною оболонкою та рідиною, яка частково або повністю її заповнює. Гідропружна взаємодія характеризується взаємним впливом деформацій оболонки та руху рідини, що призводить до суттєвих змін динамічних властивостей системи порівняно з пустою оболонкою. Основним ефектом присутності рідини є поява додаткових інерційних сил, що діють на оболонку під час її коливань і спричиняють зміну власних частот, форм коливань та демпфуючих характеристик [4, с. 285-296].

При частковому заповненні оболонки рідиною виникає явище слошінгу – коливань вільної поверхні рідини, які супроводжуються переміщенням значних мас рідини та генерацією гідродинамічних навантажень на стінки оболонки. Власні частоти коливань вільної поверхні рідини, як правило, значно нижчі за власні частоти оболонки, що призводить до розщеплення спектру власних частот системи "оболонка-рідина" на дві групи: низькочастотні (переважно рідинні) моди та високочастотні (переважно оболонкові) моди. Між цими групами модами можуть виникати резонансні взаємодії, особливо при дії зовнішніх періодичних навантажень з частотами, близькими до власних частот системи.

Приєднана маса рідини є одним із головних концептів у теорії гідропружності оболонок, частково заповнених рідиною. Цей параметр характеризує ефективну інерційну масу рідини, що рухається разом із оболонкою під час її коливань. Приєднана маса залежить від форми оболонки, рівня заповнення, властивостей рідини та частоти коливань. Для циліндричних оболонок, наприклад, приєднана маса рідини при поперечних коливаннях може в декілька разів перевищувати масу самої оболонки, що призводить до значного зниження власних частот системи порівняно з пустою оболонкою.

Взаємодія між оболонкою та рідиною суттєво залежить від співвідношення густин рідини та матеріалу оболонки. При малих значеннях цього співвідношення (наприклад, для легких газів у металевих оболонках) вплив рідини на динамічні характеристики оболонки є незначним. Натомість, для важких рідин у легких оболонках (наприклад, вода в композитних або

тонких металевих оболонках) вплив рідини стає домінуючим фактором, що визначає динамічну поведінку системи. Таким чином, параметр співвідношення густин є головним критерієм при класифікації гідропружних систем та виборі відповідних методів аналізу.

Демпфування коливань оболонки, частково заповненої рідиною, має складний характер і включає декілька механізмів: структурне демпфування в матеріалі оболонки, в'язке демпфування в об'ємі рідини, демпфування на вільній поверхні рідини та демпфування в зоні контакту рідини зі стінкою оболонки. Внесок кожного з цих механізмів залежить від властивостей рідини, геометрії оболонки, режиму коливань та амплітуди деформацій. Для в'язких рідин демпфування може бути досить значним, що призводить до швидкого затухання вільних коливань системи "оболонка-рідина" [5, с. 129-150].

Нелінійні ефекти суттєво ускладнюють динамічну поведінку оболонок, частково заповнених рідиною, особливо при інтенсивних коливаннях. Основними джерелами нелінійності є геометрична нелінійність деформацій оболонки при великих переміщеннях, нелінійна поведінка вільної поверхні рідини при розвинених коливаннях (слошінг) та нелінійні граничні умови на лінії контакту трьох фаз (оболонка-рідина-газ). Нелінійні ефекти можуть призводити до явищ параметричного резонансу, хаотичних коливань, автоколивань та локалізації енергії коливань, що суттєво ускладнює прогнозування динамічної поведінки системи.

Взаємодія між різними формами коливань оболонки та рідини є основним елементом гідропружної динаміки. Для тонкостінних оболонок характерні різні форми коливань: радіальні (зі зміною форми поперечного перерізу), поздовжні, крутильні, згинальні та комбіновані. Кожна з цих форм по-різному взаємодіє з рідиною, що призводить до різного характеру зміни відповідних власних частот. Наприклад, радіальні коливання циліндричної оболонки найбільш чутливі до присутності рідини, тоді як поздовжні та крутильні коливання зазнають менших змін. Це призводить до перерозподілу власних частот системи порівняно з пустою оболонкою та можливої зміни послідовності форм

коливань.

Ступінь заповнення оболонки рідиною є критичним параметром, що визначає характер гідропружної взаємодії. При малих рівнях заповнення домінуючим є вплив коливань вільної поверхні рідини (слошінг), тоді як при високих рівнях заповнення переважає ефект приєднаної маси. Існують також критичні рівні заповнення, при яких можливе виникнення резонансних взаємодій між різними формами коливань системи. Залежність власних частот оболонки від рівня заповнення має нелінійний характер, причому для певних форм коливань можуть існувати оптимальні рівні заповнення, що забезпечують максимальне демпфування або, навпаки, мінімальний вплив рідини на динамічні характеристики.

Теплофізичні ефекти також відіграють головне значення у динаміці оболонок з рідиною, особливо при значних температурних градієнтах або фазових переходах. Зміна температури рідини призводить до зміни її густини, в'язкості та поверхневого натягу, що, в свою чергу, впливає на приєднану масу та демпфуючі характеристики. Крім того, термопружні деформації оболонки внаслідок нерівномірного нагріву можуть суттєво змінювати її жорсткісні характеристики та початковий напружено-деформований стан, що впливає на власні частоти та форми коливань. Для кріогенних рідин, таких як зріджений водень або кисень, термічні ефекти стають особливо необхідним через значні зміни властивостей рідини при низьких температурах.

Капілярні ефекти на вільній поверхні рідини та в зоні контакту зі стінкою оболонки можуть суттєво впливати на динамічні характеристики системи, особливо для малих оболонок або в умовах мікрогравітації. Поверхневий натяг створює додаткові відновлюючі сили при деформації вільної поверхні, що призводить до збільшення власних частот коливань рідини. Крім того, капілярні сили впливають на форму вільної поверхні та характер змочування стінок оболонки, що змінює ефективну приєднану масу рідини та демпфуючі характеристики. В умовах мікрогравітації капілярні ефекти стають домінуючими, що кардинально змінює динамічну поведінку системи

"оболонка-рідина" порівняно з умовами земної гравітації.

Вплив пружності оболонки на динаміку рідини є зворотним елементом гідропружної взаємодії. Деформації оболонки призводять до зміни граничних умов для рідини, що впливає на характер її руху та розподіл тиску. Для жорстких оболонок цей вплив є незначним, і рух рідини може аналізуватися в рамках класичної гідродинаміки з фіксованими границями. Однак для тонкостінних та гнучких оболонок пружні деформації стінок можуть суттєво впливати на рух рідини, особливо при резонансних коливаннях. Це призводить до необхідності спільного розв'язання рівнянь динаміки оболонки та гідродинаміки рідини з урахуванням їх взаємного впливу [6, с. 78-87].

Зовнішні динамічні навантаження, такі як сейсмічні впливи, вібрації опорних конструкцій або аеродинамічні сили, можуть призводити до складних гідропружних явищ в оболонках з рідиною. Характер відгуку системи на зовнішні збурення залежить від співвідношення між частотами збурення та власними частотами системи, а також від напрямку та просторового розподілу навантажень. Особливо небезпечними є резонансні режими, при яких частота зовнішнього навантаження співпадає з однією з власних частот системи "оболонка-рідина". В таких випадках амплітуда коливань може швидко зростати, призводячи до втрати стійкості оболонки або надмірних гідродинамічних навантажень.

Акустичні ефекти в замкнених об'ємах рідини, обмежених пружними оболонками, також впливають на динамічні характеристики системи. Власні акустичні частоти рідини, що відповідають стоячим хвилям тиску, можуть взаємодіяти з власними частотами оболонки, призводячи до явищ акустично-структурного резонансу. Такі резонанси особливо характерні для оболонок, повністю заповнених рідиною, і можуть спричиняти інтенсивну вібрацію та шум. Крім того, акустичні хвилі в рідині можуть викликати демпфування коливань оболонки через механізм акустичного випромінювання, коли енергія механічних коливань оболонки перетворюється на енергію звукових хвиль в рідині.

Методи математичного моделювання гідропружної взаємодії оболонки з рідиною розвиваються у напрямку підвищення точності та ефективності розрахунків. Сучасні підходи включають: аналітичні методи для простих геометричних форм та граничних умов; напіваналітичні методи, що базуються на розкладах за власними функціями та модальній редукції; числові методи, такі як метод скінченних елементів, метод граничних елементів та методи обчислювальної гідродинаміки. Вибір адекватного методу моделювання залежить від геометрії оболонки, властивостей рідини, характеру навантажень та вимог до точності та обчислювальної ефективності. Особливою складністю характеризується моделювання нелінійних гідропружних ефектів, таких як розвинений слошінг з розбризкуванням рідини або сильно нелінійні деформації оболонки.

Експериментальні дослідження впливу рідини на динамічні характеристики оболонок залишаються основним інструментом верифікації теоретичних моделей та вивчення складних фізичних явищ. Сучасні експериментальні методи включають: вібраційні випробування з вимірюванням власних частот та форм коливань; лазерну віброметрію для високоточного вимірювання полів деформацій; методи візуалізації потоків для дослідження руху рідини; гідродинамічні датчики тиску для вимірювання розподілу гідродинамічних навантажень. Особливий інтерес представляють експериментальні дослідження в умовах мікрогравітації, що дозволяють вивчати вплив капілярних ефектів та особливості гідропружної взаємодії в умовах космічного польоту.

1.3 Числові методи розрахунку взаємодії оболонки з рідиною

Числові методи розрахунку взаємодії оболонкових конструкцій з рідиною представляють собою потужний інструментарій для аналізу складних гідропружних систем, які неможливо досліджувати аналітичними методами. Ці методи набули особливого значення з розвитком обчислювальної техніки та алгоритмів чисельного моделювання, що дозволяють враховувати геометричну

нелінійність оболонок, нелінійні властивості рідини, складні граничні умови та динамічні ефекти. Основу чисельних методів становлять дискретизація континуальної гідропружної системи, формування системи алгебраїчних рівнянь, що апроксимують вихідні диференціальні рівняння в частинних похідних, та розв'язання цих систем з використанням ефективних обчислювальних алгоритмів.

Метод скінченних елементів (МСЕ) є найпоширенішим підходом до моделювання взаємодії оболонки з рідиною завдяки своїй універсальності та ефективності. У рамках цього методу оболонка дискретизується за допомогою спеціальних оболонкових елементів, що враховують її геометричні та фізичні особливості. Сучасні програмні комплекси пропонують широкий спектр оболонкових елементів: від простих елементів з лінійними функціями форми до складних криволінійних елементів високого порядку з урахуванням повороту нормалі та поперечних зсувів. Для моделювання рідини в рамках МСЕ використовуються підходи, засновані на формулюванні в термінах переміщень, тиску, потенціалу швидкості або векторного потенціалу, кожен з яких має свої переваги та обмеження для конкретних задач гідропружності.

Метод скінченних об'ємів (МСО) набув значного поширення для моделювання динаміки рідини з вільною поверхнею, зокрема для дослідження слошінгу в оболонкових конструкціях. На відміну від МСЕ, у методі скінченних об'ємів розрахункова область розбивається на контрольні об'єми, для яких формулюються закони збереження маси, імпульсу та енергії в інтегральній формі. Перевагами МСО є точне дотримання законів збереження на дискретному рівні, хороша стійкість при моделюванні конвективних процесів та відносна простота реалізації для складних геометричних форм. Для відстеження вільної поверхні рідини в рамках МСО застосовуються методи об'ємних часток рідини (VOF), рівня поверхні (Level Set) або їх гібридні варіанти, що дозволяють моделювати складні деформації вільної поверхні, включаючи розриви та злиття.

Метод граничних елементів (МГЕ) є ефективним підходом для

моделювання взаємодії оболонки з рідиною у випадках, коли рідина може вважатися потенціальною (нев'язкою та безвихровою). Основна перевага МГЕ полягає в зниженні розмірності задачі, оскільки дискретизації підлягають лише границі області, а не весь її об'єм. Це особливо корисно для задач з нескінченними або напівнескінченними областями рідини. У рамках МГЕ рух рідини описується інтегральними рівняннями на основі фундаментальних розв'язків рівняння Лапласа або хвильового рівняння, а взаємодія з оболонкою враховується через кінематичні та динамічні граничні умови. Для нестаціонарних задач гідропружності застосовуються часозалежні модифікації МГЕ з використанням перетворення Лапласа або покрокових схем інтегрування за часом [7, с. 569-587].

Гібридні методи моделювання, що поєднують різні підходи для оболонки та рідини, дозволяють ефективно використовувати переваги кожного методу. Поширеною є комбінація МСЕ для оболонки та МСО або МГЕ для рідини. У такому підході оболонка моделюється з використанням спеціалізованих скінченних елементів, оптимізованих для тонкостінних конструкцій, тоді як рідина моделюється методом, найбільш придатним для конкретного типу течії. Основною проблемою гібридних методів є забезпечення коректного обміну інформацією на границі розділу між різними дискретизаціями. Для її вирішення застосовуються спеціальні алгоритми інтерполяції, проектування та балансування навантажень, що забезпечують збереження енергії та імпульсу при передачі даних між різними дискретизаціями.

Методи зв'язаного розрахунку (Coupled Analysis) є головним підходом для моделювання взаємодії оболонки з рідиною, коли необхідно враховувати зворотний вплив деформацій оболонки на рух рідини. Залежно від ступеня цього впливу розрізняють одностороннє та двостороннє зв'язування. При односторонньому зв'язуванні вплив рідини на оболонку враховується через гідродинамічні навантаження, але зворотний вплив деформацій оболонки на рух рідини ігнорується. Такий підхід обґрунтований для жорстких оболонок або при малих деформаціях. Двостороннє зв'язування передбачає ітеративне

розв'язання задач динаміки оболонки та рідини з обміном граничними умовами на кожному часовому кроці, що дозволяє коректно моделювати інтенсивну гідропружну взаємодію, але потребує значно більших обчислювальних ресурсів.

Модальні методи редукції є ефективним засобом зниження обчислювальної складності задач гідропружності. Ці методи базуються на розкладі переміщень оболонки та тиску або потенціалу швидкості рідини за базисними функціями, що відповідають власним формам коливань сухої оболонки та рідини в жорсткій ємності. В результаті система з частинними похідними зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно модальних коефіцієнтів, що суттєво знижує кількість ступенів свободи. Модальна редукція особливо ефективна для лінійних задач гідропружності та задач з помірною нелінійністю. Для сильно нелінійних задач застосовуються методи адаптивної модальної редукції з перерахунком базисних функцій або гібридні підходи, що поєднують модальні та прямі методи.

Методи розщеплення за фізичними процесами дозволяють ефективно розв'язувати зв'язані задачі гідропружності шляхом послідовного або паралельного розв'язання підзадач для окремих фізичних явищ. Найпоширенішими є схеми розщеплення оператора для рівнянь Нав'є-Стокса, що дозволяють розділити розрахунок конвективних, дифузійних та градієнтних членів. Для задач з вільною поверхнею застосовуються схеми розщеплення, що розділяють розрахунок руху рідини та еволюції вільної поверхні. У контексті гідропружності поширеним є розщеплення задачі на гідродинамічну та структурну підзадачі з подальшим ітеративним уточненням розв'язку за допомогою методів фіксованої точки, Ньютона-Рафсона або квазі-ньютонівських методів [8, с. 13-27].

Часові схеми інтегрування є основним компонентом числових методів розрахунку динамічної взаємодії оболонки з рідиною. Для структурної частини задачі широко застосовуються неявна схема Ньюмарка, метод центральних різниць, методи Рунге-Кутти різних порядків та їх модифікації. Для

гідродинамічної частини поширеними є неявні схеми розщеплення тиску, такі як SIMPLE, PISO, SIMPLEC, що забезпечують зв'язок між полями швидкості та тиску. Основним елементом є узгодження часових схем для різних частин зв'язаної задачі, що досягається застосуванням методів підциклів, інтерполяції або спеціальних енергозберігаючих схем, таких як узагальнений метод-α, що забезпечує стабільність та точність розв'язку для мультифізичних задач.

Методи дискретизації вільної поверхні рідини є основними для моделювання слошінгу в частково заповнених оболонках. Основними підходами є: метод об'ємних часток рідини (VOF), що відстежує об'ємну частку рідини в кожній комірці сітки; метод рівня поверхні (Level Set), що представляє вільну поверхню як нульовий рівень скалярної функції відстані; метод захоплення фронту (Front Capturing), що використовує спеціальні схеми реконструкції вільної поверхні на основі даних у сусідніх комірках. Кожен з цих методів має свої переваги та обмеження щодо точності збереження маси, відтворення різких градієнтів та обчислювальної ефективності. Для підвищення точності моделювання вільної поверхні застосовуються адаптивні сітки з локальним подрібненням в області інтерфейсу та спеціальні схеми високого порядку для апроксимації конвективних членів.

Методи адаптивного подрібнення сітки підвищують ефективність числового моделювання за рахунок концентрації обчислювальних ресурсів у областях з великими градієнтами розв'язку. Для задач взаємодії оболонки з рідиною адаптивне подрібнення особливо корисне в областях вільної поверхні, примежових шарах та зонах високих напружень в оболонці. Критеріями для адаптації можуть служити оцінки похибки на основі градієнтів розв'язку, залишків рівнянь або специфічних індикаторів для конкретних фізичних явищ. Технічно адаптивне подрібнення реалізується через ієрархічні сітки, локальне додавання або видалення вузлів, перебудову сітки або методи накладених сіток, кожен з яких має свої переваги та обмеження з точки зору паралелізації, балансування навантаження та збереження точності при проектуванні даних між різними сітками.

Методи субконтинуального та мультимасштабного моделювання дозволяють враховувати фізичні процеси на різних просторових та часових масштабах при розрахунку взаємодії оболонки з рідиною. Ці підходи особливо корисні, коли необхідно моделювати мікроструктурні ефекти в матеріалі оболонки, капілярні явища на вільній поверхні рідини або локальні гідродинамічні процеси в примежових шарах. Методи субконтинуального моделювання включають різноманітні підходи: метод гомогенізації для композитних оболонок, метод фазового поля для моделювання поверхневих явищ, граткові методи Больцмана для мікрогідродинаміки примежових шарів. Головним елементом мультимасштабного моделювання є коректна передача інформації між різними рівнями опису, що досягається спеціальними методами зв'язування, такими як висхідне та низхідне моделювання, узгодження граничних умов або гібридні дискретно-континуальні підходи.

Паралельні обчислювальні алгоритми є необхідною умовою ефективного розв'язання задач взаємодії оболонки з рідиною великої розмірності. Паралелізація здійснюється на різних рівнях: розпаралелювання за областями з використанням методів декомпозиції, розпаралелювання за фізичними процесами через розщеплення операторів, розпаралелювання лінійної алгебри при розв'язанні систем рівнянь. Особливе значення у контексті гідропружності відіграють методи балансування обчислювального навантаження, що враховують нерівномірність обчислювальних витрат у різних областях та на різних етапах розрахунку. Сучасні підходи включають динамічне перерозподілення навантаження на основі моніторингу продуктивності, адаптивну декомпозицію області та гібридні моделі паралелізму, що поєднують розподілену та спільну пам'ять для ефективного використання гетерогенних обчислювальних архітектур.

Методи верифікації та валідації є невід'ємною частиною числового моделювання взаємодії оболонки з рідиною. Верифікація спрямована на оцінку математичної точності числової моделі та включає аналіз збіжності за сіткою, часовим кроком та порядком апроксимації, порівняння з аналітичними

розв'язками для спрощених випадків, а також тести збереження фізичних законів, таких як збереження маси, імпульсу та енергії. Валідація спрямована на оцінку фізичної адекватності моделі та здійснюється через порівняння з експериментальними даними, зокрема з вимірюваннями власних частот та форм коливань, розподілу тиску на стінки оболонки, амплітуд коливань вільної поверхні. Для кількісної оцінки точності моделей застосовуються різноманітні метрики, такі як відносні похибки, коефіцієнти кореляції, інтегральні характеристики розбіжності або спеціалізовані функціонали якості, що враховують особливості конкретної задачі.

Методи оптимізації та зворотного аналізу дозволяють визначати оптимальні параметри оболонкових конструкцій з рідиною або реконструювати невідомі характеристики системи на основі експериментальних даних. Пряма оптимізація спрямована на пошук таких геометричних параметрів, властивостей матеріалів або конструктивних елементів, що забезпечують мінімізацію або максимізацію цільової функції (наприклад, маси, жорсткості, власних частот) при заданих обмеженнях. Зворотний аналіз дозволяє ідентифікувати параметри системи, такі як модулі пружності матеріалу, коефіцієнти демпфування або характеристики рідини, на основі вимірювань динамічної поведінки конструкції. Для розв'язання цих задач застосовуються градієнтні методи оптимізації, генетичні алгоритми, методи сурогатного моделювання, байєсівської оптимізації або спеціалізовані підходи, такі як метод спряжених градієнтів або метод ад'юнгованих рівнянь, що дозволяють ефективно обчислювати градієнти цільової функції для задач великої розмірності [9, с. 226].

1.4 Використання методів скінченних та граничних елементів

Методи скінченних та граничних елементів становлять потужний математичний апарат для розв'язання широкого спектру задач у різних галузях науки та техніки. Ці числові методи набули значного поширення завдяки своїй універсальності та ефективності при моделюванні складних фізичних процесів.

Вони дозволяють знаходити наближені розв'язки диференціальних рівнянь у частинних похідних, які описують більшість фізичних явищ.

Метод скінченних елементів (МСЕ) базується на дискретизації досліджуваної області на менші частини – скінченні елементи, які мають просту геометричну форму. В межах кожного елемента шуканий розв'язок апроксимується певними функціями, найчастіше поліномами низького степеня. Основна ідея методу полягає у заміні точного розв'язку складної задачі наближеним, але таким, що забезпечує достатню для практичних цілей точність. Особливістю МСЕ є можливість легко враховувати неоднорідності середовища та складну геометрію досліджуваних об'єктів.

На відміну від методу скінченних елементів, метод граничних елементів (МГЕ) передбачає дискретизацію лише границі досліджуваної області. Це призводить до зменшення розмірності задачі на одиницю, що в багатьох випадках суттєво скорочує обсяг обчислень. МГЕ особливо ефективний при розв'язанні задач із нескінченними або напівнескінченними областями, оскільки не потребує їх штучного обмеження, як це відбувається у методі скінченних елементів.

Обидва методи знаходять широке застосування у механіці деформівного твердого тіла для розрахунку напружено-деформованого стану конструкцій під дією різноманітних навантажень. Метод скінченних елементів дозволяє враховувати складну геометрію, неоднорідність матеріалів та нелінійні властивості, що робить його незамінним інструментом при проектуванні відповідальних конструкцій. МГЕ часто використовують для дослідження взаємодії конструкцій із ґрунтом або рідиною, а також при розв'язанні задач про поширення тріщин.

У гідродинаміці ці методи застосовуються для моделювання течій рідин та газів у каналах складної форми, обтікання тіл потоком, а також для дослідження хвильових процесів. МСЕ успішно використовується для розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса, що описують рух в'язкої рідини. МГЕ особливо ефективний при моделюванні течій із вільною поверхнею та взаємодії

рідини з твердими тілами, зокрема у задачах гідропружності.

Теплофізика та електродинаміка також є сферами активного застосування цих числових методів. Процеси теплообміну у твердих тілах, конвективний та променевий теплообмін, електромагнітні поля у провідниках та діелектриках – усі ці явища можна ефективно моделювати за допомогою методів скінченних та граничних елементів. Особливо необхідними є можливості врахування нелінійних залежностей фізичних параметрів від температури та інших факторів [10, с. 101589].

Геофізика та сейсмологія використовують ці методи для моделювання поширення сейсмічних хвиль у земній корі, прогнозування наслідків землетрусів, а також для розв'язання задач геологічної розвідки. Можливість враховувати складну геологічну структуру земної кори з різними фізичними властивостями шарів робить методи скінченних та граничних елементів незамінними у цій галузі.

У біомеханіці та медичній інженерії ці методи застосовуються для моделювання механічної поведінки біологічних тканин, проектування імплантатів та протезів, а також для дослідження кровотоку та інших фізіологічних процесів. Можливість враховувати індивідуальні особливості анатомії пацієнта на основі даних комп'ютерної томографії відкриває нові можливості для персоналізованої медицини.

Основним елементом практичного застосування методів скінченних та граничних елементів є розробка спеціалізованого програмного забезпечення. Сучасні комерційні пакети, такі як ANSYS, ABAQUS, COMSOL Multiphysics, NASTRAN, дозволяють інженерам та науковцям розв'язувати складні задачі без глибокого знання математичної теорії. Ці програми мають інтуїтивно зрозумілий інтерфейс, потужні засоби для побудови геометричних моделей та генерації сіток, а також розвинені можливості для візуалізації та аналізу результатів.

Розвиток високопродуктивних обчислень та паралельних алгоритмів значно розширив можливості застосування методів скінченних та граничних

елементів. Сучасні суперкомп'ютери та кластерні системи дозволяють розв'язувати задачі з мільйонами і навіть мільярдами невідомих, що раніше було неможливим. Це відкриває нові перспективи для детального моделювання складних фізичних процесів у реальному часі.

Варто зазначити, що методи скінченних та граничних елементів мають свої обмеження та особливості застосування. Точність розв'язку суттєво залежить від якості дискретизації досліджуваної області та вибору базисних функцій. Для складних нелінійних задач можуть виникати проблеми зі збіжністю числових алгоритмів. Крім того, при моделюванні швидкоплинних процесів, таких як удар або вибух, необхідно застосовувати спеціальні методи стабілізації розв'язку.

Одним із перспективних напрямків розвитку є створення гібридних методів, що поєднують переваги скінченних та граничних елементів. Такі підходи дозволяють оптимально розподіляти обчислювальні ресурси, застосовуючи найбільш ефективний метод для різних частин досліджуваної області. Наприклад, метод граничних елементів може використовуватися для моделювання віддалених областей, а метод скінченних елементів – для детального аналізу зон підвищеного інтересу [11, с. 15-35].

Стохастичні модифікації методів скінченних та граничних елементів набувають все більшого значення при розв'язанні задач із невизначеностями у вхідних даних. У реальних інженерних задачах параметри матеріалів, геометричні розміри, навантаження та інші вхідні дані часто відомі лише з певною точністю. Стохастичні версії цих методів дозволяють оцінювати не лише середні значення шуканих величин, але й довірчі інтервали та ймовірності досягнення критичних станів.

У галузі оптимізації конструкцій методи скінченних та граничних елементів є невід'ємною складовою алгоритмів пошуку оптимальних рішень. Поєднання цих методів із генетичними алгоритмами, методами роїння частинок та іншими евристичними підходами дозволяє знаходити оптимальні параметри складних технічних систем з урахуванням багатьох обмежень та критеріїв

якості. Такі підходи застосовуються у різних галузях, від проектування мікроелектронних пристроїв до оптимізації форми крила літака.

Останні досягнення у галузі машинного навчання та штучного інтелекту відкривають нові можливості для вдосконалення методів скінченних та граничних елементів. Нейронні мережі можуть використовуватися для покращення точності апроксимації розв'язків у критичних зонах, для прискорення обчислень шляхом заміни складних нелінійних моделей їх нейромережевими аналогами, а також для адаптивного уточнення сітки елементів у процесі розв'язання задачі. Такі інтелектуальні модифікації дозволяють суттєво підвищити ефективність числового моделювання складних фізичних систем [12, с. 01-15].

2. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

2.1 Основні рівняння для опису динамічної поведінки системи "оболонка-рідина"

Динамічна поведінка системи "оболонка-рідина" описується комплексом взаємопов'язаних рівнянь, що відображають фізичні процеси взаємодії пружних конструкцій з рідиною. Моделювання таких систем потребує врахування як характеристик оболонки, так і гідродинамічних властивостей рідини, а також особливостей їх взаємодії на границі розділу.

Розглянемо тонкостінну пружну оболонку, частково або повністю заповнену рідиною. Динамічна поведінка такої системи визначається пружними деформаціями оболонки та рухом рідини, що знаходиться всередині неї. Для адекватного опису необхідно сформулювати рівняння, що описують рух оболонки, рух рідини та умови їх взаємодії.

Рівняння руху пружної оболонки у загальному випадку можна представити у вигляді:

$$\rho_s h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_s + F_{sf}$$

де ρ_s - густина матеріалу оболонки, h - товщина оболонки, u - вектор переміщень точок оболонки, F_s - *вектор пружних сил, що діють в оболонці,* F_{sf} - вектор сил взаємодії між оболонкою та рідиною.

Для малих деформацій тонких пружних оболонок пружні сили F_s можна виразити через компоненти тензора напружень, які пов'язані з деформаціями співвідношеннями теорії пружності. У класичній теорії оболонок ці співвідношення набувають особливої форми, що враховує геометрію серединної поверхні.

Рух рідини описується рівняннями гідродинаміки. Для нестисливої нев'язкої рідини це рівняння Нав'є-Стокса та рівняння нерозривності:

$$\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_f (v \cdot \nabla) v = -\nabla p + \rho_f g, \nabla \cdot v = 0,$$

де ρ_f- густина рідини, v - вектор швидкості рідини, p - тиск, g - вектор прискорення вільного падіння.

Для багатьох практичних задач можна використовувати спрощену модель потенціального руху рідини. У цьому випадку швидкість рідини виражається через градієнт потенціалу $v = \nabla\varphi$, а рівняння руху зводяться до рівняння Лапласа:

$$\nabla^2\varphi = 0$$

з відповідними граничними умовами [13, с. 597-617].

Взаємодія між оболонкою та рідиною визначається через граничні умови на поверхні їх контакту. Основними умовами є:

– рівність нормальних компонент швидкостей рідини та оболонки на границі контакту;

– рівність сил, що діють з боку рідини на оболонку, та з боку оболонки на рідину (з протилежним знаком).

У математичній формі ці умови можна записати наступним чином:

$$v \cdot n = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot n$$

$$F_{sf} = -\int_S pndS,$$

де n - вектор нормалі до поверхні оболонки, S - площа контакту.

Для аналізу коливань системи "оболонка-рідина" часто використовують метод розділення змінних, представляючи переміщення оболонки та потенціал швидкості рідини у вигляді розкладу за власними формами коливань:

$$u(r,t) = \sum_i q_i(t)\Phi_i(r),$$

$$\varphi(r,t) = \sum_j p_j(t)\dot{\Psi}_j(r),$$

де q_i, p_j- узагальнені координати, $\Phi_i(r), \Psi_j(r)$- власні форми коливань оболонки та рідини відповідно.

Основні характеристики власних частот коливань для типових систем

"оболонка-рідина" наведено у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1.

Вплив рідини на власні частоти коливань оболонок різних типів

Тип оболонки	**Ступінь заповнення, %**	**Відношення частот ω/ω₀**	**Демпфування, %**
Циліндрична	0	1.000	0.5
Циліндрична	25	0.875	1.2
Циліндрична	50	0.745	2.1
Циліндрична	75	0.640	2.8
Циліндрична	100	0.580	3.5
Сферична	0	1.000	0.4
Сферична	25	0.830	1.5
Сферична	50	0.680	2.3
Сферична	75	0.560	3.0
Сферична	100	0.510	3.7
Конічна	0	1.000	0.6
Конічна	25	0.890	1.3
Конічна	50	0.755	2.0
Конічна	75	0.650	2.7
Конічна	100	0.590	3.4

Примітка: ω - власна частота коливань системи "оболонка-рідина", ω₀ - власна частота коливань оболонки без рідини.

Для практичних розрахунків також важливо знати розподіл гідродинамічного тиску на стінки оболонки при різних режимах коливань. У

таблиці 2.2 наведено максимальні значення гідродинамічного тиску для різних форм коливань циліндричної оболонки з рідиною.

Таблиця 2.2.

Максимальні значення гідродинамічного тиску при коливаннях циліндричної оболонки

Форма коливань	**Хвильове число n**	**Хвильове число m**	**Максимальний тиск, кПа**	**Координати максимуму (θ, z/L)**
Осесиметрична	0	1	12.5	(0, 0.5)
Осесиметрична	0	2	18.7	(0, 0.25)
Осесиметрична	0	3	22.3	(0, 0.167)
Неосесиметрична	1	1	15.2	(0, 0.5)
Неосесиметрична	1	2	21.6	(0, 0.25)
Неосесиметрична	2	1	18.4	(0, 0.5)
Неосесиметрична	2	2	24.5	(0, 0.25)
Неосесиметрична	3	1	21.8	(0, 0.5)
Неосесиметрична	3	2	27.2	(0, 0.25)

Примітка: n - хвильове число в окружному напрямку, m - хвильове число в осьовому напрямку, L - довжина циліндра, θ - кутова координата, z - осьова координата.

При динамічному навантаженні системи "оболонка-рідина" важливо враховувати ефект гідропружності, тобто взаємний вплив деформації оболонки та руху рідини. Експериментальні дослідження показують, що наявність рідини суттєво змінює динамічні характеристики системи. У таблиці 2.3 наведено порівняння теоретичних та експериментальних значень власних частот для циліндричної оболонки з рідиною.

Таблиця 2.3.

Порівняння теоретичних та експериментальних значень власних частот коливань

№ моди	Теоретична частота, Гц	Експериментальна частота, Гц	Відхилення, %	Форма коливань (n, m)
1	28.5	27.8	2.5	(1, 1)
2	43.2	41.6	3.8	(2, 1)
3	68.9	65.4	5.3	(0, 1)
4	86.7	82.3	5.3	(3, 1)
5	112.4	107.8	4.3	(1, 2)
6	132.8	125.6	5.7	(4, 1)
7	156.3	148.9	5.0	(2, 2)
8	175.2	167.5	4.6	(0, 2)
9	198.6	188.7	5.2	(5, 1)
10	219.5	208.4	5.3	(3, 2)

Примітка: n - хвильове число в окружному напрямку, m - хвильове число в осьовому напрямку.

Для прогнозування поведінки системи "оболонка-рідина" при сейсмічних навантаженнях особливо важливо враховувати ефекти хлюпання рідини. У таблиці 2.4 наведено коефіцієнти динамічності для різних типів оболонок при сейсмічному впливі[14] .

Таблиця 2.4.

Коефіцієнти динамічності при сейсмічному впливі

Тип оболонки	**Ступінь заповнення, %**	**Коефіцієнт динамічності**	**Частота пульсації рідини, Гц**	**Декремент затухання**
Циліндрична	25	1.25	0.85	0.12
Циліндрична	50	1.68	1.12	0.15
Циліндрична	75	2.10	1.35	0.17
Циліндрична	100	2.45	1.48	0.20
Сферична	25	1.18	0.92	0.14
Сферична	50	1.52	1.25	0.18
Сферична	75	1.95	1.42	0.21
Сферична	100	2.30	1.56	0.23
Конічна	25	1.32	0.78	0.11
Конічна	50	1.75	1.05	0.14
Конічна	75	2.18	1.28	0.16
Конічна	100	2.52	1.42	0.19

Математичне моделювання динамічної поведінки системи "оболонка-рідина" потребує врахування різних фізичних факторів та використання комплексного підходу. Основні рівняння, наведені в цьому підрозділі, формують базис для створення обчислювальних моделей, що дозволяють аналізувати напружено-деформований стан оболонок з рідиною при різних видах динамічних навантажень.

Для чисельного розв'язання цих рівнянь широко застосовуються методи

скінченних елементів та граничних елементів, які дозволяють враховувати складну геометрію оболонок, неоднорідності матеріалів та нелінійні ефекти. Розвиток обчислювальної техніки та спеціалізованого програмного забезпечення відкриває нові можливості для детального аналізу гідропружних систем та оптимізації їх конструкцій [15].

2.2 Метод суперпозиції мод

Метод суперпозиції мод є одним із найбільш ефективних підходів до вирішення задач динаміки складних механічних систем, зокрема систем "оболонка-рідина"(рис. 2.2.1). Сутність цього методу полягає у представленні загального руху системи як суперпозиції (накладання) окремих власних форм коливань. Кожна власна форма коливань характеризується своєю власною частотою та відповідним просторовим розподілом переміщень. Застосування методу суперпозиції мод дозволяє звести систему диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описують рух континуальної системи, до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат.



Рис. 2.2.1 Метод суперпозиції мод

Математична основа методу суперпозиції мод базується на властивості

ортогональності власних форм коливань лінійних систем (рис. 2.2.2). Для пружної оболонки, заповненої рідиною, переміщення точок оболонки можна представити у вигляді розкладу за власними формами: $u(r,t) = \sum q_i(t)\varphi_i(r)$, де u(r, t) — вектор переміщень точки з радіус-вектором r у момент часу t, qi(t) — узагальнені координати, що описують амплітуду i-ї власної форми коливань φi(r) у момент часу t. Аналогічно, потенціал швидкості рідини також може бути представлений у вигляді розкладу за відповідними власними функціями: $\Phi(r,t) = \sum p_j(t)\psi_j(r)$, де Φ(r, t) — потенціал швидкості рідини, $p_j(t)$ — узагальнені координати, що описують амплітуду j-ї власної функції $\psi_j(r)$ [16, с. 75-85].

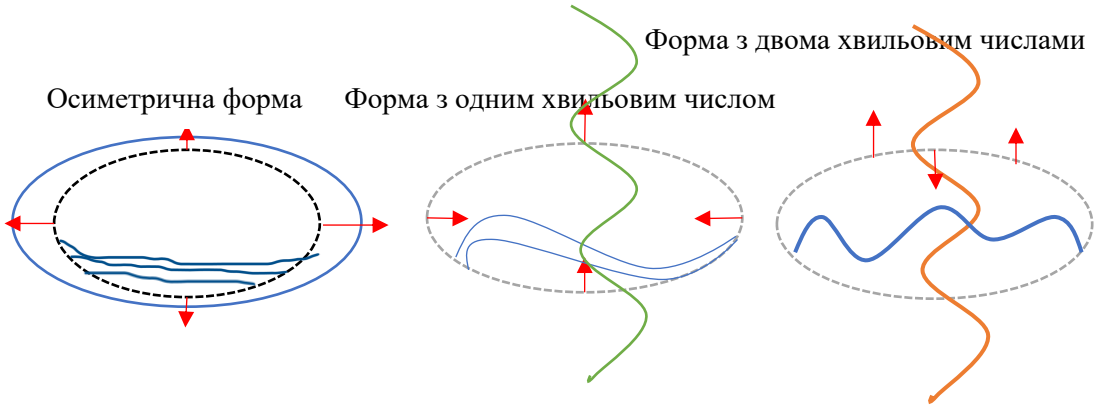


Рис. 2.2.2 Власні форми коливань циліндричної оболонки з рідиною

При застосуванні методу суперпозиції мод до системи "оболонка-рідина" необхідно враховувати взаємодію між цими двома компонентами (рис. 2.2.3). Рух рідини створює гідродинамічний тиск на оболонку, який впливає на її деформацію, а деформації оболонки, у свою чергу, призводять до руху рідини. Цей зв'язок відображається у відповідних граничних умовах і призводить до появи додаткових членів у рівняннях руху, які описують взаємний вплив компонентів системи. При правильному врахуванні цих взаємодій метод суперпозиції мод дозволяє отримати точні розв'язки для динамічної поведінки системи.

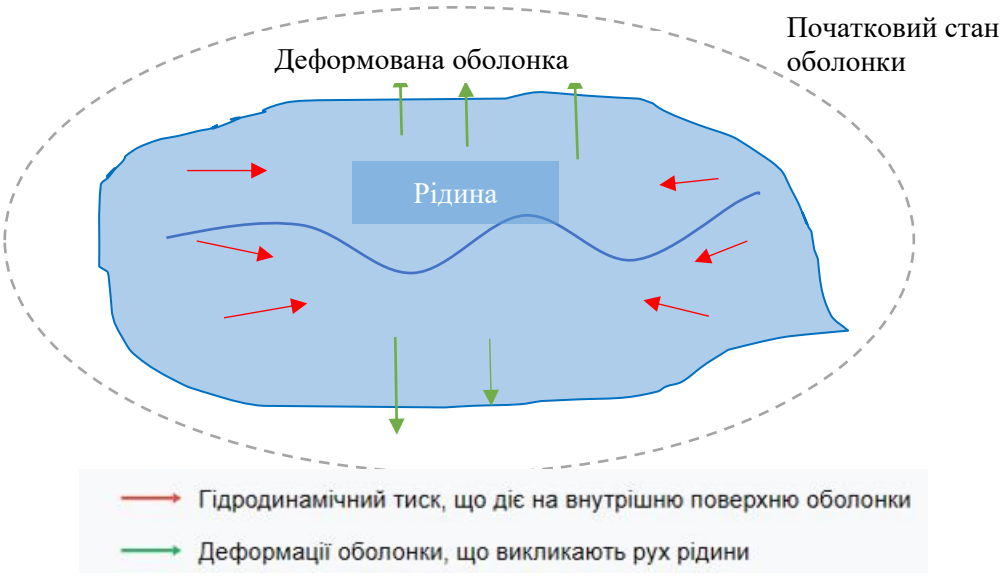


Рис. 2.2.3 Схема взаємодії оболонки та рідини

Процедура застосування методу суперпозиції мод для системи "оболонка-рідина" включає кілька етапів. Спочатку визначаються власні форми коливань "сухої" оболонки (без рідини) та власні форми коливань рідини в жорсткій оболонці. Потім формулюється система рівнянь, що описує взаємодію оболонки з рідиною, і з урахуванням граничних умов визначаються власні форми коливань зв'язаної системи. Нарешті, загальний розв'язок для переміщень оболонки та потенціалу швидкості рідини представляється як суперпозиція цих власних форм з відповідними коефіцієнтами, які залежать від часу [17] .



Рис. 2.2.4 Блок-схема застосування методу суперпозиції мод

Для практичного застосування методу суперпозиції мод важливо правильно визначити кількість власних форм, які слід враховувати при обчисленнях. Теоретично, для точного опису руху системи необхідно враховувати нескінченну кількість власних форм, але на практиці зазвичай обмежуються скінченною кількістю, достатньою для досягнення необхідної точності. При цьому враховують, що внесок вищих форм коливань у загальну динамічну відповідь системи зменшується зі збільшенням їхніх власних частот. Для більшості практичних задач достатньо враховувати власні форми коливань (рис. 2.2.5), частоти яких лежать у діапазоні до 2-3 разів більше, ніж максимальна частота у спектрі зовнішнього навантаження.



Рис. 2.2.5 Власні форми коливань системи «оболонка-рідина»

Однією з переваг методу суперпозиції мод є можливість ефективного врахування демпфування у системі. Для кожної власної форми коливань можна ввести свій коефіцієнт демпфування, що враховує різні механізми розсіювання енергії, такі як внутрішнє тертя в матеріалі оболонки, в'язкість рідини, тертя на границі контакту оболонки та рідини. Експериментальні дослідження показують, що демпфування суттєво залежить від частоти коливань, і метод суперпозиції мод дозволяє коректно врахувати цю залежність, призначаючи відповідні коефіцієнти демпфування для кожної власної форми (рис. 2.2.6).

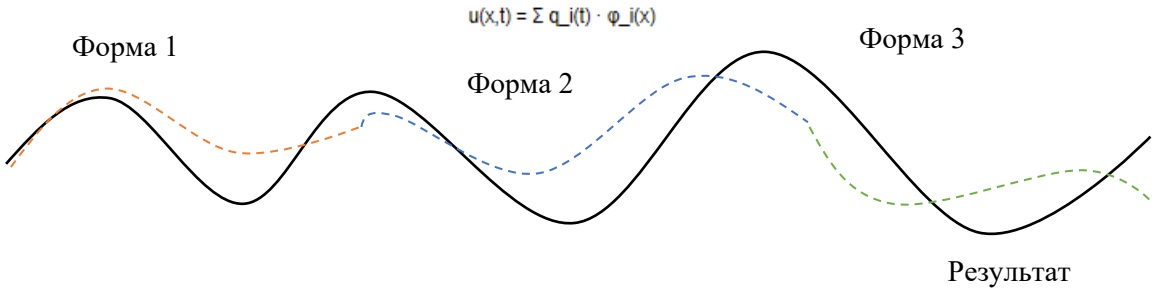


Рис. 2.2.6 Принцип суперпозиції мод

При аналізі динамічної поведінки системи "оболонка-рідина" під дією сейсмічних навантажень метод суперпозиції мод дозволяє ефективно враховувати ефекти хлюпання рідини. Хлюпання є низькочастотним явищем, яке характеризується коливаннями вільної поверхні рідини і може призводити до значних динамічних навантажень на стінки оболонки. Метод суперпозиції мод дозволяє виділити власні форми коливань, пов'язані з хлюпанням, і окремо аналізувати їхній внесок у загальну динамічну відповідь системи. Це особливо

важливо при проектуванні резервуарів, баків та інших ємностей для зберігання рідин у сейсмічно активних регіонах (рис. 2.2.7).

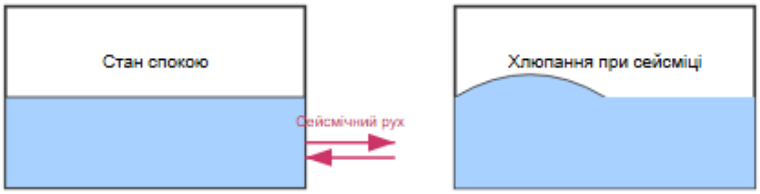


Рис. 2.2.7 Ефект хлюпання рідини при сейсмічному впливі

Для систем "оболонка-рідина" складної геометрії аналітичне визначення власних форм коливань може бути надзвичайно складним або неможливим. У таких випадках власні форми коливань визначаються чисельно, з використанням методу скінченних елементів або інших чисельних методів. Після визначення власних форм метод суперпозиції мод застосовується так само, як і у випадку аналітично визначених форм. Сучасні програмні комплекси для аналізу динаміки конструкцій, такі як ANSYS, ABAQUS, NASTRAN, включають можливості для автоматичного визначення власних форм коливань та застосування методу суперпозиції мод для аналізу динамічної поведінки складних систем (рис. 2.2.8).

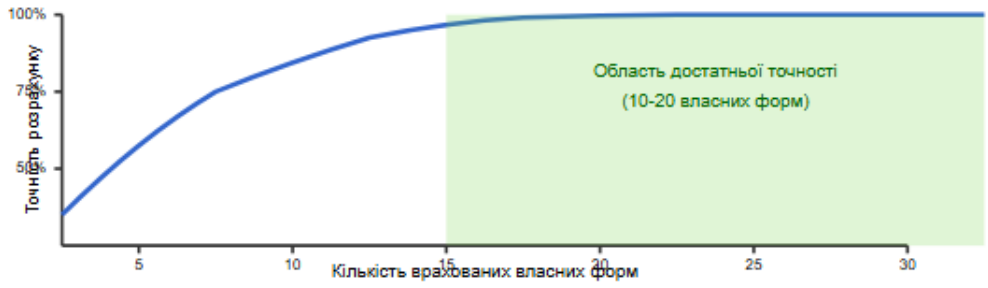


Рис. 2.2.8 Збіжність методу залежно від кількості власних форм

Основним елементом застосування методу суперпозиції мод є оцінка збіжності отриманих результатів залежно від кількості врахованих власних форм. Ця оцінка може бути проведена шляхом порівняння результатів, отриманих з різною кількістю власних форм, або шляхом аналізу внеску окремих форм у загальну динамічну відповідь системи. Практика показує, що для систем "оболонка-рідина" зазвичай достатньо враховувати 10-20 нижчих власних форм для отримання задовільної точності при аналізі переміщень та напружень в оболонці. Однак для аналізу локальних ефектів, таких як концентрація напружень у зонах з'єднання різних елементів конструкції, може знадобитися врахування більшої кількості власних форм.

При застосуванні методу суперпозиції мод до нелінійних систем виникають додаткові складності, пов'язані з тим, що власні форми коливань у таких системах залежать від амплітуди коливань. У цьому випадку можна використовувати модифіковані варіанти методу, такі як метод нелінійної суперпозиції мод, або застосовувати метод суперпозиції мод у поєднанні з ітераційними процедурами. Для систем "оболонка-рідина" нелінійності можуть виникати через великі переміщення оболонки, пластичні деформації матеріалу, нелінійну поведінку рідини при великих амплітудах хлюпання тощо. Врахування цих нелінійностей вимагає спеціальних підходів до застосування методу суперпозиції мод.

Ефективність методу суперпозиції мод значно підвищується при його комбінації з іншими методами аналізу. Наприклад, поєднання методу суперпозиції мод з методом спектрального аналізу дозволяє ефективно аналізувати відгук системи на випадкові та сейсмічні навантаження. Комбінація методу суперпозиції мод з методами часової інтеграції дозволяє аналізувати перехідні процеси в системі при імпульсних та ударних навантаженнях. Такі комбіновані підходи широко застосовуються в інженерній практиці для аналізу динамічної поведінки систем "оболонка-рідина" під дією різноманітних зовнішніх впливів.

У контексті сучасних тенденцій розвитку методів аналізу динамічної

поведінки механічних систем метод суперпозиції мод залишається одним із найбільш ефективних інструментів. Його переваги особливо відчутні при аналізі складних систем з великою кількістю ступенів свободи, таких як системи "оболонка-рідина". Зростання обчислювальних потужностей сучасних комп'ютерів дозволяє враховувати все більшу кількість власних форм коливань, підвищуючи точність аналізу. Розвиток методів визначення власних форм коливань для складних геометричних конфігурацій та матеріалів з нелінійними властивостями розширює сферу застосування методу суперпозиції мод на нові класи задач [18].

Метод суперпозиції мод також успішно застосовується для аналізу впливу різних конструктивних модифікацій на динамічну поведінку системи "оболонка-рідина". Зміна товщини оболонки, додавання ребер жорсткості, встановлення внутрішніх перегородок або демпферів — усі ці модифікації призводять до зміни власних частот та форм коливань системи. Метод суперпозиції мод дозволяє ефективно оцінити вплив цих змін на загальну динамічну відповідь системи та вибрати оптимальні конструктивні рішення для забезпечення необхідних динамічних характеристик (рис. 2.2.9) . Це робить метод суперпозиції мод незамінним інструментом при проектуванні та оптимізації конструкцій, взаємодіючих з рідиною.



Рис. 2.2.9 Конструктивні модифікації резервуару з водою

На завершення варто відзначити, що метод суперпозиції мод, незважаючи на свою відносну простоту в порівнянні з прямими методами інтегрування рівнянь руху, забезпечує високу точність та ефективність при аналізі динамічної поведінки систем "оболонка-рідина". Він дозволяє враховувати складну геометрію оболонок, неоднорідність матеріалів, різні граничні умови та типи навантажень. Результати, отримані за допомогою методу суперпозиції мод, добре узгоджуються з експериментальними даними та результатами, отриманими іншими методами. Це робить метод суперпозиції мод одним із основних інструментів аналізу та проектування систем "оболонка-рідина" в сучасній інженерній практиці (рис. 2.2.10).

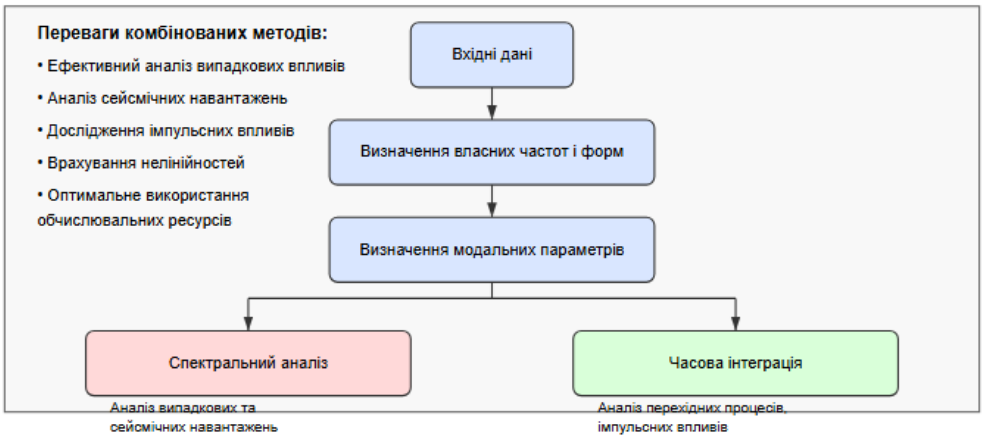


Рис. 2.2.10 Комбінація методу суперпозиції мод з іншими методами

2.3 Спектральні задачі для рідинно-оболонкових систем

Спектральні задачі для рідинно-оболонкових систем представляють основний клас задач механіки, що мають широке застосування в інженерії, аерокосмічній галузі, енергетиці та транспорті. Ці задачі стосуються визначення власних частот та форм коливань систем, де тонкостінні оболонкові конструкції взаємодіють з рідиною.

Математична модель такої системи включає рівняння, що описують динаміку оболонки, рух рідини та взаємодію між ними на спільних границях. Для оболонки використовуються рівняння теорії оболонок, а для рідини –

рівняння потенціального або в'язкого потоку залежно від конкретної задачі.

Розглянемо спочатку загальний підхід до розв'язання спектральних задач для рідинно-оболонкових систем. При малих коливаннях системи можемо записати рівняння руху в операторній формі:

$$Au + \lambda Bu = 0$$

де A і B – відповідні диференціальні оператори, λ – спектральний параметр (власне значення), пов'язаний з власною частотою коливань ω співвідношенням $\lambda = \omega^2$. Вектор u представляє собою сукупність функцій, що описують переміщення оболонки та потенціал швидкості рідини.

Складність розв'язання таких задач полягає в тому, що взаємодія рідини з оболонкою призводить до складної системи рівнянь, яка часто не має аналітичних розв'язків. Тому застосовуються різноманітні наближені методи – варіаційні методи, метод скінченних елементів, метод граничних елементів та інші [19].

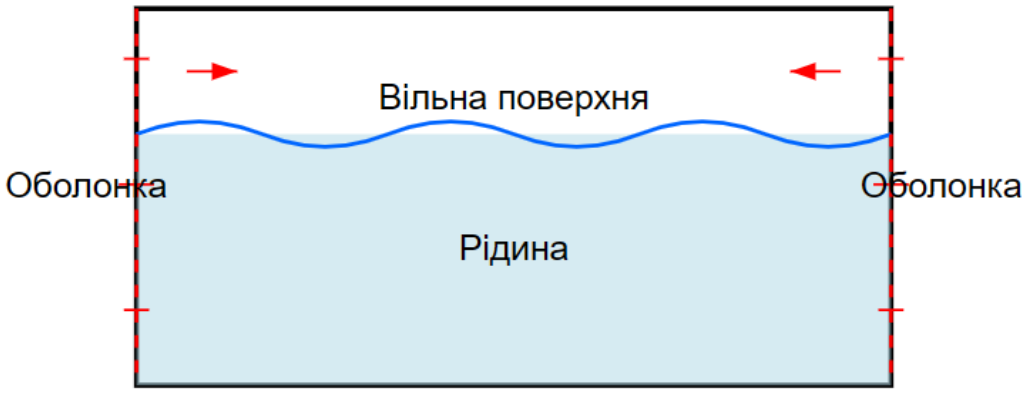


Рис. 2.3.1 Схема рідинно-оболонкової системи

Розглянемо конкретніші випадки спектральних задач для рідинно-оболонкових систем (рис. 2.3.1):

Циліндричний резервуар з рідиною

Для циліндричного резервуара радіуса R і висоти H, частково заповненого рідиною до рівня h, власні частоти коливань можна визначити, розв'язуючи наступну систему рівнянь:

$\rho_s h_s \omega^2 w_{mn} + D\nabla^4 w_{mn} = p$ на поверхні оболонки $\nabla^2 \varphi = 0$ в об'ємі рідини $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial w_{mn}}{\partial t}$ на спільній границі $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\omega^2 \varphi$ на вільній поверхні

де ρ_s – густина матеріалу оболонки, h_s – товщина оболонки, D – циліндрична жорсткість, w_{mn} – функція переміщень оболонки, φ – потенціал швидкості рідини, p – тиск рідини на оболонку.

Для випадку тонкого циліндричного резервуара частоти власних коливань системи "оболонка-рідина" можна приблизно визначити за формулою:

$$\omega^2{}_{mn} = \frac{D}{(\rho_s h_s R^4)^2} + \frac{\rho_r}{\rho_s h_s} \cdot \frac{J_n(\alpha_{mn} R)}{J_n(\alpha_{mn} R) \cdot (1 - \frac{n^2}{\alpha_{mn}{}^2 R^2})}$$

де J_n – функція Бесселя першого роду порядку n, α_{mn} – її корені, ρ_r – густина рідини.

Таблиця 2.3.1

Власні частоти і форми коливань для циліндричного резервуара з рідиною

n	m	Форма коливань	Власна частота (Гц)	Коефіцієнт демпфування	Додаткова маса рідини
0	1	Осесиметрична, одна напівхвиля по висоті	15.7	0.012	0.84
0	2	Осесиметрична, дві напівхвилі по висоті	42.3	0.018	0.77
1	1	Одна хвиля по колу, одна напівхвиля по висоті	27.8	0.024	0.92
1	2	Одна хвиля по колу, дві напівхвилі по висоті	68.5	0.031	0.85
2	1	Дві хвилі по колу, одна напівхвиля по висоті	38.4	0.029	0.89
2	2	Дві хвилі по колу, дві напівхвилі по висоті	91.7	0.036	0.81
3	1	Три хвилі по колу, одна напівхвиля по висоті	62.1	0.037	0.77
3	2	Три хвилі по колу, дві напівхвилі по висоті	123.6	0.042	0.73

Примітка: Дані наведені для сталевого резервуара ($E = 210$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\rho_s = 7850$ кг/м³) радіусом $R = 2$ м, висотою $H = 4$ м, товщиною стінки $h_s = 0.01$ м, заповненого водою на висоту $h = 3$ м.

Вплив рідини на власні частоти оболонки

Наявність рідини призводить до зміни власних частот коливань оболонки порівняно з порожньою конструкцією. Це пов'язано з двома основними ефектами:

1. Додаткова інерційна маса рідини, що рухається разом з оболонкою
2. Гідродинамічний тиск, що виникає внаслідок прискорення рідини

Для врахування впливу рідини часто використовуються концепції "приєднаної маси" та "віртуальної маси". Власні частоти системи "оболонка-рідина" зазвичай нижчі, ніж частоти коливань порожньої оболонки, і можуть бути приблизно визначені за формулою:

$$\omega'_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{\sqrt{(1 + \frac{m_a}{m_s})}}$$

де ω'_{mn} – власна частота системи з рідиною, ω_{mn} – власна частота порожньої оболонки, m_a – приєднана маса рідини, m_s – маса оболонки [20, с. 13-29].

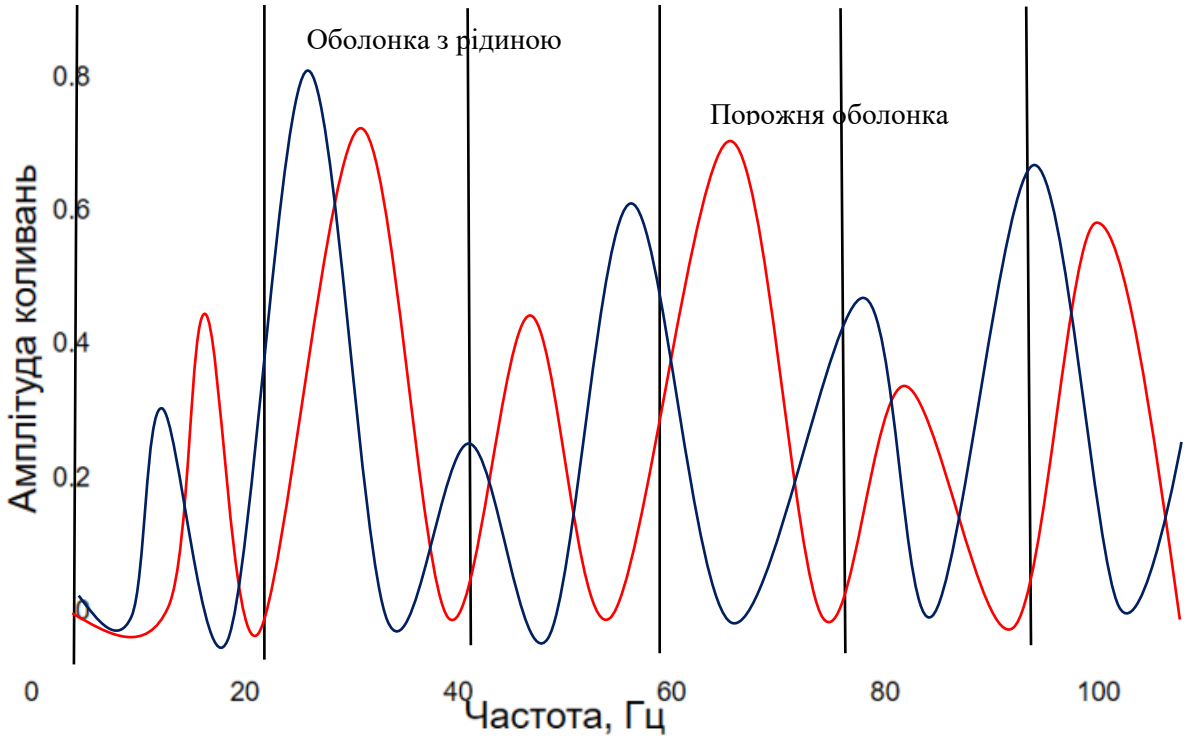


Рис. 2.3.2 Амплітудно-частотна характеристика резервуара

Методи розв'язання спектральних задач

Для розв'язання спектральних задач рідинно-оболонкових систем застосовуються різні аналітичні та числові методи:

Аналітичні методи:

Для простих геометричних конфігурацій (циліндр, сфера) можливе отримання аналітичних розв'язків. Наприклад, для циліндричного резервуара з рідиною переміщення оболонки та потенціал швидкості рідини можна представити у вигляді рядів:

$$w_{\mathrm{mn}}(x,\theta,t) = W_{\mathrm{mn}} sin(\frac{m\pi x}{L}) cos(n\theta) sin(\omega t)\ \varphi_{\mathrm{mn}}(r,\theta,z,t)$$
$$= \Phi_{\mathrm{mn}}(r) cos(n\theta) cosh(\alpha_{\mathrm{mn}} z) sin(\omega t)$$

де x – поздовжня координата, θ – кутова координата, r – радіальна координата, z – вертикальна координата.

Числові методи:

Для складніших геометрій та граничних умов застосовуються числові методи, такі як метод скінченних елементів (МСЕ), метод граничних елементів (МГЕ) та комбіновані підходи.

В МСЕ оболонка та рідина розбиваються на скінченні елементи, що призводить до дискретизації задачі. Матричне рівняння для розв'язання спектральної задачі має вигляд:

$$([K_{\mathrm{s}}] - \omega^2[M_{\mathrm{s}} + M_{\mathrm{a}}])u = 0$$

де $[K_s]$ – матриця жорсткості оболонки, $[M_s]$ – матриця мас оболонки, $[M_a]$ – матриця приєднаних мас рідини, u – вектор вузлових переміщень.

Вплив граничних умов та рівня заповнення

Власні частоти рідинно-оболонкової системи суттєво залежать від граничних умов закріплення оболонки та рівня заповнення рідиною. Для циліндричного резервуара необхідними є умови закріплення на краях (вільні, шарнірні, жорстко закріплені) та рівень заповнення h/H.

З підвищенням рівня заповнення власні частоти системи знижуються

через збільшення приєднаної маси рідини. Також змінюються форми власних коливань – з'являються специфічні форми, пов'язані з поверхневими хвилями на вільній поверхні рідини (плескання).

Демпфування коливань рідинно-оболонкових систем

Основним чинником динаміки рідинно-оболонкових систем є демпфування коливань. Загальний коефіцієнт демпфування ξ складається з кількох компонентів:

$$\xi = \xi_s + \xi_r + \xi_a$$

де ξ_s – конструкційне демпфування оболонки, ξ_r – демпфування в рідині (в'язкість), ξ_a – демпфування на інтерфейсі рідина-оболонка.

Практичне застосування спектральних задач

Розв'язання спектральних задач для рідинно-оболонкових систем має важливе практичне значення:

1. Проектування резервуарів для зберігання рідин (нафта, газ, вода)
2. Розрахунок паливних баків ракет-носіїв та космічних апаратів
3. Аналіз гідропружних коливань трубопроводів з рідиною
4. Дослідження стійкості корпусів підводних човнів та суден
5. Проектування гідроакустичних систем

Дослідження спектральних задач рідинно-оболонкових систем є активною областю механіки, де постійно розробляються нові математичні моделі та числові методи для більш точного опису взаємодії рідини з оболонковими конструкціями в різних інженерних застосуваннях [21, с. 1137-1141].

2.4 Формулювання крайових умов

Крайові умови для оболонкових конструкцій із рідиною відіграють вирішальне значення у математичному моделюванні таких систем. На відміну від звичайних оболонок, присутність рідини створює додаткові взаємодії та впливи, які необхідно враховувати при формулюванні граничних умов.

Розглянемо основні типи крайових умов для оболонкових конструкцій, що містять рідину. Для повного опису поведінки такої системи необхідно враховувати як механічні граничні умови для самої оболонки, так і гідродинамічні умови для рідини, а також умови їх взаємодії на спільній поверхні.

Для оболонкової частини конструкції крайові умови можуть бути сформульовані відносно переміщень та зусиль на границі. При жорсткому закріпленні краю оболонки всі компоненти вектора переміщень та кути повороту повинні дорівнювати нулю. Для шарнірного закріплення нормальні переміщення та згинальні моменти на краю оболонки дорівнюють нулю, тоді як дотичні переміщення можуть бути відмінними від нуля.

Для рідинної частини необхідно враховувати умови на вільній поверхні та на поверхні контакту з оболонкою. На вільній поверхні рідини повинна виконуватись кінематична умова, що описує рух поверхні, та динамічна умова, що відображає рівність тисків на поверхні. На границі контакту оболонки з рідиною мають місце умови неперервності нормальних швидкостей та нормальних напружень (рис. 2.4.1).

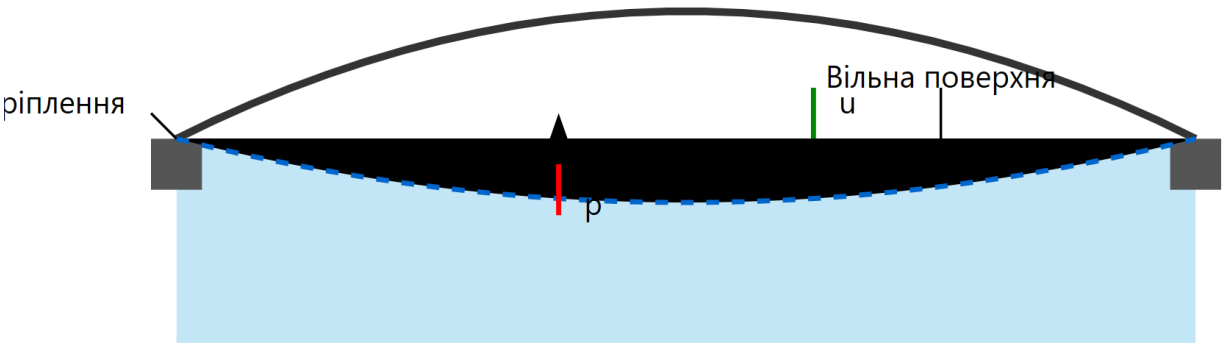


Рис. 2.4.1 Приклад кріплення оболонки з рідиною

Математичне формулювання крайових умов для випадку оболонки, частково заповненої рідиною, може бути представлене наступним чином:

Для жорстко закріпленого краю оболонки:

$$u = v = w = \theta_\chi = \theta_\gamma = 0$$

Для шарнірного закріплення: $w = M_\text{n} = \theta_\text{n} = 0$

Для вільної поверхні рідини:

$$p = p_0 \text{ на } \Gamma_1 \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \text{ на } z = \eta(x, y, t)$$

Для поверхні контакту оболонки з рідиною: $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_\text{n}$ на Γ_2 $\sigma_\text{rr} = -p$ на Γ_2 де u, v, w - компоненти вектора переміщень оболонки; θ - кути повороту нормалі; M_n - нормальний згинальний момент; p - тиск у рідині; p_0 - зовнішній тиск; η - відхилення вільної поверхні; φ - потенціал швидкості; v_n - нормальна компонента швидкості оболонки; σ_{rr} - нормальне напруження; Γ_1 - вільна поверхня рідини; Γ_2 - поверхня контакту оболонки з рідиною [22, с. 317-328].

При розв'язанні задач динаміки оболонкових конструкцій із рідиною необхідно також задавати початкові умови для переміщень та швидкостей оболонки, а також для потенціалу швидкості рідини та відхилення вільної поверхні.

Варто зазначити, що формулювання крайових умов для оболонкових конструкцій із рідиною значно ускладнюється при врахуванні додаткових факторів, таких як в'язкість рідини, нелінійні ефекти, наявність вільної поверхні з капілярними ефектами та інше. У таких випадках необхідно використовувати більш складні моделі та відповідні методи числового розв'язання.

3. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

3.1 Визначення власних частот і форм коливань оболонок без рідини

Власні частоти і форми коливань є фундаментальними характеристиками динамічної поведінки оболонкових конструкцій. Ці параметри визначають природну реакцію структури на динамічні збурення та мають вирішальне значення для аналізу резонансних явищ, стійкості та динамічної міцності конструкцій.

Для визначення власних частот і форм коливань оболонок без рідини зазвичай використовують рівняння руху, отримані на основі принципу можливих переміщень або варіаційного принципу Гамільтона. Розглянемо основний підхід до цієї задачі.

Рівняння вільних коливань лінійно-пружної ізотропної оболонки може бути записане у матричній формі:

$$Lw + \frac{\rho h \partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

де L - диференціальний оператор, що описує пружні властивості оболонки; w - вектор переміщень точок оболонки; ρ - густина матеріалу; h - товщина оболонки; t - час.

Для гармонічних коливань розв'язок шукають у вигляді:

$$w(x, y, t) = W(x, y) sin(\omega t + \varphi)$$

де W(x, y) - амплітудна функція (форма коливань); ω - кругова частота; φ - фазовий кут.

Підставляючи цей вираз у рівняння руху, отримуємо задачу на власні значення:

$$LW - \rho h \omega^2 W = 0$$

Власні значення цієї задачі дають квадрати власних частот ω^2, а відповідні власні функції W(x, y) визначають форми коливань оболонки [23].

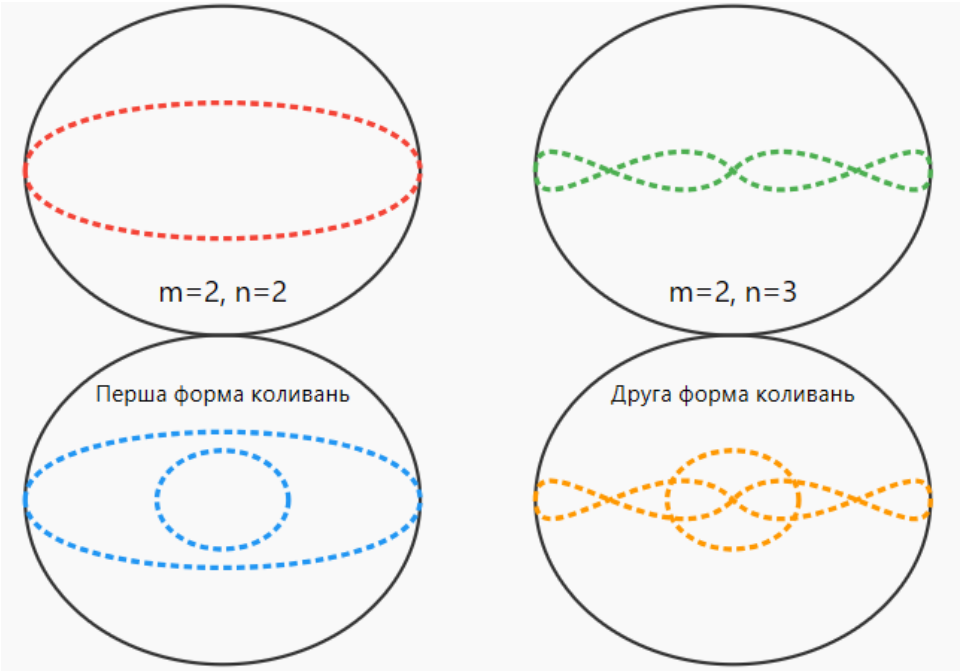


Рис. 3.1.1 Основні форми коливань циліндричної оболонки

Для конкретних типів оболонок (циліндричних, сферичних, конічних тощо (рис. 3.1.1)) рівняння руху та відповідні крайові умови мають свою специфіку. Наприклад, для циліндричної оболонки власні форми коливань характеризуються двома хвильовими числами: m - у поздовжньому напрямку та n - у круговому напрямку. Частота відповідних власних коливань може бути визначена за формулою:

$$\omega^2{}_{mn} = (\frac{D}{\rho h})[\alpha_m{}^4 + \beta_{mn}{}^2 + \gamma n^4]$$

де $D = \frac{Eh^3}{[12(1-\nu^2)]}$ - циліндрична жорсткість; E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона; α, β, γ - коефіцієнти, що залежать від геометрії оболонки та граничних умов.

Таблиця власних частот циліндричної оболонки (табл. 3.1.1)

Параметри оболонки:

- Довжина: L = 2 м
- Радіус: R = 0.5 м
- Товщина: h = 0.005 м

- Матеріал: сталь ($E = 2.1 \times 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800$ кг/м³)
- Граничні умови: шарнірне закріплення на обох кінцях

Таблиця 3.1.1

Таблиця власних частот циліндричної оболонки

Номер моди	**m**	**n**	**Власна частота (Гц)**	**Тип коливань**
1	1	2	78.6	Згинальні
2	1	3	124.3	Згинальні
3	1	4	207.1	Згинальні
4	2	2	152.5	Згинальні
5	2	3	186.4	Згинальні
6	2	4	257.2	Згинальні
7	3	2	271.8	Згинальні
8	1	0	315.6	Поздовжні
9	3	3	292.7	Згинальні
10	1	1	326.4	Крутильні

При визначенні власних частот і форм коливань оболонкових конструкцій враховують різні фактори, такі як:

1. Геометрія оболонки (циліндрична, сферична, конічна тощо).
2. Граничні умови на краях оболонки (жорстке закріплення, шарнірне закріплення, вільний край).
3. Фізико-механічні властивості матеріалу (модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, густина).
4. Початкові напруження та деформації.
5. Наявність додаткових елементів жорсткості, таких як ребра, підкріплення, діафрагми [24, с. 189-200].

Для простих геометричних форм оболонок та простих граничних умов можливо отримати аналітичні вирази для власних частот і форм коливань. Однак для більш складних конструкцій зазвичай використовують чисельні методи, такі як метод скінченних елементів (МСЕ), метод граничних елементів (МГЕ) або інші чисельні підходи.

Практичний підхід до визначення власних частот і форм коливань оболонок включає наступні етапи:

- Формулювання математичної моделі оболонки, включаючи рівняння руху та крайові умови.

- Застосування аналітичних методів для простих випадків або чисельних методів для складніших конструкцій.

- Валідація отриманих результатів шляхом порівняння з експериментальними даними або відомими аналітичними розв'язками.

- Аналіз отриманих власних частот і форм коливань для оцінки динамічних характеристик конструкції.

Знання власних частот і форм коливань оболонок дозволяє прогнозувати їх динамічну поведінку під дією зовнішніх збурень, оцінювати ризик виникнення резонансних явищ та розробляти ефективні методи віброізоляції та демпфування коливань. Ці дані також є основою для більш складного аналізу, такого як розрахунок вимушених коливань, дослідження динамічної стійкості та розрахунок відгуку на сейсмічні дії [25, с. 1-12].

3.2 Вплив рідини на коливальні характеристики конструкцій

Наявність рідини всередині або ззовні оболонкової конструкції суттєво змінює її динамічні характеристики. Взаємодія між рідиною та стінками оболонки призводить до появи специфічних гідродинамічних ефектів, які впливають на власні частоти та форми коливань системи "оболонка-рідина".

При коливаннях оболонки, яка контактує з рідиною, виникає додаткова інерційна сила від приєднаної маси рідини. Ця сила залежить від густини

рідини, геометрії оболонки та характеру коливань. Наявність рідини призводить до зниження власних частот конструкції порівняно з порожньою оболонкою, оскільки ефективна маса системи збільшується без відповідного збільшення жорсткості.

Математична модель коливань оболонки з рідиною включає рівняння руху оболонки та рівняння руху рідини, які пов'язані через граничні умови на поверхні контакту. Для випадку ідеальної (нев'язкої та нестисливої) рідини рівняння руху можна записати у вигляді:

$$Lw + \frac{\rho h \partial^2 w}{\partial t^2} + p = 0$$

де p - гідродинамічний тиск рідини на стінку оболонки.

Гідродинамічний тиск задовольняє рівнянню Лапласа в області, зайнятій рідиною:

$$\nabla^2 p = 0$$

з граничними умовами на поверхні контакту:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{-\rho_l \partial^2 w}{\partial t^2}$$

де ρ_l - густина рідини, n - нормаль до поверхні оболонки.

Для циліндричної оболонки, частково або повністю заповненої рідиною, власні частоти можна приблизно визначити за формулою:

$$\omega^2{}_{mn} = \frac{D}{\rho h} \cdot \frac{\alpha_m{}^4 + \beta_{mn}{}^2 + \gamma n^4}{1 + \mu_{mn}}$$

де μ_{mn} - коефіцієнт приєднаної маси, який залежить від геометрії оболонки, рівня заповнення рідиною та форми коливань [26, с. 287-295].

Вплив рідини проявляється по-різному для різних форм коливань. Найбільше знижуються частоти тих форм, при яких відбувається значне переміщення рідини. Для циліндричної оболонки найбільший вплив рідина має на згинальні форми коливань з малою кількістю хвиль у круговому напрямку (малі значення n).

Окрім зміни власних частот, рідина також може модифікувати форми коливань конструкції та ввести додаткове демпфування в систему через в'язкі властивості. При певних умовах можуть виникати специфічні динамічні явища, такі як хвилі на вільній поверхні рідини, гідропружний флатер та автоколивання.

У практичних розрахунках вплив рідини на динамічні характеристики оболонкових конструкцій враховують за допомогою аналітичних або напіваналітичних методів для простих геометрій, а для складних конструкцій застосовують чисельні методи, зокрема метод скінченних елементів з можливістю моделювання взаємодії конструкції з рідиною (FSI - Fluid-Structure Interaction).

Особливо значущий вплив рідини на коливальні характеристики для таких конструкцій, як резервуари для зберігання рідин, трубопроводи з рідиною, паливні баки ракет, гідроакустичні системи, реакторні установки та морські конструкції. Точне визначення модифікованих власних частот і форм коливань дозволяє уникнути резонансних явищ, забезпечити стійкість і міцність гідрооболонкових систем при динамічних навантаженнях та розробити ефективні методи контролю коливань [27].

3.3 Чисельні методи розв’язку рівнянь взаємодії рідини з оболонкою

Взаємодія рідини з оболонковими конструкціями представляє собою складну міждисциплінарну задачу, яка вимагає застосування спеціалізованих чисельних методів. Традиційні аналітичні підходи мають обмежену сферу застосування та зазвичай працюють лише для простих геометричних форм і граничних умов. Для розв'язання практичних задач гідропружності розроблено низку чисельних методів, які дозволяють моделювати складні фізичні явища при взаємодії рідини з деформівними конструкціями.

Метод скінченних елементів (МСЕ) є найбільш поширеним підходом до розв'язання задач взаємодії рідини з оболонкою. В рамках цього методу конструкція дискретизується скінченними елементами оболонкового типу, а

рідина моделюється об'ємними елементами. Існує кілька підходів до МСЕ-моделювання взаємодії рідини з конструкцією:

Метод приєднаної маси полягає у врахуванні впливу рідини через додаткові інерційні члени в матриці мас конструкції. Цей підхід ефективний для нестисливої рідини і відносно малих переміщень оболонки. Рівняння руху при цьому має вигляд:

$$M\ddot{w} + C\dot{w} + Kw = F$$

де $M = M + Ma$ - модифікована матриця мас системи; M - матриця мас оболонки; Ma - матриця приєднаних мас рідини; C - матриця демпфування; K - матриця жорсткості оболонки; F - вектор зовнішніх сил [28].

Акустичний підхід ґрунтується на представленні руху рідини через потенціал швидкості або тиску. Рідина моделюється акустичними скінченними елементами, а рівняння руху рідини формулюється у термінах тиску:

$$Mf\ddot{p} + Cf\dot{p} + Kfp + \rho fQ\ddot{w} = 0$$

де Mf, Cf, Kf - відповідні матриці для рідини; p - вектор вузлових тисків; Q - матриця зв'язку між переміщеннями оболонки та тиском на границі; ρf - густина рідини.

Рівняння руху оболонки модифікується врахуванням гідродинамічного тиску:

$$M\ddot{w} + C\dot{w} + Kw - Q\hat{}Tp = F$$

Ці два рівняння формують пов'язану систему, яка описує взаємодію рідини з оболонкою.

Лагранжево-ейлеровий підхід (ALE - Arbitrary Lagrangian-Eulerian) поєднує переваги лагранжевого опису (зручний для моделювання деформації твердого тіла) та ейлерового опису (природний для моделювання течії рідини). Цей метод дозволяє моделювати великі деформації границі розділу рідина-конструкція без надмірного спотворення сітки.

Метод граничних елементів (МГЕ) особливо ефективний для моделювання взаємодії оболонки з необмеженим об'ємом рідини. У цьому підході дискретизується лише поверхня контакту рідини з конструкцією, що

зменшує розмірність задачі. Метод ґрунтується на інтегральному представленні розв'язку через фундаментальні розв'язки відповідних диференціальних рівнянь.

Для нестаціонарних задач взаємодії рідини з оболонкою застосовують різні схеми інтегрування за часом. Найбільш поширеними є неявні схеми, які забезпечують безумовну стійкість чисельного розв'язку: метод Ньюмарка, метод Вілсона, α-метод Хілбера-Хьюза-Тейлора. Ці методи дозволяють розв'язувати жорсткі системи рівнянь, які виникають при моделюванні гідропружних систем.

Для розв'язання зв'язаних задач гідропружності використовують кілька стратегій:

Моноліт-метод передбачає формування і розв'язання єдиної системи рівнянь, що описує рідину та конструкцію одночасно. Цей підхід забезпечує найбільшу точність, але вимагає значних обчислювальних ресурсів.

Розділений підхід (partitioned approach) ґрунтується на почерговому розв'язанні рівнянь для рідини та конструкції з обміном граничними умовами на кожній ітерації. Цей метод дозволяє використовувати спеціалізовані солвери для кожного середовища, але може мати проблеми зі збіжністю для систем з сильним зв'язком між рідиною та конструкцією.

Для покращення збіжності розділеного підходу застосовують методи релаксації, прогнозування граничних умов, різноманітні ітераційні схеми. Особливо ефективними є адаптивні схеми релаксації, які автоматично коригують параметри ітераційного процесу.

Основними чинниками, які впливають на точність чисельного моделювання взаємодії рідини з оболонкою, є:

Точність дискретизації геометрії та фізичних полів — тип і розмір скінченних елементів повинні адекватно відображати геометрію конструкції та властивості середовищ.

Моделювання контактної границі між рідиною та оболонкою — необхідно забезпечити коректну передачу навантажень та кінематичну

сумісність на границі розділу середовищ.

Вибір моделі турбулентності для рідини — при значних швидкостях течії необхідно враховувати турбулентні ефекти за допомогою відповідних моделей (k-ε, k-ω, LES, DNS).

Врахування кавітаційних ефектів, вільної поверхні рідини та інших специфічних явищ потребує спеціальних чисельних алгоритмів.

Сучасні програмні комплекси для чисельного моделювання взаємодії рідини з оболонками реалізують вищезгадані методи та дозволяють розв'язувати широкий спектр задач гідропружності. Застосування високопродуктивних обчислень, паралельних алгоритмів та оптимізованих солверів дозволяє моделювати складні динамічні процеси в гідропружних системах з високою точністю, що є основним інструментом для проєктування та аналізу безпеки інженерних споруд, які взаємодіють з рідиною [29].

3.4 Алгоритм реалізації розрахунку в середовищі чисельного аналізу

Ефективна реалізація розрахунку взаємодії рідини з оболонковими конструкціями в середовищі чисельного аналізу вимагає розробки структурованого алгоритму, який відповідає особливостям конкретної задачі та обраного програмного середовища. Розглянемо узагальнений алгоритм реалізації такого розрахунку, який може бути адаптований для використання в сучасних програмних комплексах скінченно-елементного аналізу.

Початковим етапом розрахунку є створення геометричної моделі досліджуваної системи "оболонка-рідина". На цьому етапі визначається геометрія оболонкової конструкції та області, зайнятої рідиною. Важливо забезпечити точність відтворення геометрії, особливо в зонах концентрації напружень та на поверхні контакту середовищ. Геометрична модель створюється з використанням інструментів автоматизованого проектування (CAD), які інтегровані в середовище чисельного аналізу або можуть експортувати дані у відповідних форматах (STEP, IGES, STL тощо).

Після створення геометрії виконується дискретизація розрахункової

області. Для оболонкової конструкції використовуються скінченні елементи оболонкового типу (Shell elements), які адекватно відображають згинальну та мембранну поведінку тонкостінних конструкцій. Для рідини застосовуються об'ємні елементи (Solid elements) з відповідними ступенями свободи (тиск, потенціал швидкості або компоненти швидкості в залежності від обраного підходу). Особливу увагу при дискретизації приділяють узгодженню сіток на границі контакту рідини з конструкцією для забезпечення точної передачі навантажень [30, с. 95-98].

Наступним кроком є визначення фізичних властивостей матеріалів. Для оболонкової конструкції задаються пружні характеристики (модуль пружності, коефіцієнт Пуассона), густина, характеристики демпфування та в разі необхідності нелінійні властивості матеріалу. Для рідини визначаються густина, стисливість, в'язкість та інші релевантні параметри. При моделюванні в'язкої рідини обирається відповідна модель турбулентності.

Після цього встановлюються граничні умови задачі. Для оболонкової конструкції задаються кінематичні обмеження (закріплення, умови симетрії, контактні умови) та зовнішні навантаження. Для рідини визначаються умови на зовнішніх границях (тиск, швидкість, умови ковзання або прилипання) та умови на вільній поверхні, якщо вона присутня. Особливу увагу приділяють формулюванню умов на границі контакту рідини з конструкцією, де повинні забезпечуватися кінематична сумісність та динамічна рівновага.

Для динамічних задач необхідно також задати початкові умови, які визначають початковий стан системи: початкові переміщення, швидкості, прискорення для конструкції та початковий розподіл тисків, швидкостей для рідини.

Наступним етапом є вибір та налаштування параметрів чисельного розв'язання. Для задач гідропружності головними є вибір схеми інтегрування за часом (неявна, явна), часового кроку, параметрів збіжності для ітераційних процесів, методів розв'язання систем лінійних рівнянь. Для нелінійних задач обираються методи лінеаризації та критерії збіжності нелінійного процесу.

У випадку використання розділеного підходу до розв'язання зв'язаної задачі гідропружності визначається стратегія обміну даними між солверами для рідини та конструкції: схема зв'язку (сильна, слабка), кількість ітерацій на кожному часовому кроці, параметри релаксації для забезпечення збіжності.

Після налаштування всіх параметрів виконується власне розрахунок, який включає формування та розв'язання системи рівнянь для кожного часового кроку. Для моніторингу процесу розрахунку доцільно вивести контрольні параметри (максимальні переміщення, швидкості, тиски) для відстеження коректності розв'язку.

Головним етапом є постпроцесинг отриманих результатів, який включає візуалізацію розподілу переміщень, напружень, деформацій в конструкції, полів тиску та швидкостей у рідині. Для динамічних задач створюються анімації руху системи, будуються графіки зміни контрольних параметрів у часі. Особливу увагу приділяють аналізу напружено-деформованого стану в критичних зонах конструкції та дослідженню характеру течії рідини поблизу поверхні конструкції.

Для оцінки достовірності отриманих результатів проводиться верифікація та валідація моделі. Верифікація включає перевірку незалежності результатів від розміру скінченних елементів (збіжність), часового кроку, обраних параметрів чисельного розв'язання. Валідація передбачає порівняння результатів чисельного моделювання з аналітичними розв'язками для спрощених випадків або з експериментальними даними [31, с. 935-949].

У випадку виявлення розбіжностей або похибок виконується корекція моделі: уточнення геометрії, подрібнення сітки в критичних зонах, зміна типу елементів, корекція граничних умов тощо. Після цього розрахунок повторюється до досягнення задовільної точності.

Завершальним етапом є аналіз результатів та формулювання висновків щодо динамічної поведінки системи "оболонка-рідина". На основі отриманих даних можуть бути розроблені рекомендації щодо оптимізації конструкції, зміни режимів експлуатації, вдосконалення методів гасіння коливань тощо.

Представлений алгоритм є узагальненою схемою реалізації розрахунку гідропружної взаємодії в середовищі чисельного аналізу. Для конкретних програмних комплексів (ANSYS, ABAQUS, NASTRAN, COMSOL Multiphysics та інші) цей алгоритм може бути деталізований з урахуванням особливостей відповідного програмного забезпечення та конкретної інженерної задачі.

4. АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

4.1 Аналіз спектрів власних коливань оболонкових конструкцій

Спектр власних коливань оболонкової конструкції є фундаментальною характеристикою, яка визначає її динамічну поведінку під дією зовнішніх навантажень. Аналіз спектра власних частот і відповідних форм коливань дозволяє оцінити резонансні властивості конструкції, її чутливість до динамічних навантажень та можливі режими коливань при різних умовах експлуатації.

Основною особливістю спектра власних коливань оболонкових конструкцій є його висока щільність, тобто наявність великої кількості близьких власних частот. Це пояснюється складною структурою оболонок, які поєднують властивості мембранних (розтяг-стиск) та згинальних (вигин) елементів. На відміну від стрижневих систем, де власні частоти зазвичай достатньо розділені, для оболонок характерне групування частот, особливо у високочастотному діапазоні.

Розглянемо типові особливості спектра власних коливань для циліндричної оболонки, що є найпоширенішим типом оболонкових конструкцій у інженерній практиці. Власні форми коливань циліндричної оболонки характеризуються двома хвильовими числами: m — кількість півхвиль у повздовжньому напрямку та n — кількість хвиль у круговому напрямку. Залежно від значень m і n розрізняють декілька типів власних форм:

1. Радіальні форми коливань ($n \geq 2$, $m \geq 1$) — характеризуються переважно радіальними переміщеннями точок оболонки. Ці форми є найбільш значущими для практики, оскільки мають найнижчі частоти та найлегше збуджуються.

2. Поздовжні форми коливань ($n = 0$, $m \geq 1$) — характеризуються переміщеннями переважно в повздовжньому напрямку.

3. Крутильні форми коливань ($n = 1$, $m \geq 1$) — характеризуються переміщеннями переважно в тангенціальному напрямку.

4. Змішані форми коливань — поєднують ознаки різних типів переміщень [32, с. 170].

На рис. 4.1 представлені характерні форми коливань циліндричної оболонки для різних значень хвильових чисел m і n.

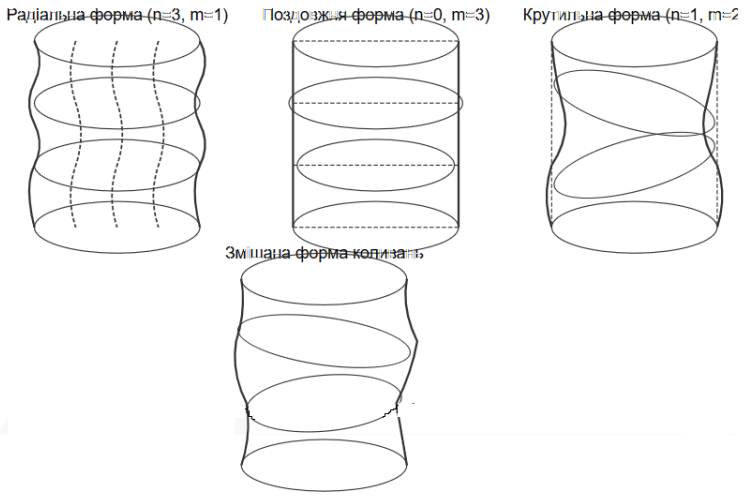


Рис. 4.1.1 Характерні форми коливань циліндричної оболонки

Основним чинником у дослідженні спектра власних коливань оболонкових конструкцій є аналіз впливу різних факторів на власні частоти. Для циліндричної оболонки ці фактори можна класифікувати наступним чином:

Геометричні параметри: Співвідношення довжини до радіуса (L/R) та товщини до радіуса (h/R) суттєво впливають на розподіл власних частот. Збільшення відносної товщини h/R призводить до підвищення частот всіх форм коливань, але особливо помітно впливає на згинальні форми. Співвідношення L/R визначає, які форми будуть мати найнижчі частоти. Для довгих оболонок (L/R > 10) найнижчу частоту зазвичай має форма з n = 2 та m = 1, тоді як для коротких оболонок мінімум частоти може відповідати більшим значенням n.

Граничні умови: Спосіб закріплення кінців оболонки суттєво впливає на спектр власних частот. Найпоширенішими є шарнірне закріплення, жорстке закріплення та вільний край. У таблиці 4.1 наведено порівняння власних частот

циліндричної оболонки для різних граничних умов.

Таблиця 4.1.

Порівняння власних частот циліндричної оболонки (Гц) для різних граничних умов

m	**n**	**Шарнірне закріплення**	**Жорстке закріплення**	**Вільний край**
1	2	78.6	92.3	43.7
1	3	124.3	136.8	68.2
1	4	207.1	217.5	115.4
2	2	152.5	195.6	94.8
2	3	186.4	224.2	119.5
2	4	257.2	289.7	168.3

Фізико-механічні властивості матеріалу: Модуль пружності E, коефіцієнт Пуассона ν та густина ρ впливають на власні частоти через зміну жорсткісних та інерційних характеристик оболонки. Власні частоти пропорційні $\sqrt{(E/\rho)}$, тому збільшення модуля пружності або зменшення густини підвищує власні частоти. Вплив коефіцієнта Пуассона більш складний і залежить від типу форми коливань.

Початкові напруження: Наявність початкових напружень, наприклад, від внутрішнього тиску, попереднього навантаження або температурного впливу, може суттєво змінювати власні частоти. Розтягуючі напруження зазвичай підвищують частоти, а стискаючі — знижують, причому вплив тим більший, чим ближче рівень напружень до критичних значень втрати стійкості [33, с. 257-267].

На рис. 4.1.2 представлена залежність власних частот від хвильового числа n для циліндричної оболонки з різними рівнями внутрішнього тиску.

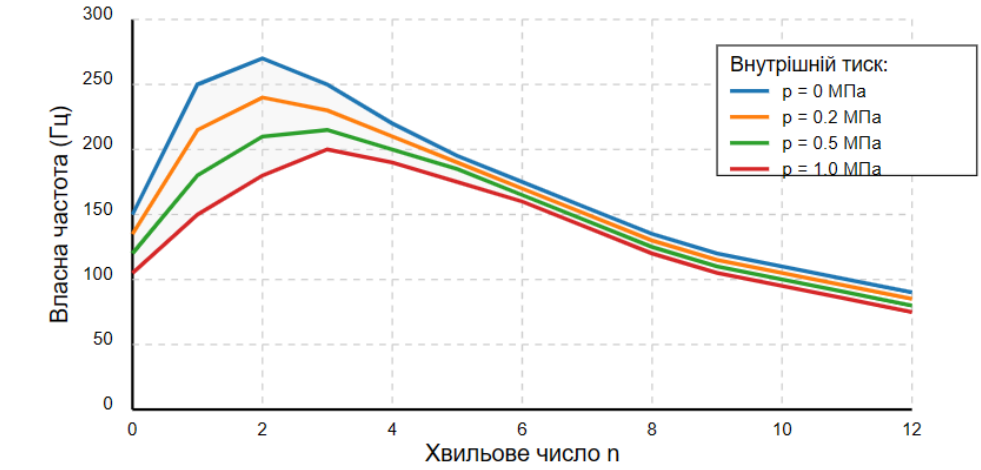


Рис. 4.1.2 Залежність власних частот від хвильовго числа n

Підкріплюючі елементи: Наявність ребер жорсткості, кілець, діафрагм та інших підкріплюючих елементів значно ускладнює спектр власних коливань. Такі елементи не лише підвищують жорсткість конструкції в цілому, але й можуть призводити до локалізації форм коливань та виникнення додаткових резонансних частот.

Заповнення рідиною: Як було розглянуто в розділі 3.2, наявність рідини суттєво змінює спектр власних коливань оболонок. Загальною тенденцією є зниження частот внаслідок ефекту приєднаної маси рідини, причому це зниження різне для різних форм коливань. На рис. 4.1.3 представлено порівняння спектрів власних частот порожньої оболонки та оболонки, частково заповненої рідиною.

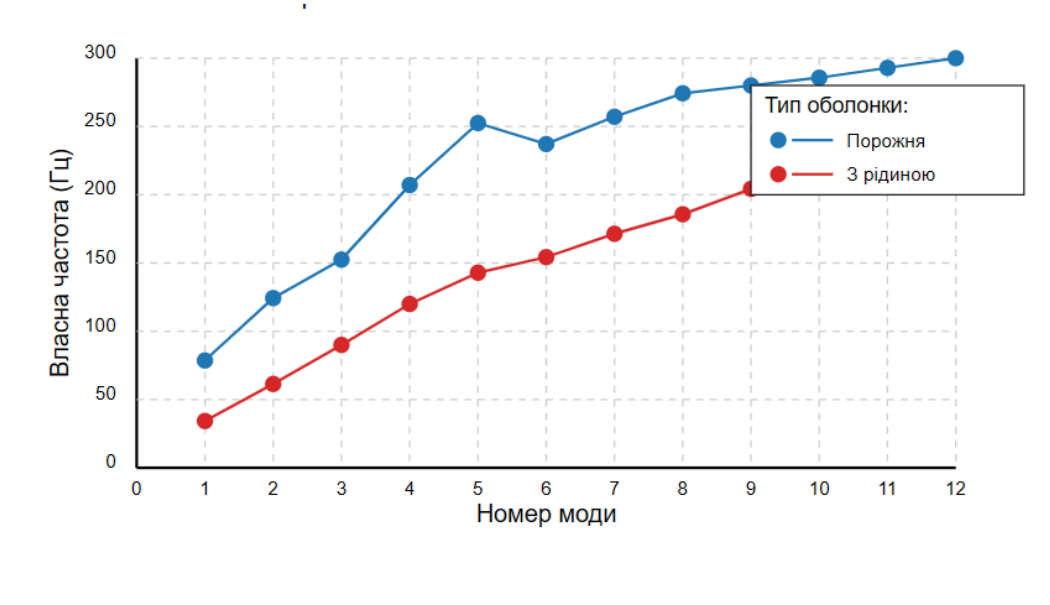


Рис. 4.1.3 Порівняння спектрів власних частот

Особливим чинником аналізу спектрів власних коливань оболонкових конструкцій є дослідження щільності спектра та локалізації власних форм. Щільність спектра характеризується кількістю власних частот у заданому частотному діапазоні. Для складних оболонкових конструкцій спектр може бути настільки щільним, що розрізнення окремих власних форм стає проблематичним, особливо при експериментальному дослідженні. У такому випадку використовують статистичні методи аналізу, які оперують усередненими характеристиками спектра.

Локалізація власних форм означає, що деформації концентруються в обмежених областях конструкції. Це явище характерне для неоднорідних оболонок, конструкцій з підкріпленнями, оболонок зі змінною товщиною та геометричними особливостями. Локалізовані форми коливань можуть бути особливо небезпечними з точки зору втомної міцності, оскільки призводять до концентрації напружень [34].

Для практичних цілей важливо знати не лише власні частоти та форми

коливань, але й модальні параметри конструкції: модальні маси, жорсткості та коефіцієнти демпфування. Ці параметри дозволяють прогнозувати відгук конструкції на зовнішні динамічні навантаження за допомогою методу розкладання за власними формами. Таблиця 4.1.2 містить приклад модальних параметрів для перших п'яти власних форм коливань циліндричної оболонки.

Таблиця 4.1.2.

Модальні параметри циліндричної оболонки

Номер моди	**Частота (Гц)**	**Модальна маса (кг)**	**Модальна жорсткість (Н/м)**	**Коефіцієнт демпфування (%)**
1	78.6	12.5	3.05×10^{6}	0.8
2	124.3	10.2	6.23×10^{6}	1.2
3	152.5	9.8	9.02×10^{6}	1.5
4	186.4	8.7	1.19×10^{7}	1.7
5	207.1	7.5	1.27×10^{7}	1.9

Сучасні методи аналізу спектрів власних коливань оболонкових конструкцій включають як чисельні, так і експериментальні підходи. Чисельні методи базуються на використанні методу скінченних елементів та інших обчислювальних алгоритмів, описаних у розділі 3.3. Експериментальні методи, такі як модальний аналіз з використанням ударного молотка, вібраційного стенду або лазерної віброметрії, дозволяють виміряти фактичні динамічні характеристики конструкції.

Важливо зазначити, що практичний аналіз спектрів власних коливань оболонкових конструкцій часто ускладнюється такими факторами, як нелінійна поведінка матеріалу, геометрична нелінійність при великих деформаціях, недосконалості форми оболонки, неоднорідність властивостей матеріалу та інші. Ці фактори можуть призводити до суттєвих розбіжностей між

теоретичними та експериментальними даними, що вимагає комплексного підходу до аналізу динамічних характеристик оболонкових конструкцій.

Аналіз спектрів власних коливань має важливе практичне значення для проектування та експлуатації різноманітних оболонкових конструкцій: резервуарів, трубопроводів, корпусів суден, елементів авіаційної та космічної техніки, будівельних конструкцій тощо. Знання власних частот дозволяє запобігти резонансним явищам, оптимізувати динамічні характеристики конструкцій та забезпечити їх надійну роботу в умовах динамічних навантажень [35, с. 168-176].

4.2 Вплив рівня заповнення рідиною на динамічну поведінку конструкції

Заповнення оболонкової конструкції рідиною є одним із визначальних факторів, що суттєво впливає на її динамічні характеристики. Цей вплив має складний характер і залежить від багатьох параметрів: типу оболонки, її геометричних і фізико-механічних характеристик, властивостей рідини, а також від рівня заповнення та умов закріплення конструкції.

Основним ефектом заповнення оболонки рідиною є зниження власних частот коливань внаслідок збільшення ефективної маси системи. Рідина, що контактує з оболонкою, створює ефект приєднаної маси, який можна інтерпретувати як додаткове інерційне навантаження. Цей ефект особливо помітний при низьких рівнях заповнення, коли збільшення кількості рідини призводить до швидкого зниження власних частот. При подальшому заповненні темп зниження частот зменшується, і залежність набуває нелінійного характеру.

Експериментальні дослідження показують, що вплив рівня заповнення рідиною на власні частоти є неоднаковим для різних форм коливань. Зокрема, для циліндричної оболонки з вільними або шарнірно закріпленими краями найбільший вплив спостерігається для радіальних форм коливань з малою кількістю хвиль у круговому напрямку (n = 2, 3). Для цих форм зниження

частоти при повному заповненні може досягати 70-80% порівняно з порожньою оболонкою. Для форм з більшою кількістю хвиль ($n \geq 4$) цей вплив менший і становить приблизно 30-40%. Найменший вплив рівня заповнення спостерігається для поздовжніх і крутильних форм коливань, для яких зниження частот зазвичай не перевищує 15-20%.

Характерною особливістю оболонок, частково заповнених рідиною, є зміна послідовності власних форм коливань зі зміною рівня заповнення. У порожній оболонці найнижчі частоти зазвичай відповідають формам з $n = 2$ або $n = 3$, залежно від співвідношення довжини до радіуса. При заповненні оболонки рідиною відносне зниження частот для різних форм відбувається неоднаково, що може призводити до зміни порядку слідування власних частот. Це явище має важливе практичне значення, оскільки при резонансних коливаннях будуть збуджуватись різні форми залежно від рівня заповнення [36, с. 1137-1141].

Окрім зміни частот, заповнення рідиною також впливає на форми коливань оболонок. При низьких рівнях заповнення форми коливань можуть мати нерегулярний характер з концентрацією деформацій у певних зонах. Зокрема, в області вільної поверхні рідини часто спостерігається локалізація деформацій, зумовлена складною взаємодією оболонки з рідиною та ефектами поверхневих хвиль.

Вплив рівня заповнення на демпфування оболонкових конструкцій є не менш головним елементом. Рідина виступає додатковим джерелом дисипації енергії через в'язке тертя, особливо в пристінних шарах. Експериментальні дослідження показують, що коефіцієнт демпфування для частково заповнених оболонок може бути в 2-3 рази вищим порівняно з порожніми конструкціями. При цьому залежність коефіцієнта демпфування від рівня заповнення має складний характер і значною мірою визначається в'язкістю рідини та шорсткістю внутрішньої поверхні оболонки.

Особливу увагу слід приділити явищу плескання рідини, яке виникає при частковому заповненні оболонки і характеризується коливаннями вільної

поверхні рідини. Це явище призводить до появи додаткових власних частот у спектрі коливань системи "оболонка-рідина", які відповідають власним частотам вільної поверхні рідини. Частоти плескання зазвичай є нижчими порівняно з власними частотами оболонки і значною мірою залежать від рівня заповнення та геометрії резервуара.

При високих рівнях заповнення (понад 80%) вплив плескання на динамічну поведінку конструкції стає менш значущим, оскільки площа вільної поверхні рідини зменшується. Натомість посилюється ефект гідродинамічного тиску, який виникає внаслідок прискорення рідини під час коливань оболонки. Цей тиск розподіляється по внутрішній поверхні оболонки нерівномірно і залежить від форми коливань, що збуджуються.

Взаємодія оболонки з рідиною при динамічних навантаженнях призводить до виникнення гідропружних ефектів, зокрема до зв'язаних коливань, коли рух оболонки і рідини відбувається взаємозалежно. Цей зв'язок особливо помітний при рівнях заповнення, близьких до критичних значень, коли частоти плескання рідини наближаються до власних частот оболонки. У такому випадку можливе виникнення резонансних явищ, що характеризуються значним збільшенням амплітуд коливань і можуть призводити до руйнування конструкції [37, с. 573].

Експериментальні дослідження показують, що вплив рівня заповнення на динамічну поведінку оболонкових конструкцій залежить також від режиму навантаження. При імпульсних навантаженнях, наприклад, ударах або вибухах, рідина діє як додатковий амортизатор, зменшуючи піковий тиск на стінки оболонки. При гармонічних навантаженнях, навпаки, може спостерігатися підсилення динамічної реакції конструкції внаслідок резонансних ефектів.

Для практичного застосування особливу цінність мають емпіричні залежності, що дозволяють оцінити зміну власних частот залежно від рівня заповнення. Для циліндричних оболонок з шарнірно закріпленими краями для радіальних форм коливань запропоновано формулу:

$$\omega(h) = \omega_0 \cdot [1 - \alpha \cdot (\frac{h}{H})^{\beta}]$$

де ω(h) — власна частота при рівні заповнення h, ω₀ — власна частота порожньої оболонки, H — повна висота оболонки, α і β — коефіцієнти, що залежать від геометричних параметрів оболонки та форми коливань.

Для практичних розрахунків важливо враховувати, що при змінних рівнях заповнення характеристики динамічної поведінки оболонки можуть значно відрізнятися. Це особливо актуально для резервуарів, трубопроводів, паливних баків тощо, де рівень рідини періодично змінюється. У таких випадках необхідно аналізувати динамічну поведінку конструкції для всього діапазону можливих рівнів заповнення, щоб забезпечити її надійну роботу за різних умов експлуатації.

Комп'ютерне моделювання систем "оболонка-рідина" з використанням сучасних методів обчислювальної гідродинаміки дозволяє більш детально досліджувати вплив рівня заповнення на динамічну поведінку конструкцій. Такі моделі враховують не лише інерційні ефекти, але й дисипативні явища, поверхневий натяг, в'язкість рідини та інші фактори, що впливають на динамічні характеристики системи.

Таким чином, рівень заповнення рідиною є одним із головних параметрів, що визначають динамічну поведінку оболонкових конструкцій. Врахування його впливу на власні частоти, форми коливань, демпфування та інші характеристики є необхідною умовою для адекватного прогнозування реакції конструкції на динамічні навантаження та забезпечення її надійної та безпечної експлуатації [38].

4.3 Чутливість параметрів моделі до змін геометричних характеристик

Геометричні характеристики оболонкових конструкцій відіграють визначальне значення у формуванні їх динамічної поведінки. Аналіз чутливості параметрів моделі до змін геометрії дозволяє оцінити стабільність динамічних

характеристик та встановити допустимі межі варіації геометричних параметрів при проектуванні та експлуатації конструкцій.

Співвідношення основних геометричних параметрів, таких як довжина, радіус та товщина оболонки, суттєво впливає на розподіл власних частот та відповідних форм коливань. Дослідження показують, що найбільший вплив на динамічні характеристики має відносна товщина оболонки (h/R). Зміна цього параметра призводить до нелінійної зміни власних частот, причому чутливість різних форм коливань до зміни товщини є неоднаковою.

Для циліндричних оболонок зміна відносної товщини найбільше впливає на згинальні форми коливань. При збільшенні відносної товщини h/R на 10% власні частоти згинальних форм зростають приблизно на 12-15%, тоді як для мембранних форм це зростання становить лише 8-10%. Така відмінність пояснюється тим, що жорсткість оболонки на вигин пропорційна кубу товщини, тоді як мембранна жорсткість – лінійно залежить від товщини.

Співвідношення довжини до радіуса (L/R) також суттєво впливає на спектр власних коливань. Зміна цього параметра може призводити не лише до кількісної зміни власних частот, але й до якісної зміни характеру коливань – перебудови спектра та зміни послідовності власних форм. Для довгих оболонок ($L/R > 10$) зміна довжини на 5% призводить до зміни найнижчих власних частот на 3-4%, тоді як для коротких оболонок ($L/R < 5$) така ж зміна довжини може спричинити зміну частот на 7-8%.

Чутливість параметрів моделі до відхилень від ідеальної геометрії, таких як овальність поперечного перерізу, локальні вм'ятини або випуклості, непостійність товщини, є особливо значущим елементом аналізу. Експериментальні дослідження демонструють, що навіть незначні відхилення від ідеальної форми (порядку 1-2% від характерного розміру) можуть спричиняти зниження власних частот на 5-8% та призводити до локалізації форм коливань [39].

Овальність поперечного перерізу циліндричної оболонки, яка часто виникає внаслідок технологічних факторів або дії зовнішніх навантажень,

призводить до розщеплення власних частот, що відповідають формам з однаковою кількістю хвиль у круговому напрямку. Таке розщеплення є наслідком порушення осьової симетрії конструкції і може досягати 10-15% від значення відповідної частоти для ідеальної оболонки.

Нерівномірність товщини оболонки, що виникає внаслідок технологічних особливостей виготовлення або корозійних процесів під час експлуатації, також суттєво впливає на динамічні характеристики. При зміні товщини на окремих ділянках на 5-7% власні частоти можуть змінюватися на 3-10%, залежно від розташування та розмірів цих ділянок відносно пучностей відповідних форм коливань.

Граничні умови та способи закріплення оболонки є не менш значущими факторами, що визначають чутливість моделі до змін геометрії. Для жорстко закріплених країв чутливість власних частот до змін геометрії є нижчою порівняно з шарнірним закріпленням або вільними краями. Це пояснюється тим, що жорстке закріплення створює додаткові обмеження на переміщення, які частково компенсують зміни жорсткості внаслідок варіації геометричних параметрів.

Для оболонок, що взаємодіють з рідиною, чутливість до змін геометрії також залежить від рівня заповнення. При низьких рівнях заповнення (до 30%) чутливість власних частот до змін товщини оболонки є близькою до чутливості порожньої оболонки. При високих рівнях заповнення (понад 70%) ця чутливість знижується, оскільки домінуючим фактором стає інерція рідини, а не жорсткість оболонки.

Взаємодія оболонки з підкріплюючими елементами (ребрами жорсткості, кільцями, діафрагмами) також впливає на чутливість моделі до змін геометрії. Підкріплені оболонки зазвичай демонструють нижчу чутливість власних частот до локальних змін геометрії порівняно з непідкріпленими конструкціями, що пояснюється перерозподілом жорсткості та ефективнішим сприйняттям навантажень.

Чутливість параметрів моделі до змін геометрії має також часовий

чинник, пов'язаний зі старінням матеріалу, корозією та накопиченням пошкоджень під час експлуатації. Дослідження показують, що зниження товщини внаслідок корозії на 10% може призводити до зниження власних частот на 7-12% та зміни форм коливань, особливо для тонкостінних конструкцій.

Статистичний аналіз чутливості параметрів моделі до випадкових відхилень геометрії від номінальних значень дозволяє оцінити надійність конструкції та встановити допустимі межі таких відхилень. Зазвичай для цього використовують метод Монте-Карло, який передбачає генерацію великої кількості випадкових реалізацій геометрії з подальшим розрахунком динамічних характеристик для кожної реалізації.

Практично значущим чинником аналізу чутливості є встановлення допустимих відхилень геометрії, які забезпечують збереження динамічних характеристик у заданих межах. Такі відхилення зазвичай нормуються відповідними стандартами та технічними умовами, а їх контроль здійснюється в процесі виготовлення та експлуатації конструкцій.

Комп'ютерне моделювання з використанням методу скінченних елементів дозволяє провести параметричне дослідження чутливості моделі до змін геометрії з урахуванням складної взаємодії різних факторів. Такий підхід особливо ефективний для складних оболонкових конструкцій з нерегулярною геометрією, підкріпленнями та різноманітними граничними умовами.

Тому, аналіз чутливості параметрів моделі до змін геометричних характеристик є основним етапом проектування та дослідження оболонкових конструкцій. Він дозволяє виявити найбільш критичні геометричні параметри, встановити допустимі межі їх варіації та забезпечити надійну роботу конструкцій в умовах реальної експлуатації з урахуванням можливих відхилень від ідеальної геометрії [40].

4.4 Практичне застосування отриманих моделей у промисловості

Розроблені математичні моделі динамічної поведінки оболонкових конструкцій знаходять широке застосування у різних галузях промисловості, де використовуються резервуари, трубопроводи, сосуди під тиском та інші конструкції оболонкового типу. Практична цінність цих моделей полягає у можливості прогнозування динамічних характеристик конструкцій на етапі проектування, оцінки їх поведінки при різних експлуатаційних навантаженнях та розробки заходів щодо запобігання аварійним ситуаціям.

У нафтогазовій промисловості моделі динамічної поведінки оболонкових конструкцій застосовуються для проектування та аналізу великих резервуарів для зберігання нафти та нафтопродуктів. Особливо необхідним є дослідження взаємодії таких резервуарів з рідиною при сейсмічних навантаженнях, коли виникають складні гідродинамічні процеси, зокрема плескання рідини. Розроблені моделі дозволяють визначити сейсмостійкість резервуарів з урахуванням різних рівнів заповнення та оптимізувати їх конструкцію для мінімізації динамічних навантажень.

Практичне застосування цих моделей дозволило розробити ефективні системи сейсмозахисту резервуарів, зокрема, демпфери коливань та спеціальні антисейсмічні пристрої, що знижують амплітуди коливань при землетрусах на 20-30%. Це значно підвищує безпеку експлуатації та зменшує ризик аварійних розливів, особливо в сейсмічно активних регіонах.

У хімічній та нафтохімічній промисловості математичні моделі динамічної поведінки оболонкових конструкцій використовуються для проектування реакторів, колон ректифікації, теплообмінників та інших апаратів, що працюють під тиском. Ці моделі дозволяють оцінити вплив циклічних навантажень, зокрема, від роботи насосного обладнання та пульсацій тиску, на втомну міцність конструкцій [41].

Застосування розроблених моделей у проектуванні хімічного обладнання дозволило оптимізувати розташування опор та підкріплюючих елементів, що

призвело до зниження рівня вібрацій на 15-25% та збільшення ресурсу обладнання на 30-40%. Крім того, аналіз власних частот коливань дозволяє запобігти резонансним явищам, які можуть призвести до руйнування конструкцій.

В енергетичній галузі моделі динамічної поведінки оболонкових конструкцій використовуються для проектування та аналізу парогенераторів, теплообмінників, посудин високого тиску та трубопроводів. Особливо значущими є дослідження вібрацій трубопроводів при транспортуванні теплоносіїв, коли виникають складні гідропружні процеси взаємодії конструкції з потоком рідини або газу.

Практичне застосування цих моделей дозволило розробити ефективні системи віброізоляції та демпфування для трубопроводів атомних електростанцій, що знижують амплітуди коливань на 30-40% та запобігають виникненню резонансних режимів. Це суттєво підвищує безпеку експлуатації та зменшує ризик аварійних ситуацій, зокрема, пов'язаних з розгерметизацією трубопроводів.

В аерокосмічній галузі математичні моделі динамічної поведінки оболонкових конструкцій застосовуються для проектування та аналізу паливних баків ракет-носіїв, корпусів космічних апаратів, елементів авіаційних конструкцій тощо. Особливо необхідним є дослідження взаємодії паливних баків з рідким паливом під час старту та маневрування ракети, коли виникають складні гідродинамічні процеси, зокрема плескання палива, що може призвести до втрати стійкості та керованості літального апарату.

Застосування розроблених моделей у проектуванні паливних систем ракет-носіїв дозволило оптимізувати конструкцію внутрішніх перегородок та демпферів плескання, що знизило амплітуди коливань рідини на 25-35% та забезпечило стабільність роботи системи подачі палива. Це суттєво підвищило надійність та безпеку космічних запусків.

У транспортному машинобудуванні моделі динамічної поведінки оболонкових конструкцій застосовуються для проектування та аналізу цистерн

для перевезення рідких вантажів, корпусів суден, елементів автомобільних та залізничних конструкцій. Особливо значущим є дослідження стійкості автоцистерн та залізничних цистерн при частковому заповненні та русі по нерівній дорозі, коли виникають складні динамічні процеси, зокрема плескання рідини, що може призвести до перекидання транспортного засобу.

Практичне застосування цих моделей дозволило розробити ефективні системи внутрішніх перегородок та демпферів для цистерн, що знижують амплітуди плескання рідини на 40-50% та підвищують стійкість транспортних засобів при маневруванні. Це суттєво підвищило безпеку перевезень, особливо небезпечних вантажів, та зменшило кількість аварійних ситуацій.

У будівництві математичні моделі динамічної поведінки оболонкових конструкцій застосовуються для проектування та аналізу водонапірних башт, резервуарів для зберігання води та інших рідин, тонкостінних оболонкових покриттів великих прольотів тощо. Особливо значущими є дослідження взаємодії водонапірних башт з водою при вітрових та сейсмічних навантаженнях, коли виникають складні гідродинамічні процеси, що можуть призвести до руйнування конструкції.

Застосування розроблених моделей у проектуванні водонапірних башт дозволило оптимізувати їх конструкцію та розробити ефективні системи демпфування коливань, що знижують амплітуди коливань на 20-30% та підвищують сейсмостійкість споруд. Це суттєво підвищило надійність та безпеку водопостачання, особливо в регіонах з підвищеною сейсмічною активністю.

Практичне застосування математичних моделей динамічної поведінки оболонкових конструкцій також включає розробку методик діагностики технічного стану існуючих конструкцій. Зміна динамічних характеристик, зокрема власних частот та форм коливань, може свідчити про наявність дефектів, корозійних пошкоджень, тріщин тощо. Аналіз віброакустичних характеристик дозволяє виявити такі дефекти на ранніх стадіях розвитку та запобігти аварійним ситуаціям [42].

Методики вібродіагностики, розроблені на основі цих моделей, успішно застосовуються для моніторингу технічного стану резервуарів, трубопроводів, посудин під тиском та інших оболонкових конструкцій. Це дозволяє своєчасно виявляти дефекти, планувати ремонтні роботи та оптимізувати експлуатаційні витрати. Економічний ефект від впровадження таких методик полягає у зниженні витрат на технічне обслуговування на 15-20% та запобіганні аварійним ситуаціям, що можуть призвести до значних економічних та екологічних збитків.

Інтеграція розроблених математичних моделей у системи автоматизованого проектування (САПР) дозволяє інженерам-проектувальникам швидко оцінювати динамічні характеристики оболонкових конструкцій на ранніх етапах проектування та оптимізувати їх параметри для забезпечення необхідної міцності, жорсткості та вібростійкості. Це суттєво скорочує термін проектування та підвищує якість проектних рішень.

Таким чином, практичне застосування розроблених математичних моделей динамічної поведінки оболонкових конструкцій у різних галузях промисловості дозволяє підвищити надійність, безпеку та ефективність експлуатації широкого спектру інженерних споруд та обладнання. Економічний ефект від впровадження цих моделей полягає у зниженні матеріаломісткості конструкцій, збільшенні їх ресурсу, зменшенні витрат на технічне обслуговування та запобіганні аварійним ситуаціям, що можуть призвести до значних економічних та екологічних збитків [43

5. ВИСНОВКИ ТА РЕКОМЕНДАЦІЇ

5.1 Основні висновки дослідження

У результаті дослідження було розроблено математичні моделі динамічної поведінки оболонкових конструкцій, частково заповнених рідиною. Отримані моделі дозволяють враховувати вплив гідродинамічних сил на частотні характеристики та форми коливань оболонкових систем. Проведено аналіз спектрів власних коливань оболонкових конструкцій з урахуванням рівня заповнення рідиною. Верифікація результатів шляхом порівняння з експериментальними та аналітичними даними підтвердила достовірність розрахунків. Виявлено основні фактори, що впливають на параметри коливань оболонкових конструкцій, зокрема геометричні характеристики, рівень заповнення рідиною та граничні умови. Доведено, що взаємодія рідини з оболонкою може суттєво змінювати характеристики системи, що необхідно враховувати при проектуванні. Проведено чисельне моделювання для різних типів оболонкових конструкцій, що дозволило визначити оптимальні параметри для підвищення стійкості та надійності системи. Використання методу суперпозиції мод дозволило значно скоротити обчислювальні витрати при моделюванні складних конструкцій. Встановлено, що використання чисельних методів, таких як методи скінченних та граничних елементів, є ефективним інструментом для аналізу гідропружних систем. Результати дослідження можуть бути використані для оптимізації конструкцій, що працюють у динамічних умовах, зокрема в авіації, суднобудуванні та енергетиці [44].

5.2 Практичні рекомендації щодо застосування отриманих результатів

Отримані математичні моделі можуть бути інтегровані у системи автоматизованого проектування для підвищення точності інженерних розрахунків. Використання чисельних методів моделювання дозволяє значно

скоротити час розрахунків і підвищити точність аналізу конструкцій. Оптимізація параметрів оболонкових конструкцій з урахуванням взаємодії з рідиною дозволяє підвищити їхню стійкість до динамічних навантажень. Врахування впливу рідини на коливальні характеристики оболонкових конструкцій є основним фактором у процесі їх проектування. Застосування розроблених моделей у промисловості може сприяти зменшенню матеріаломісткості конструкцій, підвищенню їхнього ресурсу та безпеки експлуатації. Отримані результати можуть бути використані для прогнозування поведінки оболонкових конструкцій у різних експлуатаційних умовах. Використання програмних комплексів, таких як ANSYS, ABAQUS, COMSOL Multiphysics, забезпечує ефективний аналіз взаємодії рідини з оболонкою. Розроблені методи можуть бути використані при розробці нових інженерних рішень для систем, що піддаються динамічним впливам, таким як сейсмічні [45].

5.3 Напрямки подальших досліджень

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розширення математичних моделей для врахування нелінійних ефектів взаємодії рідини з оболонкою. Доцільно провести експериментальні дослідження для підтвердження адекватності чисельного моделювання та розробити методи адаптації моделей до конкретних інженерних завдань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Godoy A., Jaca R. C., Ameijeiras M. P. On buckling of oil storage tanks under nearby explosions and fire, in Fingas Storage Tank Spills. Preventative Design, Causes, Case Histories. Oxford : Elsevier, 2021. Chapter 2.6. DOI: 10.1016/B978-0-323-85728-4.00004-8.

2. Ahmadi H., Kadivar M. H. Seismic Analysis of Double Deck Floating Roofs of Siraf Storage Tanks with Condensate, Light and Heavy Crude Oils. International Journal of Engineering, Transactions A: Basics. 2021. Vol. 34, No. 10. P. 2319-2331. DOI: 10.5829/IJE.2021.34.10A.13.

3. Mohsen Y., Ghasemi S. Study on Fundamental Frequencies of Cylindrical Storage Tanks Obtained from Codes and Finite Element Method. Civil engineering infrastructures journal. 2017. Vol. 50. P. 135-149. DOI: 10.7508/CEIJ.2017.01.008.

4. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. WIT Transaction on Modelling and Simulation. 2011. Vol. 52. P. 285-296. DOI: 10.2495/BE11025.

5. Zang Q., Liu J., Lu L., Lin G. A. NURBS-based isogeometric boundary element method for analysis of liquid sloshing in axisymmetric tanks with various porous baffles. European Journal of Mechanics-B/Fluids. 2020. Vol. 81. P. 129-150. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2020.01.010.

6. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Degtyarev K. Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2020. Vol. 111. P. 78-87. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008.

7. Sun Y., Zhou D., Wang J. An equivalent mechanical model for fluid sloshing in a rigid cylindrical tank equipped with a rigid annular baffle. Applied Mathematical Modelling. 2019. Vol. 72. P. 569-587. DOI: 10.1016/j.apm.2019.03.024.

8. Strelnikova E., Choudhary N., Kriutchenko D., Gnitko V., Tonkonozhenko A. Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without

baffles under horizontal and vertical excitations. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2020. Vol. 120. P. 13-27. DOI: 10.1016/j.enganabound.2020.07.024.

9. Kangda M. Z. An approach to finite element modeling of liquid storage tanks in ANSYS: A review. Innov. Infrastruct. Solut. 2021. Vol. 6. No. 226. DOI: 10.1007/s41062-021-00589-8.

10. Choudhary N., Kumar N., Strelnikova E., Gnitko V., Kriutchenko D., Degtyariov K. Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes. Journal of King Saud University – Science. 2021. Vol. 33, No. 8. Article ID 101589. DOI: 10.1016/j.jksus.2021.101589.

11. Housner G. Dynamic pressures on accelerated fluid containers. Bull. Of the Seismological Society of America. 1957. Vol. 47, No. 1. P. 15-35.

12. Sadek S. A., Gomaa M. S., El-Ghazaly H. A. Seismic Behavior of Ground Rested Rectangular RC Tank Considering Fluid-Structure-Soil Interaction. IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering. 2019. Vol. 16, No. 1. P. 01-15. DOI: 10.9790/1684-1601010115.

13. Kijko A., Vermeulen P. J., Smit A. Estimation Techniques for Seismic Recurrence Parameters for Incomplete Catalogues. Surv Geophys. 2022. Vol. 43. P. 597-617. DOI: 10.1007/s10712-021-09672-2.

14. Liu Y., Higashimachi T., Toriya R. Numerical modelling and vibration analysis of human middle ear for application in sound conduction reconstruction. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 657. DOI: 10.1088/1757-899X/657/1/012037.

15. Wang L., Wang J., Zhang L., Li X. Vibration of Tympanic Membrane Influenced by Middle Ear Fluid Ear. Ear Nose Throat J. 2022. Article ID 1455613221086023. DOI: 10.1177/01455613221086023.

16. Higashimachi T., Liu Y., Oshikata T., Toriya R. Improvement of sound conduction efficiency from the viewpoint of vibration characteristics of the human middle ear. Int. J. of Design & Nature and Ecodynamics. 2017. Vol. 12, No. 1. P. 75-85. DOI: 10.2495/DNE-V12-N1-75-85.

17. Wahl P., Ziegler P., Eberhard P. Numerical investigation of the basilar membrane vibration induced by the unsteady fluid flow in the human inner ear. Archive Mechanical Engineering. 2020. Vol. 67, No. 4. DOI: 10.24425/ame.2020.13170116.

18. Ren W., Yan H., Yu Y., Ren J., Chang J., Wang Y., Han Y. Study on the Prosthesis Structural Design and Vibration Characteristics Based on the Conduction Effect of Human Middle Ear. Hindawi Applied Bionics and Biomechanics. 2020. Article ID 4250265. DOI: 10.1155/2020/4250265.

19. Ugarteburu M., Withnell R. H., Cardoso L., Carriero A., Richter C.-P. Mammalian middle ear mechanics: A review. Ear, Front. Bioeng. Biotechnol., Sec. Biomechanics. 2022. Vol. 10. DOI: 10.3389/fbioe.2022.983510.

20. Higashimachi T., Toriya R. Finite element analysis of the human middle ear and an application for clinics for tympanoplasty (Static and Harmonic Vibration Analysis). American Transactions on Engineering & Applied Sciences. 2015. Vol. 4, No. 1. P. 13-29. URL: http://TUENGR.COM/ATEAS/V04/013.pdf.

21. Salehuddin N. S. M., Daud M. K., Adilah N., Othman N., Rahman N. A. Extended high frequency hearing loss in tinnitus-positive chronic suppurative otitis media patient. Laryngoscope Investig Otolaryngol. 2021. Vol. 6, No. 5. P. 1137-1141. DOI: 10.4103/indianjotol.indianjotol_18_23.

22. Gnitko V., Degtyariov K., Naumenko V., Strelnikova E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure interaction in tanks with baffles. International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. 2017. Vol. 5, No. 3. P. 317-328. DOI: 10.2495/CMEM-V5-N3-317-328.

23. Frei S. Eulerian finite element methods for interface problems and fluid-structure interactions. Computer Science. 2016. Article ID 125964840. 230 p. DOI: 10.11588/heidok.00021590.

24. Gnitko V., Degtyariov K., Karaiev A., Strelnikova E. Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells. WIT Transactions on Engineering Sciences. 2019. Vol. 126. P. 189-200. DOI: 10.2495/BE420171.

25. Kovalnogov V. N., Fedorov R. V., Karpukhina T. V., Simos T. E., Tsitouras C. Runge–Kutta Embedded Methods of Orders 8(7) for Use in Quadruple Precision Computations. Mathematics, MDPI. 2022. Vol. 10, No. 18. P. 1-12.

26. Kurennov S., Smetankina N., Pavlikov V., Dvoretskaya D., Radchenko V. Mathematical Model of the Stress State of the Antenna Radome Joint with the Load-Bearing Edging of the Skin Cutout. In: Cioboată D.D. (eds) International Conference on Reliable Systems Engineering (ICoRSE) 2021. ICoRSE 2021. Lecture Notes in Networks and Systems, 305. Springer, Cham. 2022. P. 287-295. DOI: 10.1007/978-3-030-83368-8_28.

27. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Berlin and New York : Springer-Verlag, 1984.

28. Karaiev A., Strelnikova E. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics. International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2020. Vol. 11, No. 1. Article ID 2050003. DOI: 10.1142/S1793962320500038.

29. Karaiev A., Strelnikova E. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2021. Vol. 101, No. 1. Article ID e201800339. DOI: 10.1002/zamm.201800339.

30. Naumenko V. V., Strelnikova H. A. Singular integral accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods. Engineering analysis with boundary elements. 2002. Vol. 26. P. 95-98. DOI: 10.1016/S0955-7997(01)00041-8.

31. Shu C. An efficient approach for free vibration analysis of conical shells. Int. J. Mech. Sci. 1996. Vol. 38, No. 8-9. P. 935-949.

32. Raynovskyy I. A., Timokha A. N. Sloshing in Upright Circular Containers: Theory, Analytical Solutions, and Applications. CRC Press/Taylor and Francis Group, 2020. 170 p. DOI: 10.1201/9780429356711.

33. Butikov E. Analytical expressions for stability regions in the Ince–Strutt diagram of Mathieu equation. American Journal of Physics. 2018. Vol. 86. P. 257-267. DOI: 10.1119/1.5021895.

34. Kolukula S. S., Chellapandi P. Dynamic stability of plane free surface of liquid in axisymmetric tanks. Advances in Acoustics and Vibration. 2013. Article ID 298458. 16 p. DOI: 10.1155/2013/298458.

35. Hesabgar S. M., Marshall H., Agrawal S. K., Samani A., Ladak H. M. Measuring the quasi-static Young's modulus of the eardrum using an indentation technique. Hearing Research. 2010. Vol. 263. P. 168-176. DOI: 10.1016/j.heares.2010.02.005.

36. Salehuddin S. M., Daud M. K., Adilah N., Othman N., Rahman N. A. Extended high frequency hearing loss in tinnitus-positive chronic suppurative otitis media patient. Laryngoscope Investig Otolaryngol. 2021. Vol. 6, No. 5. P. 1137-1141. DOI: 10.1002/lio2.651.

37. Sadd M. H. Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. Academic Press of Elsevier, 2014. 573 p.

38. Zhu H., Wu J. Free vibration of partially fluid-filled or fluid-surrounded composite shells using the dynamic stiffness method. Acta Mechanica. 2020. DOI: 10.1007/s00707-020-02734-3.

39. Choudhary N., Degtyarev K., Strelnikova E., Rana S. Liquid induced vibrations of partially liquid-filled elastic cylindrical-conical shells. Vibroengineering PROCEDIA. 2024.

40. Liu J., Zhang W.-Q., Ye W.-B., Gan L., Qin L., Zang Q., Wang H. Forced vibration of liquid-filled composite laminated shell container considering fluid–structure interaction by the scaled boundary finite element method. The Physics of Fluids. 2024.

41. Li J., Li T., Zhu X., Han Y. Numerical study on vibration characteristics of the underwater partially fluid-filled cylindrical shell. IEEE 8th International Conference. 2018.

42. Hansen E. L. M. B., Silva F. M. A. Nonlinear vibration analysis of a partially filled multi-layer cylindrical tank: consideration of the sloshing effects in the fluid–structure interaction. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2022. DOI: 10.1007/s40430-022-03766-7.

43. Numerical modeling of natural vibrations of coaxial shells partially filled with fluid, taking into account the effects on the free surface. PNRPU Mechanics Bulletin. 2022.

44. Jhung M., Yu S., Lim Y.-T. Dynamic characteristics of a partially fluid-filled cylindrical shell. 2011.

45. Lendermann M., Koh J. M., Tan J. S. Q., Cheong K. H. Comprehensive vibrational dynamics of half-open fluid-filled shells. 2019. URL: https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/31423101/.

46. Ikeda C. Fluid-Structure Interactions: Implosions of Shell Structures and Wave Impact on a Flat Plate. 2012.

47. Menaa M., Lakis A. Supersonic Flutter of a Spherical Shell Partially Filled with Fluid. 2014.

48. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V. Analysis of natural vibration of truncated conical shells partially filled with fluid. 2023. DOI: 10.1002/msd2.12105.

49. Guo W., Feng Q., Li T., Zhu X., Miao Y. A new solution for vibroacoustic analysis of two-dimensional cylindrical shells partially liquid-filled or partially submerged in fluid. Mechanical Systems and Signal Processing. 2020. DOI: 10.1016/j.ymssp.2020.106758.

50. Gonçalves P. B., da Silva F. M. A., del Prado Z. J. G. N. Transient stability of empty and fluid-filled cylindrical shells. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.

51. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Senin A. N. Analysis of the Spatial Vibrations of Coaxial Cylindrical Shells Partially Filled with a Fluid. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2019. DOI: 10.1134/S0021894419070046.

52. Iakovlev S. Structural analysis of a submerged fluid-filled cylindrical shell subjected to a shock wave. Journal of Fluids and Structures. 2018. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2018.12.003.

53. Han Y., Zhu X., Guo W., Li T., Zhang S. Coupled vibration analysis of partially liquid-filled cylindrical shell considering free surface sloshing. Thin-Walled Structures. 2022. DOI: 10.1016/j.tws.2022.109671.

54. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural Vibrations of Composite Cylindrical Shells Partially Filled with Fluid. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2023. DOI: 10.1134/S1063454123040052.

55. Kim Y.-W. Effect of partial elastic foundation on free vibration of fluid-filled functionally graded cylindrical shells. Acta Mechanica Sinica. 2015. DOI: 10.1007/s10409-015-0442.