МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ
Кафедра комп`ютерної фізики

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до кваліфікаційної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр

«Модифікований алгоритм Фельдкампа для томосинтезу»

Виконав: студент 2 курсу, групи НФ-64
Лапітан К.Є.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: комп`ютерна фізика
Керівник:
д. ф.-м. н., професор Нємченко К.Е.

Рецензент:

Харків – 2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики

Кафедра комп'ютерної фізики

Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магістр

Спеціальність: 105 Прикладна фізика та наноматеріали

Освітня програма: Комп'ютерна фізика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Костянтин НЄМЧЕНКО

підпис

«_____» _____ 2023 року

ЗАВДАННЯ

на кваліфікаційну роботу магістра студентові

Лапітану Костянтину Євгеновичу

1. Тема роботи «Модифікований алгоритм Фельдкампа для томосинтеза», керівник роботи професор Нємченко Костянтин Едуардович,

затверджені наказом по університету від 20 січня 2023 № 4201 – 5/163.

2. Строк подання студентом роботи 19 травня 2023 р.

3. Перелік питань, які потрібно розглянути:

1) вивчити основні алгоритми відновлення тривимірних зображень методом комп'ютерної томографії;

2) дослідити точні та наближені алгоритми конусної томографії;

3) провести розрахунки для виведення модифікованого алгоритму Фельдкампа для томосинтезу;

4) запропонувати та розвинути модель одночасного використання методів лінійної томографії та алгоритму Фельдкампа;

5) дослідити конкурентні вклади в визначення помилок відновлення зображень різними алгоритмами;

6) провести порівняння з результатами інших досліджень та запропонувати нові експерименти на основі ідей, що наведені у дипломній роботі.

4.План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми.
2	Затвердження теми на кафедрі
3	Робота над літературою та іншими джерелами
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6	Написання третього розділу
7	Завершення написання дипломної роботи (висновки та література)
8	Подача науковому керівнику
9	Обговорення відгуку та, рецензії. Підготовка до захисту
10	Попередній захист
11	Захист

5. Дата видачі завдання «10» квітня 2023 р.

Студент _____ Костянтин ЛАПІТАН
підпис

Керівник роботи _____ Костянтин НЄМЧЕНКО
підпис

РЕФЕРАТ

Костянтин Лапітан «Модифікований алгоритм Фельдкампа для томосинтеза» Кваліфікаційна робота магістра з прикладної фізики. – Х.: Харківській національний університет імені В. Н.Каразіна, 2023. – 51 с.

У роботі досліджуються нові модифікації алгоритми конусної томографії з фільтром підвищення якості тривимірного відновлення внутрішньої структури біологічних об’єктів. На першому етапі в роботі критично аналізуються недоліки та переваги існуючих наближень, які використовуються для задач тривимірної конусної томографії. Для цього вивчаються основні точні алгоритми відновлення тривимірних зображень методом комп’ютерної томографії. Після цього проводиться послідовне порівняння точних та приблизних алгоритмів конусної томографії. При цьому проводяться як аналітичні розрахунки так і комп’ютерне моделювання з використання певних алгоритмів. Даля проводяться розрахунки для виведення модифікованих версій алгоритму Фельдкампа для томосинтеза. Зокрема запропоновано та розвинуто модель одночасного використання методів лінійної томографії та алгоритму Фельдкампа. Крім того в роботі запропоновано і досліджено модель комп’ютерної томографії при лінійному руху як детектора, так і джерела випромінювання. Під час аналізу якісних властивостей запропонованих методів досліджено конкурентні вклади в визначення помилок відновлення зображень різними алгоритмами. Проведено порівняння отриманих результатів з результатами інших досліджень та запропонувано нові експерименти на основі ідей, що наведені у дипломній роботі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: КОМП’ЮТЕРНА ТОМОГРАФІЯ, ТОМОСИНТЕЗ, АЛГОРИТМ ФЕЛЬДКАМПА, КОНУСНА ТОМОГРАФІЯ

ABSTRACT

Konstantin Lapitan "Modified Feldkamp algorithm for tomosynthesis"
Master's thesis in applied physics. - Kh.: Kharkiv National University named after V. N. Karazin, 2023. - 51 p.

The thesis examines new modifications of cone tomography algorithms with the aim of improving the quality of three-dimensional restoration of the internal structure of biological objects. At the first stage, the work critically analyzes the shortcomings and advantages of the existing approximations used for the problems of three-dimensional cone tomography. For this purpose, the main accurate algorithms for restoration of three-dimensional images by the computer tomography method are studied. After that, a sequential comparison of exact and approximate algorithms of cone tomography is made. At the same time, both analytical calculations and computer simulations using certain algorithms are carried out. Next, calculations are carried out to derive modified versions of Feldkamp's algorithm for tomosynthesis. In particular, a model of the simultaneous use of linear tomography methods and the Feldkamp algorithm was proposed and developed. In addition, the work proposed and investigated a model of computer tomography with linear movement of both the detector and the radiation source. During the analysis of the qualitative properties of the proposed methods, competitive contributions to the determination of image restoration errors by various algorithms were investigated. A comparison of the obtained results with the results of other studies was carried out and new experiments were proposed based on the ideas presented in the thesis.
KEYWORDS: COMPUTER TOMOGRAPHY, TOMOSYNTHESIS, FELDKAMP ALGORITHM, CONE BEAM TOMOGRAPHY

ЗМІСТ

ВСТУП 7

1. СУЧАСНИЙ СТАН КОМП’ЮТЕРНОЇ ТОМОГРАФІЇ 9

1.1. Ознайомлення з комп’ютерною томографією 9

1.2. Формула Радона 11

1.3. Фур’є теорема 13

1.4. Алгоритм реконструкції 14

1.5. Алгоритм реконструкції для віялового променя 16

1.6. Класичний алгоритм Фельдкампа та його недоліки 20

1.7. Точні алгоритми конусного променя 24

2. РОЗРОБКА МОДИФІКОВАНОГО АЛГОРИТМУ 30

2.1. Одновимірна модель 30

2.2. Тривимірна модель 34

2.3. Обернення для дельта функції 39

3. КОМП’ЮТЕРНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РЕЗУЛЬТАТИ 42

3.1. Опис моделі досліджуваного об'єкта 42

3.2. Результати 46

ВИСНОВКИ 49

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 50

ВСТУП

Актуальність теми. У сучасному світі комп’ютерна томографія є одним з важливіших методів діагностики в медицині, що дозволяє отримувати багатовимірні зображення внутрішніх органів та тканин. Одним з ключових етапів обробки даних рентгенівської томографії є тривимірна томографічна реконструкція, яка полягає в відновленні тривимірної форми об'єкта дослідження на основі його проекцій.

На сьогоднішній день існують різноманітні алгоритми реконструкції як точні так і наближені[1-3]. Однак усі вони мають певні недоліки. Так, точні алгоритми є вимогливими до кількості обчислень і тому час реконструкції занадто великий, щоб використовувати їх в медичному середовищі. Крім того, зменшення кількості даних, що вирішується комбінацією даних[4], і проблема дослідження довгого об’єкта, що теоретично може бути вирішена, вводять нові артефакти реконструкції через дискретну структуру отриманих даних. Наближені підходи, навпаки, дуже ефективно виконують обчислення, але зі збільшенням кута конуса вміст артефактів значно збільшується.

Алгоритм для конусного променя, який вперше запропонували Фельдкамп, Девіс і Кресс з метою реконструкції зображення за допомогою кругової орбіти сканування[5], завдяки своїй простоті та симетрії став основним для конусно-променевої томографії на практиці. Але даних проекцій для такої траєкторії руху не достатньо для точної реконструкції 3D-зображень. Тому метою цієї роботи стало отримання модифікованого алгоритму томографії, що забезпечить ефективні та точні обчислення для отримання внутрішньої структури тривимірного об’єкту.

Основною **метою** дипломної роботи є модифікація існуючого алгоритму Фельдкампа для задач конусної томографії, розробка оригінального алгоритму тривимірної комп’ютерної томографії та розроблення методики застосування цього алгоритму для розв’язання практичних задач.

Об’єкт дослідження – відновлення тривимірної структури біологічних об’єктів.

Предмет дослідження – модифікація алгоритм Фельдкампу конусної томографії.

Методи дослідження –методи обробки зображень, зокрема алгоритмів двовимірних Фур'є перетворень в полярній системі координат.

Наукова новизна одержаних результатів – запропоновано оригінальна модифікація алгоритму Фельдкампа для задач конусної томографії, розроблено оригінальний алгоритм тривимірної комп'ютерної томографії.

У результаті проведення дипломної роботи були вирішені такі **задачі**:

– вивчено основні алгоритми відновлення тривимірних зображень методом комп'ютерної томографії;

– досліджено точні та приблизні алгоритми конусної томографії;

– проведено розрахунки для виведення модифікованого алгоритму Фельдкампа для томосинтезу;

– запропоновано та розвинуто модель одночасного використання методів лінійної томографії та алгоритму Фельдкампа;

– досліджено конкурентні вклади в визначення помилок відновлення зображень різними алгоритмами;

– проведено порівняння з результатами інших досліджень та запропонувати нові експерименти на основі ідей, що наведені у дипломі.

Практичне значення отриманих результатів – отримані результати дозволяють вирішити одну з головних задач комп'ютерної томографії – задачу про зменшення часу дослідження за умовою мінімізації радіаційного навантаження на пацієнта.

Структура і обсяг роботи. Кваліфікаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи становить 53 сторінки, із них основного тексту 43 сторінок, 15 рисунків за текстом, список використаних джерел із 35 найменувань на 4 сторінках.

1. СУЧАСНИЙ СТАН КОМП’ЮТЕРНОЇ ТОМОГРАФІЇ

1.1. Ознайомлення з комп’ютерною томографією

Томографія - це метод отримання зображення поперечного перерізу об'єкта з даних, зібраних за допомогою освітлення об’єкта з багатьох різних напрямків. Цей метод став революційним у діагностичній медицині, оскільки дозволив лікарям переглядати внутрішні органи з безпрецедентною точністю та безпекою для пацієнтів[6]. Перші медичні застосування рентгенівського знімка використовували рентгенівські промені для формування проекції зображень тканин на основі їх коефіцієнта ослаблення[7]. Однак з часом з’явилися й інші види медичної візуалізації, що було успішно реалізовано за допомогою радіоізотопів, ультразвуку[8,9] та ядерного магнітного резонансу[10].

Існує багато немедичних застосувань зображень отриманих за допомогою методів комп'ютерної томографії Дослідники вже застосували цю методологію для картографування підземних ресурсів через зображення свердловин, деякі спеціальні випадки зображення поперечного перерізу для неруйнівного контролю якості деталей.[11,12], визначення розподілу яскравості небесної сфери[13] та тривимірне зображення за допомогою електронної мікроскопії[14,15]. По суті, томографія займається реконструкцією зображення з його проекцій. Проекцією на даний кут — є інтеграл зображення в напрямку, заданому цим кутом, як показано на Рис. 1.1. Тут проекція означає інформацію, яку отримали від переданої енергії, коли об’єкт був опромінений під певним кутом.

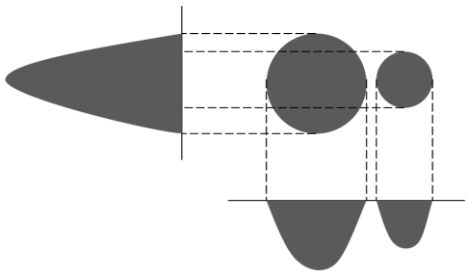


Рис.1.1 Проекції об’єкта що складається з двох циліндрів.

Хоча розв’язання задачі того, як реконструювати функцію за її проекціями, бере свій початок з статті Радона в 1917 році[16], поточний ажіотаж у томографічних зображеннях виникла завдяки винаходу Хаунсфілдом рентгенівської комп’ютерної томографії сканера[17], за який він отримав Нобелівську премію в 1972 році. Він розділив премію з Алланом Кормаком, який незалежно від нього відкрив деякі алгоритми[18]. Його винахід показав, що хоч дані проекцій не повністю відповідають теоретичним моделям, що лежать в основі ефективно реалізованих алгоритмів реконструкції, можна обчислити якісний поперечний переріз зображення з точністю, яка зараз досягає однієї тисячної, незважаючи на цей факт. Його винахід також показав, що можна обробляти дуже велику кількість вимірювань (для сучасних томографічних установок кількість наближається до мільйона) за допомогою досить складних математичних операцій, і це не завадить отримати зображення, які є дуже точними.

Після винаходу Хаунсфілда зображення рентгенівської комп’ютерної томографії покращувалися в більшості через розробки зроблені у реконструкційних алгоритмах[19,20]. Хаунсфілд використовував алгебраїчні методи і зміг реконструювати зашумлені зображення розміром 80x80 пікселів з точністю до однієї сотої. Після цього було застосовано згорткові алгоритми зворотної проекції, вперше розроблені Рамачандраном[21] і пізніше популяризовані Шеппом і Логаном [22]. Ці згорткові алгоритми значно зменшили час обробки для реконструкції, а отримане зображення було чисельно точніше. В результаті комерційні виробники рентгенівських томографів сканери почали створювати системи, здатні реконструювати 256x256 і зображення розміром 512x512 пікселів, які були майже ідеальними, тобто щоб усі деталі були виявлені однозначно та ідеально узгоджені з анатомічними особливостями.

Через величезний успіх рентгенівської комп'ютерної томографії, що не дивно, вже багато років велика увага приділяється розширенню технік формування зображень як для магнітно-резонансних та ультразвукових

методів дослідження так і для ядерної медицини та рентгенівської. В ядерній медицині, зацікавленість полягає в реконструкції зображення поперечного перетину у розподілі радіоактивних ізотопів в організмі людини[23]. А в зображенні за допомогою магнітного резонансу намагаються реконструювати магнітні властивості об'єкту. В обох цих областях проблему можна поставити як реконструкцію зображення з його проекцій отриманих за схемою, зображеною на Рис. 1.1. Це не схоже на випадок коли в якості джерел енергії використовуються ультразвук або рентгенівське випромінювання, але мета така ж, як і з рентгенівськими променями, а саме реконструювати зображення поперечного перетину з коефіцієнта ослаблення.

Рентгенівські промені не дифрагують, тобто поширюються по прямих лініях, тоді як ультразвукові дифрагують. Коли об'єкт освітлюється дифрагуючим джерелом, в ньому розсіюється хвильове поле практично у всіх напрямках, хоча за певних умов можна обійтися припущенням прямолінійного поширення, ці умови задовольняється, коли неоднорідності набагато більші, ніж довжина хвилі та коли параметром зображення є показник заломлення. Для ситуацій коли необхідно враховувати дифракційні ефекти (неоднорідністі, спричинені розсіюванням у хвильовому полі) також можна отримати томографічне зображення за допомогою спеціальних алгоритмів.

1.2. Формула Радона

Лінійний інтеграл це інтеграл деяких параметрів об'єкта вздовж лінії. Типовим прикладом такого інтегралу є ослаблення рентгенівського випромінювання під час його поширення у тканинах[24]. У цьому випадку об'єкт моделюється як двовимірний (або тривимірний) розподіл коефіцієнтів ослаблення рентгенівського випромінювання, а лінійний інтеграл представляє собою загальне ослаблення пучка рентгенівського випромінювання що рухається по прямій лінії через об’єкт. Для опису лінії ми будемо використовувати систему координат, визначену на Рис. 1.2.

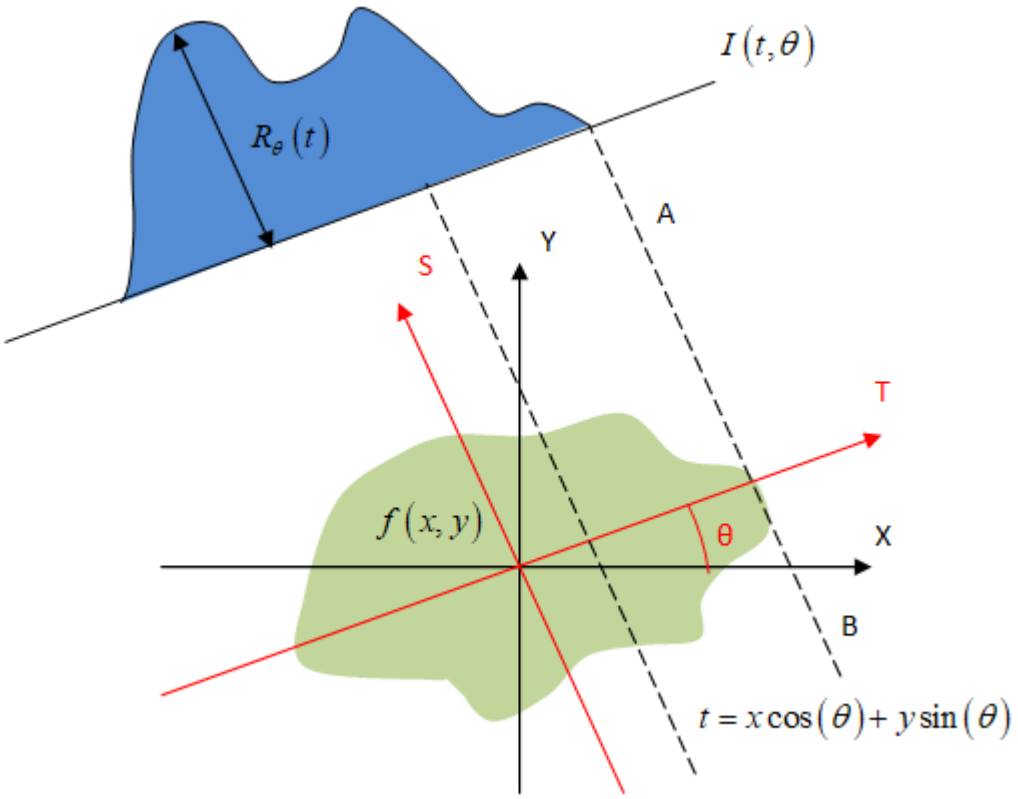


Рис.1.2. Перетворення Радона.

Нехай в площині, де введена декартова система координат (*x*,*y*), задано певний об'єкт, що визначається двовимірною функцією $f(x,y)$. Проінтегруємо цю функцію вздовж деякої прямої з параметрами (t,θ). Результат інтегрування позначимо $R_\theta(t)$. На Рис. 1.2 пряма АВ, вздовж якої проводимо інтегрування, задається рівнянням

$$x\cos(\theta) + y\sin(\theta) - t = 0 \qquad (0.1)$$

Де t – відстань від початку координат до цієї прямої, θ – кут, утворений віссю x з перпендикуляром, відпущеним із початку координат на цю пряму. Звідки вираз для лінійного інтегралу

$$R_\theta(t) = \int f(x,y)ds \qquad (0.2)$$

Або використовуючи дельта функцію

$$R_\theta(t) = \int f(x,y)\delta\left(x\cos(\theta) + y\sin(\theta) - t\right)dxdy \qquad (0.3)$$

Функція $R_\theta(t)$ відома як перетворення Радона для функції $f(x,y)$. Проекційні дані формуються шляхом комбінування набору лінійних інтегралів по всім кутам інтегрування. Найпростіша проекція — це сукупність інтегралів паралельних променів, що позначається функцією $I(t,\theta)$. Цей вираз відомий як паралельна проекція і її зображено на Рис. 1.2. Це можна виміряти, наприклад, шляхом переміщення джерела рентгенівського випромінювання та детектора уздовж паралельних ліній на протилежних сторонах предмета. Інший тип проекції можливий, якщо єдине джерело поміщено у нерухоме положення відносно лінії детекторів.

1.3. Фур'є теорема

Основою реконструктивного алгоритму є теорема про зв'язок перетворень Фур'є та Радона[25]. Якщо взяти одновимірне перетворення Фур'є паралельної проекції під певним кутом то можна побачити, що воно дорівнює зрізу двовимірного перетворення Фур'є для початкового об'єкта під тим самим кутом, що зображено на Рис.1.3.

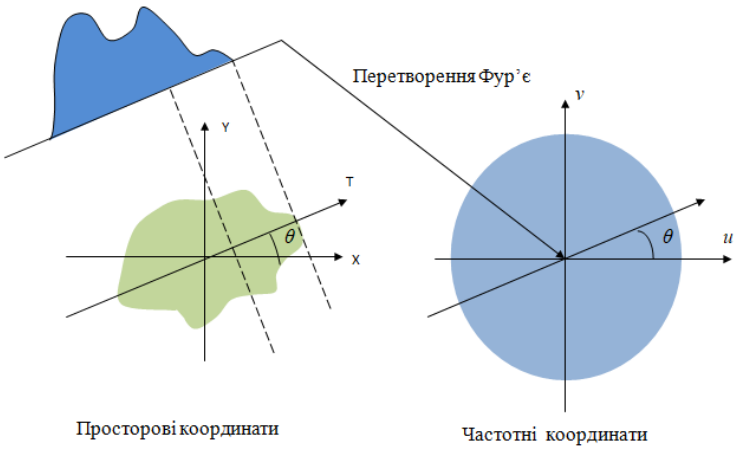


Рис.1.3. Зображення теореми Фур'є зрізу

З цього випливає, що з урахуванням проекційних даних ми повинні мати можливість оцінити об'єкт, просто виконавши двовимірне зворотнє перетворення Фур'є.

Двовимірне перетворення Фур'є функції об'єкта визначається

$$F(u,v)=\int\int f(x,y)e^{-i(ux+vy)}dxdy \tag{0.4}$$

Перетворення Фур’є для паралельної проекції позначимо

$$\hat{I}(w,\theta)=\int I(t,\theta)e^{-iwt}dt \tag{0.5}$$

Підставимо визначення для $I(t,\theta)$ у попередній вираз

$$\begin{aligned}\hat{I}(w,\theta)&=\int\int f(x,y)e^{-iwt}dtds=\\&=\int\int f(x,y)e^{-iw(x\cos(\theta)+y\sin(\theta))}dxdy\end{aligned} \tag{0.6}$$

Тепер якщо зробити заміну змінних $(u=w\cos(\theta),v=w\sin(\theta))$ отримаємо той самий вираз, що у (1.4)

$$\hat{I}(w,\theta)=\int\int f(x,y)e^{-i(xu+yv)}dxdy=F(w\cos(\theta),w\sin(\theta)) \tag{0.7}$$

Це рівняння є основою для реконструкційної томографії та доводить теорему Фур’є зрізу, яка пов'язує перетворення Фур'є проекції з двовимірним перетворенням Фур'є об'єкта вздовж однієї радіальної лінії. В такому випадку якщо зробити достатню кількість проекцій з яких можна встановити значення для функції $F(u,v)$, то можна буде за допомогою зворотного перетворення Фур’є відновити значення початкової функції $f(x,y)$. Хоча це надає просту концептуальну модель томографії, практичні реалізації вимагають іншого підходу.

1.4. Алгоритм реконструкції

Алгоритм, який в даний час використовується майже в усіх застосуваннях прямолінійної томографії - це алгоритм фільтрованої оберненої проекції(FBP). Він показав себе дуже точним і придатним до швидкої реалізації і був отриманий за допомогою теореми про Фур'є зріз. Ця теорема використовується шляхом перепису оберненого перетворення Фур'є в

полярних координатах і перестановки меж інтегрування в ньому. Отримання цього алгоритму є важливим етапом до комп’ютерної реалізації .

Алгоритм фільтрованої оберненої проекції можливо доволі просто пояснити, оскільки кожна проекція це практично незалежні вимірювання об'єкта. Через теорему про Фур'є зріз вимірювання проекції можна розглядати як здійснення двовимірної операції фільтрації. Розглянемо одну проекцію та її перетворення Фур'є. Коли ми беремо проекцію та робимо її перетворення Фур'є, ми отримуємо значення, які представляють двовимірне перетворення Фур'є об'єкта вздовж однієї лінії. Якщо ми вставимо ці значення відповідно до місць в двовимірному перетворенні Фур'є об'єкта, то можна отримати спотворену, але просту реконструкцію, якщо припустити, що всі інші проекції дорівнюють нулю коли ми знаходимо обернене перетворення Фур'є. Алгоритм фільтрованої оберненої проекції має два кроки: фільтрування, яке можна уявити як зважування проекцій у частотній області, а виконання операції зворотної проекції, коли дані відображаються на зображенні вздовж напрямку, в якому вони були виміряні.

Спочатку представимо алгоритм оберненої фільтрованої проекції для паралельного проектування. Для цього запише обернене перетворення Фур’є:

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)e^{i(ux+vy)}dudv \tag{0.8}$$

Тепер перейдемо до полярної координатної системи у частотному просторі:

$$\begin{cases}u=w\cos(\theta)\\ v=w\sin(\theta)\end{cases} \tag{0.9}$$

Звідки якобіан переходу до нових координат буде:

$$J=\begin{vmatrix}\cos(\theta) & -w\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & w\cos(\theta)\end{vmatrix}=w\cos^2(\theta)+w\sin^2(\theta)=w \tag{0.10}$$

Перепишемо вираз (1.8) з підстановкою нових змінних:

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}F(w,\theta)we^{iw(x\cos(\theta)+y\sin(\theta))}dwd\theta \tag{0.11}$$

Цей інтеграл можна розбити на два по змінній θ де в одного межі від 0 до 180 градусів, а інший від 180 до 360, та використати властивість:

$$F(w,\theta+180)=F(-w,\theta) \tag{0.12}$$

Тоді вираз набуває такого вигляду:

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w,\theta)|w|e^{iwt'}dwd\theta \tag{0.13}$$

Де $t'=x\cos(\theta)+y\sin(\theta)$. А оскільки $F(w,\theta)=\hat{I}(w,\theta)$ за теоремо про Фур'є зріз, зробимо підстановку для Фур'є перетворення проекції.

$$\begin{aligned} f(x,y)&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I(t,\theta)|w|e^{iw(t'-t)}dtdwd\theta= \\ &=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}I(t,\theta)G(t'-t)dtd\theta \end{aligned} \tag{0.14}$$

Де функцію $G(t)$ називають ядром фільтрації, а функція $|w|$- це лінійний фільтр.

$$G(t)=\int_{-\infty}^{\infty}|w|e^{iwt}dw \tag{0.15}$$

1.5. Алгоритм реконструкції для віялового променя

Теорія, яку ми розглядали раніше, вивчала створення зображень з їх паралельних проекцій, як показано на Рис. 1.2. Щоб отримати ці паралельні дані, нам потрібно лінійно просканувати по всій довжині проекції, потім повернути детектор з випромінювачем на певний кут, і знову сканувати по довжині наступну проекцію і так далі. Зазвичай це займає дуже багато часу, однак існує швидший спосіб створення лінійних інтегралів, який використовує віялові пучки, подібні до тих, що показані на Рис. 1.4. Замість лінійного джерела випромінювання використовується точкове джерело, яке створює віяльний пучок[26]. З іншого боку об'єкта використовується набір детекторів, які одночасно здійснюють всі виміри в одному віяловому пучку. Джерело та

весь набір детекторів обертаються, щоб створити необхідну кількість проекцій.

Розглянемо схему сканування зображену на Рис.1.4.

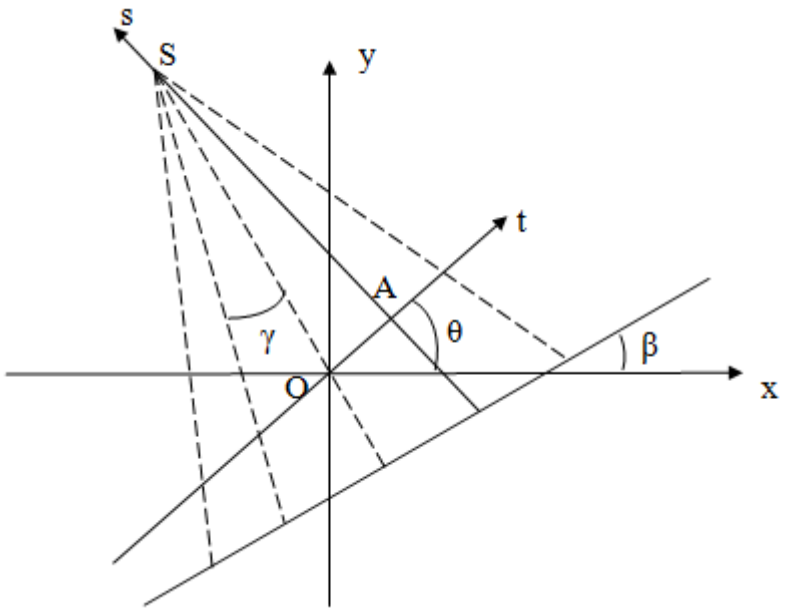


Рис.1.4. Віялова геометрія сканування

Де S – це положення випромінювача на колі радіусом D з центром у точці O. Поромінь SA – це наш піддослідний промінь. Кут β – це кут нахилу системи випромінювач/детектор відносно об'єкту. Кут γ – це кут нахилу віялового променя відносно центрального.

Розглянемо промінь SA. Якщо дані проекції були згенеровані по набору паралельних променів, то промінь SA буде відноситися до паралельної проекції $I(t,\theta)$ де t і θ задані рівняннями:

$$\begin{cases} \theta = \beta + \gamma \\ t = D\sin(\gamma) \end{cases} \tag{0.16}$$

При переході до нових змінних (γ,β) у виразі (1.14) якобіан переходу набуває вигляд:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & D\cos(\gamma) \end{vmatrix} = D\cos(\gamma) \tag{0.17}$$

Після того як зробимо підстановку нових змінних формула реконструкції набуває такого вигляду:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi^2}\int_{0-\gamma}^{2\pi-\gamma}\int_{-\sin^{-1}(t_m/D)}^{\sin^{-1}(t_m/D)} I\left(D\sin(\gamma),\beta+\gamma\right)* \\ *G\left(x\cos(\beta+\gamma)+y\sin(\beta+\gamma)-D\sin(\gamma)\right)D\cos(\gamma)d\gamma d\beta \tag{0.18}$$

В цьому виразі можливо зробити кілька спрощень. Межі від - γ до 2π - γ для θ охоплюють увесь діапазон 360°. Оскільки всі функції від θ є періодичними (з періодом 2π), ці межі можна замінити на 0 та 2π відповідно. Значення для $\sin^{-1}(t_m/D)$ дорівнює значенню γ для кожного променя на Рис.1.4. Тому верхню та нижню межі для γ можна записати як γ_{max} і $-\gamma_{max}$ відповідно. Вираз $I\left(D\sin(\gamma),\beta+\gamma\right)$ відповідає променевому інтегралу вздовж променя SA у даних паралельної проекції $I(t,\theta)$. Тотожність цього променевого інтегралу в даних віялової проекції просто дорівнює $R(\gamma,\beta)$. Внесення цих змін у (1.17) дає:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi^2}\int_{0}^{2\pi}\int_{-y_{\max}}^{y_{\max}} R(\gamma,\beta)* \\ *G\left(x\cos(\beta+\gamma)+y\sin(\beta+\gamma)-D\sin(\gamma)\right)D\cos(\gamma)d\gamma d\beta \tag{0.19}$$

Розглянемо тепер значення аргументу для функції G, щоб спростити цей вираз. Для цього розпишемо суму в косинусі та синусі.

$$\begin{aligned} &x\cos(\beta+\gamma)+y\sin(\beta+\gamma)-D\sin(\gamma)= \\ &=x\cos(\beta)\cos(\gamma)-x\sin(\beta)\sin(\gamma)+ \\ &+y\sin(\beta)\cos(\gamma)+y\cos(\beta)\sin(\gamma)-D\sin(\gamma)= \\ &=\left[x\cos(\beta)+y\sin(\beta)\right]\cos(\gamma)- \\ &-\left[x\sin(\beta)-y\cos(\beta)+D\right]\sin(\gamma)= \\ &=t\cos(\gamma)-\left[s+D\right]\sin(\gamma) \end{aligned} \tag{0.20}$$

Позначимо L як відстань від точки S до певної точки у координатах (t,s), тоді у полярних координатах це набуває вигляду

$$\begin{cases} L\cos(\gamma') = s + D \\ L\sin(\gamma') = t \end{cases} \tag{0.21}$$

Звідки можна отримати такі вирази

$$\begin{cases} L = \sqrt{(s+D)^2 + t^2} \\ \gamma' = \tan^{-1}\left(\dfrac{t}{D+s}\right) \end{cases} \tag{0.22}$$

Зробимо тепер підстановку (1.20) у (1.19) і отримаємо фінальний вираз

$$L\sin(\gamma')\cos(y) - L\cos(y')\sin(\gamma) = L\sin(\gamma' - \gamma) \tag{0.23}$$

Тепер можна виразити функцію $G\left(L\sin(\gamma' - \gamma)\right)$ у явному її вигляді. Згадаємо, що функція $G(t)$ це зворотне перетворення Фур'є для лінійного фільтра $|w|$

$$G(t) = \int |w| e^{iwt} dw \tag{0.24}$$

Звідки

$$G(L\sin\gamma) = \int |w| e^{iwL\sin\gamma} dw \tag{0.25}$$

Зробимо заміну

$$w' = \frac{wL\sin(\gamma)}{\gamma} \tag{0.26}$$

Тепер вираз (1.24) можна записати

$$G\left(L\sin(\gamma)\right) = \left(\frac{\gamma}{L\sin(\gamma)}\right)^2 \int |w| e^{iw\gamma} dw = \left(\frac{\gamma}{L\sin(\gamma)}\right)^2 G(\gamma) \tag{0.27}$$

Зробивши підстановку у (1.18) отримаємо формулу оберненого проектування для віялового променя.

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_{\max}}^{\gamma_{\max}} \frac{D\cos(\gamma)}{(s+D)^2 + t^2} R(\gamma,\beta) * \left(\frac{\gamma}{\sin(\gamma)}\right)^2 G(\gamma' - \gamma) d\gamma d\beta \tag{0.28}$$

1.6. Класичний алгоритм Фельдкампа та його недоліки

Традиційний спосіб отримання зображення тривимірного об'єкта полягає в досліджені об'єкта вузьким променем рентгенівського випромінювання і використанні алгоритму реконструкції в двох вимірах. Потім тривимірна реконструкція може бути створена шляхом складання отриманих реконструкцій. Більш ефективний підхід це дослідження зрізу об'єкта точковим джерелом рентгенівського випромінювання, в такому випадку потік рентгенівського випромінювання вимірюється на площині. Це називається конусною реконструкцією, конусні алгоритми віяльних пучків вивчалися для використання зі сканером п'ятого покоління Imatron [27]. Головна перевага конусних алгоритмів полягає в скороченні часу збору даних. За допомогою одного джерела, інтеграли променів вимірюються через кожну точку об'єкта за час, необхідний для вимірювання одного зрізу в звичайному двовимірному сканері.

Алгоритм FDK є прямим розширенням традиційного двовимірного алгоритму зворотної проекції з фільтрацією віялового променя(FBP)[28]. Незважаючи на те, що FDK є наближеним алгоритмом, він дозволяє якісно реконструювати зображення під малими кутами конуса. Також реконструкція FDK є точною у середній площині, яка містить кругову орбіту, хоча має зростаючі артефакти та затухання при збільшенні кута конуса на площинах, віддалених від серединної площини.

Нехай задано нерухомий об’єкт та систему випромінювача з детектором, що рухаються навколо об’єкта по колу, що зображено на Рис.1.5.

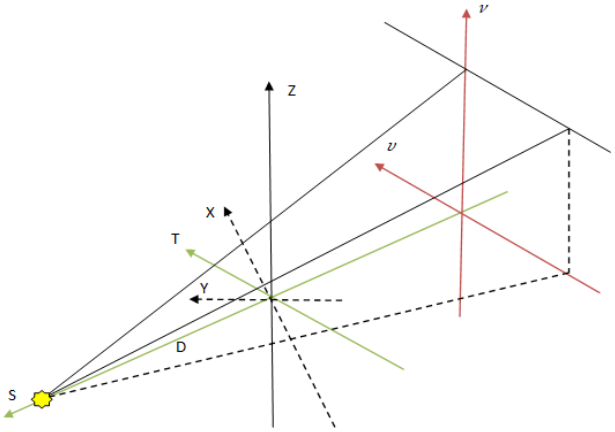


Рис.1.5 Геометрія сканування конусного променя

Площина в якій знаходиться випромінювач та перпендикулярна до детекторів називається серединною площиною. Відстань від випромінювача до об'єкту фіксована та дорівнює D. У випадку коли $D \to \infty$ геометрія сканування переходить у пошаровий паралельний вигляд.

Розглянемо більш детально сканування конусним пучком у серединні площині, що зображено на Рис.1.6.

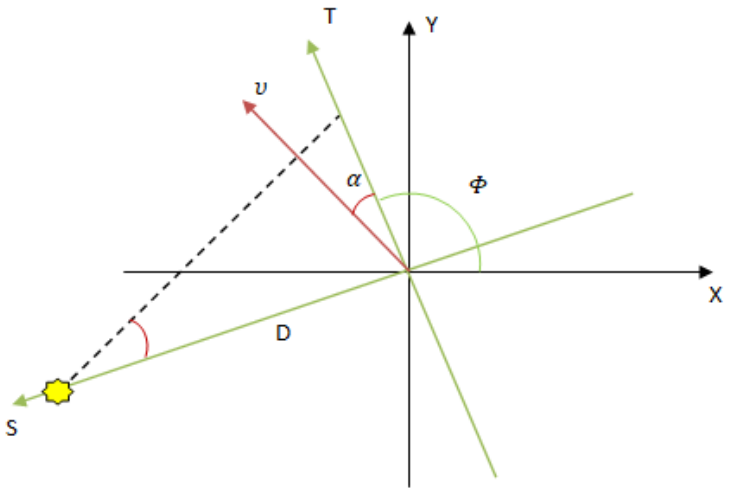


Рис.1.6. Геометрія у серединній площині

Φ – це кут повороту системи випромінювача та детекторів відносно об'єкту. T – це координата вздовж детектора в яку потрапляє центральний промінь проектування. υ – це координата для променя під кутом α відносно центрального променю.

Координату υ з Рис.1.6 можна назвати координатою зведеною до вигляду паралельного проектування. Тому розглянемо алгоритм реконструкції для паралельної геометрії проектування.

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int\int\int I(t,\theta)|q|e^{iq(t'-t)}dqdtd\theta \tag{0.29}$$

Розглянемо зв'язок координат (t,θ) з (υ,Φ) з заміною $q=q'\frac{\sqrt{D^2+\upsilon^2}}{D-s}$

$$\begin{cases} t=\dfrac{\upsilon D}{\sqrt{D^2+\upsilon^2}} \\ \theta=\Phi+\alpha=\Phi+\tan^{-1}\left(\dfrac{\upsilon}{\sqrt{D^2-\upsilon^2}}\right) \\ q=q'\dfrac{\sqrt{D^2+\upsilon^2}}{D-s} \end{cases} \tag{0.30}$$

Звідки Якобіан переходу до нових координат:

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{D^3}{\sqrt{\left(D^2+\upsilon^2\right)^3}} & 0 & 0 \\ \dfrac{\sqrt{D^2-\upsilon^2}}{D^2-\upsilon^2} & 1 & 0 \\ \dfrac{q\upsilon}{(D-s)\sqrt{D^2+\upsilon^2}} & 0 & \dfrac{\sqrt{D^2+\upsilon^2}}{D-s} \end{vmatrix}=\frac{D^3}{\sqrt{\left(D^2+\upsilon^2\right)^3}}\frac{\sqrt{D^2+\upsilon^2}}{D-s} \tag{0.31}$$

Тоді вираз (1.1) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} f(x,y)&=\frac{1}{4\pi^2}\int\int\int\frac{D^3}{\sqrt{\left(D^2+\upsilon^2\right)^3}}\frac{\sqrt{D^2+\upsilon^2}}{D-s}I(\upsilon,\Phi)* \\ &*|q'|\frac{\sqrt{D^2+\upsilon^2}}{D-s}e^{iq'(\upsilon'-\upsilon)}dq'd\upsilon d\Phi= \\ &=\frac{1}{4\pi^2}\int\int\frac{D}{\sqrt{D^2+\upsilon^2}}I(\upsilon,\Phi)\frac{D^2}{(D-s)^2}G\left(\frac{Dt}{D-s}-\upsilon\right)d\upsilon d\Phi \end{aligned} \tag{0.32}$$

Де $\begin{cases} t = x\cos(\Phi) + y\sin(\Phi) \\ s = -x\sin(\Phi) + y\cos(\Phi) \end{cases}$

Для того щоб перейти від геометрії серединної площини до похилих площин необхідно зробити заміну.

$$\begin{cases} \upsilon' = \sqrt{\upsilon^2 + \nu^2} \\ \nu' = \dfrac{zD}{D - s} \end{cases} \tag{0.33}$$

Звідки фінальний вираз набуває вигляду

$$f(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2}\iiint \frac{D}{\sqrt{D^2 + \upsilon^2 + \nu^2}} I(\upsilon,\nu,\Phi) * \\ * \frac{D^2}{(D-s)^2} G_y\left(\frac{Dt}{D-s} - \upsilon\right) G_z\left(\frac{zD}{D-s} - \nu\right) d\upsilon d\nu d\Phi \tag{0.34}$$

Де $G_y = \int qe^{iq\upsilon}dq$ та $G_z = \dfrac{\sin(q_{0z}\nu)}{\pi\nu}$

Алгоритм Фельдкампа є ітеративним методом, який використовується для відновлення тривимірного образу об'єкта з його проекцій, отриманих в результаті рентгенівської томографії. Основна ідея полягає в тому, що об'єкт розбивається на вузькі шари, а зображення з кожного проекційного кута обробляються з окремим врахуванням внеску кожного шару.

Перший крок алгоритму полягає в перетворенні проекцій за допомогою алгоритму Фур'є. Далі виконується відповідна фільтрація зображення, що зменшує артефакти та вміст шумів в зображенні.

Після чого об'єкт розбивається на вузькі шари, і зображення з кожного проекційного кута обробляються з окремим врахуванням внеску кожного шару. З кожної проекції вилучаються дані, які відповідають тільки конкретному досліджуваному шару, і відбувається зворотне проектування для кожного окремого шару.

На останньому етапі проводиться зворотне проектування по всім кутам проектування, що підвищує точність зображення і виправляє помилки, які виникли в попередніх етапах алгоритму.

До недоліків алгоритму Фельдкампа можна віднести, те що алгоритм не враховує кут конусу, через що при великих значеннях конусності променя збільшуються помилки реконструкції, а також необхідність тривимірного зворотного проектування, що є найбільшим та обчислювано важким етапом проектування, особливо для великих об’єктів. Але існують різні підходи для того щоб збільшити швидкість реконструкції[29-30]

1.7. Точні алгоритми конусного променя

Точні алгоритми реконструкції побудовані не на наближених розв’язаннях для віялової та паралельної геометрії сканування, а на пошуку аналітичної оберненої формули. Розробка точного аналітичного методу реконструкції, що надавав би задовільну якість зображень доволі складна задача яку намагались розв’язати одночасно декілька вчених[31-33]. Основою цих методів стало використання тривимірного перетворення Радона для отримання зворотної проекції та згортки. В загальному вигляді зворотна формула для конусного проектування може бути адаптована до різних систем з конусним випромінювачем за допомогою параметрів (a,b,c,d).

При виведенні формул обернення враховуються умови, які накладаються орбіту руху джерела випромінювання для забезпечення повноти проекційних даних. Ці умови гарантують, що буде наявна достатня кількість інформації для якісної реконструкції об'єкта. Крім того, ці обмеження визначають допустиму геометрію сканування, тобто спосіб розміщення випромінювача та детекторів. Алгоритми реконструкції що базуються на точних формулах обернення, вимагають повної геометрії сканування. Це означає, що необхідно мати проекційні дані для всіх можливих кутів та позицій джерела випромінювання. Якщо геометрія сканування не є повною, ці алгоритми можуть давати неточні або неповні результати.

Вперше умови яким має задовольняти геометрія сканування були запропоновані А.А. Кириловим[34]. Його дослідження допомогло визначити, що повні проекційні дані можна отримати якщо випромінювач буде рухатись

по всій поверхні сфери навколо об’єкта. Не дивлячи на те що така схема сканування забезпечує необхідну кількість проекційних даних об'єкта, виконання реконструкції стає складною задачею, через величезну кількість даних. Обробка такого обсягу проекцій вимагає значних обчислювальних ресурсів та часу. Тому практична реалізація цієї схеми сканування не набула популярності.

Припустимо, що функція $f(\vec{r})$ є достатньо гладкою та обмеженою в середині кулі радіусом *R*. А орбітою випромінювача є майже всюди диференціюєма крива $\Phi(\lambda)$. Припускається що будь яка площина перетинає орбіту сканування, де $\Theta \in S^2$ множина одиничних векторів що належать цим площинам.

Тоді проекції конусного променя будуть представлені функцією g , що визначена як інтеграл від точки орбіти $\Phi(\lambda)$вздовж напрямку Θ

$$g(\Theta,\lambda) = \int f\left(\Phi(\lambda) + t\Theta\right)dt \tag{0.35}$$

Для будь яких комплексних параметрів *a,b* проміжна функція *G* визначається:

$$G(\beta,\lambda) = \int_{S^2} g(\Theta,\lambda)\left[a h_1(\Theta * \beta) + b h_2(\Theta * \beta)\right]d\Theta \tag{0.36}$$

Де лінійна комбінація $h_1(t)$ та $h_2(t)$це зворотне перетворення Фур’є для функцій $a|q| + ib|q|$. Функція $h_1(t)$також відома як ядро лінійного фільтра, а $h_2(t)$ це похідна від функції Дірака.

$$\begin{aligned} h_1 &= \int |q| e^{2\pi i q t} dq \\ h_2 &= i\int q e^{2\pi i q t} dq \end{aligned} \tag{0.37}$$

Формулу реконструкції для будь яких комплексних чисел *c* і *d*, таких що *ac+bd=1* можна представити так:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{2}\int_{S^2} G^*(\beta, \vec{r} * \beta)\, d\beta \tag{0.38}$$

Де

$$G^*(\beta,l)=\int G(\beta,t)\left[ch_1(l-t)+dh_2(l-t)\right]dt \tag{0.39}$$

Тут $G(\beta,l)=G(\beta,\lambda)$ отримуються перекомбінуванням, де λ обирається як розв'язок рівняння $\Phi(\lambda)*\beta=l$.

1.7.1. Формула Туя

Формула Туя отримується коли $(a,b,c,d)=\left(\frac{1}{2},\frac{i}{2},0,-2i\right)$. Позначимо g^T як дані конусного проектування Туя, а G^T позначимо проміжну функцію Туя.

$$g^T(\vec{r},\lambda)=\frac{g\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},\lambda\right)}{|\vec{r}|} \tag{0.40}$$

$$\begin{aligned}
&G^T(\varepsilon,\lambda)=\int g^T(\vec{r},\lambda)e^{-2\pi i\vec{r}*\varepsilon}d\vec{r}=\\
&=\int\int g^T(t\Theta,\lambda)e^{-2\pi it\Theta*\varepsilon}t^2dtd\Theta=\\
&=\int\int g^T(\Theta,\lambda)e^{-2\pi it\Theta*\varepsilon}tdtd\Theta=\\
&=\int g(\Theta,\lambda)\int\frac{|t|+t}{2}e^{-2\pi it\Theta*\varepsilon}dtd\Theta=\\
&=\int g(\Theta,\lambda)\int\frac{|t|-t}{2}e^{2\pi it\Theta*\varepsilon}dtd\Theta=\\
&=\int g(\lambda,\Theta)\left[\frac{h_1(\Theta*\varepsilon)}{2}-\frac{h_2(\Theta*\varepsilon)}{2i}\right]d\Theta
\end{aligned} \tag{0.41}$$

Обернена функція для параметрів *c* і *d* має вигляд:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{2}\int_{S^2}\int G(\beta,l) - 2ih_2(\vec{r}*\beta - l)dld\beta = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^2}\left.\frac{\partial G(\beta,l)}{\partial l}\right|_{l=\vec{r}*\beta} d\beta \tag{0.42}$$

Оскільки

$$\frac{\partial G(\beta,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial G(\beta,\Phi(\lambda)*\beta)}{\partial\lambda} = \Phi'(\lambda)*\beta\left.\frac{\partial G(\beta,l)}{\partial l}\right|_{l=\Phi(\lambda)*\beta} \tag{0.43}$$

У такому випадку формула реконструкції набуває вигляду:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^2}\frac{1}{\Phi'(\lambda)*\beta}\frac{\partial G(\beta,\lambda)}{\partial\lambda}d\beta \tag{0.44}$$

1.7.2. Формула Сміта

Так само можна отримати формулу Сміта підстановкою параметрів $(a,b,c,d) = (1,0,1,0)$. Що це довести використаємо g^S та G^S для визначення функцій Сміта.

$$g^S(\Theta,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\Phi(\lambda) + t\Theta\right)dt = g(\Theta,\lambda) + g(-\Theta,\lambda) \tag{0.45}$$

Оскільки

$$g^S(\vec{r},\lambda) = \frac{g^S\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},\lambda\right)}{|\vec{r}|} = \frac{g\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},\lambda\right) + g\left(-\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},\lambda\right)}{|\vec{r}|} \tag{0.46}$$

Тоді вираз для проміжної функції буде:

$$G^S(\beta,\lambda)=\int g^S(\vec{r},\lambda)e^{-2\pi i\vec{r}*\beta}d\vec{r}=$$
$$=\int_{S^2}\left(g(\Theta,\lambda)+g(-\Theta,\lambda)\right)\left[\frac{h_1(\Theta*\beta)+ih_2(\Theta*\beta)}{2}\right]d\Theta \quad (0.47)$$

Розглянемо другу складову даних конусного проектування:

$$\int_{S^2} g(-\Theta,\lambda)\left[\frac{h_1(\Theta*\beta)+ih_2(\Theta*\beta)}{2}\right]d\Theta=$$
$$=\int_{S^2} g(\Theta,\lambda)\left[\frac{h_1(\Theta*\beta)-ih_2(\Theta*\beta)}{2}\right]d\Theta \quad (0.48)$$

Звідки для формули (1.19) отримаємо вираз:

$$G^S(\beta,\lambda)=\int_{S^2} g(\Theta,\lambda)\left[\frac{h_1(\Theta*\beta)+ih_2(\Theta*\beta)}{2}\right]d\Theta+$$
$$+\int_{S^2} g(\Theta,\lambda)\left[\frac{h_1(\Theta*\beta)-ih_2(\Theta*\beta)}{2}\right]d\Theta= \quad (0.49)$$
$$=\int_{S^2} g(\Theta,\lambda)h_1(\Theta*\beta)d\Theta$$

Формула реконструкції Сміта задається виразом:

$$f(\vec{r})=\int_{S^2/2} G^S(\beta,l)h_1(l)\Big|_{l=\vec{r}*\beta}d\beta \quad (0.50)$$

Де $S^2/2$ це певна фіксована півкуля. Підінтегральна функція є парною відносно змінної β, що легко довести.

$$G^S(\beta,l)*h_1(l)\Big|_{l=\vec{r}*\beta}=g(\beta,l)*h_1(l)*h_2(l)\Big|_{l=\vec{r}*\beta}=$$
$$=\int\tilde{g}(\beta,q)|q||q|e^{2\pi iq\vec{r}*\beta}dq=\int\tilde{g}(-\beta,-q)q^2e^{2\pi iq\vec{r}*\beta}dq= \quad (0.51)$$
$$=\int\tilde{g}(-\beta,q)q^2e^{2\pi iq\vec{r}*\beta}dq=G^S(-\beta,l)*h_1(l)\Big|_{l=\vec{r}*\beta}$$

Тому інтегрування по $S^2/2$ можна звести до інтегрування по S^2

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{2}\int_{S^2} G^S(\beta,l)h_1(l)\Big|_{l=\vec{r}*\beta} d\beta \tag{0.52}$$

1.7.3. Формула Грангеата

Для того щоб отримати формулу Грангеата потрібно зробити підстановку $(a,b,c,d) = \left(0,-2\pi,0,-\frac{1}{2\pi}\right)$, звідки отримаємо такий результат для проміжною функції Грангеата.

$$G^G(\beta,\lambda) = \int_{S^2} g(\Theta,\lambda) - 2\pi h_2(\Theta * \beta)d\beta \tag{0.53}$$

А формулу реконструкції Грангеата можна отримати за виразом:

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= \frac{-1}{8\pi^2}\int_{S^2}\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial g(\beta,l)}{\partial l}\Big|_{l=\vec{r}*\beta} d\beta = \\ &= \frac{-1}{8\pi^2}\int_{S^2}\frac{\partial G^G(\beta,l)}{\partial l}\Big|_{l=\vec{r}*\beta} d\beta = \\ &= \frac{-1}{8\pi^2}\int_{S^2} G^G(\beta,l) * 2\pi h_2(l)\Big|_{l=\vec{r}*\beta} d\beta = \\ &= \frac{-1}{2}\int_{S^2} G^G(\beta,l) * \frac{1}{2\pi}h_2(l)\Big|_{l=\vec{r}*\beta} d\beta \end{aligned} \tag{0.54}$$

Що підтверджує значення для змінних $(c,d) = \left(0,-\frac{1}{2\pi}\right)$

2. РОЗРОБКА МОДИФІКОВАНОГО АЛГОРИТМУ

2.1. Одновимірна модель

Суть більшості алгоритмів комп’ютерної томографії полягає в тому, що джерело рентгенівського проміння та детектор рухаються навколо об'єкта по колу. Процес збору даних включає збір проекцій об'єкта з багатьох різних кутів, що охоплюють повний оберт навколо нього. Зібрані проекції подаються на комп'ютер, де проводиться обчислення та реконструкція зображення всередині об'єкта. Це досягається шляхом аналізу та обробки проекцій з різних напрямків, що дозволяє відтворити внутрішню структуру об'єкта.

Але ті самі проекційні дані можливо отримати не тільки якщо випромінювач буде рухатись по колу, а й коли він рухається вздовж прямої на фіксованій відстані від об’єкта[35], що зображено на Рис.2.1. У такому випадку кожен проекційний промінь задається двома параметрами X – це положення променя на лінійці детекторів та X_0 – це положення випромінювача відносно об’єкта.

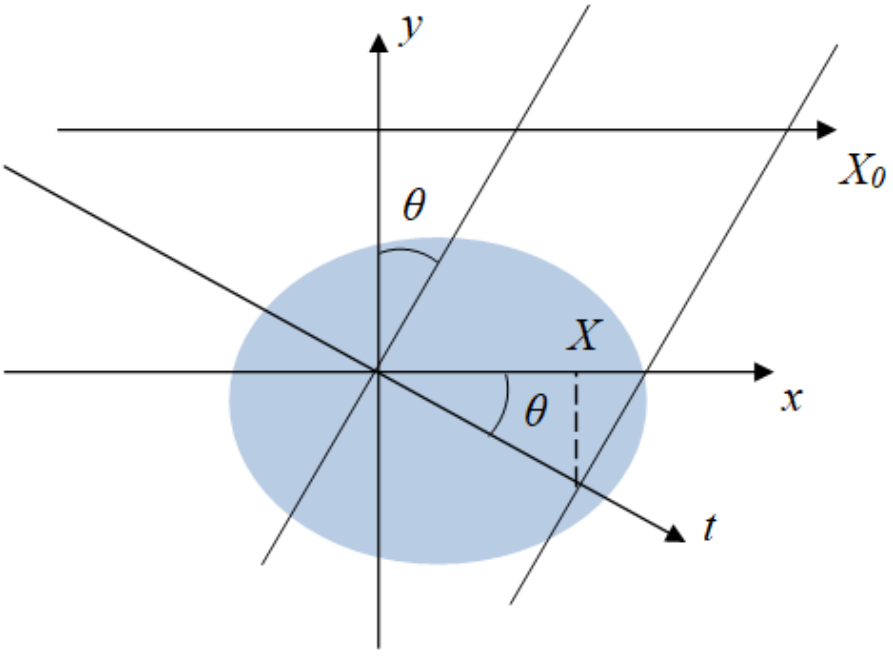


Рис.2.1. Паралельний пучок для лінійного руху випромінювача.

Розглянемо класичний алгоритм реконструкції для паралельного променя.

$$I(t,\theta)=\int f(x,y)\delta\left(x\cos(\theta)+y\sin(\theta)-t\right)dxdy \tag{1.1}$$

Координата t на детекторі, що обертається разом з випромінювачем пов'язана з горизонтальним напрямком співвідношенням $t=X\cos(\theta)$, враховуючи це а також знаючи, що відстань від лінійки детекторів до випромінювача завжди дорівнює H перепишемо рівняння, що визначає промінь вздовж якого інтегруємо.

$$x\cos(\theta)+y\sin(\theta)-X\cos(\theta)=x-X+y\tan(\theta)=x-X+y\frac{X-X_0}{H} \tag{1.2}$$

Дані паралельного проектування $I(t,\theta)$ чітко та однозначно визначаються через положення променя на лінійці детекторів та точки в якій знаходиться випромінювач. Тому в параметрах лінійного сканування інтеграл визначається як $I(X,X_0)$ Звідки отримаємо новий вираз для перетворення Радона:

$$I(X,X_0)=\int f(x,y)\delta\left(x-X-y\frac{X_0-X}{H}\right)dxdy \tag{1.3}$$

Тепер за аналогією як шукали відфільтровану обернену проекцію для паралельної геометрії сканування випишемо першим кроком обернене перетворення Фур'є для початкової функції:

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)e^{i(ux+vy)}dudv \tag{1.4}$$

Тепер виконаємо перетворення Радона для функції розподілу густини та отримаємо вираз:

$$\begin{aligned}I(X,X_0)=&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)e^{i(ux+vy)}dudv\right]*\\ &*\delta\left(x-X-z\frac{X_0-X}{H}\right)dxdy\end{aligned} \tag{1.5}$$

Звідки двовимірне Фур'є перетворення для лінійного інтегралу набуває вигляду

$$\hat{I}(K,Q)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dxdydudvF(u,v)* \\ *e^{-i(KX+QX_0)}e^{i(ux+vy)}\delta\left(x-X-y\frac{X_0-X}{H}\right)dXdX_0 \tag{1.6}$$

Для того щоб довести, що в результаті цих перетворень ми отримаємо нашу початкову функцію розподілу $f(x,y)$ необхідно провести послідовне інтегрування по всім змінним. Спочатку виконаємо інтегрування по *x*:

$$I(K,Q)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dydudvF(u,v)e^{-i(KX+QX_0)}e^{iu\left(X+y\frac{X_0-X}{H}\right)}e^{ivy}dXdX_0 \tag{1.7}$$

Тепер можливо позбавитись інтегрування по змінним *X* та X_0:

$$\hat{I}(K,Q)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dudvF(u,v)e^{ivy}* \\ *2\pi\delta\left(K-u\left(1-\frac{y}{H}\right)\right)2\pi\delta\left(Q-u\frac{y}{H}\right)dy \tag{1.8}$$

Наступним кроком проінтегруємо по *y*:

$$\hat{I}(K,Q)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)e^{ivQ\frac{H}{k_x}}\delta(K-u+Q)\frac{H}{u}dudv \tag{1.9}$$

З аргументу дельта функції можливо визначити , що $u=K+Q$ тому вираз (2.9) можливо переписати так:

$$\hat{I}(K,Q)=\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)e^{iv\frac{QH}{u}}\frac{H}{u}dv= \\ =\int_{-\infty}^{\infty}F(K+Q,v)e^{iv\frac{QH}{K+Q}}\frac{H}{K+Q}dv \tag{1.10}$$

Для зручності введемо нові змінні

$$\begin{cases}q=K+Q\\ y=\dfrac{QH}{K+Q}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q=K+Q\\ y=\dfrac{QH}{q}\end{cases} \tag{1.11}$$

Звідки знайдемо вираз для старих змінних через нові

$$\begin{cases} K = q - q\dfrac{y}{H} = q\left(1 - \dfrac{y}{H}\right) \\ Q = q\dfrac{y}{H} \end{cases} \tag{1.12}$$

Якобіан переходу до нових змінних буде мати вигляд

$$J = \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{y}{H} & -\dfrac{q}{H} \\ \dfrac{y}{H} & \dfrac{q}{H} \end{vmatrix} = \frac{q}{H} - \frac{qy}{H^2} + \frac{qy}{H^2} = \frac{q}{H} \tag{1.13}$$

Запишемо вираз (2.11) через нові змінні:

$$\hat{I}\left(q\left(1 - \frac{y}{H}\right), q\frac{y}{H}\right)\frac{q}{H} = \int_{-\infty}^{\infty} F(q,v)e^{ivy}dv \tag{1.14}$$

Тепер, якщо виконати обернене перетворення Фур'є по змінній q, то можна побачити, що це дорівнює двовимірному зворотному перетворенню Фур'є для початкової функції розподілу густини $f(x,y)$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int \frac{q}{H}\hat{I}\left(q\left(1 - \frac{y}{H}\right), q\frac{y}{H}\right)e^{iqx}dq = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(q,v)e^{ivy}e^{iqx}dqdv = 2\pi f(x,y) \end{aligned} \tag{1.15}$$

Для того, щоб отримати формулу для реконструкції зображення врахуємо Фур'є перетворення для перетворення Радона $I(X, X_0)$ та перепишемо ліву частину виразу (2.15)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q}{H}e^{iqx}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I(X,X_0)e^{-iqX\left(1-\frac{y}{H}\right)}e^{-iqX_0\frac{y}{H}}dXdX_0dq = \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I(X,X_0)\frac{q}{H}e^{iq\left[x - X\left(1-\frac{y}{H}\right) - X_0\frac{y}{H}\right]}dXdX_0dq = \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I(X,X_0)\frac{q}{H}e^{iq\left[x - X - y\frac{(X_0 - X)}{H}\right]}dXdX_0dq \end{aligned} \tag{1.16}$$

Вираз (2.16) є нічим іншим як оберненим відфільтрованим проектуванням для дослідження віяловим пучком вздовж прямої лінії. В

якості ступеня експоненти виступає вираз, який позначає промінь (2.2) з якого реконструюємо зображення об’єкта.

2.2. Тривимірна модель

Розглянемо тепер тривимірний випадок. Припустимо, що точковий випромінювач рентгенівського проміння рухається вздовж нескінченної прямої у напрямку X_0. На відстані H від випромінювача знаходиться пласка матриця детекторів, що позначаються координатами (X,Y). Схему такого дослідження зображено на Рис.2.2.

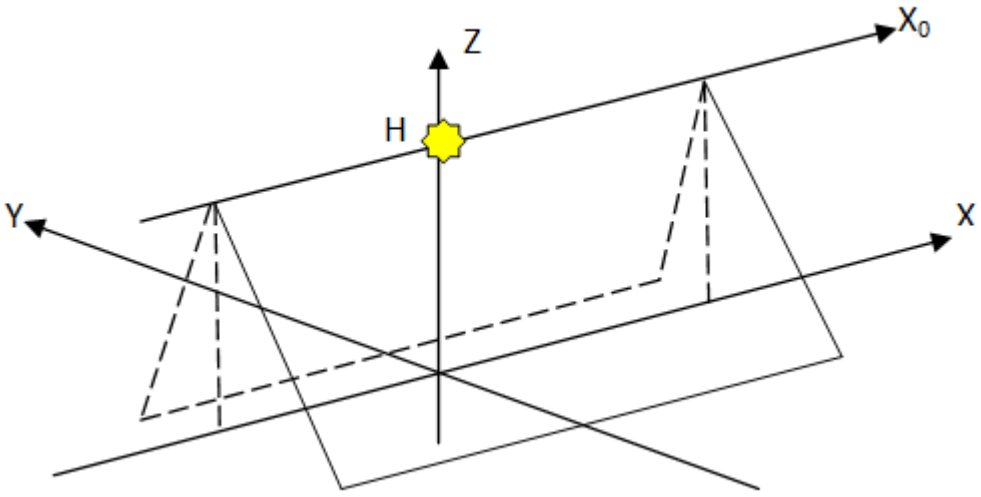


Рис.2.2 Тривимірне дослідження конусним пучком вздовж прямої лінії

Рівняння для променя, що виходить з випромінювача і потрапляє в детектор можна записати таким чином:

$$\frac{x-X}{X_0-X}=\frac{y-Y}{-Y}=\frac{z}{H} \tag{1.17}$$

Звідки можна отримати вираз для тривимірного перетворення Радона функції розподілу густини об’єкта $f(x,y,z)$:

$$I(X,Y,X_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)* \\ *\delta\left(x-X-z\frac{X_0-X}{H}\right)\delta\left(y-Y-Y\frac{z}{H}\right)dxdydz \tag{1.18}$$

Так само як робили для двовимірного випадку, запишемо Фур'є перетворення для функції розподілу $f(x,y,z)$ по всім координатам.

$$I(X,Y,X_0)=\int\frac{1}{(2\pi)^3}\int F(k_x,k_y,k_z)e^{i(k_xx+k_yy+k_zz)}dk_xdk_ydk_z* \\ *\delta\left(x-X\left(1-\frac{z}{H}\right)-z\frac{X_0}{H}\right)\delta\left(y-Y\left(1-\frac{z}{H}\right)\right)dxdydz \tag{1.19}$$

Наступним кроком знайдемо Фур'є образ для перетворення Радона.

$$\hat{I}(K_x,K_y,Q)=\int\frac{1}{(2\pi)^3}F(k_x,k_y,k_z)e^{i(k_xx+k_yy+k_zz)}e^{-i(XK_x+YK_y+QX_0)}* \\ *\delta\left(x-X\left(1-\frac{z}{H}\right)-z\frac{X_0}{H}\right)\delta\left(y-Y\left(1-\frac{z}{H}\right)\right)dXdYdX_0dk_xdk_ydk_zdxdydz \tag{1.20}$$

Почнемо спрощувати вираз. Спочатку за допомогою δ функції виконаємо інтегрування по змінним *x* та *y*.

$$\hat{I}(K_x,K_y,Q)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int F(k_x,k_y,k_z)e^{-i(XK_x+YK_y+QX_0)}e^{ik_zz}* \\ *e^{ik_x\left(X\left(1-\frac{z}{H}\right)+z\frac{X_0}{H}\right)}e^{ik_yY\left(1-\frac{z}{H}\right)}dzdk_xdk_ydk_zdXdYdX_0 \tag{1.21}$$

Виконаємо інтегрування по змінним *X*, *Y*, X_0.

$$\hat{I}(K_x,K_y,Q)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int F(k_x,k_y,k_z)e^{ik_zz}2\pi\delta\left(K_x-k_x\left(1-\frac{z}{H}\right)\right)* \\ *2\pi\delta\left(K_y-k_y\left(1-\frac{z}{H}\right)\right)2\pi\delta\left(Q-k_x\frac{z}{H}\right)dk_xdk_ydk_zdz \tag{1.22}$$

А тепер можливо позбавитись інтегрування по *z*, врахуємо також те, що з аргументу дельта функції випливає тотожність $z=H\frac{Q}{k_x}$.

$$\hat{I}\left(K_x,K_y,Q\right)=\int F\left(k_x,k_y,k_z\right)\delta\left(K_x-k_x+k_x\frac{Q}{k_x}\right)* \\ *\delta\left(K_y-k_y+k_y\frac{Q}{k_x}\right)e^{ik_z\frac{Q}{k_x}H}dk_xdk_ydk_z \tag{1.23}$$

З цієї формули можна отримати вирази для координат у частотному просторі k_x та k_y.

$$k_x=K_x+k_x\frac{z}{H}=K_x+k_x\frac{Q}{k_x}=K_x+Q \tag{1.24}$$

$$k_y=K_y\frac{1}{1-\frac{Q}{k_x}}=\frac{K_y}{1-\frac{Q}{K_x+Q}}=\frac{K_y\left(K_x+Q\right)}{K_x}=K_y+Q\frac{K_y}{K_x} \tag{1.25}$$

Виконаємо інтегрування по k_x та k_y

$$\hat{I}\left(K_x,K_y,Q\right)=\int F\left(K_x+Q,K_y+Q\frac{K_y}{K_x},k_z\right)e^{ik_z\frac{Q}{K_x+Q}H}dk_z \tag{1.26}$$

За для зручності перейдемо до нових змінних зробивши заміну

$$\begin{cases} q_x=K_x+Q \\ q_y=K_y+Q\dfrac{K_y}{K_x} \\ z=\dfrac{QH}{K_x+Q} \end{cases} \tag{1.27}$$

Звідки зворотні перетворення мають вигляд

$$\begin{cases} K_x=q_x-Q=q_x\left(1-\dfrac{z}{H}\right) \\ K_y=\dfrac{q_y}{1+\dfrac{Q}{K_x}}=\dfrac{q_y}{1+\dfrac{zq_x}{H}\dfrac{1}{q_x\left(1-\dfrac{z}{H}\right)}}=q_y\left(1-\dfrac{z}{H}\right) \\ Q=\dfrac{zq_x}{H} \end{cases} \tag{1.28}$$

Якобіан переходу до нових змінних має вигляд

$$J=\begin{vmatrix} 1-\frac{z}{H} & 0 & -\frac{q_x}{H} \\ 0 & 1-\frac{z}{H} & -\frac{q_y}{H} \\ \frac{z}{H} & 0 & \frac{q_x}{H} \end{vmatrix}=\frac{q_x}{H}\left(1-\frac{z}{H}\right) \tag{1.29}$$

Перепишемо вираз (2.26) використовуючи нові змінні

$$\frac{q_x}{H}\left(1-\frac{z}{H}\right)\hat{I}\left(q_x\left(1-\frac{z}{H}\right),q_y\left(1-\frac{z}{H}\right),q_x\frac{z}{H}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}F\left(q_x,q_y,k_z\right)e^{ik_z z}dk_z \tag{1.30}$$

Виконаємо обернене Фур'є перетворення по змінним q_x і q_y

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^2}\int\hat{I}\left(q_x\left(1-\frac{z}{H}\right),q_y\left(1-\frac{z}{H}\right),q_x\frac{z}{H}\right)\frac{H-z}{H^2}q_x e^{i\left(q_x x+q_y y\right)}dq_x dq_y= \\ &=\frac{1}{(2\pi)^2}\int F\left(q_x,q_y,k_z\right)2\pi e^{i\left(q_x x+q_y y+k_z z\right)}dq_x dq_y dk_z=2\pi f\left(x,y,z\right)\end{aligned} \tag{1.31}$$

Звідки можна виразити формулу для реконструкції

$$\begin{aligned}&f\left(x,y,z\right)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{I}\left(q_x\left(1-\frac{z}{H}\right),q_y\left(1-\frac{z}{H}\right),q_x\frac{z}{H}\right)* \\ &*\frac{H-z}{H^2}q_x e^{i\left(q_x x+q_y y\right)}dq_x dq_y\end{aligned} \tag{1.32}$$

Тепер врахуємо Фур'є перетворення для лінійного інтеграла $I\left(X,Y,X_0\right)$

$$\begin{aligned}&f\left(x,y,z\right)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\frac{H-z}{H^2}I\left(X,Y,X_0\right)q_x* \\ &*e^{-i\left(Xq_x\left(1-\frac{z}{H}\right)+Yq_y\left(1-\frac{z}{H}\right)+X_0 q_x\frac{z}{H}\right)}e^{i\left(q_x x+q_y y\right)}dq_x dq_y dXdYdX_0\end{aligned} \tag{1.33}$$

Якщо проінтегрувати по змінній q_y отримаємо

$$f(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iint\frac{H-z}{H^2}I(X,Y,X_0)q_x e^{iq_x\left[x-X\left(1-\frac{z}{H}\right)-X_0\frac{z}{H}\right]}* \\ *2\pi\delta\left(y-Y\left(1-\frac{z}{H}\right)\right)dq_x dXdYdX_0 \tag{1.34}$$

Тепер можна побачити що, при такому типі досліджень об'єкт розбивається на похилі площини, які вирізаються дельта функцією, і реконструкція відбувається в цих площинах. Також цей вираз можливо записати без дельта функції для більш зручного сприйняття.

$$f(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H-z}{H^2}I\left(X,Y=\frac{yH}{H-z},X_0\right)* \\ *G\left(x-X\left(1-\frac{z}{H}\right)-X_0\frac{z}{H}\right)dXdX_0 \tag{1.35}$$

Тут $G(x)=\int|q|e^{iqx}dq$ - це вже звичне ядро фільтрації, яке було у випадку дослідження об'єктів паралельним пучком променів.

На відміну від звичних алгоритмів реконструкції з спіральною, сферичною або кільцевою геометрією сканування конусним променем, які використовуються разом з алгоритмом Фельдкампа або іншими точними алгоритмами реконструкції, цей модифікований алгоритм для томосинтезу позбавлений звичних недоліків комп'ютерної томографії. А саме, на жодному з етапів реконструкції не відбувається інтерполяція даних в залежності від кута конуса для променя. Через це функція розподілу $f(x,y,z)$ не зазнає артефактів при великих значеннях кута нахилу для променя відносно центрального перетину. А сама задача відновлення тривимірного об'єкта з проекційних даних зводиться до низки задач двовимірної реконструкції у

похилих площинах, що перетинають траєкторію руху випромінювача рентгенівських променів, як зображено на Рис.2.3.

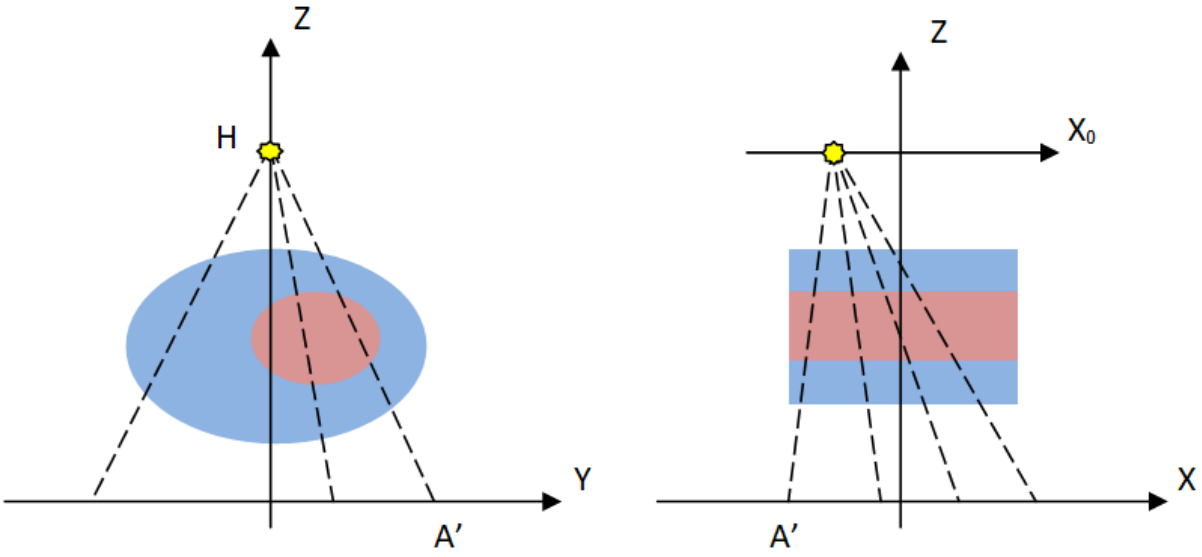


Рис.2.3 Перпендикулярна та повздовжня проекції об’єкту при скануванні

2.3. Обернення для дельта функції

Гарним способом переконатися, що отримана формула реконструкції вірна – це розв’язати задачу для реконструкції дельта образного розміщення об’єкта. Нехай у просторі де задано перпендикулярну систему координат (x,y,z) знаходиться певний об’єкт густиною M з координатами (a,b,c), функція розподілу цього об’єкта має вигляд:

$$f(x,y,z)=M\delta(x-a)\delta(y-b)\delta(z-c) \tag{1.36}$$

Перетворення Радона для такого об’єкту матиме вигляд

$$\begin{aligned} I(X,Y,X_0)&=\int M\delta(x-a)\delta(y-b)\delta(z-c)* \\ *\delta&\left(x-X\left(1-\frac{z}{H}\right)-z\frac{X_0}{H}\right)\delta\left(y-Y\left(1-\frac{z}{H}\right)\right)dxdydz= \\ =M\delta&\left(a-X\left(1-\frac{c}{H}\right)-c\frac{X_0}{H}\right)\delta\left(b-Y\left(1-\frac{c}{H}\right)\right) \end{aligned} \tag{1.37}$$

Тепер скористаємось знайденою формулою реконструкції (2.34) та запишемо рівняння

$$f(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int M\delta\left(a-X\left(1-\frac{c}{H}\right)-X_0\frac{c}{H}\right)\delta\left(b-y\frac{1-c/H}{1-z/H}\right)*$$
$$*\frac{H-z}{H^2}\int qe^{iq\left(x-X\left(1-\frac{z}{H}\right)-X_0\frac{z}{H}\right)}dqdXdX_0 \qquad (1.38)$$

Проінтегруємо вираз по X

$$\int\delta\left(X\left(1-\frac{c}{H}\right)-a+X_0\frac{c}{H}\right)e^{X\left(1-\frac{z}{H}\right)}dX=$$
$$=\frac{1}{1-\frac{c}{H}}\int\delta\left(X-\frac{a+X_0\frac{c}{H}}{1-\frac{c}{H}}\right)e^{X\left(1-\frac{z}{H}\right)}dX= \qquad (1.39)$$
$$=\frac{1}{1-\frac{c}{H}}e^{\left[a+X_0\frac{c}{H}\right]\frac{1-z/H}{1-c/H}}$$

Отримали

$$f(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int M\frac{H}{H-c}\delta\left(b-Y\frac{1-c/H}{1-z/H}\right)*$$
$$*\frac{H-z}{H^2}\int qe^{iq\left(x-\left[a-X_0\frac{c}{H}\right]\frac{1-z/H}{1-c/H}-X_0\frac{z}{H}\right)}dqdX_0 \qquad (1.40)$$

Тепер проінтегруємо по X_0

$$\int e^{iq\left(X_0\frac{c}{H}\frac{1-z/H}{1-c/H}-X_0\frac{z}{H}\right)}dX_0=$$
$$=2\pi\delta\left(q\left[\frac{c}{H}\frac{1-z/H}{1-c/H}-\frac{z}{H}\right]\right)=2\pi\frac{H}{q}\delta\left(c\frac{1-z/H}{1-c/H}-z\right)= \qquad (1.41)$$
$$=2\pi\frac{H}{q}\delta\left(c\left(1-\frac{z}{H}\right)-z\left(1-\frac{c}{H}\right)\right)=2\pi\frac{H}{q}\delta(c-z)$$

Отримали

$$f(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}M\frac{H}{H-c}\frac{H-z}{H^2}2\pi\delta(c-z)*$$
$$*\delta\left(b-y\frac{1-c/H}{1-z/H}\right)\int\frac{H}{q}qe^{iq\left(x-a\frac{1-z/H}{1-c/H}\right)}dq= \qquad (1.42)$$
$$=\frac{1}{2\pi}M\delta(c-z)\delta(b-y)\int e^{iq(x-a)}dq$$

Проінтегруємо по q та отримаємо

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} M\delta(c-z)\delta(b-y)\int e^{iq(x-a)}dq = \\
&= \frac{1}{2\pi} M\delta(c-z)\delta(b-y)2\pi\delta(x-a) = \\
&= M\delta(c-z)\delta(b-y)\delta(x-a) = \\
&= M\delta(x-a)\delta(y-b)\delta(z-c)
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Оскільки вийшло отримати початкову функцію розподілу об’єкта у просторі, то можна сказати, що алгоритм реконструкції цілком вірний і дозволяє відновлювати тривимірні об’єкти з їх проекційних даних.

3. КОМП’ЮТЕРНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РЕЗУЛЬТАТИ

3.1. Опис моделі досліджуваного об'єкта

Щоб перевірити та оцінити ефективність використання запропонованого алгоритму в попередньому розділі, проведемо комп’ютерне моделювання для двох типів сканування конусним променем(сканування по орбіті у вигляді кола та сканування з рухом випромінювача вздовж прямої, а потім відновимо зображення з проекцій за допомогою алгоритму Фельдампа, та за допомогою запропонованого модифікованого лінійного алгоритму

Для розрахунку на комп’ютері формули проектування та реконструкції необхідно привести до дискретного вигляду. Розглянемо момент проходження променя крізь одиничний елемент об’єкта. Нехай відстань від точки влучання променя до центра пікселя по горизонтальній осі дорівнює *d1*, а відстань по вертикальній вісі позначимо як *d2*.

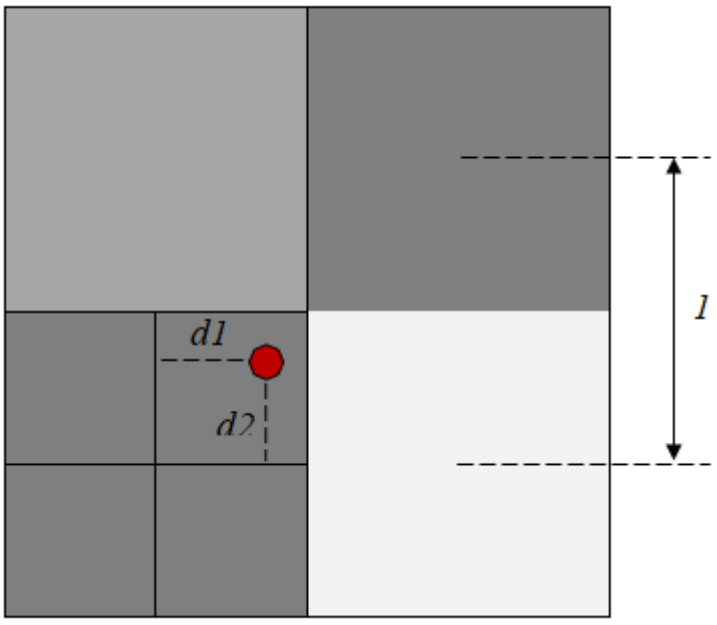


Рис.3.1. Розрахунок проекційних даних

Оскільки відстань між двома сусідніми елементами дорівнює одиниці, то значення яскравості пікселя при проходжені через один шар, що зображено на Рис.3.1, можна позначити виразом:

$$I(x,y)=\sum_{a=0}^{1}\sum_{b=0}^{1}(1-d1)(1-d2)I_0(x+a,y+b) \tag{2.1}$$

Цей вираз є нічим іншим як білінійною інтерполяцією для значення яскравості в точці. Такий підхід до розрахунку дозволить згладжувати проекційні дані оскільки не завжди при дослідженні промінь буде проходити через центр для кожного елементу зображення.

Для дискретизації формул реконструкції нам необхідно встановити область визначення для функцій. Нехай функція $I(\upsilon,v,\Phi)$ відома для усіх точок $(d_k k, d_l l)$ та для всіх кутів $n\theta$, де $k1\le k\le k2$, $l1\le l\le l2, 0\le n\le N$. Для всіх значень $\upsilon\notin(k1,k2)$ та $v\notin(l1,l2)$ функція $I(\upsilon,v,\Phi)$ буде дорівнювати нулю. В такому випадку формулу реконструкції можна переписати як функцію зворотного проектування:

$$f(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2 N}\sum_{n=0}^{N}\frac{D^2P(\upsilon,v,n)}{(D-s)^2} \tag{2.2}$$

Де

$$P(k,l,n)=\sum_{k'=k1}^{k2}\sum_{l'=l1}^{l2}\frac{DI(k',l',n)G_y(d_k(k-k'))G_z(d_l(l-l'))}{\sqrt{D^2+(d_k k')^2+(d_l l')^2}} \tag{2.3}$$

Аналогічні операції проведемо для дискретизації модифікованого алгоритму:

$$f(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2(N_2-N_1)}\sum_{n=N_1}^{N_2}\frac{H-z}{H^2}P(X,Y,n)$$

$$P(k,l,n)=\sum_{k'=K_1}^{K_2}I(k',l,n)G(d_k(k-k')) \tag{2.4}$$

Функція для ядра фільтрації має багато чисельних реалізацій, в даному випадку будемо використовувати аналітичний розв’язок для інтеграла (1.15)

$$G(t)=2\left[W_{max}\frac{\sin(W_{max}t)}{t}-\frac{1-\cos(W_{max}t)}{t^2}\right] \quad (2.5)$$

У дослідженні комп'ютерного моделювання зробимо припущення, що об'єкт розбивається на дискретні елементи кожен з яких має розмір в 1мм(*d=1*), виходячи з цього припущення будемо задавати всі майбутні відстані та геометричні розміри відносно розміру одного елемента. В якості досліджуваного об'єкта будемо використовувати модель тіла з твердою оболонкою, зображену на Рис.3.2, що має фізичні розміри 192x192x16 мм.

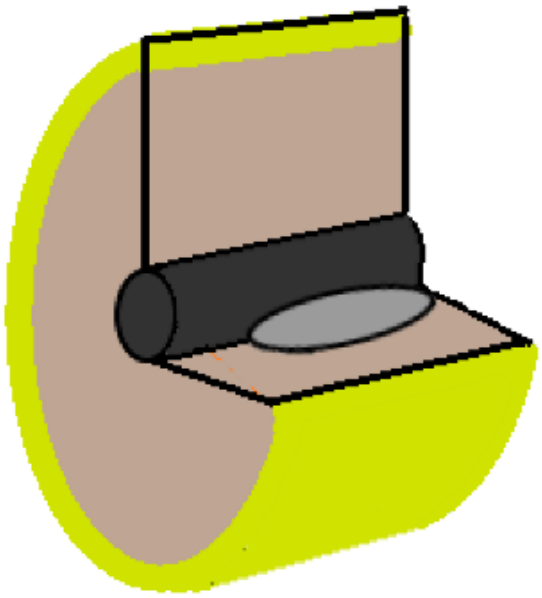


Рис.3.2. Тривимірна модель об'єкта

Дані з конусного проміння потрапляють у масив детекторів що має розміри 256x16 мм кожен елемент якого має площу в 1мм^2. За для дослідження по кільцевій орбіті випромінювач буде рухатись по колу з радіусом в 384 мм з центром в середині об'єкту, та на відстані в 512 мм до сітки детекторів. Рух випромінювача буде задаватись навколо осі Z, щоб об'єкт розділявся на 16 перетинів кожен з яких є зображенням розміром 256x256 пікселів. У випадку лінійного дослідження випромінювач буде рухатись вздовж осі X, та перпендикулярно осі Z, щоб в якості результату можливо було отримати дослідження в тих самих площинах що і у випадку

FDK алгоритму. Розмістимо випромінювач на відстані у 256 мм до площини детекторів та будемо вести від нижньої грані до верхньої грані об’єкту.

Основним недоліком модифікованого алгоритму є обмеженість довжини лінії руху випромінювача відносно розмірів об’єкта, точне відновлення з проекцій можливо отримати тільки у випадку нескінченної прямої, а так як ми отримуємо не всі данні про розподіл густини а лише в певному проміжку реконструкція має значні недоліки що зображено на Рис.3.3.

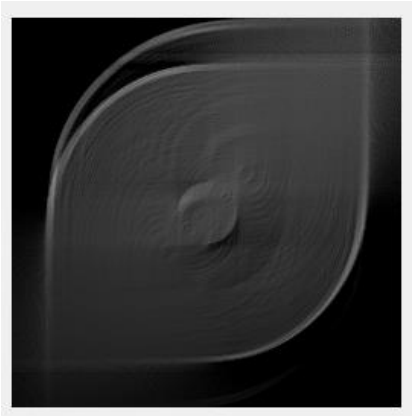
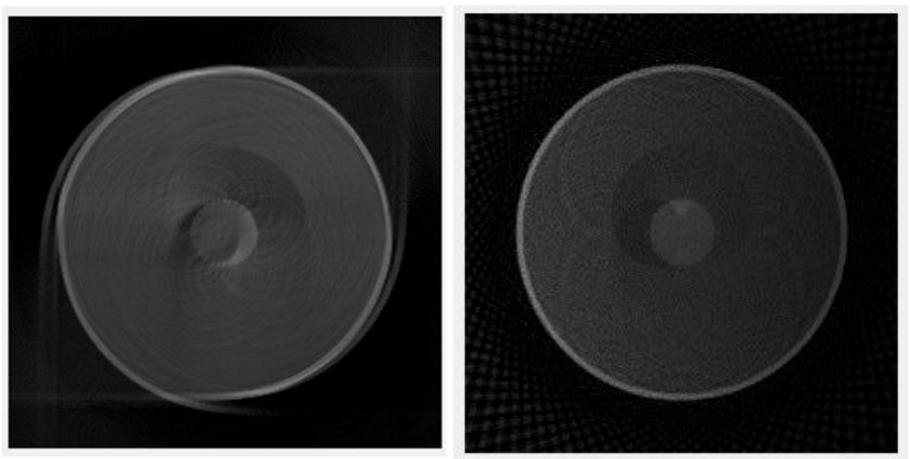
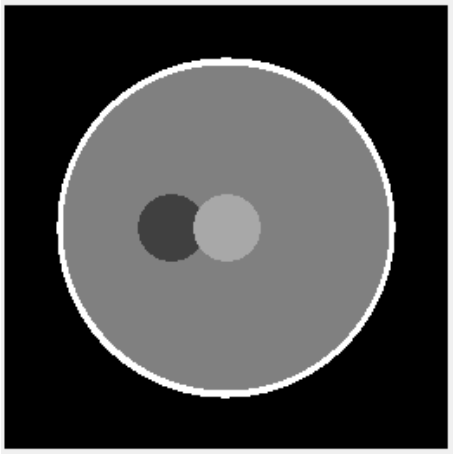


Рис.3.3. Недостатність одиничного вимірювання

Щоб подолати цю проблему необхідно провести кілька серій дослідів з поворотом системи випромінювач-детектор на кут у 90 градусів. в такому випадку реконструкція при двох та чотирьох серіях мають вигляд як на Рис.3.4.



(a) (b)



(c)

Рис.3.4. Результат реконструкції при двох серіях(a), та чотирьох серіях(b) дослідів у порівнянні з оригіналом (c).

3.2. Результати

Розглянемо результати роботи обох програм та порівняємо результати. Реконструкції зображень проводились з 360 проекцій для алгоритму Фельдкампа та з 400 проекцій для модифікованого алгоритму На Рис.3.5 зображено центральний перетин для роботи алгоритму Фельдкампа, та модифікованого алгоритму, а також оригінал зображення.

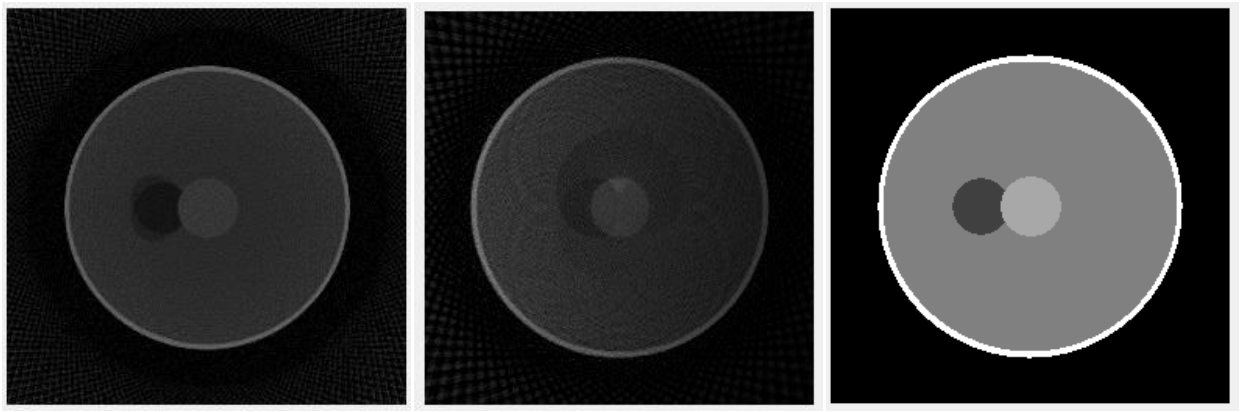
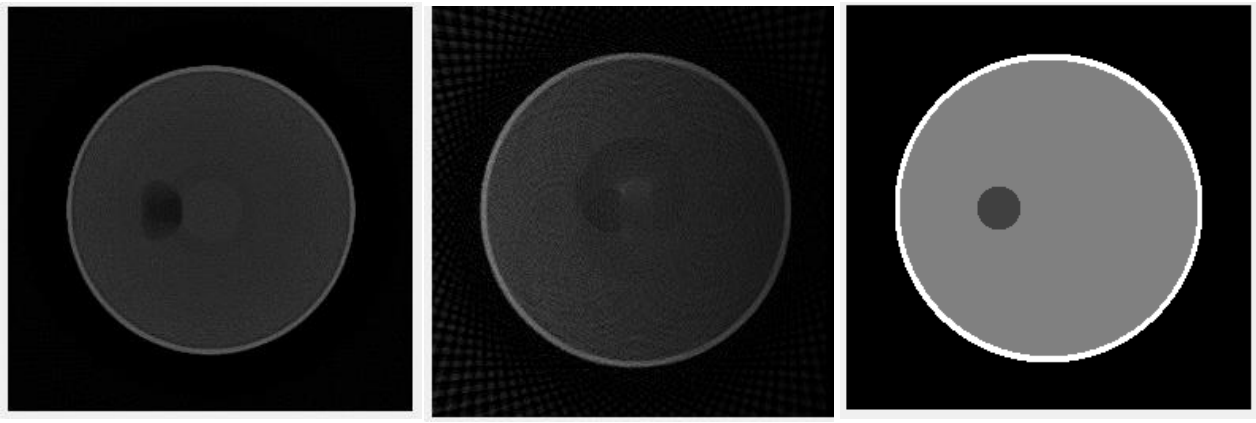


Рис.3.5. Реконструкція центрального перетину.

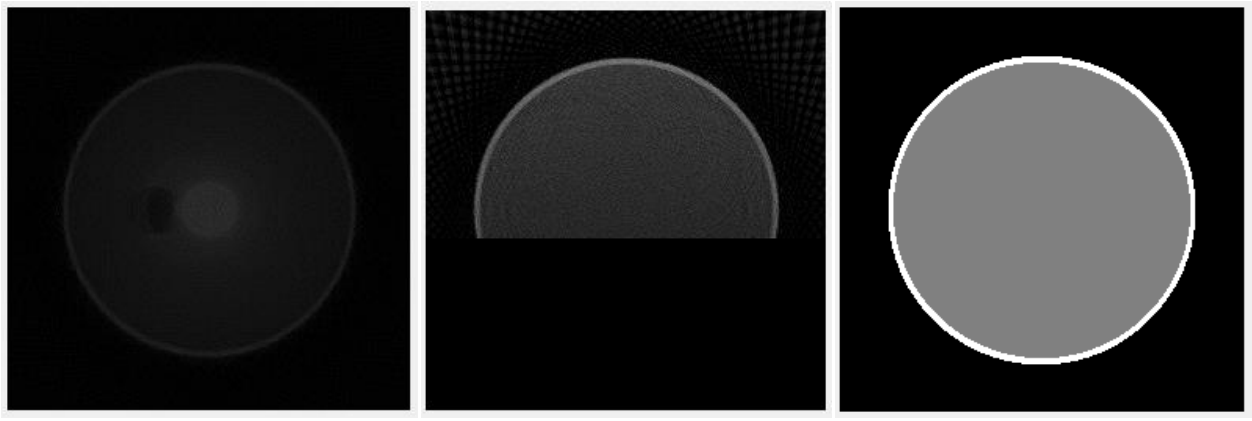
Як можна побачити алгоритм Фельдкампа дуже добре відновлює зображення отримані в центральному перетині. Хоча на такому зображені

також присутні артефакти розмиття для не центральносиметричних об’єктів, вони не чітко виявлені і дозволяють встановити місцеположення особливостей структури. Модифікований лінійний алгоритм реконструкції хоч і має недоліки в деформованості зображення має перевагу перед алгоритмом Фельдкампа у значно більшій точності розміщення структурних елементів об’єктів.

Тепер розглянемо роботу алгоритмів у інших шарах. На Рис.3.6. представлено роботу алгоритмів з відступом від центрального перетину.



(a)



(b)

Рис.3.6. (a)Реконструкція зображення четвертого шару.
(b)Реконструкція з восьмого шару

Як можна побачити з результатів FDK алгоритму, чим далі від площини в якій обертається випромінювач тим більше артефактів у результуючому

зображенні отримуємо. Так тінь від твердого стрижня, що знаходився в центрі моделі зберігає свій вплив додаткові 3 шари.

Натомість модифікований алгоритм надає чітке розгалуження в розміщенні особливостей відносно поперечних шарів, але має недоліки у вигляді артефактів відновлення всередині самого шару та потребує більшого розміру сітки детекторів щоб не втрачати частку інформації про розподіл всередині піддослідного тіла.

ВИСНОВКИ

В даній кваліфікаційній роботі було розглянуто історію появи та розвиток комп’ютерної рентгенівської томографії , проведено ознайомлення з точними та наближеними методами відновлення тривимірних об’єктів з проекційних даних. Отримано формулу реконструкції для конусного пучка алгоритму Фельдкампа та розроблено власний алгоритм реконструкції оснований методах лінійної томографії. Було побудовано математичну модель збору проекційних даних та реконструкції адаптовану до використання у комп’ютерних розрахунках. За допомогою середи розробки C# створено комп’ютерну модель яка симулює роботу томографа, щоб перевірити можливість використання модифікованого алгоритму при реальних дослідженнях. Проаналізовано отримані результати та проведено порівняння з класичним алгоритмом реконструкції у томографії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. P. Grangeat, “Mathematical framework of cone–beam 3D reconstruction via the first derivative of the radon transform,” in Mathematical Methods in Tomography, pp. 66–97, Lecture Notes in Mathematics (Berlin:Springer),1991.

2. S.Schaller, T. Flohr, and P. Steffen, “New, efficient Fourier–reconstruction method for approximate image reconstruction in spiral cone–beam CT at small cone–angles,” SPIE Medical Imaging Conference Proc. 3032, pp. 213–224, 1997.

3. M. Kachelrieß, S.Schaller and W.A. Kalender, « Advanced single–slice rebinning in cone–beam spiral CT:Theoretical considerations and medical applications,» Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, 2000. DOI: 10.1117/12.387710

4. Охапкін О.І. Реалізація перетворення Радона, дипломна робота, Донецький Національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, 2022.

5. L. A. Feldkamp, L. C. Davis, and J. W. Kress, "Practical cone-beam algorithm," J. Opt. Soc. Am. Al, pp. 612-619(1984).

6. Пивоваров С. С. Відкриття рентгенівського випромінювання і його застосування для дослідження твердих тіл. Наукові та методичні засади наукової освіти. 2014. № 1 (6). СС 156-163

7. Х. Манія Історія атомної бомби. - Видавн. "Текст". - 2012. - 352 с.

8. Куркевич А.К. Особливості ультразвукового обстеження плодів з критичною вадою серця. Серцево-судинна хірургія. Щорічник наукових праць Асоціації серцево-судинних хірургів України. – 2008. – вип. 16: С. 246-248.

9. Федорців, О. Є, О. М. Мочульська. "Дерматоскопія та ультразвукова діагностика шкіри як малоінвазивні методи обстеження при атопічному дерматиті у дітей." *Современная педиатрия* 7 (2016): 54-59.

10. Liang Z.-P., and Lauterbur P.C. Principles of Magnetic Resonance Imaging: A Signal Processing (1999):

11. Середюк О. Є. Електричний, магнітний та електромагнітний види контролю: Конспект лекцій. МВ 02070855-80і-01 — Івано-Франківськ: Факел, 2001. — 170 с.

12. Адаменко А.А. Сучасні методи радіаційної дефектоскопії. – Київ: Наук. думка, 1984. – 215 с.

13. G. Herman. Image reconstruction from projections: The Fundamentals of Computerized Tomography. Buffalo, Academic Press, 1980. 340 p.

14. D. B. Williams, C. B. Carter: “Transmission Electron Microscopy: A Textbook for Materials Science”, Springer (2009)

15. L. Reimer, H. Kohl: “Transmission Electron Microscopy: Physics of Image Formation”, Springer (2008)

16. J. Radon. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Journal of Mathematical Physics*, 1917. №69. P .262-277.

17. Godfrey N. Hounsfield – Nobel Lecture. NobelPrize.org. Nobel Prize Outreach B 2023. Thu. 27 Apr 2023.
<https://www.nobelprize.org/prizes/medicine/1979/hounsfield/lecture/>

18. Cormack *A. M.* Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it— World Scientific Publishing Co., 1992. — P. 551—563

19. Jacobson C. Fourier Methods in 3D Reconstruction from Cone-Beam data: Department of Electrical Engineering: Dissertation N 427. — Linkoping Studies in Science and Technology, Sweden, 1996. — 230 p

20. Turbell H. Cone-Beam Reconstruction Using Filtered Backprojection: Dissertation No 672. — Linkoping Studiesin Science and Technology, Sweden, 2001. — 189 p

21. N. Ramachandran and A. V. Lakshminarayanan, “Three dimensional reconstructions from radiographs and electron micrographs: Application of convolution instead of Fourier transforms,” Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 68, pp. 2236-2240, 1971.

22. L. A. Shepp and B. F. Logan, “The Fourier reconstruction of a head section,” IEEE Trans. Nucl, Sci., vol. NS-21, pp. 21-43, 1974

23. Северин, Ю. П., Щербіна, О. В., Мурашко В.О., Рущак, Л. В. ЯДЕРНА МЕДИЦИНА У КЛІНІЧНІЙ ПРАКТИЦІ. *Ukrainian Journal of Military Medicine*, 2019. *19*(1), 40-45.

24. van Ginkel, Michael & Luengo Hendriks, Cris & Van Vliet, Lucas. A short introduction to the Radon and Hough transforms and how they relate to each other. Quantitative Imaging Group Technical Report Series. Delft University of Technology. 2004

25. Доля П.Г. Харьковский Национальный Университет механико–математический факультет - Введение в математические методы компьютерной томографи. 2015 г.

26. Віхтинська, Т. Г. Лапітан, К. Є. Нємченко, К. Е. (2022). “Зворотне перетворення Радона без сингулярності для пучка з точковим фокусом.” *Біофізичний вісник*, 2021, №46, 23-33. doi:10.26565/2075-3810-2021-46-02

27. D. P. Boyd and M. J. Lipton, “Cardiac computed tomography,” Proc. IEEE, vol. 71, pp. 298-307, Mar. 1983.

28. You J, Zeng GL, Liang Z. “FBP Algorithms for Attenuated Fan-Beam Projections.” Inverse Probl. 2005 Oct;21(5):1801. doi: 10.1088/0266-5611

29. О. В. Кабанова “Апаратна реалізація швидкого зворотного проектування у тривимірній реконструкції зображень.” Методи та прилади контролю якості. 2003. № 10. С.92-96.

30. М.В. Синьков, А.І. Закидальський, Є.О. Цибульська, “ РОЗРОБКА НОВОГО АЛГОРИТМУ ТРИВИМІРНОЇ ТОМОГРАФІЧНОЇ РЕКОНСТРУКЦІЇ.” Наукові вісті НТУУ "КПІ".№ 4. 2009. С. 102-111.

31. B. D. Smith, “Image Reconstruction from Cone-Beam Projections: Necessary and Sufficient Conditions and Reconstruction Methods,” in *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 4, no. 1, pp. 14-25, March 1985,
doi: 10.1109/TMI.1985.4307689.

32. H. K. Tuy, “An inversion formula for cone-beam reconstruction,” SIAM J.Appi.Math.43,pp. 546—552(1983)

33. P. Grangeat, “Mathematical framework of cone–beam 3D reconstruction via the first derivative of the radon transform,” in Mathematical Methods in Tomography, pp. 66–97, Lecture Notes in Mathematics(Berlin:Springer), 1991.

34. A. A. Kirillov, “A problem of I. M. Gel’fand,” Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1961, Volume 137, Number 2, 276–277

35. Smith, Bruce. Cone-beam tomography. Recent advances and a tutorial review. Optical Engineering (1990). - OPT ENG. 29. 10.1117/12.55621.