Методы составления разностных схем

Различают три метода построения разностных схем на заданном шаблоне:

- метод разностной аппроксимации;
- интегро-интерполяционный метод;
- метод неопределенных коэффициентов.

Методом *разностной аппроксимации* мы уже пользовались при составлении схем (24), (26). Согласно данному методу, каждая производная, входящая в уравнение и краевое условие, заменяется каким-либо разностным выражением с учетов узлов заданного шаблона. Метод позволяет легко составить разностные схемы с первым и вторым порядком аппроксимации, когда коэффициенты уравнения достаточно гладкие функции. Обобщение данного подхода на ряд важных случаев затруднителен. Например, если коэффициенты уравнения разрывные, или предполагается использовать непрямоугольную и неравномерную сетку, возникает неопределенность в построении разностной схемы.

Аппроксимация

Пусть задана область G переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ с границей Γ и поставлена корректная задача решения уравнения с граничными условиями:

$$Au(x) - f(x) = 0,\ x \in G; \qquad (51)$$

$$Ru(x) - \mu(x) = 0,\ x \in \Gamma. \qquad (52)$$

Введем в области $G + \Gamma$ сетку с шагом h, которая содержит регулярные (внутренние) узлы ω_h и нерегулярные (граничные) узлы γ_h.

Перейдем в (51), (52) к соответствующим разностным аналогам

$$A_h y_h(x) - \varphi_h(x) = 0,\ x \in \omega_h; \qquad (51')$$

$$R_h y_h(x) - \chi_h(x) = 0,\ x \in \gamma_h. \qquad (52')$$

Близость разностной схемы (51′), (52′) к исходной задаче (51), (52) определяется величинами невязок:

$$\psi_h = (Au - f) - (A_h u - \varphi_h),\ \ x \in \omega_h;$$

$$\nu_h = (Ru - \mu) - (R_h u - \chi_h),\ \ x \in \gamma_h.$$

Разностная схема (51′), (52′) *аппроксимирует* задачу (51), (52), когда

$$\|\psi_h\|_{\varphi_h} \to 0,\ \|\nu_h\|_{\chi_h} \to 0,\ \ h \to 0,$$

аппроксимация имеет p-й порядок, когда

$$\|\psi_h\|_{\varphi_h} \to O(h^p),\ \|\nu_h\|_{\chi_h} \to O(h^p),\ \ h \to 0.$$

Дадим некоторые комментарии к выбору норм. Для простоты будем рассматривать одномерный случай, т.е. $G = [a,b]$.

Что такое норма? См. https://matworld.ru/vector-norm.php

Устойчивость

Под *устойчивостью* (*неустойчивостью*) разностной схемы понимается то, что малые ошибки, возникающие в процессе счета (или внесенные с входными данными), при последующих расчетах уменьшаются (возрастают).

Рассмотрим пример неустойчивой разностной схемы для задачи Коши дифференциального уравнения $u' + \alpha u = 0$, $\alpha \geq 0$. Выберем следующее однопараметрическое семейство разностных схем:

$$\frac{\sigma}{h}(y_{n+1} - y_n) + \frac{1-\sigma}{h}(y_n - y_{n-1}) + \alpha y_n = 0. \qquad (53)$$

Исследуем рост ошибки δy_n начальных данных уравнения (53). Поскольку уравнение (53) линейно, постольку ошибка δy_n удовлетворяет тому же уравнению (53). Изучим специальный вид ошибки $\delta y_n = \lambda^n$. Подставим это представление в (53), тогда

$$\sigma\lambda^2 + (1 - 2\sigma + \alpha h)\lambda - (1-\sigma) = 0. \qquad (54)$$

Решение квадратного уравнения (54) при $h \to 0$ дает следующие оценки корней

$$\lambda_1 = 1 - \alpha h + O(h^2),\ \lambda_2 = (1 - \tfrac{1}{\sigma})(1 + \alpha h) + O(h^2). \qquad (55)$$

Из оценок корней в (55) следует, что при $\sigma < ½$ второй корень $|\lambda_2| > 1$,

Разностная схема (51′), (52′) *устойчива*[10], если решение системы разностных уравнений непрерывно зависит от входных данных φ, χ и эта зависимость равномерна относительно шага сетки. Уточним непрерывную зависимость. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, не зависящее от h, что

$$\| y^I - y^{II} \|_{y_h} \leq \varepsilon, \qquad (56)$$

когда

$$\| \varphi^I - \varphi^{II} \|_{\varphi_h} \leq \delta,\ \| \chi^I - \chi^{II} \|_{\chi_h} \leq \delta. \qquad (57)$$

Если разностная схема (51′), (52′) линейна, то разностное решение линейно зависит от входных данных. В этом случае можно положить, что $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/(M + M_1)$, где M, M_1 — некоторые неотрицательные величины, независящие от h. В итоге условие устойчивости для линейных разностных схем можно записать в виде:

$$\| y^I - y^{II} \|_{y_h} \leq M \| \varphi^I - \varphi^{II} \|_{\varphi_h} + M_1 \| \chi^I - \chi^{II} \|_{\chi_h}. \qquad (58)$$

Непрерывную зависимость разностного решения от φ называют *устойчивостью по правой части*, а от χ — *устойчивостью по граничным данным*.

В дальнейшем будем рассматривать *двуслойные разностные схемы*, т.е. такие схемы которые содержат один известный и один новый, неизвестный слой.

Двуслойная разностная схема называется *равномерно устойчивой* по начальным данным, если при выборе начальных данных с любого слоя t_* ($t_0 \le t_* < T$) разностная схема устойчива по ним, причем устойчивость равномерна по t_*. Для линейных схем условие равномерной устойчивости можно записать в виде

$$\| y^I(t) - y^{II}(t) \| \le K \| y^I(t_*) - y^{II}(t_*) \|, \ t_0 \le t_* < t < T, \qquad (59)$$

где константа K не зависит от t_* и h, y^I, y^{II} — решения разностной схемы $A_h y = \varphi$ с начальными данными $y^I(t_*)$, $y^{II}(t_*)$ и с одной и той же правой частью.

В теории разностных схем рассматривается несколько способов исследования устойчивости:

- принцип максимума;
- метод разделения переменных;
- метод операторных неравенств

и некоторые другие.

Сходимость

Рассмотрим дифференциальное уравнение с граничными условиями

$$Au(x) = f(x), x \in G, \ Ru(x) = \mu(x), x \in \Gamma. \qquad (83)$$

Для задачи (83) определим аппроксимирующую ее разностную схему на сетке, состоящей из регулярных и нерегулярных узлов ω_h, γ_h соответственно:

$$A_h y(x) = \varphi(x), x \in \omega_h, \ R_h y(x) = \chi(x), \ x \in \gamma_h. \qquad (84)$$

Для изучения вопроса о сходимости нас будет интересовать близость разностного решения $y(x)$ и точного решения $u(x)$ на сетке $\omega_h + \gamma_h$, при этом для сравнения естественно использовать одну из сеточных норм.

Определение. Разностное решение $y(x)$ задачи (84) сходится к решению $u(x)$ дифференциальной задачи (83), если

$$\| y(x) - u(x) \|_{y_h} \to 0, \ h \to 0;$$

разностное решение имеет порядок точности p, если

$$\| y(x) - u(x) \|_{y_h} \to O(h^p), \ h \to 0.$$

Определение. Разностная задача (84) корректна, если ее решение существует и единственно при любых входных данных φ и χ из соответствующих классов и схема устойчива.

Теорема[12]. Если решение $u(x)$ задачи (83) существует, разностная схема (84) корректна и аппроксимирует задачу (83) на данном решении, то разностное решение сходится к точному.

Доказательство. Запишем цепочку преобразований:

$$A_h u = A_h u - Au + f = A_h u - Au + f - \varphi + \varphi = -\psi(x) + \varphi(x),$$

где $\psi(x)$ — невязка разностной схемы. Проводя аналогичные преобразования для граничных условий, получим

$$A_h u(x) = \varphi(x) - \psi(x), \ x \in \omega_h;$$
$$R_h u(x) = \chi(x) - \nu(x), \ x \in \gamma_h. \qquad (85)$$

Сравнивая (84) и (85), можно увидеть, что уравнения (85) являются разностными уравнениями (84) с модифицированной за счет невязки правой частью.

Поскольку разностная схема устойчива, постольку для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что $\| y - u \|_{y_h} \le \varepsilon$, если $\| \psi \|_{\varphi_h} \le \delta(\varepsilon)$ и $\| \nu \|_{\chi_h} \le \delta(\varepsilon)$.

По определению аппроксимации для любого $\delta > 0$ найдется такое $h_0(\delta)$, что $\| \psi \|_{\varphi_h} \le \delta$ и $\| \nu \|_{\chi_h} \le \delta$ при $h \le h_0(\delta)$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $h_0(\delta(\varepsilon))$, что $\| y - u \|_{y_h} \le \varepsilon$ при $h \le h_0(\delta(\varepsilon))$, т.е. имеет место сходимость. Теорема доказана.