Невязка

Рассмотрим операторное уравнение общего вида

$Au = f$ или в иной форме $Au - f = 0$. (28)

Заменим оператор A разностным оператором A_h, правую часть f — некоторой сеточной функцией φ_h, а точное решение u — разностным решением y, тогда можно записать разностное схему вида:

$A_h y = \varphi_h$ или в другой форме $A_h y - \varphi_h = 0$. (29)

Если в (29) подставить точное решение u, то оно, вообще говоря, не будет удовлетворять уравнению, т.е. $A_h u \neq \varphi_h$. Величину

$\psi = \varphi_h - A_h u = (Au - f) - (A_h u - \varphi_h) = (Au - A_h u) - (f - \varphi_h)$

принято называть *невязкой*. Для ее оценки обычно используют разложение в ряд Тейлора.

Найдем невязку для явной разностной схемы (26). Перепишем исходное уравнение теплопроводности (22) в форме (28)

$$Au \equiv (\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial^2}{\partial x^2})u = 0.$$

Поскольку $f = \varphi_h = 0$, постольку

$$\psi_n = (Au - A_h u)_n = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_n - k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_n - \frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} + \frac{k}{h^2}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}), \quad (30)$$

где $u_n = u(t_m, x_n)$, $\hat{u}_n = u(t_{m+1}, x_n)$.

Разложим решение u по формуле Тейлора в окрестности узла (t_m, x_n), считая что по времени существует вторая непрерывная производная, а по пространству — четвертая непрерывная производная, тогда

$$\hat{u}_n = u_n + \tau u_t(t_m, x_n) + \tfrac{1}{2}\tau^2 u_{tt}(\theta_m, x_n),$$

$$u_{n\pm1} = u_n \pm h u_x(t_m, x_n) + \tfrac{1}{2}h^2 u_{xx}(t_m, x_n) \pm \tfrac{1}{6}h^3 u_{xxx}(t_m, x_n) + \tfrac{1}{24}h^4 u_{xxxx}(t_m, \xi_{n\pm1}), \quad (31)$$

где $\theta_m \in (t_m, t_{m+1})$, $\xi_{n-1} \in (x_{n-1}, x_n)$, $\xi_{n+1} \in (x_n, x_{n+1})$. Подставляя (31) в (30) и пренебрегая отличием величин θ_m, ξ_{n-1} и ξ_{n+1} от t_m и x_n, находим итоговую оценку невязки

$$\psi_n = \left(-\tfrac{1}{2}\tau u_{tt} + \tfrac{1}{12}kh^2 u_{xxxx}\right)_n = O(\tau + h^2)\,. \qquad (32)$$

Согласно (32), невязка стремится к нулю при $\tau \to 0$ и $h \to 0$. Оценка (32) дает оценку невязки в регулярных узлах сетки. Согласно (23), (25), граничные условия выполняются точно, т.е. $\psi_0 = \psi_N = 0$.

Оценку невязки (32) можно улучшить следующим образом. Найдем u_{tt} согласно следующей последовательности выкладок

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}(ku_{xx}) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_t) = k^2 u_{xxxx}\,. \qquad (33)$$

Подставляя (33) в (32), получим

$$\psi_n = (\tfrac{1}{12}kh^2 - \tfrac{1}{2}k^2\tau)(u_{xxxx})_n\,. \qquad (34)$$

Согласно формуле (34) можно положить, что $\tau = h^2/(6k)$, тогда главный член невязки (34) обратиться в нуль и останутся члены более высокого порядка малости. Такой прием используется для получения разностных схем повышенного порядка точности.