Для диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних найчастіше використовується двовимірна прямокутна сітка. Центрально - різницеві шаблони, які застосовують на двовимірній квадратній сітці з кроком h, зображеній на рисунку 1 (індекс j надається незалежній змінній y, а i відноситься до x), можуть бути отримані аналогічно одновимірному випадку.

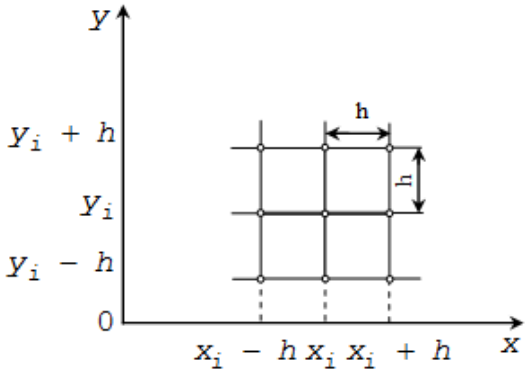


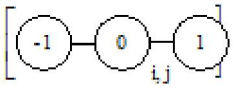
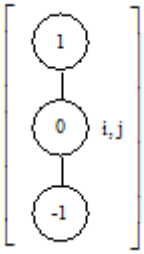
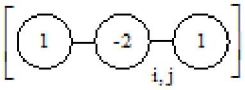
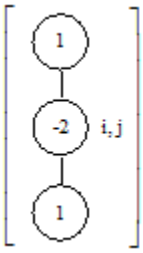
Рисунок 5.1 – Квадратна сітка

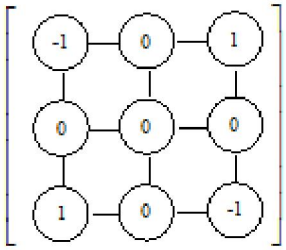
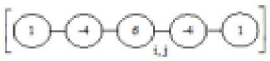
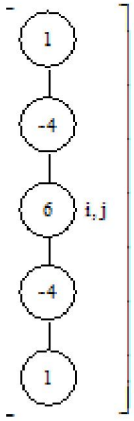
Для зручності позначення $f(x_i + h, y_i)$ замінимо на $f_{i+1,j}$. Користуючись цим позначенням, отримаємо вирази для частинних похідних, з якими доводиться зустрічатися на практиці, й використання яких ілюструється відповідними обчислювальними шаблонами (таблиця 1.).

З цих елементів будуються більш складні обчислювальні шаблони для диференціальних рівнянь. Додавання похідних здійснюється суперпозицією відповідних обчислювальних шаблонів. Цим методом конструюються шаблони для Δf і $\Delta^2 f$ (рисунок 2).

Всі наведені обчислювальні шаблони мають похибку другого порядку. Можна побудувати більш точні обчислювальні шаблони, якщо включити у розгляд додаткові вузли. Іноді, щоб звести до мінімуму розповсюдження похибок , користуються лівими або правими різницями.

Таблиця 1 Обчислювальні шаблони для похідних

$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} \approx \frac{1}{2h}$	
$\frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} \approx \frac{1}{2h}$	
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i1} + f_{i-1,j}}{h^2} \approx \frac{1}{h^2}$	
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{h^2} \approx \frac{1}{h^2}$	

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \approx \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1}}{4h^2} \approx$	
$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \approx \frac{1}{h^4}$	
$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \approx \frac{1}{h^4}$	

Часто труднощі, які пов’язані з використанням прямокутної сітки, виникають через границю неправильної конфігурації, яка не проходить через вузли сітки. Розглянемо приклад розв’язання такої задачі для обчислювального шаблону рівняння Лапласа в області, що обмежена довільною кривою, яка зображена на рисунок 3.

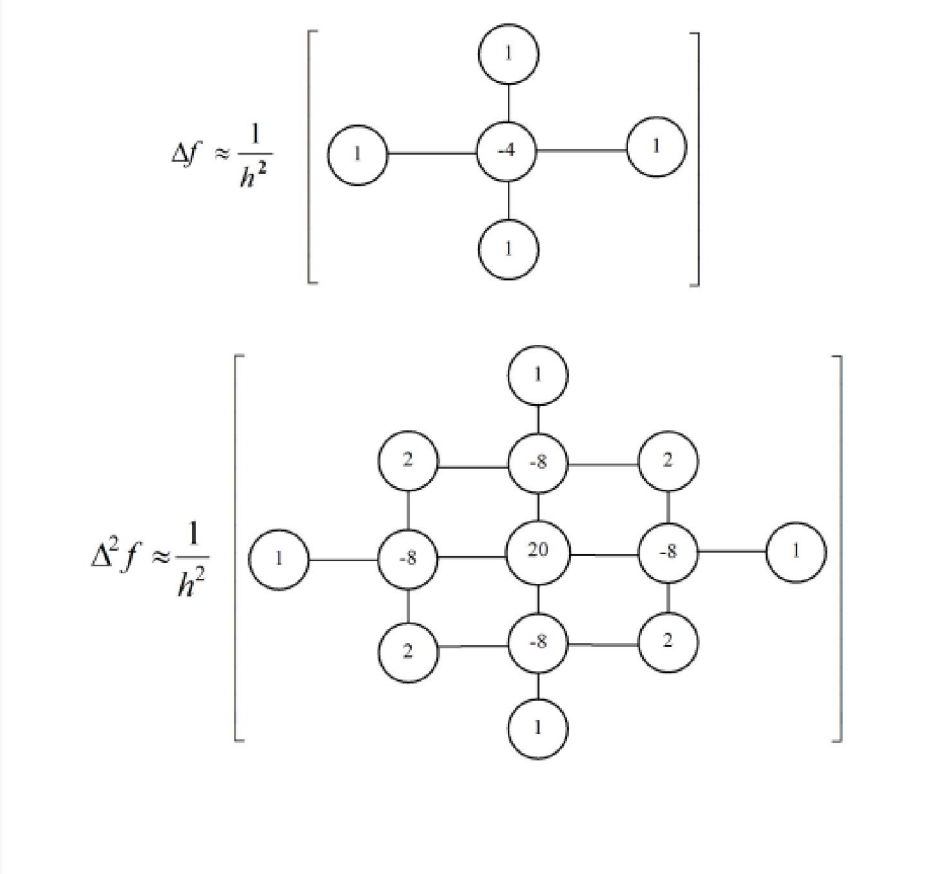


Рисунок 2 – Обчислювальні шаблони для операторів

Другі частинні похідні для вузлів, які лежать на границі області, можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{f_a - f_{i,j}}{ah} - \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{h}}{0{,}5(ah+h)};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{\frac{f_b - f_{i,j}}{bh} - \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{h}}{0{,}5(bh+h)}.$$

Додавши другі похідні, отримаємо :

$$\Delta f \approx \frac{2}{h^2}\left(\frac{f_{i-1,j}}{1+a} + \frac{f_a}{a(1+a)} + \frac{f_b}{b(1+b)} + \frac{f_{i,j-1}}{1+b} - \frac{a+b}{ab} f_{i,j}\right).$$

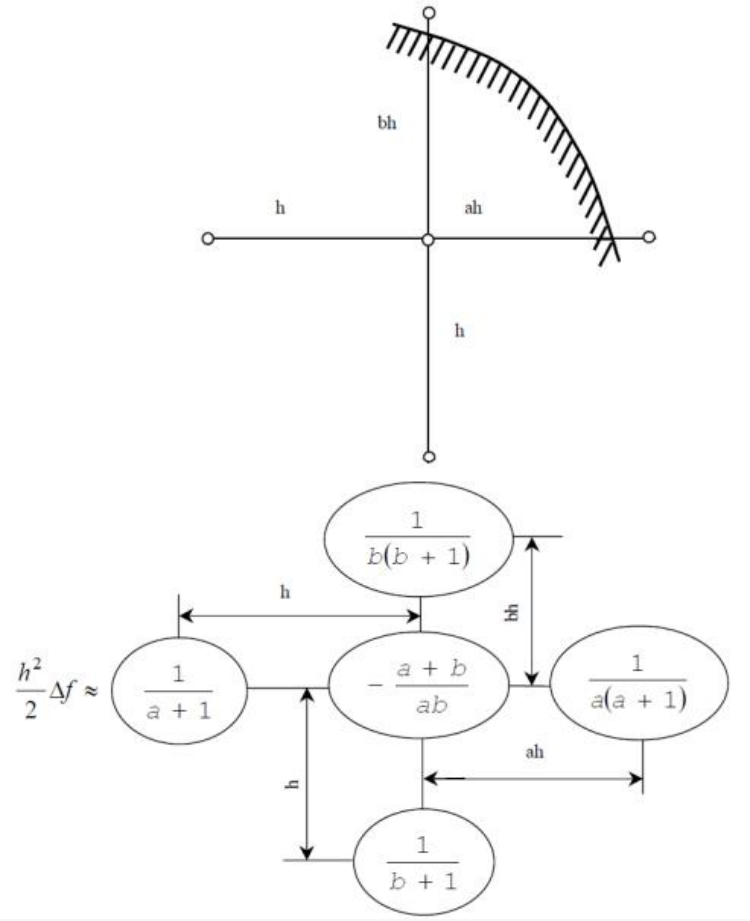


Рисунок 3 Обчислювальний шаблон для границі неправильної форми

Застосувавши обчислювальний шаблон до кожного з n вузлів сітки, отримаємо систему з n рівнянь, яка може були лінійною, якщо початкове диференціальне рівняння має відповідну структуру. В цьому випадку розв'язання задачі зводиться до розв'язання системи рівнянь вигляду:

$$\begin{bmatrix} матриця \\ коефіцієнтів \end{bmatrix} \begin{bmatrix} невідоме\ значення\ y \\ вузлах\ (вектор-стовпець) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} вектор-стовпець \\ вільних\ членів \end{bmatrix},$$

яка розв'язується найчастіше ітераційними методами.

Практичні методи і алгоритми розв'язання різних виглядів диференціальних рівнянь в частинних похідних мають свої особливості і вимагають окремого розгляду на прикладі найбільш розповсюджених задач.