Як відомо, в техніці, і зокрема в автомобільному транспорті, важливе значення мають різні коливальні процеси (механічні і електромагнітні) та теплові процеси. Такі процеси відбуваються у просторі і залежать від часу. Основні закономірності таких явищ і процесів описуються диференціальними рівняннями, які одержали назву *рівнянь математичної фізики*. Функції, які описують процеси, залежат від чотирьох змінних $\omega = f(x, y, z, t)$. Але в деяких випадках задачі можна дещо спростити, а саме звести до задач для функцій двох змінних [51].

Нагадаємо, що диференціальними рівняннями в частинних похідних називаються рівняння, в яких невідома функція залежить від багатьох аргументів.

В теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних досить часто використовуються такі позначення частинних похідних:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = u_y,\ \frac{\partial u}{\partial z} = u_z,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = u_{xz},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = u_{zy},$$

У багатьох випадках для опису фізичних процесів використовують рівнянь з приватними похідними до другого порядку включно. Так, наприклад, вивчення вільних коливань різної природи приводить до хвилевих рівнянь вигляду

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

де $u(x, y, z, t)$ – функція, що описує хвильовий процес, x, y, z – координати, c – швидкість розповсюдження хвилі в даному середовищі, t – час. Оператор $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ прийнято позначати значком Δ, який в цьому випадку носить назву оператора Лапласа.

Процеси розповсюдження теплової енергії описуються рівнянням теплопровідності

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = Q, \qquad (2)$$

де ρ і C – щільність і теплоємність речовини, T – температура, k – коефіцієнт теплопровідності, Q – щільність джерел тепла.

Аналіз стаціонарних станів, наприклад, статичних теплових, електричних, магнітних полів або деформацій при статичних навантаженнях проводять з використанням рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z), \qquad (3)$$

де – $u(x, y, z)$ – функція, яка описує статичне поле, $f(x, y, z)$ – розподілені джерела. Якщо $f(x, y, z) = 0$, то з (3) отримуємо рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (4)$$

Не дивлячись на відмінність процесів, що описуються розглянутими рівняннями, і форм їх запису, всі вони можуть бути представлені як окремі випадки узагальненої форми диференціального рівняння другого порядку.

Розглянемо рівняння другого порядку з двома незалежними змінними x і y:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D=0, \qquad (5)$$

де A,B,C,D – деякі функції, які залежать в загальному випадку від $x,y,u,\partial u/\partial x$ і $\partial u/\partial y$, причому A,B і C одночасно не звертаються в нуль. Диференціальні рівняння, що описують фізичні поля, можуть бути нелінійними. Проте на практиці з метою спрощення опису багато завдань розглядаються в лінійному наближенні, коли рівняння з приватними похідними лінійно щодо невідомої функції u і її частинних похідних.

На підставі того, що рівнянню (5) можна поставити у відповідність квадратичну форму $A\zeta_1^2+B\zeta_1\zeta_2+C\zeta_2^2=0$, по математичній природі розрізняють наступні типи *квазілінійних рівнянь*:

1) гіперболічний, якщо $B^2-4AC>0$ – його аналогом є хвильове рівняння (1);
2) параболічний, якщо $B^2-4AC=0$ – його аналог рівняння теплопровідності (2);
3) еліптичний, якщо $B^2-4AC<0$ – аналог рівняння Пуассона (3) або Лапласа (4).

У задачах, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, важливою частиною при формуванні математичної моделі процесу крім самого рівняння є наявність додаткових умов.

Для задач з рівняннями гіперболічного або параболічного типу, що містять як незалежну змінну час t, умови по змінній t зазвичай формулюються як початкові. Вони описують початковий станпроцесу, що вивчається. По координатах x,y,z задають граничні умови. У теплових задачах вони, наприклад, описують розподіл температури на межі розрахунковій області. У завданнях з рівняннями еліптичного типу, які не утримують змінну t, використовують тільки граничні умови по координатах x, y і z, а саме завдання називають краєвим.

Якщо краєва умова задається у вигляді розподілу функції u на межі, то цю умову прийнято називати *умовою Дирихле*. Умову, яка визначає похідну $\vec{n}\cdot grad(u)=\vec{n}\cdot\nabla u$ на границі розрахункової області, називають *умовою Неймана*, $\vec{n}$ – одинична нормаль до границі. Умови, які надають собою комбінацію двох вищеназваних, називають змішаними.

Приведена класифікація дозволяє визначити загальні підходи до розв’язку диференціальних рівнянь в задачах різних по фізичній суті, але схожих з математичної точки зору. При організації чисельного алгоритму розв’язування математичної моделі, яка представлена у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних за додатковими умовами велике поширення набули точні методи, автомодельні методи, методи скінчених різниць, метод скінчених елементів.