Сітки і сіткові функції

Складність рівнянь газодинаміки полягає насамперед у їх нелінійності. Дуже рідко вдається побудувати аналітичне рішення цих рівнянь. Чисельні методи є зараз найбільш ефективним і перспективним засобом дослідження задач газової динаміки. У чисельних методах диференціальна задача замінюється, або, як кажуть, апроксимується, системою різницевих рівнянь разностной схемою.

Для складання різницевої схеми, наближено описує диференціальне рівняння, необхідно:

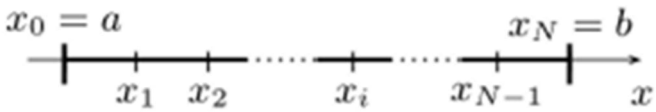
- 1) замінити область безперервної зміни аргументу областю його дискретного зміни;
- 2) замінити диференціальні оператори різницевими;
- 3) сформулювати різницеві аналоги для граничних умов і початкових даних.

Після закінчення цієї процедури ми приходимо до алгебраїчної системи рівнянь, яку можна вирішити чисельно.

Сукупність різницевих рівнянь і крайових умов, виражених в різницевої формі, називається *різницевої схемою.* Безліч точок, в яких шукається наближене рішення, називається *сіткою* , окремі точки - *вузлами* сітки. Функція, певна в вузлах сітки, називається *гратчастої функцією.*

Розглянемо кілька прикладів побудови сіток і визначення сіткових функцій.

Приклад 1. Рівномірне сітка на відрізку *a ^ x ^ b* (рис.2.1).



Мал. 2.1. **Рівномірна сітка на відрізку**

Відстань між сусідніми вузлами *h = # * + 1 - Xi = (b - a) / N* називається *кроком* сітки. Безліч вузлів *u) f t = {x ^ = a + ih, i* = = 1,2, ..., JV - 1} становить сітку. У неї можуть бути включені і граничні вузли: = {ж, = *a* 4 *ih, г* = 0,1, ..., Л Г }. сітковий

функцію будемо позначати рр * = рр (ж *). Такі сітки зазвичай використовуються при вирішенні звичайних диференціальних рівнянь. У цих позначеннях запис методу Ейлера для звичайного диференціального рівняння *du / dx* = / (ж, *i)* буде мати вигляд *щ* +1 = = *Щ + hfi.*

Приклад 2. Рівномірне сітка на площині (рис.2.2).

$$x_i = x_o + ih_x, \qquad i = 0, 1, \ldots, N$$

$$y_j = y_o + jh_y, \qquad j = 0, 1, \ldots, M$$

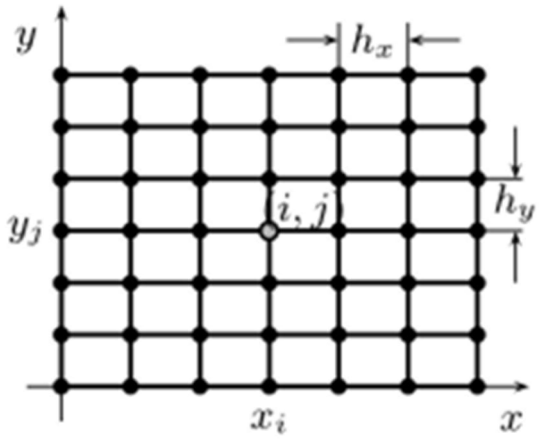
Кроки сітки по координаті *x* :

$$h_x = x_{i+1} - x_i = (x_N - x_o)/N$$

і по координаті *y:*

$$h_y = y_{j+1} - y_j = (y_M - y_o)/M$$

можуть в загальному випадку не збігатися. Сіткова функція вузла *(i, j)* позначається або, коли це не викликає непорозумінь, иу.



Мал. 2.2. **Рівномірна сотка на площині**

Якщо в якості однієї з змінних використовується час, то вона зазвичай позначається верхнім індексом п, а часовий крок позначається буквою *m: m = (T - t $_Q$) / K = t $^{n+1}$ - t ^{n}* . Сіткова функція в вузлі (г, *n)* позначається *i* ™ *= u (xi, t ^{n}).* Безліч вузлів *Xi* при певному значенні *t ^{n}* становлять *тимчасової, шар.*

Приклад 3. Сітка в двовимірної області.

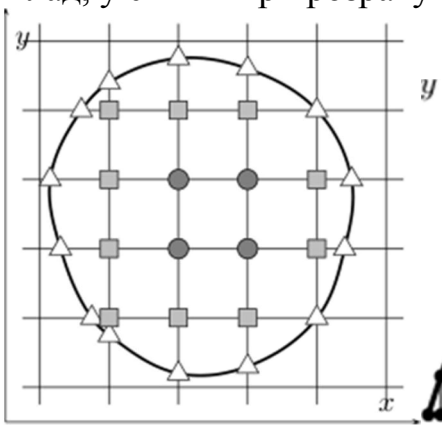
Якщо область, в якій шукається рішення, має криволінійну межу, то в загальному випадку для неї не можна побудувати рівномірну сітку. Як видно з рис. 2.3, при застосуванні методу сіток для областей складної форми виникають певні труднощі. Дамо класифікацію вузлів такої сітки. Вузли сітки, що лежать всередині області *G* , назвемо *внутрішніми.*

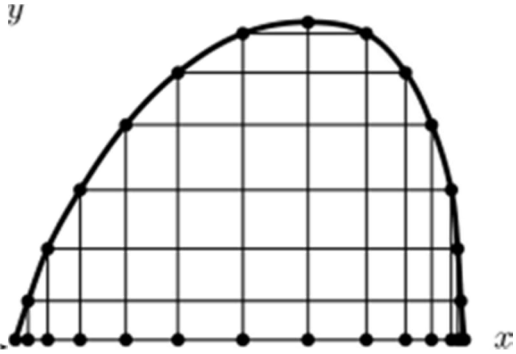
Точки перетину прямих $x = ih_x$ і $y = jh_y$ з кордоном називаються граничними у напрямку *x* (або *y*) вузлами (Л). Найближчий до кордону внутрішній вузол називається прикордонним у напрямку *x* (або *y).* Якщо його відстань до кордону нс дорівнює кроку сітки за відповідним напрямом, то такий вузол називається *нерегулярним* по *x* (або *y*). На схемі ці вузли позначені квадратами (?). У класифікації можна відзначити регулярні прикордонні вузли і строго внутрішні (О) • нерегулярні поблизу кордону для такої сітки долаються зазвичай одним із таких способів:

1. Рішення шукається в області, близької за формою до дійсної, але має тільки регулярні граничні вузли (граничні значення зносяться в найближчі вузли сітки).
2. Поблизу кордону області використовуються нерівномірні кроки сітки.
3. Рішення завдання шукається на рівномірній сітці з граничними умовами в фіктивних вузлах, які вибираються так, щоб дійсне граничне умова виконувалася на істинної кордоні

Приклад 4. Нерегулярне узгоджена сітка.

У цій сітці все граничні вузли лежать на перетині утворюють її ліній. Як видно з рис. 2.4, узгодженість з кордоном досягається за рахунок істотної нерівномірності кроків сітки. Часто нерегулярність сітки викликається наступній з фізичних міркувань необхідністю дроблення в якійсь частині області (наприклад, у стінки при розрахунку руху в'язкої рідини)





Мал. 2.3. **Сітка в області Рис. 2.4. узгоджена** з криволінійної кордоном з межами сітка

Сітка називається *зв'язковий* , якщо її будь-два вузла можна з'єднати ламаною, що проходить через внутрішні вузли (ланки ламаної повинні бути паралельні координатним осях).

При вирішенні систем рівнянь іноді зручно розглядати дві сітки, зміщені відносно один одного на пів кроку. Вузли другий сітки в цьому випадку намічають напівцілими індексами.

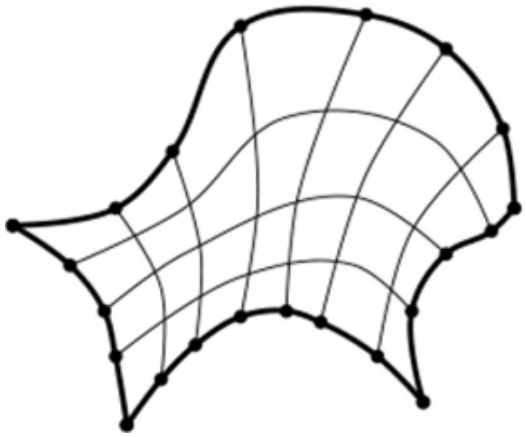
Якщо у Вас можуть запитати на сітці деяку відому неперервну функцію, наприклад, то можна поступити наступним чином:

- - вважати, що значення сіткової функції у вузлі *(xi, t^n)* дорівнює значенню відповідної неперервної функції в цій точці: / "=*f (xi, t^n)*. Цей прийом називається *проектуванням функції на сітку* ;
- - прийняти за / "осредненное по деякому проміжку значення / (x, *t*):

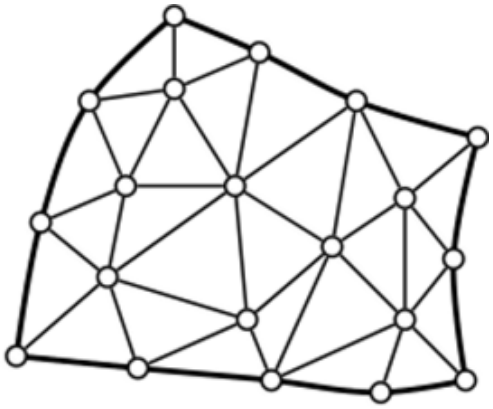
$$f_i^n = \frac{1}{h} \int\limits_{x_i - h/2}^{x_i + h/2} f(x, t^n)\, dx.$$

Цей прийом застосовують, коли функція / (а :, *t)* є розривною, але відомо, що інтеграл від неї по будь-якому кінцевому відрізку існує. Можливі й інші способи визначення сіткових функцій.

Наведені вище приклади сіток були утворені системою прямих, паралельних осях координат. Для областей, що мають геометрично складні кордону, більш зручним є використання криволінійних сіток і породжують їх криволінійних систем координат (рис. 2.5) або неструктурованих сіток (рис. 2.6).



Мал. 2.5. **криволінійна сітка**



Мал. 2.6. **трикутна сітка**

Зазвичай ці системи будуються так, щоб одна з координатних ліній (поверхонь в тривимірному випадку) збігалася з кордоном області.

Деякі труднощі в формулюванні систем рівнянь в таких координатних системах окупаються зручністю в описі криволінійних кордонів і виставленні на них граничних умов.

Наведені вище прямокутні і криволінійні сітки відносяться до класу гак званих *структурованих* сіток. У них сусідні вузли по координатним напрямками можуть бути пронумеровані послідовними значеннями індексів. За сітка може бути побудована і за іншим принципом - за принципом розбиття на елементи довільної форми, як це показано на рис. 2.6.

Елементами такої сітки є вузли, осередки і межі, між якими встановлені відносини пов'язаності. Такі сітки називаються *неструктурованими.* Найбільш простий з неструктурованих є сітка, побудована з трикутників. Операція розбиття області на елементи трикутної форми називається *тріангуляції*