3. Автомодельность и подобие. Для уравнений в частных производных существуют такие частные решения, когда $u(x, t)$ является функцией одной переменной ξ, роль которой играет некоторая комбинация независимых переменных x, t. Такие решения называются *автомодельными*.

Построим пример автомодельного решения. Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности, в котором коэффициент теплопроводности зависит от температуры по степенному закону

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(u)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right], \quad k(u) = k_0 u^m, \quad k_0 > 0, \quad m > 0. \tag{9}$$

Такая зависимость часто встречается в физических задачах; например, коэффициент электронной теплопроводности плазмы приблизительно пропорционален $u^{5/2}$.

Будем искать частное решение уравнения (9), имеющее вид бегущей волны

$$u(x, t) = f(\xi), \quad \xi = x - ct.$$

При подстановке такого решения уравнение (9) преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$c\frac{df}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}\left(k_0 f^m \frac{df}{d\xi}\right) = 0. \tag{10}$$

Однократное интегрирование этого уравнения дает соотношение

$$f(\xi) + \frac{k_0}{c} f^m(\xi)\frac{df}{d\xi} = \text{const}. \tag{11}$$

Если функция $f(\xi)$ обращается в нуль хотя бы в одной точке ξ_0, то константа в правой части (11) равна нулю и соотношение (11) нетрудно проинтегрировать еще раз:

$$f(\xi) = \left[\frac{cm}{k_0}(\xi_0 - \xi)\right]^{1/m} \quad \text{при } \xi \leqslant \xi_0.$$

Доопределим решение при $\xi > \xi_0$, полагая $f(\xi) = 0$, что удовлетворяет уравнению (9). Таким образом, получим искомое решение

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left[\frac{cm}{k_0}(x_0 - x + ct)\right]^{1/m}, & x &\leqslant x_0 + ct, \\ u(x, t) &= 0, & x &> x_0 + ct. \end{aligned} \tag{12}$$

Чтобы это решение могло существовать, начальные и граничные условия должны быть с ним согласованы. Например, если уравнение (9) рассматривается при $t > 0$ на

полупрямой $x \geqslant x_0$, то следует задать условия

$$u(x, 0) = 0, \quad x \geqslant x_0,$$

$$u(x_0, t) = \left(\frac{c^2 m}{k_0} t\right)^{1/m}, \quad t \geqslant 0. \qquad (13)$$

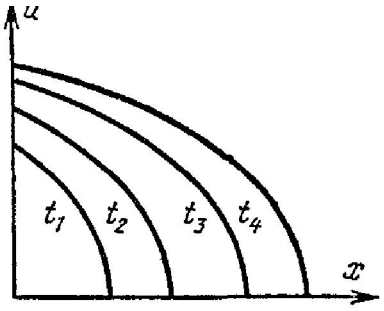

Рис. 45.

Автомодельное решение (12) представляет собой температурную волну, бегущую с постоянной скоростью по нулевому фону температуры (рис. 45). Скорость движения волны c определяется скоростью роста температуры на границе (13). Точка $\bar{x} = x_0 + ct$ является фронтом волны. Профиль температуры всюду непрерывен, но на фронте он имеет вертикальную касательную $(\partial u/\partial x)_{\bar{x}} = \infty$, и производная в этой точке терпит разрыв.

Автомодельные решения довольно часто удается найти для линейных и квазилинейных уравнений или систем уравнений, коэффициенты которых зависят от переменных x, t и решения u по степенным законам. Для построения решения надо «угадать» подходящую комбинацию независимых переменных и описанным выше приемом свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению. Выразить решение этого уравнения через элементарные функции, подобно (12), удается далеко не всегда, но найти это решение численным интегрированием несравненно проще, чем численно решить исходное уравнение в частных производных.

Если уравнение в частных производных описывает сложный физический процесс, то автомодельные решения дают отдельные режимы протекания процесса и позволяют исследовать многие его особенности. Поэтому автомодельные решения широко используются в современной физике (см. [36]).

Автомодельность является частным случаем *подобия*. В теории подобия при помощи анализа физических размерностей коэффициентов уравнения ищутся такие преобразования всех переменных и функций, относительно которых уравнение инвариантно. Например, уравнение (9) не изменится при таком преобразовании:

$$x \to \alpha x, \quad t \to \alpha t, \quad u \to \alpha^{1/m} u. \qquad (14)$$

Если для уравнения известно преобразование подобия, то, найдя каким-либо способом одно частное решение, мы при помощи этого преобразования получим целое семейство решений. Это особенно ценно, если задача настолько сложна, что частные решения удается находить только трудоемкими численными методами.

Разумеется, автомодельные решения или преобразования подобия существуют далеко не для всех классов уравнений, а лишь при некоторых видах коэффициентов уравнения и начальных и граничных условиях. Однако многие важные физические задачи точно или приближенно удовлетворяют этим ограничениям.