МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАУКОВО-НАВЧАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ

Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем бакалавр

«Обробка даних фізичного експерименту з застосуванням апроксимуючих сплайнів»

Виконав: студент 4 курсу, групи НФ-43
Хорошун Д.О.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма:
Прикладна фізика енергетичних систем
Керівник: доц. Вербицький В.І.

Рецензент:

Харків – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра інформаційних технологій у фізико-енергетичних системах
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) бакалавр
Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Руслан СУХОВ
підпис
"____"_____2020 року

З А В Д А Н Н Я
НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ

Хорошун Дмитро Олександрович

1.Тема роботи «Обробка даних фізичного експерименту з застосуванням апроксимуючих сплайнів» керівник роботи: Вербицький Віктор Ілліч, кандидат фізико-математичних наук,
затверджені наказом по університету від "05" грудня 2019 року № 0210–05/2249

2. Строк подання студентом роботи 06.06.2020

3. Перелік питань, які потрібно розробити:

1) зробити огляд літератури, методів побудови апроксимуючих сплайнів та згладжуючих сплайнів;

2) обрати та пристосувати для конкретних задач метод розв'язування відповідних систем рівнянь;

3) обрати та застосувати числовий алгоритм побудови сплайну;

4) провести обчислювальний експеримент з обробки фізичних даних сплайнами.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми, узгодження, а також затвердження її на кафедрі
2	Робота над літературою та іншими джерелами
3	Затвердження теми на кафедрі
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6	Написання третього розділу
7	Завершення написання дипломної роботи (висновки та література)
8	Подача науковому керівнику
9	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
10	Попередній захист
11	Захист

5.Дата видачі завдання

Студент _____ Дмитро ХОРОШУН
підпис

Керівник роботи _____ Віктор ВЕРБИЦЬКИЙ
підпис

РЕФЕРАТ

Робота виконана Хорошуном Дмитром Олександровичем на тему: Обробка даних фізичного експерименту з застосуванням апроксимуючих сплайнів.

Об’єктом дослідження дипломної роботи є процес аналізу залежності даних за допомогою сплайн-апроксимації.

Предметом дослідження є система апроксимації даних фізичного експерименту з позитивним нагрівним елементом.

Мета полягає у обробці даних фізичного експерименту за допомогою методу апроксимації кубічними сплайнами.

Дипломний проект містить: 51 сторінку, 19 рисунків, 3 таблиі, 1 додаток, 15 джерел.

Ключові слова: АПРОКСИМАЦІЯ, СПЛАЙН, ІНТЕРПОЛЯЦІЯ, ЕКСПЕРИМЕНТ, ЗГЛАДЖУВАННЯ СПЛАЙНІВ, НАБЛИЖЕННЯ СПЛАЙНАМИ, ОБРОБКА ДАНИХ.

РЕФЕРАТ

Работа выполнена Хорошун Дмитрием Александровичем на тему: Обработка данных физического эксперимента с применением аппроксимирующих сплайнов.

Объектом исследования дипломной работы являются аппроксимирующие сплайны.

Предметом исследования является анализ и обработка данных физического эксперимента с положительным нагревательным элементом.

Цель работы заключается в обработке и анализе данных физического эксперимента с помощью аппроксимирующих сплайнов.

Дипломный проект содержит: 51 страницу, 19 рисунков, 3 таблицы, 1 приложение, 15 источников.

Ключевые слова: АППРОКСИМАЦИЯ, СПЛАЙН, ИНТЕРПОЛЯЦИЯ, ЭКСПЕРИМЕНТ, СГЛАЖИВАНИЯ СПЛАЙНОВ, ПРИБЛИЖЕНИЕ СПЛАЙНАМИ, ОБРАБОТКА ДАННЫХ.

ABSTRACT

The work was done by student Dmitro Khoroshun on the topic: Processing data from a physical experiment using approximating splines.

The object of research of the thesis is approximating splines.

The subject of the study is the analysis and processing of data from a physical experiment with a positive heating element.

The purpose of the work is to process and analyze the data of a physical experiment with the help of approximating splines.

The graduation project contains: 51 pages, 19 drawings, 3 tables, 1 application, 15 sources.

Keywords: APPROXIMATION, SPLINE, INTERPOLATION, EXPERIMENT, SPLINE SMOOTHING, SPLINE APPROXIMATION, DATA PROCESSING.

ЗМІСТ

ВСТУП 8
1. СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦІЯ. АНАЛІЗ СПОСОБІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОСТАВЛЕННОГО ЗАВДАННЯ 11
1.1. Сплайн-апроксимація 11
1.2. Кубічна сплайн-інтерполяція. Правила знаходження найближчого значення по заданій табличній функції 13
1.3. Приклад кубічної сплайн-інтерполяції 16
2. РОЗГЛЯД ТА КОНЦЕПЦІЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ СПЛАЙНІВ ЇХ АПРОКСИМАЦІЯ І СПОСОБИ РІШЕННЯ НАВЕДЕНИХ ЗАДАЧАХ 20
2.1. Кубічний сплайн 20
2.2. Згладжування сплайнів 25
2.3. Наближення сплайнами. Можливі помилки при апроксимації 28
3. ОПИС ТА ТЕСТУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ 33
3.1. Опис експерименту 33
3.2. Обробка даних експерименту за допомогою віконного редактору графіки програми Scilab 36
3.3. Обробка даних за допомогою функції програми Scilab 44
ВИСНОВКИ 48
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 49
ДОДАТОК А 51

ВСТУП

Що таке сплайн? У перекладі з англійської мови spline означає гнучку рейку, яка використовувалась у кресленні креслярами-інженерами для проведення ліній через експериментальні точки на креслярському полотні плавною кривою, ще до появи у світі комп'ютерної техніки. У науковому сенсі його позначують як деяку функцію, визначену кусочно по поліномам (многочленам), де кожний поліном зафіксований між вузлами. Максимальним ступенем використовуваних многочленів називають ступінь сплайна. Це визначення припускає наші знання щодо кусково-поліноміальної функції. Простіше це формулювання можна показати на прикладі кривої лініїї в компп'ютерній програмі PowerPoint (див. Рис. 0.1.)

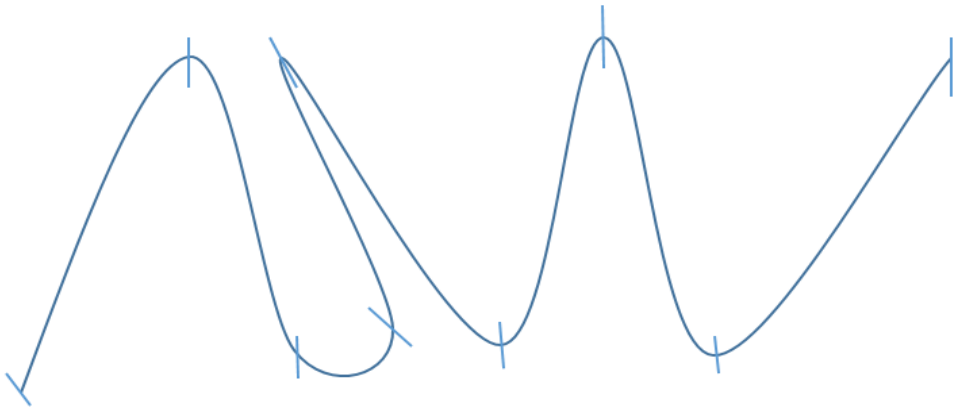


Рис. 0.1. Крива, складена зі сплайнів

Сплайни складають криві разом, щоб зробити їх безперервними та неправильними. Коли ми використовуємо даний інструмент (крива) у програмі PowerPoint, кожне клацання комп'ютерної миші створює нову область для лінії або відрізок лініїї. Кожне натискання на ліву кнопку миші також створює так

звану контрольну точку або точки, які визначають форму кривої. Це і є сплайни, вони створюють плавні криві з нерегулярних точок даних.

Сплайни та їх апроксимація дуже актуальні на наш час, вони нам потрібні при заданні поверхні в комп'ютерному моделюванні, для спрощення реалізації обчислювальних алгоритмів, для медицини, щоб розумітися на концентрації будь-якої речовини в певний проміжок часу, для визначення кількості населення в демографії, та в геології для виявлення корисних копалин в певних точках тощо.

Можна виділити декілька таких видів сплайнів: лінійний сплайн (побудова прямої з однієї точки в іншу), інтерполяційний сплайн (проходить через кожну точку даних), ідеальний сплайн, згладжувальний сплайн та кубічний сплайн.

Ідеальний сплайн розглядаються як течія якогось процесу в часі, керуючого переходу його другої похідної з мінімального у максимальне значення і навпаки в моменти часу.

Згладжувальний сплайн використовується для підгонки кривих до даних за допомогою лінійної регресії найменших квадратів і для опису залежності фізичних експериментів з відомою похибкою. Його мета полягає в тому, щоб якось зменшити частку випадковості в наслідку вимірювань.

Кубічний сплайн є функцією, яка співпадає з кубічним поліномом (многочленом ≤ 3 ступеня) в області визначення на кожному відрізку, тобто кубічний сплайн – це послідовність $N - 1$ кубічних поліномів.

Також слід вказати, що сплайн-апроксимація використовується при обробці великих масивів точок. Якщо при великій кількості вузлів приближувати експериментальну функцію одним многочленом, то цей многочлен буде мати занадто високу ступінь і поза границі вузлів похибка буде дуже велика. Використовувати інтерполяційні і функціональні сплайни можливо в математиці, комп'ютерному моделюванні, задачах обводів корпусів в кораблебудуванні і авіації, для побудови літаків та гелікоптерів.

Кореляційними сплайнами користуються як графіками нелінійної регресії, прикладом якої є опис залежностей спупінчастої і кусково-лінійних функцій.

1. СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦІЯ. АНАЛІЗ СПОСОБІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОСТАВЛЕННОГО ЗАВДАННЯ

1.1. Сплайн-апроксимація

На сьогодні кількісні характеристики та властивості об'єктів, що вивчаються залежать від вибору виду апроксимації, де сплайн-апроксимація є дуже актуальною, чи не в кожній технічній роботі або дослідженні. Без апроксимації сплайнами не можна, наприклад, зобразити траєкторію руху марсохода, бо на даний час безперервна передача сигналу поки що неможлива, а намалювати шлях його пересування є бажання. З цього виходить, що траєкторію нам потрібно відтворювати за отриманими точками в певний момент часу. Зрозуміло, що цей шлях буде не точним, бо дві будь-які точки можна з'єднати різними способами, але це єдиний спосіб, яким його можливо відтворити.

Апроксимація – це дія або процес знаходження числа, часу чи положення, помітно близького до правильного значення, обчислення, та не обов'язково, щоб наближення кривої до початкової проходило через задані точки. Це число називається наближенням, саме так слово «апроксимація» перекладається з англійської мови. За допомогою цього визначення вивчаються числові характеристики, заміняються деякі математичні об'єкти іншими.

Апроксимація як раніше, так і сьогодні, була і є одним із найважливіших математичних, фізичних, і науково-експериментальних процесів, частково через те, що інколи в деяких експериментах неможливо зробити абсолютно точні вимірювання. Апроксимація також може виникати за потреби виразити повністю числа у десятковій нотації, а з деякими числами такого жодним чином зробити не можливо, де саме наближення приходить на допомогу. Наприклад, кожне ірраціональне число можна наблизити, просто скорочуючи його. За зразок можна взяти число π і наблизити його до 3,14, хоч 3,1416 або 3,1415927 чи 3,141592654 і так до нескінченності, допоки ми не отримаємо бажану точність.

Найчастіше зустрічається вид точкової апроксимації, який називається інтерполяцією. Інтерполяція – це процес розв'язку рівнянь за допомогою знаходження наближеного рішення, після чого шляхом цього наближення знаходимо послідовно найкращі наближення, до тієї пори, поки не знайдеться вирішення потрібної нам точності. Ітеративний метод існує для знаходження розв'язку диференціальних рівнянь, поліноміальних рівнянь, квадратних коренів і оцінки інтегралів. Як відомо, алгоритми інтерполяції функцій, які розташовані по точним даним, визначені на дискретній безлічі точок, засновані на використанні інтерполяційних многочленів Лагранжа. Функція $\varphi(x)$ має в володінні похідні до певного порядку. Задача, за умови, коли значення функції $\varphi(x)$ відомі з деякою похибкою у вузлових точках, і при цьому потрібно побудувати криву , щоб вона найкращим чином могла апроксимувати функцію, зазвичай вирішується за методом найменших квадратів. Найбільшого застосування в сплайн-інтерполяції набули поліноми не вище третього ступеня.

Обмежувальним процесом в утворенні послідовно кращих наближень також не треба нехтувати, бо це важливий інгредієнт у формулюванні окремих значних операціях в науці. Прикладом можна навести похідну і визначений інтеграл, які формуються під видом природного розширення ходу апроксимації. Похідна з'являється за результатом процесу наближення стрімкої швидкості пертурбації кривої за допомогою відрізків недовгих ліній. Чим буде коротший відрізок, тим точніше буде наближення, допоки не буде досягнуто точного значення в межах, де довжина прирівнюється до нуля. В паралелізмі декотрий інтеграл – це наслідок приближення площі під кривою, за допомогою ряду прямокутників. При поширенні кількості прямокутників зменшується площа кожного з них, а сума площ становиться найкращою апроксимацією загальної площі, яка аналізується. Паралельно, як і у випадку з похідною, у тій точці, де площа кожного прямокутника наближається до нуля, сума стає точним результатом.

Будь-яка функція може бути виявлена у вигляді циклу, зазначеного сумою безкінечної послідовності. Наприклад, є синусова функція, яка дорівнює

сумі: $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$. В даному циклі символ « ! » позначає факторіал – взяття добутку усіх натуральних чисел від одиниці до самого цього числа. Для зразку можна взяти факторіал від трьох, що буде виглядати як $3! = 1 \times 2 \times 3$. Таким чином, значення x може наблизитись для будь якого значення синусоїди, при цьому зберігаючи стільки доданків у ряді, скільки саме потрібно для того, щоб отримати бажаний ступінь точності. Завдяки глобальній комп'ютеризації, все більшого значення набувають процедури апроксимації. Такі цикли, як цей, для синусоїдальної функції часто використовуються як основа, на якій і функціонують ручні наукові рахункові машинки.

Найчастіше апроксимація визначається в межах, в яких фактичне значення може лежати, наприклад 25 ± 3, а це може значити, що по факту наше значення буде знаходитись в інтервалі від 25 до 28. Ця ступінь апроксимації має також своє наукове позначення. На зразок, $1{,}5 \times 10^6$ означає, що апроксимацію в 1 500 000 було обчислено до найближчих ста тисяч. Фактичне значення дорівнюватиме поміж 1 450 000 і 1 550 000. Але $1{,}500 \times 10^6$ означає 1 500 000 вимірювань до найближчої тисячі. Найправдивіше значення буде між 1 499 500 і 1 500 500.

1.2. Кубічна сплайн-інтерполяція. Правила знаходження найближчого значення по заданій табличній функції

Для великого числа вузлів буде нераціонально використовувати одну інтерполяційну формулу, формули Ньютона та Лагранжа сюди також не підходять. Значення інтерполяційного многочлена між вузлами відрізняється від значення інтерпольованої функції. Щоб позбавитись цієї вади, нам потрібно застосувати сплайн-інтерполяцію, яка є одним із видів ароксимації, до того ж, як нам вже відомо, самим поширеним у використанні вважають кубічний сплайн, який потребує побудови n поліномів третього ступеня.

$$\varphi(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, x_{i-1} \le x \le x_i,$$

$$i = 1,2, \dots, n. \tag{1.1}$$

Для того, щоб визначити $a_{i,}\, b_{i,}\, c_i, d_i$, які є невідомими полінома (1.1), потрібно всього $4n$ рівнянь. $2n$ рівнянь можна отримати з умови пересікання вузлів інтерполяції сплайном $\varphi(x_{i-1}) = y_{i-1};\ \varphi(x_i) = y_i;\ i = \overline{1,n}$:

$$a_i = y_{i-1}, i = \overline{1,n} \tag{1.2}$$

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i, i = \overline{1,n} \tag{1.3}$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}.$$

Наступні рівняння $(2n-2)$ можна знайти з умови неперервності похідних, саме перших та других, які знаходяться у вузлах інтерполяції, інакше кажучи, за такої умови, що гладкість кривої буде у всіх точках. Щоб це вирішити, знайдемо першу і другу похідну многочлена (1.1):

$$\varphi'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2$$

$$\varphi''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1})$$

похідні, отримані в точці x_i, потрібно порівняти і знати, що вони обчислені через правий та лівий інтервал від x_i $(i = \overline{1,n-1})$:

$$\varphi_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2;$$

$$\varphi_{i+1}'(x) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_i) + 3d_{i+1}(x - x_i)^2$$

$$b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2 = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_i) + \\ + 3d_{i+1}(x - x_i)^2 \tag{1.4}$$

$$\varphi_i'' = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1});$$

$$\varphi_{i+1}'' = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_i)$$

$$2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_i) \tag{1.5}$$

Замінимо $x = x_i$ з врахуванням $h_i = x - x_{i-1}$ у формулах (1.4) та (1.5) і отримаємо:

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i {h_i}^2 = b_{i+1}, i = \overline{1, n-1} \quad (1.6)$$

$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1} \quad (1.7)$$

На цьому етапі ми здобули $4n$ невідомих та $(4n - 2)$ рівняння. Щоб дійти до наступного кроку потрібно знайти два інші рівняння. Їх можна отримати за допомоги прирівнювання других похідних в першому та крайньому вузлах інтерполяції до нуля: $\varphi''(x_0) = 0, \varphi''(x_n) = 0$. В підсумку маємо:

$$\mathrm{c}_1 = 0 \quad (1.8)$$

$$\mathrm{c}_n + 3d_n h_n = 0 \quad (1.9)$$

Даним чином ми одержали систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), в склад якої входять рівняння (1.2), (1.3), (1.6) − (1.9). За допомогою СЛАР, можна нескладним способом віднайти невідомі коефіцієнти $\mathrm{a_i}, \mathrm{b_i}, \mathrm{c_i}, \mathrm{d_i}, \left(\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{n}}\right)$. Знайшовши всі коефіцієнти a_i з (1.2) умови, приведемо систему до кращого вигляду. Наступним кроком з (1.7) − (1.9) отримуємо:

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, i = \overline{1, n-1}, d_n = -\frac{c_n}{3h_n} \quad (1.10)$$

Щоб отримати для обчислення коефіцієнтів b_i розрахункові формули, потрібно підставити (1.2), (1.8) та (1.9) у формулу (1.3):

$$\mathrm{b_i} = \frac{\mathrm{y_i} - \mathrm{y_{i-1}}}{\mathrm{h_i}} - \frac{\mathrm{h_i}}{3}(\mathrm{c_{i+1}} + 2\mathrm{c_i}), \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{n}-1}, \mathrm{b_n} = \frac{\mathrm{y_n} - \mathrm{y_{n-1}}}{\mathrm{h_n}} - \frac{2\mathrm{h_n c_n}}{3} \quad (1.11)$$

Треба виключити з формули (1.7) невідомі b_i та d_i за допомогою підстановки у неї формул (1.10) та (1.11). Після чого ми будемо мати систему рівнянь, в якій присутня трьохдіагональна матриця, де невідомими є тільки коефіцієнти c_i:

$$c_1 = 0, c_n = 0, h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right),$$

$$i = \overline{2, n-1} \qquad (1.12)$$

В даному випадку, для розв'язання системи використаємо метод прогонки – одна з варіацій методу Гауса. Після чого знайдемо b_i і d_i, за відшуканими коефіцієнтами c_i. Це означає, що для того, щоб знайти апроксимуюче значення функції, яку задано таблично у вузлах, відмінних від початкових, потрібно використовуючи кубічну сплайн-інтерполяцію першочергово віднайти коефіцієнти $\mathrm{a_i, b_i, c_i, d_i, \left(i = \overline{1, n}\right)}$. [4] Послідовність виконання:

1. З формули (1.2) знайти коефіцієнти a_i.
2. Розв'язати систему (1.12).
3. Знайти b_i, c_i, d_i за допомогою формул (1.10) та (1.11).
4. Визначити інтервал (x_{i-1}, x_i), в який належить потрапляння аргументу x, в наслідок чого маємо в цій точці $y(x) \approx \varphi(x) = a_i + {} + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3$ в якості наближеного значення.

1.3. Приклад кубічної сплайн-інтерполяції

По наведеній нижче таблиці 1.1 зафіксованих значень потрібно віднайти наближене значення функції $y = f(x)$, в даній точці $x = -1{,}3$.

Таблиця 1.1

Фіксовані значення функції

$\mathbf{x_i}$	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
$\mathbf{f(x_i)}$	-0,7	0	0,7	1	0,7	0	-0,7

Використавши формулу (1.1) кубічної сплайн-інтерполяції будемо здійснювати вирішення даної задачі та знайдемо значення коефіцієнтів при невідомих.

Взявши в користування формулу (1.2) маємо коефіцієнти a_i:

$$a_1 = -0{,}7;\ a_2 = 0;\ a_3 = 0{,}7;\ a_4 = 1;\ a_5 = 0{,}7;\ a_6 = 0.$$

Далі напишемо рівняння системи, скориставшись формулою (1.12) і розв'яжемо її для отримання значень коефіцієнтів c_i:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ 0{,}5 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 0{,}5 \cdot c_3 = 3 \cdot \left(\dfrac{0{,}7}{0{,}5} - \dfrac{0{,}7}{0{,}5}\right) = 0 \\ 0{,}5 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + 0{,}5 \cdot c_4 = 3 \cdot \left(\dfrac{0{,}3}{0{,}5} - \dfrac{0{,}7}{0{,}5}\right) = -2{,}4 \\ 0{,}5 \cdot c_3 + 2 \cdot c_4 + 0{,}5 \cdot c_5 = 3 \cdot \left(-\dfrac{0{,}3}{0{,}5} - \dfrac{0{,}3}{0{,}5}\right) = -3{,}6 \\ 0{,}5 \cdot c_4 + 2 \cdot c_5 + 0{,}5 \cdot c_6 = 3 \cdot \left(-\dfrac{0{,}7}{0{,}5} - \dfrac{-0{,}3}{0{,}5}\right) = -2{,}4 \\ c_6 = 0 \end{cases}$$

$$c_1 = 0;\ c_2 = 0{,}22;\ c_3 = -0{,}92;\ c_4 = -1{,}35;\ c_5 = -0{,}86;\ c_6 = 0.$$

В підсумку, для знаходження коефіцієнтів b_i *і* d_i використаємо формули (1.10) та (1.11):

$$d_1 = \frac{0{,}22 - 0}{3 \cdot 0{,}5} = 0{,}15;$$

$$d_2 = \frac{-0{,}92 - 0{,}22}{3 \cdot 0{,}5} = -0{,}76;$$

$$d_3 = \frac{-1{,}35 - (-0{,}92)}{3 \cdot 0{,}5} = -0{,}29;$$

$$d_4 = \frac{-0{,}86 - (-1{,}35)}{3 \cdot 0{,}5} = 0{,}33;$$

$$d_5 = \frac{0-(-0{,}86)}{3 \cdot 0{,}5} = 0{,}57;$$

$$d_6 = -\frac{0}{3 \cdot 0{,}5} = 0;$$

$$b_1 = \frac{0-(-0{,}7)}{0{,}5} - \frac{0{,}5}{3} \cdot (0{,}22 + 2 \cdot 0) = 1{,}36;$$

$$b_2 = \frac{0{,}7-0}{0{,}5} - \frac{0{,}5}{3} \cdot (-0{,}92 + 2 \cdot 0{,}22) = 1{,}48;$$

$$b_3 = \frac{1-0{,}7}{0{,}5} - \frac{0{,}5}{3} \cdot \big(-1{,}35 + 2 \cdot (-0{,}92)\big) = 1{,}13;$$

$$b_4 = \frac{0{,}7-1}{0{,}5} - \frac{0{,}5}{3} \cdot \big(-0{,}86 + 2 \cdot (-1{,}35)\big) = -0{,}007;$$

$$b_5 = \frac{0-0{,}7}{0{,}5} - \frac{0{,}5}{3} \cdot \big(0 + 2 \cdot (-0{,}86)\big) = -1{,}11;$$

$$b_6 = \frac{-0{,}7-0}{0{,}5} - \frac{2 \cdot 0{,}5 \cdot 0}{3} = -1{,}4.$$

Відштовхуючись від знайдених значень всіх коефіцієнтів a_i, b_i, c_i, d_i, $\big(i = \overline{1{,}6}\big)$ добудемо наближене значення функції в точці $x = -1{,}3$. В першу чергу потрібно дізнатись де знаходиться задана точка, точніше між якими вузлами закріплених значень. В даному прикладі точка розміщується поміж вузлів $x_0 = -1{,}5$ і $x_1 = -1$. У результаті побудування інтерполяційного поліному з отриманих даних маємо:

$$\varphi(x) = a_1 + b_1(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2 + d_1(x - x_0)^3$$

$$\varphi(x) = -0{,}7 + 1{,}36 \cdot (x - 1{,}5) + \big(0 \cdot x - (-1{,}5)\big)^2 + 0{,}15 \cdot \big(x - (-1{,}5)\big)^3$$

Використовуючи підстановку значення $x = -1{,}3$ в дану вище формулу, отримаємо наближене значення функції в цій точці:

$$\varphi(-1{,}3) = -0{,}7 + 1{,}36 \cdot \left(-1{,}3 - (-1{,}5)\right) + 0 \cdot \left(-1{,}3 - (-1{,}5)\right)^2 + 0{,}15 \cdot$$
$$\cdot \left(-1{,}3 - (-1{,}5)\right)^3 = -0{,}43$$

2. РОЗГЛЯД ТА КОНЦЕПЦІЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ СПЛАЙНІВ ЇХ АПРОКСИМАЦІЯ І СПОСОБИ РІШЕННЯ НАВЕДЕНИХ ЗАДАЧАХ

2.1. Кубічний сплайн

Для обробки даних фізичних експериментів та їх апроксимації сплайнами краще всього обрати в користування згладжвуальні сплайни та окремі з підрозділів – кубічні сплайни (див. Рис 2.1), про які піде мова у цьому розділі, а саме про те, чим вони є, та їх важливість в обробці фізичних процесів та експериментів.

Як нам відомо зі вступної частини, кубічний сплайн є функцією, яка співпадає з кубічним поліномом (многочленом ≤ 3 ступеня) в області визначення на кожному відрізку. Тобто кубічний сплайн – це сплайн, який побудували з кускових многочленів третього порядку, де поліноми проходять через m контрольних точок. Зазвичай друга похідна кожного полінома прирівнюється до нуля в кінцевих точках, що є завершенням системи рівнянь $m - 2$, оскільки так можна забезпечити граничну умову. Це призводить до так званого «натурального» кубічного сплайну, що створює просту тридіагональну систему, яку не так важко вирішити, для того, щоб отримати коефіцієнти многочленів. Виходячи з вище наведених тверджень, «натуральний» кубічний сплайн – це кусково-кубічний поліном, котрий безперервно двічі диференцюється. Він значно «жорсткіший», ніж поліном, оскільки має меншу тенденцію до коливань між точками даних.

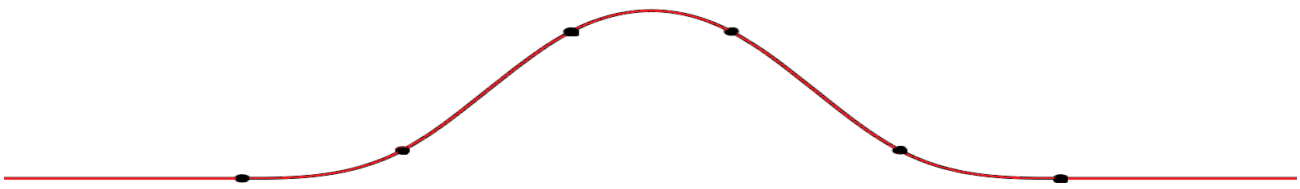


Рис. 2.1. Кубічний сплайн, що складається з семи поліноміальних сегментів

Назва кубічних сплайнів добре знайома інженерам-будівельникам, оскільки вона походить від гнучкої лінійки кресляра, яку можна використовувати для створення плавних кривих між деякими точками. Якщо лінійка утримується в положенні в різних точках штифтами, то між будь-якими двома з цих штифтів немає бічних сил, що діяли б так, через що сила зсуву в кривій була б постійною, згинальний момент змінюється більш лінійно, і, отже, за теорією пучків (для досить малих відхилень), крива приймає кубічну зміну між двома точками. Однак необхідно вказати ще дві умови, про які ще казав Де Бор К., перша, коли є вказаний похил в двох кінцевих точках, друга, коли похідна в цих же точках прирівнюється до нуля. Ця кінцева умова надає так зване наближення «натурального сплайну», котре протягом багатьох років традиційно усіма приймається. Але взагалі не має ніякої особливої причини, через що перша або друга похідна інтерполяційного сплайну повинні рівнятись нулю на кінцях. Похибка для кубічних сплайнів набагато менша, аніж для «натуральних сплайнів». Спосіб утримування коливань інтерполяційного полінома зробив популярнішими кубічні сплайни як спосіб інтерполяції та отримання чисельно похідних.

Рівняння кубічного сплайну має вигляд з набору даних в $x_0, x_1, \dots x_n$ зі значеннями $y_0, y_1, \dots y_n$. Нехай $\varphi(x)$ – це сплайн.

Припустимо, що

$$M_j = \varphi''(x_j), h_j = x_j - x_{j-1}$$

де M – це момент і він буде в j точці. Після поміж x_{j-1} та x_j

$$\varphi''(x) = M_{j-1}\frac{x_j - x}{h_j} + M_j\frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

$$\varphi'(x) = -M_{j-1}\frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + A$$

$$\varphi(x) = M_{j-1}\frac{\left(x_j - x\right)^3}{6h_j} + M_j\frac{\left(x - x_j - 1\right)^3}{6h_j} + Ax + B$$

Але

$$\varphi\left(x_{j-1}\right) = y_{j-1}, \varphi\left(x_j\right) = y_j$$

Після всього ми отримаємо

$$\varphi(x) = M_{j-1}\frac{\left(x_j - x\right)^3}{6h_j} + M_j\frac{\left(x - x_j - 1\right)^3}{6h_j} +$$

$$+\left(y_{j-1} - M_{j-1}\frac{h_j^2}{6}\right)\frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j + M_j\frac{h_j^2}{6}\right)\frac{x - x_j}{h_j}$$

$$\varphi'(x) = -M_{j-1}\frac{\left(x_j - x\right)^2}{2h_j} + M_j\frac{\left(x - x_{j-1}\right)^2}{2h_j} + \frac{y_i - y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6}h_j$$

Тепер ми отримали безперервність для $\varphi''(x)$ та $\varphi(x)$ в x_j. Нам також потрібна безперервність для $\varphi'(x)$.

Маємо

$$\varphi'\left(x_j^-\right) = \frac{h_j}{6}M_{j-1} + \frac{h_j}{3}M_j + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_j}$$

$$\varphi'\left(x_j^+\right) = \frac{-h_{j+1}}{3}M_j - \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} + \frac{y_{j+1} - y_i}{h_{j+1}}$$

Прирівнявши їх будемо мати рівняння для M_j в кожному внутрішньому вузлі:

$$\frac{h_j}{6}M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3}M_j + \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} = \frac{y_{j+1} - y_i}{h_{j+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_j}$$

Для завершення створення системи нам потрібно два додаткових рівняння. Прирівняємо $\varphi''(x_0) = M_0 = 0$, $\varphi''(x_n) = M_n = 0$, що відповідає

простим опорам на кінцях балки. Можна здобути кращої точності, якщо $\varphi'(x_0)$ та $\varphi'(x_n)$ є відомими. Тоді з рівняння для $\varphi'(x_n)$ ми маємо

$$\frac{h_1}{3}M_0 + \frac{h_1}{6}M_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_1} - \text{y}'$$

$$\frac{h_n}{6}M_{n-1} + \frac{h_n}{3}M_n = y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}$$

Якщо ні $\varphi'(x)$ ні $\varphi''(x)$ невідомі на кінцях, то можна встановити $\varphi'''(x) = 0$ або

$$M_1 - M_0 = 0$$

$$M_{n-1} - M_n = 0$$

У якості альтернативи можна використати деяку лінійну комбінацію цих кінцевих умов. В будь-якому випадку ми отримаємо тридіагональну систему рівнянь, яку можна записати наступним чином

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & & & & & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

де у внутрішніх точках

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \qquad \mu_j = 1 - \lambda_j$$

$$d_j = 6\frac{\left(y_{j+1} - y_i\right)\Big/h_{j+1} - \left(y_j - y_{j-1}\right)\Big/h_j}{h_j + h_{j+1}}$$

і $\lambda_0, \mu_n, d_0, d_n$ залежать від кінцевих умов. Ці рівняння належать до діагонально домінуючих, що призводить до стабільної поведінки.

В рівнянні сплайну для перших похідних маємо

$$m_j = \varphi'(x_j)$$

Тоді

$$\varphi(x) = m_{j-1}\frac{(x_j-x)^2(x-x_{j-1})}{h_j^2} - m_j\frac{(x-x_{j-1})^2(x_j-x)}{h_j^2} +$$

$$+y_{j-1}\frac{(x_j-x)^2[2(x-x_{j-1})+h_j]}{h_j^3} + y_j\frac{(x-x_j-1)^2[2(x_j-x)+h_j]}{h_j^3},$$

$$\varphi'(x) = m_{j-1}\frac{(x_j-x)(2x_{j-1}+x_j-3x)}{h_j^2} - m_j\frac{(x-x_{j-1})(2x_j-x_{j-1}-3x)}{h_j^2} +$$

$$+6\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j^3}(x-x_{j-1})(x-x_{j-1}),$$

$$\varphi''(x) = -2m_{j-1}\frac{2x_j+x_{j-1}-3x}{h_j^2} - 2m_j\frac{2x_{j-1}+x_j-3x}{h_j^2} + 6\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j^3}(x_j + x_{j-1} -$$

$$-2x),$$

$$\varphi''(x_j^-) = \frac{2m_{j-1}}{h_j} + \frac{4m_j}{h_j} - 6\frac{y_j - y_{j-1}}{h_j^2}$$

$$\varphi''(x_j^+) = -\frac{4m_j}{h_{j+1}} - \frac{2m_{j+1}}{h_{j+1}} + 6\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}^2}$$

Прирівняємо ці дані, що дає нам

$$\frac{1}{h_j}m_{j-1} + 2\left(\frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}}\right)m_j + \frac{1}{h_{j+1}}m_{j+1} = 3\frac{y_j - y_{j-1}}{h_j^2} + 3\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}^2}$$

Після чого

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_0 & & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\ & & & & & \\ & & & \lambda_{N-1} & 2 & \mu_{N-1} \\ & & & & \lambda_N & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \\ m_{N-1} \\ m_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix}$$

Де у внутрішніх точках

$$c_j = 3\lambda_j \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} + 3\mu_j \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}}$$

Кінцева умова $\varphi'' = 0$ дає нам

$$\mu_0 = 1, c_0 = 3\frac{y_j - y_0}{h_j}$$

$$\lambda_N = 1, c_N = 3\frac{y_N - y_{N-1}}{h_{N-1}}$$

2.2. Згладжування сплайнів

Згладжування сплайнів – це один із варіантів кусково-поліноміального наближення, його підхід полягає в тому, що жодне з двох значень незалежної змінної x_i не є однакове, одне значення підходить до сплайну через кожен інтервал $[x_i, x_{i+1}], i = 1, .., N$ та обчислює помилку як суму квадратів помилок у кожній даній точці, але додає терміну «шорсткості» до величини інтегральної кривизни, другої похідної сплайнів протягом усього інтервалу, яку слід мінімізувати.

Замість намагання зробити так, щоб сплайн співпадав з функцією в зазначених точках, можна просто діяти так, щоб він пройшов ближче та дозволив деяке згладжування. Для цього нехай буде обрано $\varphi(x)$ для мінімізації

$$R_1 \int_{x_0}^{x_n} f''(x)^2 dx + R_2 \sum_{i=0}^{n} \frac{(f(x_i) - y_i)^2}{Q_i}$$

Тоді за допомогою варіаційного обчислення можна показати, що рішення являє собою сплайн зі стикуванням в $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$, котрий не обов'язково проходить через точки. Це все нам вказує на те, що рівняння тепер зводяться до п'ятидіагональної системи, котра все ще може бути вирішена за допомогою ряду операцій, пропорційних n.

Згладжувальні сплайни – це дуже цікава річ. Їхньою особливістю є те, що вони виконують оцінку регуляризованої регресії на основі природного сплайна, розміщуючи вузли у всіх точках від $x_1, \dots x_n$, згладжувальні сплайни обходять проблему вибору вузлів (оскільки вони просто використовують вхідні дані в якості вузлів) і одночасно вони контролюють переоснащення, зменшуючи коефіцієнти оціночної функції (в її базовому розширенні).

Ми зосередимося на кубічних згладжувальних сплайнах (хоча вони можуть бути визначені для будь-якого непарного поліноміального порядку). Розглянемо функцію виду $\sum_{j=1}^{n} \beta_j \, g_j$, де $g_1, \dots gn$ – це усічені степеневі базисні функції для натуральних кубічних сплайнів з вузлами від $x_1, \dots x_n$. Зокрема вибрані для мінімізації

$$\|y - G\beta\|_2^2 + \lambda \beta^T \Omega \beta, \tag{2.1}$$

де $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ є базовою матрицею, визначеною як

$$G_{ij} = g_j(x_i), i, j = 1, \dots n,$$

і $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – це матриця штрафів, визначена як

$$\Omega_{ij} = \int g_i''(t) \, g_j''(t) dt, i, j = 1, \dots n$$

З огляду на оптимальні коефіцієнти $\hat{\beta}$ що мінімізують (2.1), оцінка сплайну згладжування в точці x визначається, як

$$\hat{r}(x) = \sum_{j=1}^{n} \hat{\beta}_j g_j(x)$$

Точна форма штрафної матриці Ω насправді не так вже й важлива. На що слід звернути увагу, так це на те, що існує додатковий член $\lambda\beta^T\Omega\beta$ в порівнянні зі звичайним кпитерієм для регресійних сплайнів; це називається регуляризоційним членом, і він має ефект стиснення компонентів рішення $\hat{\beta}$ до нуля. Параметр $\lambda \geq 0$ є параметром налаштування, часто званим параметром згладжування, і чим вище значення λ, тим більше усадка.

Ще більш цікавим згладжування сплайнів робить те, шо вони можуть бути альтернативно мотивовані беспосередньо з точки зору функціональної мінімізації. Розглянемо мінімізацію для всіх функцій f,

$$\sum_{i=1}^{n}\big(y_i - f(x_i)\big)^2 + \lambda \int \big(f''(x)\big)^2 dx \qquad (2.2)$$

Цей критерій обмінює похибку найменших квадратів f над $(x_i, y_i), i = 1, \dots n$, з членом регуляризації, котрий зростає, коли друга похідна становиться непостійною. Цікаво, що таке відбувається, коли існує унікальна функція, що мінімізує цей критерій, і далі, ця функція є саме кубічною згладжувальною сплайновою оцінкою $\hat{r}$ визначеною вище.

При зміні незалежної змінної з будь-яким типом поліноміальної або сплайнової підгонки виникають труднощі, якщо функція $y(x)$ має занадто великий ухил. У крайніх випадках дані точки можуть являти з себе замкнену криву або іншу криву, яка вигинається до себе.

У такому випадку x_i не утворює монотонної послідовності, а також $\frac{dy}{dx}$ – це нескінченність спереду, а $\frac{dx}{dy}$ – це нескінченність вгорі і внизу. Для подолання цієї складності, нам потрібно параметризувати криву і встановити, що

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

де t – це нова незалежна змінна, котра монотонно зростає. Після чого формуються окремі сплайни для $x(t)$ та $y(t)$.

2.3. Наближення сплайнами. Можливі помилки при апроксимації

Інтерполяція слугує для отримання функції, яка суворо проходить через усі табличні вузлові точки, де наслідком буде те, що кількість значень в таблиці рівнятиметься кількості коефіцієнтів у функції інтерполяції, а апроксимація навпаки, існує для того, щоб отримати функцію, яка буде проходити через певну збірку точок даних. На рис. 2.2. наглядно видно, що в цілому апроксимація точкових даних має перевагу перед інтерполяцією.

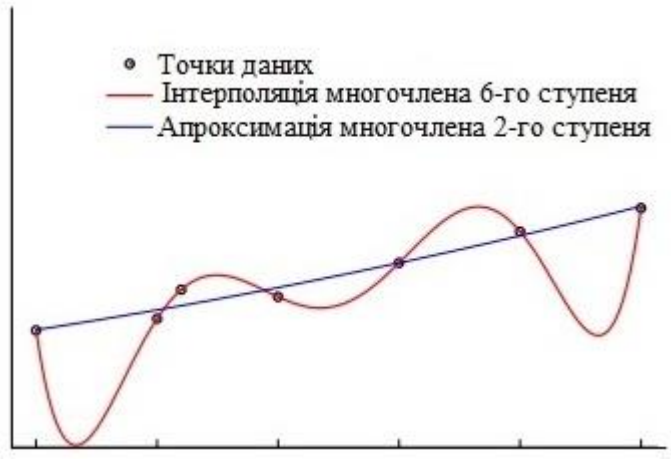


Рис.2.2. Різниця між інтерполяцією та наближенням даних з будь-якою нерівністю

Апроксимація сплайнами має в своїй основі обчислення спеціальних функцій, тому що для проектування цих функцій просто важливо, щоб апроксимуюча функція була близька до точної базової математичної функції і не обов’язково, щоб значення функцій збігалися.

Потрібно також не забути згадати, що при змозі спеціально підібрати точки, а саме точки Чебишева, у многочленній інтерполяції, можна перейти до апроксимації, котра буде відрізнятися на мінімальному рівні від апроксимації поліномами, того ж самого порядку у найкращому її вигляді. Це фактичне пояснення того, що у многочленній апроксимації є суттєві обмеження: функція буде погано наближатись на всьому проміжку, якщо вона має в деяких точках

особливу характерність на апроксимуючому інтервалі. Обираючи використання кусково-поліноміальних апроксимуючих функцій цього недоліку можна позбутись. [3]

Апроксимація може бути не ідеальною, до чого призводить рівновелике розміщення даних. Сенс полягає в тому, що якщо дані, що підлягають апроксимації або інтерполяції, мають область швидкої зміни, то через те, що глобальна функція повинна апроксимувати цю область також і в інших місцях, інтерполяція та апроксимація можуть бути недосконалі. Це явище відоме як феномен Рунге, наслідки якого можуть бути дуже серйозними та негаданими. З чого можна зробити висновок, що збільшення ступеня апроксимації може запросто загострити проблему.

Якщо за допомогою програми Microsoft Excel будувати функцію $f(x)$, то задача геометричної побудови за деякою формулою буде полягати в тому, щоб провести усереднену криву відносно кривої, яка проходить скрізь нутро області значень (див. таблиця 2.1, Рис. 2.4).

Таблиця 2.1.

Експериментальні дані

x	1	2	3	4	5
y	2,5	4	3,5	5	5,5

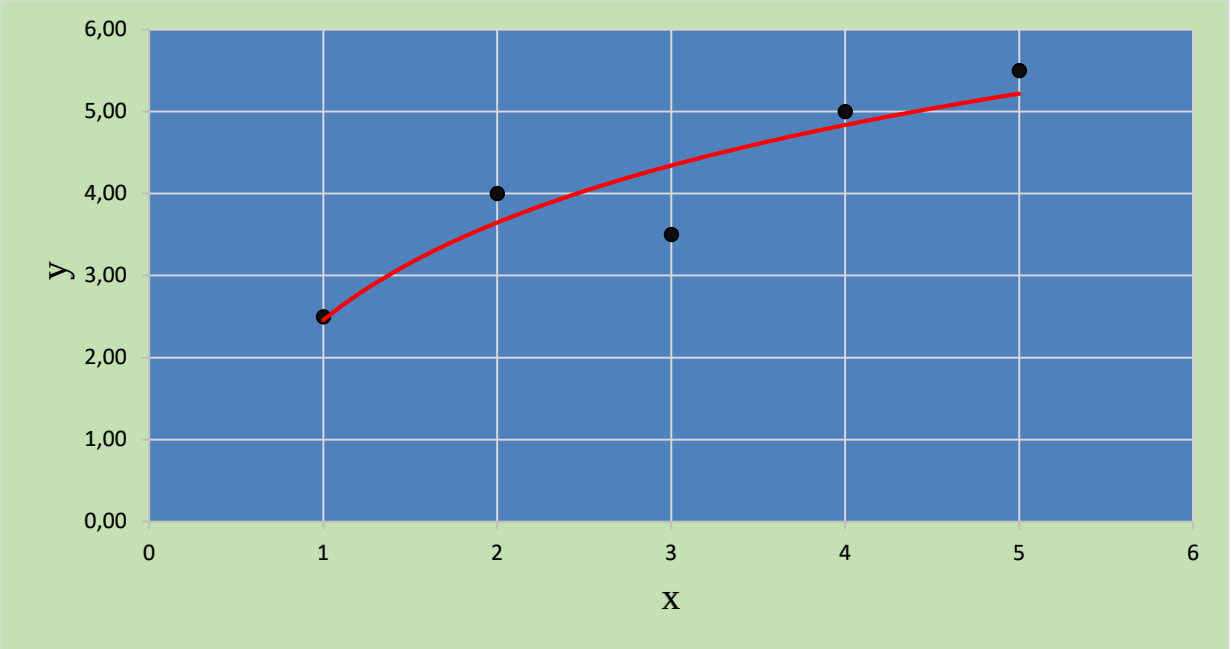


Рис. 2.4. Приклад логарифмічної функції апроксимації

При використанні наближення данні описуються менш точно, аніж при інтерполяції, але за наступним списком ідуть деякі пункти обґрунтовування для застосування апроксимації:

1. Коли інтерполююча функція набуває масивності при використанні в великій кількості даних з таблиці.
2. Коли експеримент повторюється не змінюючи початкових умов, то неможливо інтерполювати описані дані, необхідна обробка статистики.
3. Коли потрібно невілювати похибки експерименту. Зазвичай помилки містяться в даних x_i та y_i, через що формула інтерполяції наслідує дані помилки. Можна поглянути на Рис.2.6, де зрозуміло, що при зростанні x буде постійно і рівномірно збільшуватись значення y, відносно функції наближення діапазон показників даних можна трактувати неточністю експеримента.

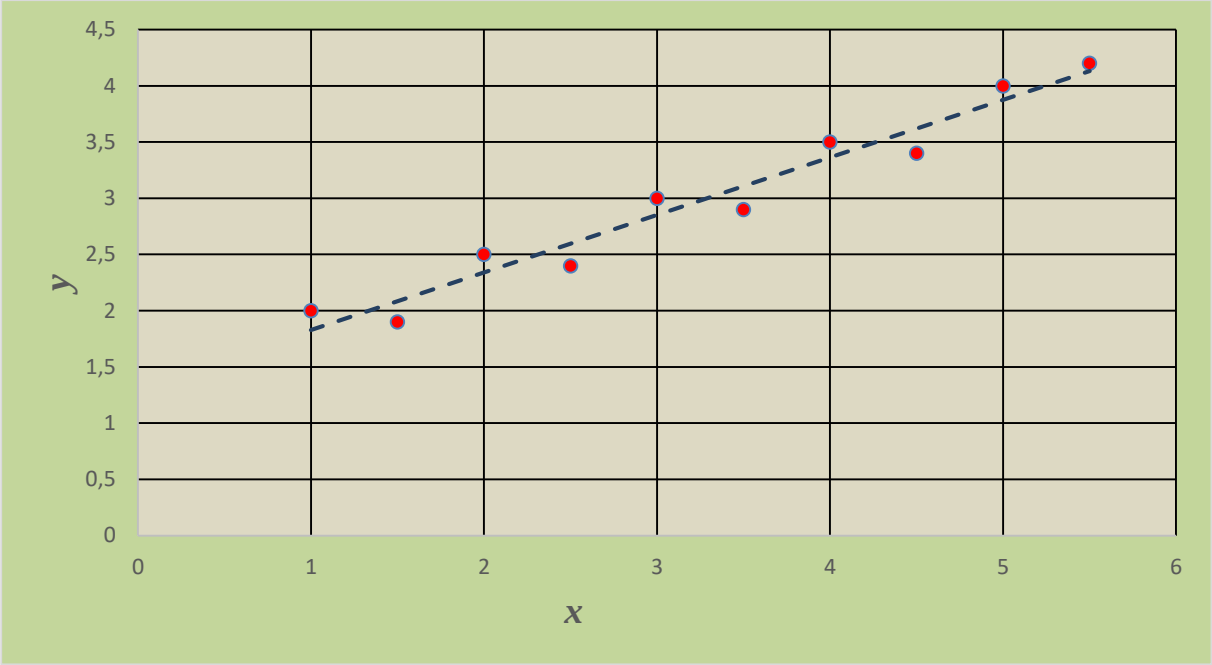


Рис.2.6. Приклад побудови лінійної апроксимуючої функції

За ситуації, коли лінійний поліном вже ніяк не може точно провести апроксимацію даних експериментальних точок в хід йде використовування наближення другого, третього і більших порядків, тобто застосовується нелінійна апроксимація.

З усіх можливих методів кубічна сплайн-апроксимація є однією з найефективніших. Одним з недоліків є потреба відшукати першу похідну.

Наприклад функція $f(x)$ є випуклою та безперервно диференціюється на проміжку $[a, b]$, $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$. Апроксимуючи функцію полінома третього ступеня маємо:

$$\varphi(x) = c_0(x-a)^3 + c_1(x-a)^2 + c_2(x-a) + c_3,$$

коефіцієнти c_0, c_1, c_2, c_3 даного рівняння можна знайти з наступних умов:

$$\varphi(a) = f(a) \Longrightarrow c_3 = f(a),$$

$$\varphi'(a) = f'(a) \Longrightarrow c_2 = f'(a),$$

$$\varphi(b) = f(b) \Longrightarrow\ c_0(b-a)^3 + c_1(b-a)^2 + c_2(b-a) + c_3 = f(b),$$

$$\varphi'(b) = f'(b) \Longrightarrow\ 3c_0(b-a)^2 + 2c_1(b-a) + c_2 = f'(b),$$

Відшукаємо точку

$$\overline{x} = \underset{[a,b]}{\operatorname{argmin}}\, \varphi(x)$$

З чого не важко перевірити, що

$$\overline{x} = a + \gamma(b-a), \text{ де}$$

$$\gamma = \frac{z+\omega-f'(a)}{f'(b)-f'(a)+2\omega};$$

$$z = 3\frac{f(a)-f(b)}{b-a} + f'(a) + f'(b),$$

$$\omega = \sqrt{z^2 - f'(a)\cdot f'(b)}$$

Для того, щоб можна було стиснути відрізок локалізації ми будемо використовувати точку $\overline{x}$: якщо $f'(\overline{x}) < 0$, тоді відрізком локалізації буде проміжок $[\overline{x}, b]$, і навпаки при $f'(\overline{x}) > 0$, проміжок буде мати вигляд $[a, \overline{x}]$.

3. ОПИС ТА ТЕСТУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

3.1. Опис експерименту

За основу фізичного експерименту, для отримання експериментальних даних і апроксимації їх сплайнами, ми будемо основоположні на проведенні досліду, метою якого є дослідження нагрівного елементу.

За свою основу досліду ми візьмемо дослідження вимірів залежності температури PTC (в переводі з англійської позитивний температурний коефіцієнт) елементу, по зміні подачі напруги та сили току, та стеження за варіюванням потужності та опору даного елементу.

У проведенні даного експерименту беруть участь взаємодіючі фізичні сили: електричний опір, напруга, сила току та основні характеристики елементу (тепловий коефіцієнт, питома потужність та інші).

Електричний опір PTC елементу нелінійно залежить від температури нагріву. Коли елемент підключається до електромережі і на нього подається напруга, то після досягнення ним через короткий період часу температури максимального опору (температури Кюрі), що обумовленої складом кераміки, опір даного елемента збільшується в багато разів, обмежуючи протікання струму та подальшого зростання температури, що є дуже важливим фактором щодо пожежної безпеки. Сам прилад може працювати на протязі 20000 годин безперервно.

Області в яких може застосовуватись нагрівний PTC елемент:

- Автомобілебудування: підігрів салону, системи омивання скла, елементів для подачі палива та масляних фільтрів, картера двигуна внутрішнього згорання.
- Електротехніка та енергетика: підігрів клапанів управління, вентилів трубопроводів, захист термоблоків від обмерзання та накопичення конденсату.

- Електроніка: обігрів та захист від вологості електроніки банкоматів, паркоматів, терміналів, вуличних камер та дисплеїв, світлових та інформаційних табло.
- Побутова техніка: техніка різного призначення, починаючи від холодильника, посудомийки та сушильної машинки і закінчуючи дорожніми прасками, клейовими пістолетами, тощо.
- Харчова промисловість: конвекційні печі, термоконтейнери, є випарниками в пароконвектоматах

Можна вказати два основні напрямки застосування цього приладу в залежності від того використовується він як термодатчик для виявлення змін температури навколишнього середовища, чи як елемент, що розсіює потужність в режимі прямого підігріву. При зміні температури важливу роль відіграє температурна характеристика опору, особливу на ділянці різкої зміни. У режимі розсіювання потужності цікавою є статична вольтамперна характеристика і здатність обмежувати струм. В інших випадках, коли потрібно низький робочий струм, велику роль відіграє динамічна вольт-амперна характеристика або тимчасова залежність струму.

Характеристика даного PTC елементу (Див. Рис.3.1.), який використовується для нагрівання повітря, рідини або твердого тіла в нашому випадку:

- вхідна напруга 36 В
- потужність 45 Вт ~ 150 Вт
- максимальна температура 200°C
- розмір 77x62x6 мм



Рис. 3.1. PTC елемент

Обладнання, яке застосовується для проведення експерименту (див. Рис.3.2.) складається з наступних елементів, цифри до яких відповідно зазначені на малюнку:

1) амперметр
2) вольтметр
3) стабілізатор напруги RUCELF LTC-1000
4) інфрачервоний термометр

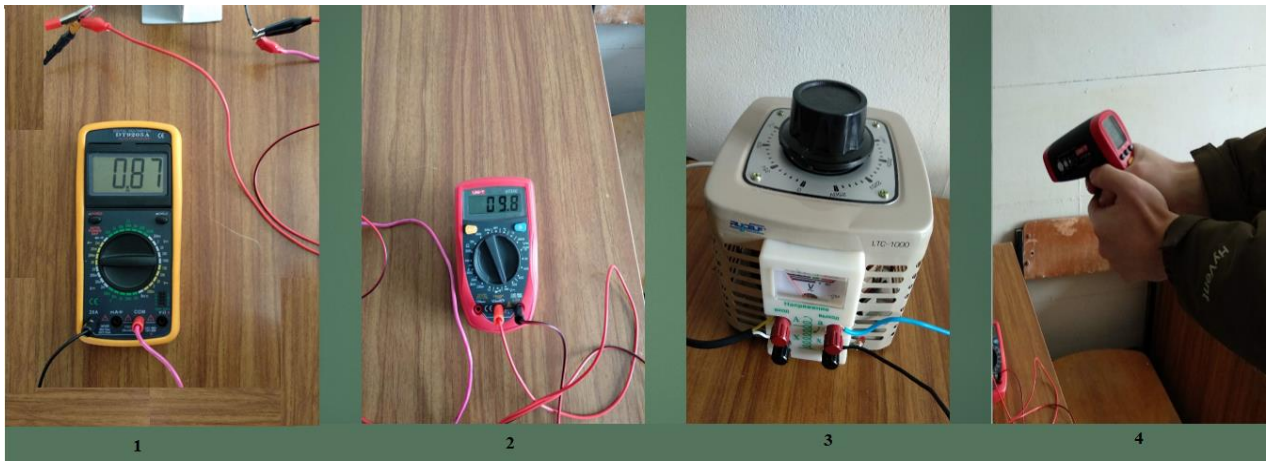


Рис.3.2. Обладнання для експерименту з PTC елементом

Табл.3.1.

Результати замірів PTC елемента

N	U (В)	I (А)	t°C	R (Ом)	P (Вт)
1	0	0	12	0	0
2	5	0,42	19	11,9	2.1
3	10	0,9	26	11,1	9
4	15	1,6	45	9,4	24
5	20	3,3	80	6,06	66
6	25	6,66	166	3,75	166,5
7	30	4,5	196	6,7	135
8	35	3,7	196	9,46	129,5

3.2. Обробка даних експерименту за допомогою віконного редактору графіки програми Scilab

За допомогою програми Scilab ми можемо знайти найкраще наближення даних за допомогою кубічних сплайнів, за наведеною таблицею складеною після проведеного нами експерименту, головною частиною якого є наведений нагрівний PTC елемент. Чому саме апроксимація буде проходити сплайнами третього ступеня? Тому що ідея надалі підвищувати ступінь поліному позбавлена всякого сенсу, бо графіки поліноміальної регресії зі ступенем вище третього майже не відрізняються. Також потрібно пам’ятати, що максимальний ступінь многочлена може бути тільки на один менше аніж число точок. І сам сенс кубічної сплайн-апроксимації є у тому, що ми знаходимо залежність однієї змінної від іншої під виглядом полінома третього ступеня.

Задання експериментальних даних та графіку в програмі Scilab:

U = [0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35];

I = [0, 0.42,0.9,1.6,3.3,6.66,4.5,3.7];

```
figure('Name','Залежність напруги від сили току','Color',[0.25, 0.25, 0.25])
plot(U, I, 'hr','LineWidth',0.5, 'MarkerSize', 5,...
'MarkerFaceColor', [0.3010 0.7450 0.9330]);
xlabel ('U');
ylabel ('I');
title ('Залежність U від I');
grid on;
```

Використовуючи програму Scilab і віконний редактор графіки Property Editor, ми можемо показати вищезазначене співвідношення на графіку за допомогою команди Basic Fitting (див. Рис. 3.3.), яким є вольт – амперна залежність (U від I), та продемонструвати апроксимацію кубічними сплайнами (див. Рис.3.4), де дуже гарно видно, що графік може не проходити через вузлові точки, але наближає їх з малою похибкою. [5] Далі ми покажемо їх різницю між кубічною сплайновою інтерполяцію, де чітко видно, що інтерполяція має свій рух через проміжні точки знайдені за відрізками многочлена третього ступеня (див. Рис.3.5). Функція многочлена третього ступеня апроксимується за наступним рівнянням:

$$y(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3$$

Наші коефіцієнти:

$$c_0 = -0.00080646\,, c_1 = 0.038444, c_2 = -0.26268, c_3 = 0.29182.$$

Тоді ми маємо рівняння параболи, яка побудована за допомогою кубічних сплайнів для залежності напруги від сили току, котра найкращим чином описує наші дані, добуті в ході експерименту:

$$y(x) = -0.00081 \cdot x^3 + 0.038 \cdot x^2 - 0.26 \cdot x + 0.29$$

де норма залишків буде рівнятись 2.0471, а для кубічної сплайн-ітнерполяції дорівнює 0 (див. Рис.3.6).

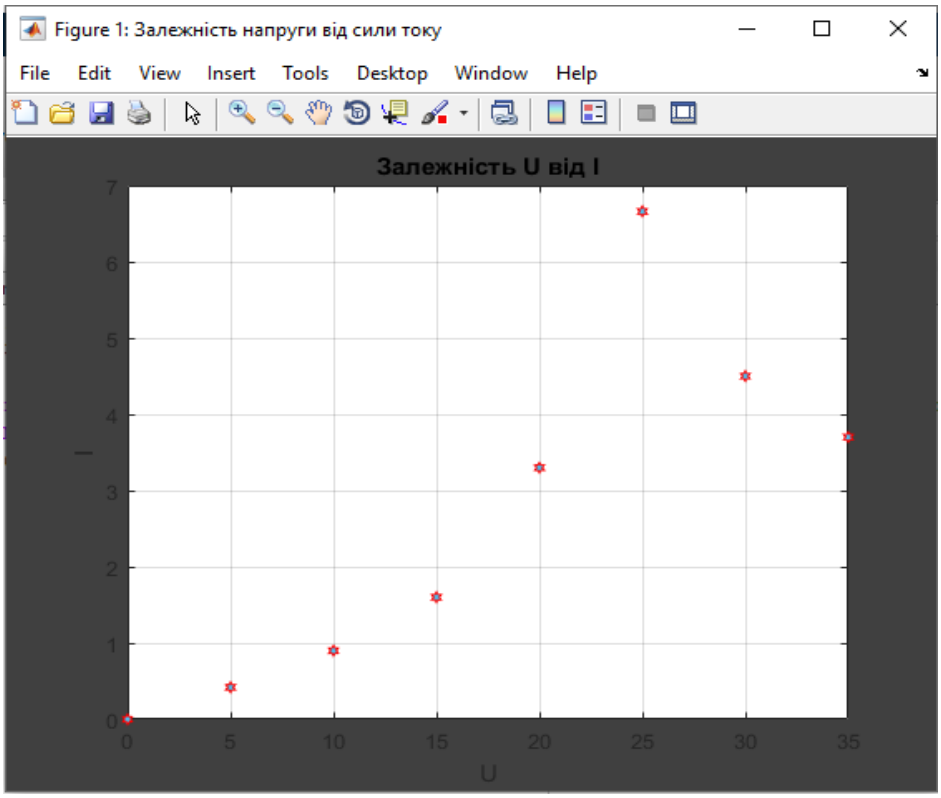


Рис.3.3. Залежність напруги від сили току РТС елементу

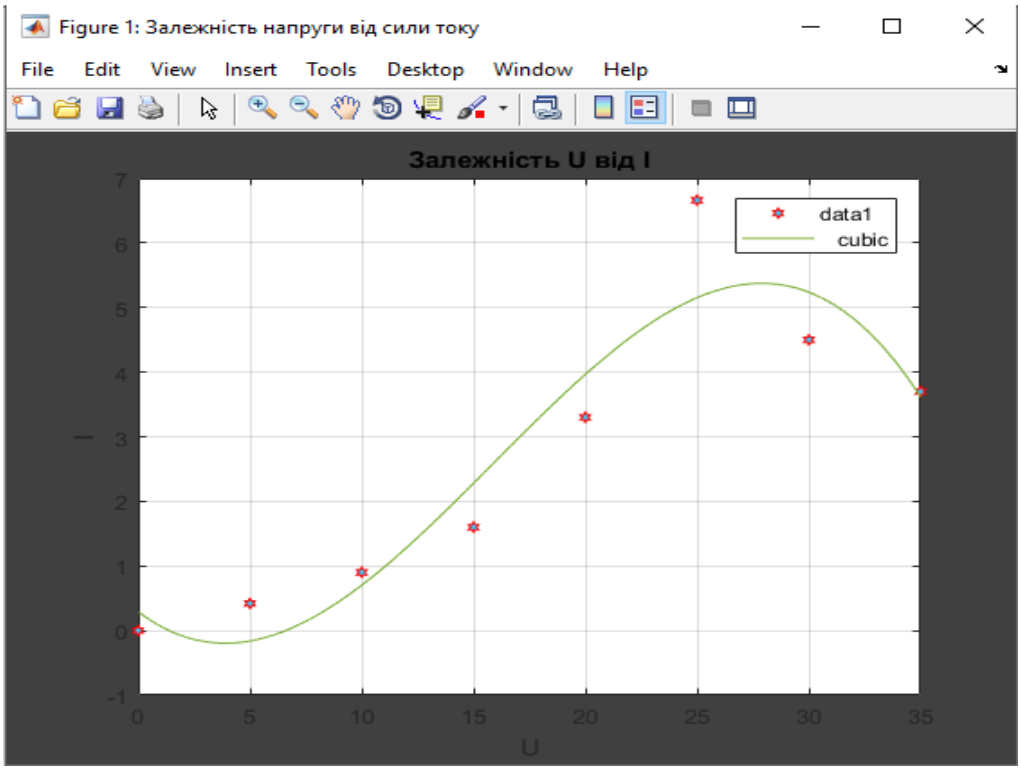


Рис.3.4. Апроксимація кубічними сплайнами залежності напруги від сили току

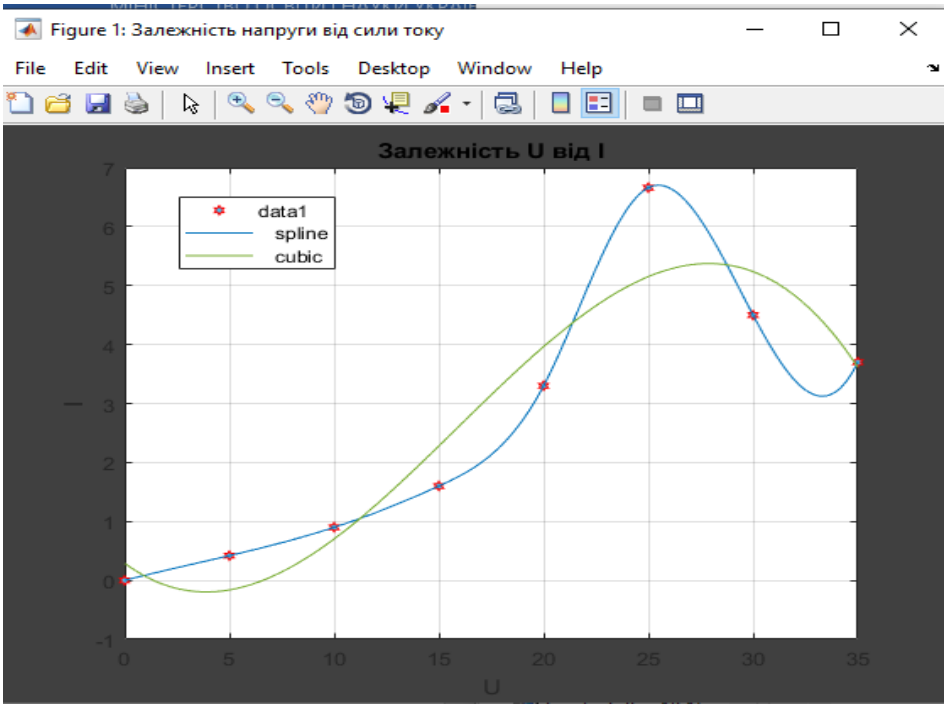


Рис.3.5. Різниця між апроксимацією та інтерполяцією. Синя суцільна лінія – це сплайн-інтерполяція поліномами третього ступеня. Зелена суцільна лінія – це кубічна сплайн-апроксимація.

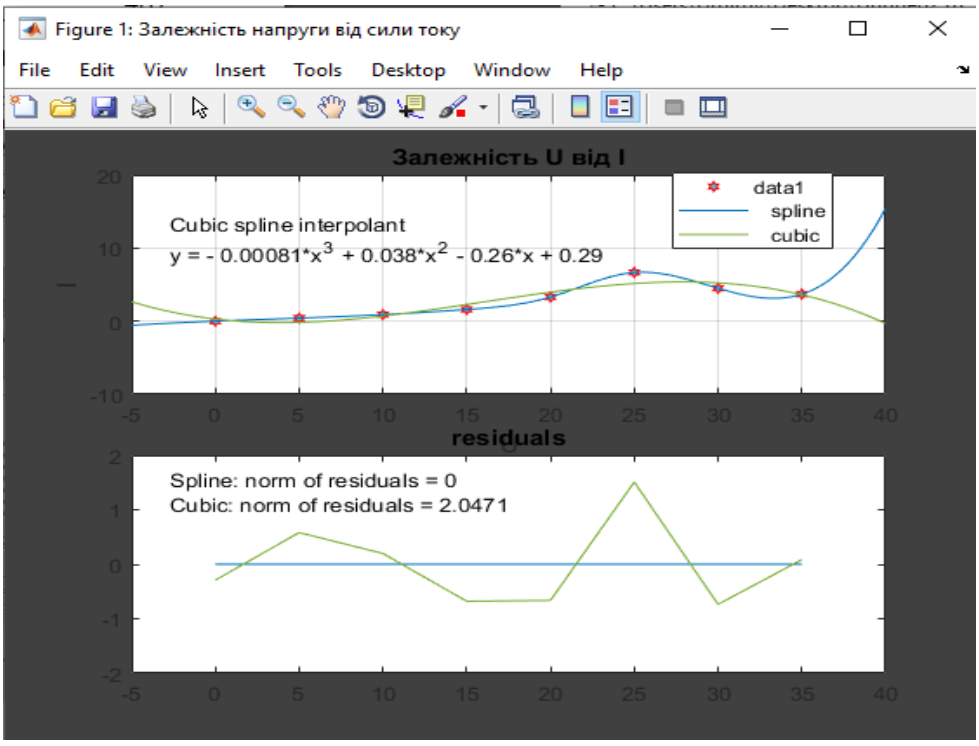


Рис3.6. Оцінка похибки апроксимації та інтерполяції за допомогою кубічних сплайнів відрізками ліній.

Підключивши команду Data Statistics ми отримаємо ряд статистичних параметрів для даних, які розташовані по осям x та y (див. Рис.3.7).

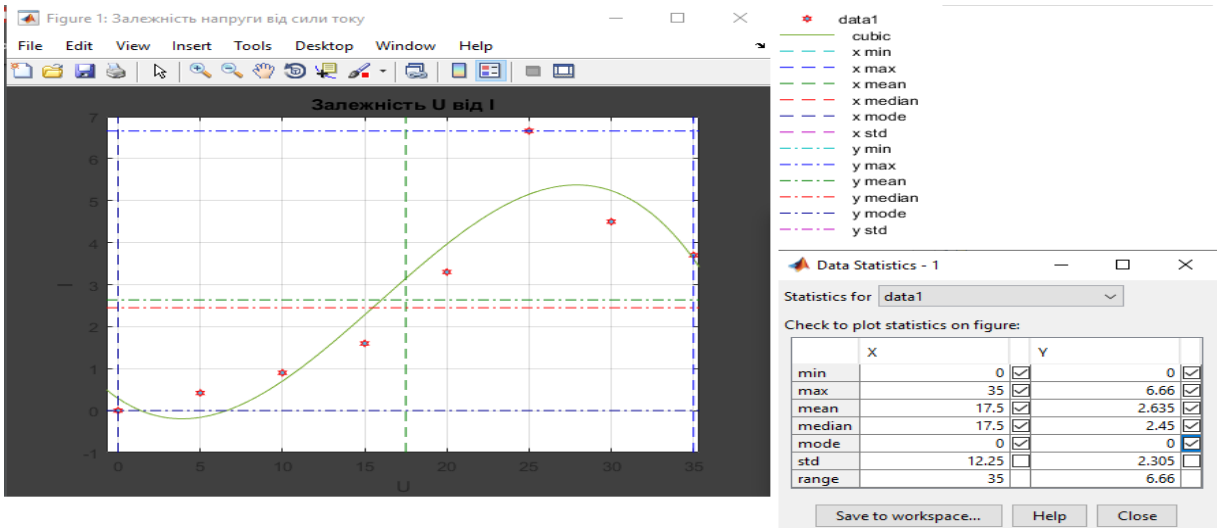


Рис.3.7. Статистичні дані про графік.

В третій панелі під назвою Find Y = f(x) команди Basic Fitting для обраного підганяння кривої можливо віднайти значення Y по заданим значенням X. Відповідно, дані точки позначені на графіку функції позначкою ромба (див. Рис. 3.8.).

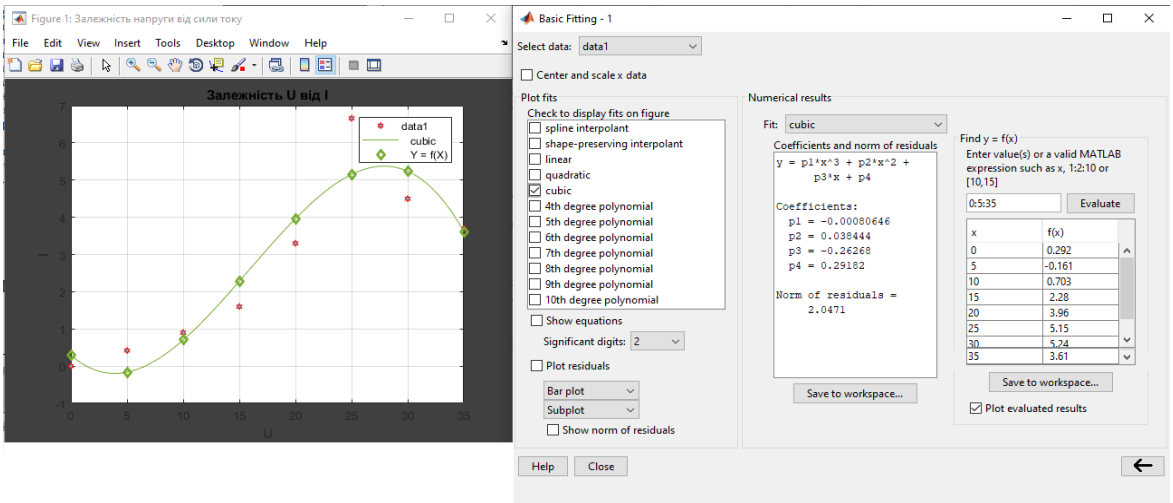


Рис.3.8. Результати наближення з заданням точок графіку кубічного наближення.

Наступним кроком ми задаємо дані залежностей потужності і температури від напруги (див. Рис.3.9.):

```
P = [0,2.1,9,24,66,166.5,135,129.5];
U = [0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35];
t = [12, 19, 26, 45, 80, 166, 196, 196];
figure ('Name', 'Залежність потужності від напруги',...
'Color', [0.4660 0.6740 0.1880]);
Plot (P, U, 'o', 'LineWidth', 0.5, 'MarkerSize', 5,...
'MarkerFaceColor', [0.6350 0.0780 0.1840]);
xlabel ('P');
ylabel ('U');
title ('Залежність P від U');
grid on;
grid minor;
ax = gca;
ax.GridColor = [1 0 0];
figure ('Name','Залежність температури від напруги',...
'Color', [0.3010 0.7450 0.9330]);
plot (t, U, 'o', 'LineWidth',0.5, 'MarkerSize', 5,...
'MarkerFaceColor', [0 0 1]);
xlabel ('t');
ylabel ('U');
title ('Залежність t від U');
grid on;
grid minor;
ax = gca;
ax.XColor = 'b';
ax.YColor = 'b';
ax.GridColor = [0 0 1];
```

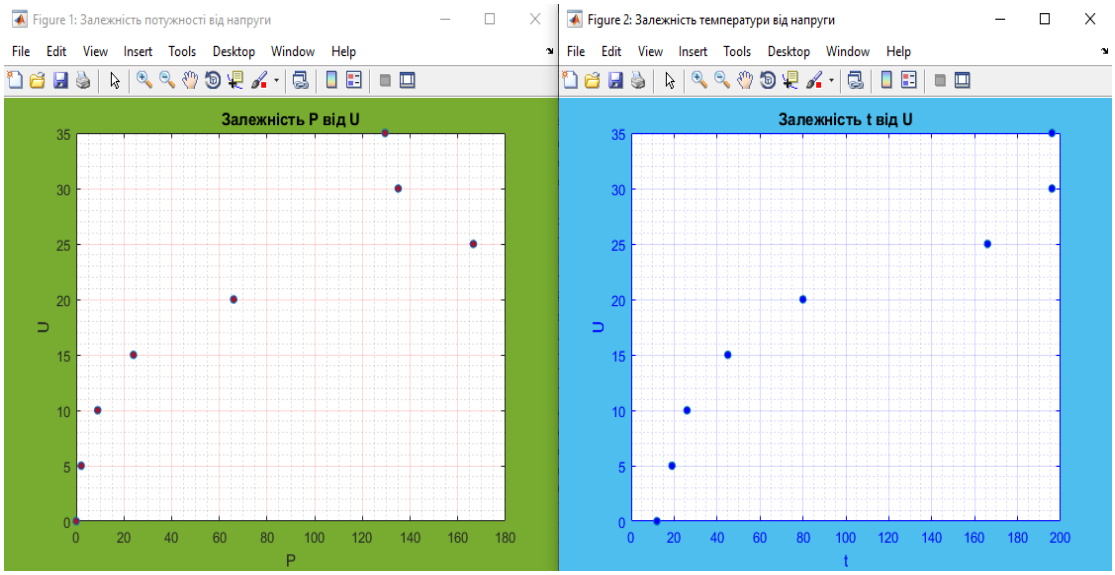


Рис. 3.9. Залежність даних потужності та температури від напруги.

Після чого, як і в попередньому прикладі апроксимуємо наші дані за допомогою кубічних сплайнів (див. Рис.3.10).

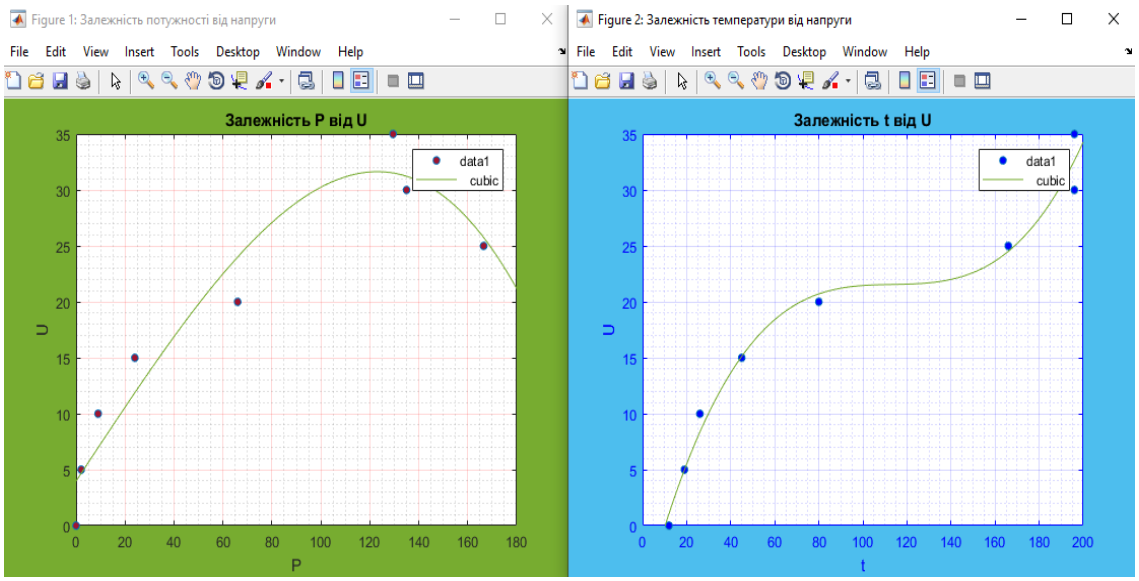


Рис. 3.10. Апроксимація даних залежностей P від U та t від U за допомогою кубічних сплайнів.

І відразу знаходимо коефіцієнти і самі рівняння кривих побудованих кубічними сплайнами, для залежності потужності від напруги:

$$c_0 = -7.7977 \cdot 10^{-6}, c_1 = 9.4764 \cdot 10^{-5}, c_2 = 0.3311, c_3 = 3.9837$$

$$y(x) = (-7.8 \cdot 10^{-6}) \cdot x^3 + (9.48 \cdot 10^{-5}) \cdot x^2 + 0.331 \cdot x + 3.98$$

та для залежності часу від напруги:

$$c_0 = 1.9213 \cdot 10^{-5}, c_1 = -0.0065441, c_2 = 0.74658, c_3 = -6.974$$

$$y(x) = (1.9 \cdot 10^{-5}) \cdot x^3 - 0.0065 \cdot x^2 + 0.75 \cdot x - 7$$

Далі також наведемо різницю між кубічною сплайн апроксимацією та інтерполяцією кубічними сплайнами (див. Рис. 3.11), де покажемо оцінку похибки двох графіків, де для P від U норма залишків при кубічній сплайн апроксимації рівняється 8.0739, а при інтерполяції кубічними сплайнами 0 і в аналогічному порядку для t від U ці значення рівняються 4.1421 та 0.

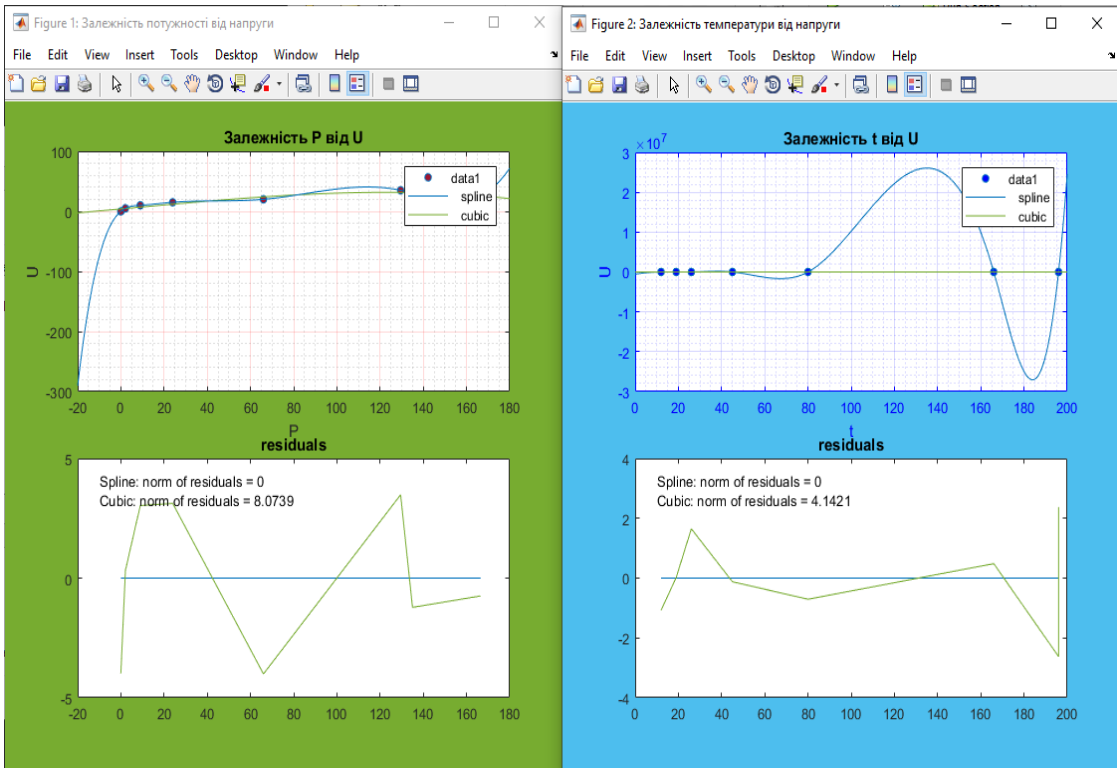


Рис. 3.11. Оцінка похибки апроксимації та інтерполяції за допомогою кубічних сплайнів відрізками ліній для залежностей потужності від напруги та часу від напруги відповідно.

3.3. Обробка даних за допомогою функції програми Scilab

Інший спосіб для обробки експериментальних даних за допомогою сплайн-апроксимації в програмі Scilab виконується за допомогою функції inerp1 в такому вигляді:

$$yy = interp1(x, y, xx, method);$$

де параметром method в нашому випадку виступає наступне значення $'spline'$, що є кубічним сплайном для апроксимації гладких даних. При використанні даного методу друга і перша похідні будуть безперервні у вузлових точках, а у внутрішніх, які є сусідами кінцевих, буде неперервною і третя.

Наведемо реалізацію нашого завдання і візуалізацію результатів за допомогою функції inerp1:

- Для апроксимації сплайнами залежності напруги від сили току (див. Рис. 3.12)

```
x=[0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35];
y=[0, 0.42,0.9,1.6,3.3,6.66,4.5,3.7];
figure('Name','Залежність напруги від сили току','Color',[0.3010 0.7450 0.9330])
axes('NextPlot', 'Add');
plot(x,y,'o', 'Color','r','LineWidth', 2, 'MarkerSize', 3);
xlabel ('U'); ylabel ('I');
n=length(x);
xi=[x(1):0.02:x(length(x))];
yis=interp1(x,y,xi, 'spline');
plot(xi,yis,'-','LineWidth', 2);
legend('функція','spline', 'Location', 'Best');
```

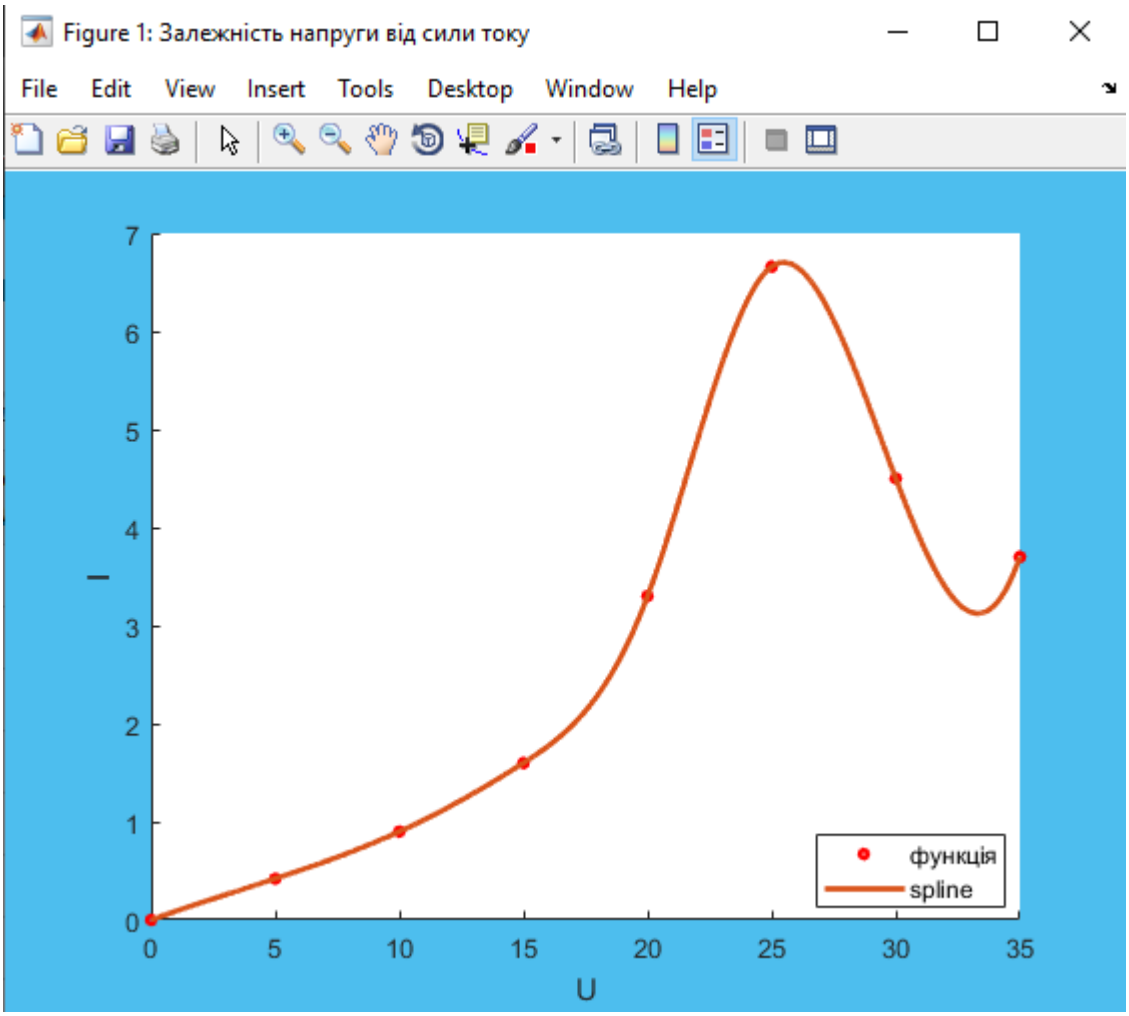


Рис. 3.12. Апроксимація залежності напруги від сили току

- Для апроксимації спланами залежності часу від напруги (див. Рис.3.13)

```
y=[12, 19, 26, 45, 80, 166, 196, 196.000001];
x=[0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35];
figure('Name','Залежність часу від напруги','Color',[0.3010 0.7450 0.9330])
axes('NextPlot', 'Add');
plot(x,y,'o', 'Color','r','LineWidth', 2, 'MarkerSize', 3);
xlabel ('U'); ylabel ('t');
n=length(x);
xi=[x(1):0.02:x(length(x))];
yis=interp1(x,y,xi, 'spline');
plot(xi,yis,'-','LineWidth', 2);
```

```
legend('функція','spline', 'Location', 'Best');
```

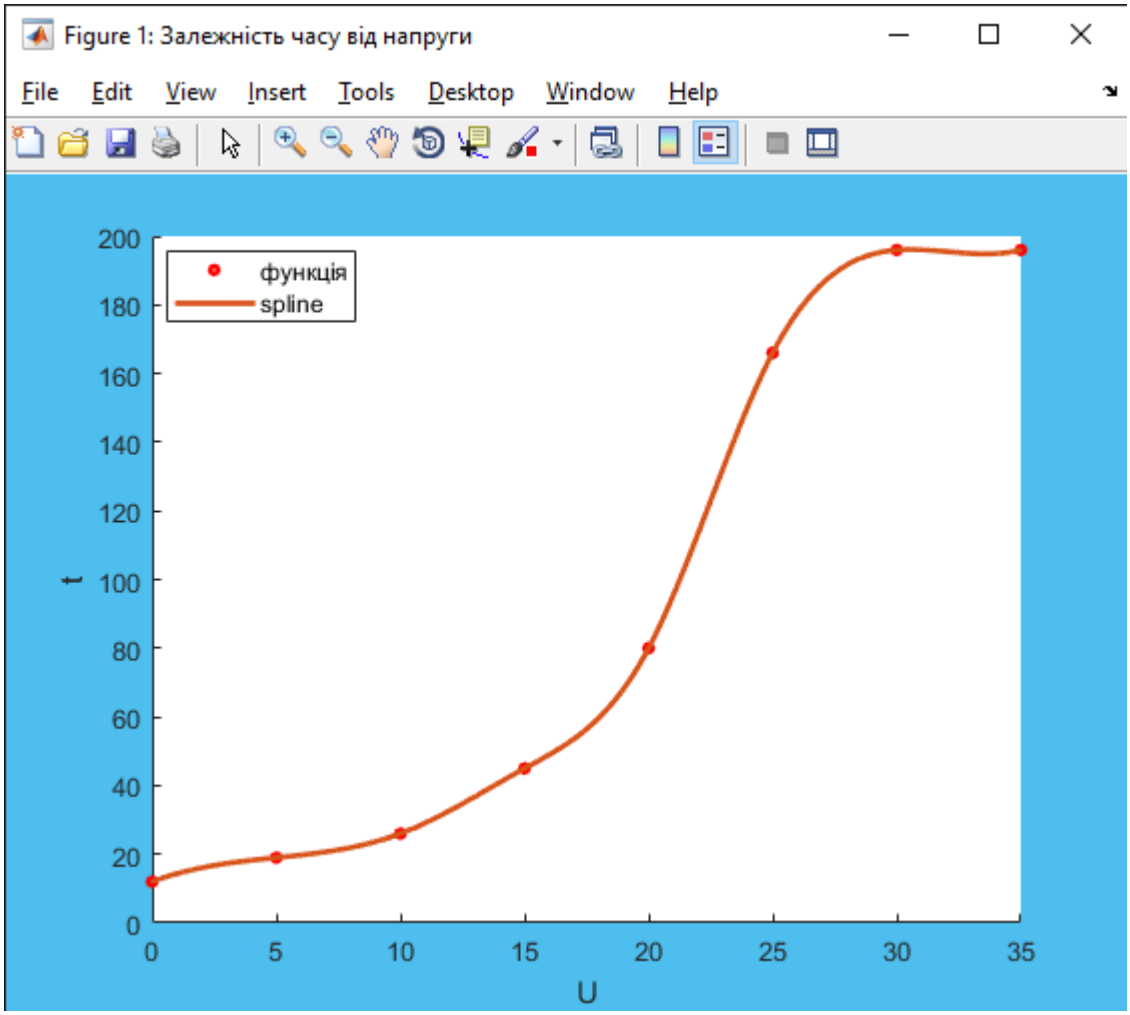


Рис. 3.13. Апроксимація залежності часу від напруги

- Для апроксимації сплайнами залежності потужності від напруги (див. Рис.3.14)

```
y=[0,2.1,9,24,66,166.5,135,129.5];
x=[0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35];
figure('Name','Залежність потужності від напруги','Color',[0.3010 0.7450 0.9330])
axes('NextPlot', 'Add');
plot(x,y,'o', 'Color','r','LineWidth', 2, 'MarkerSize', 3);
xlabel ('U'); ylabel ('P');
n=length(x);
```

```
xi=[x(1):0.02:x(length(x))];
yis=interp1(x,y,xi, 'spline');
plot(xi,yis,'-','LineWidth', 2);
legend('функція','spline', 'Location', 'Best');
```

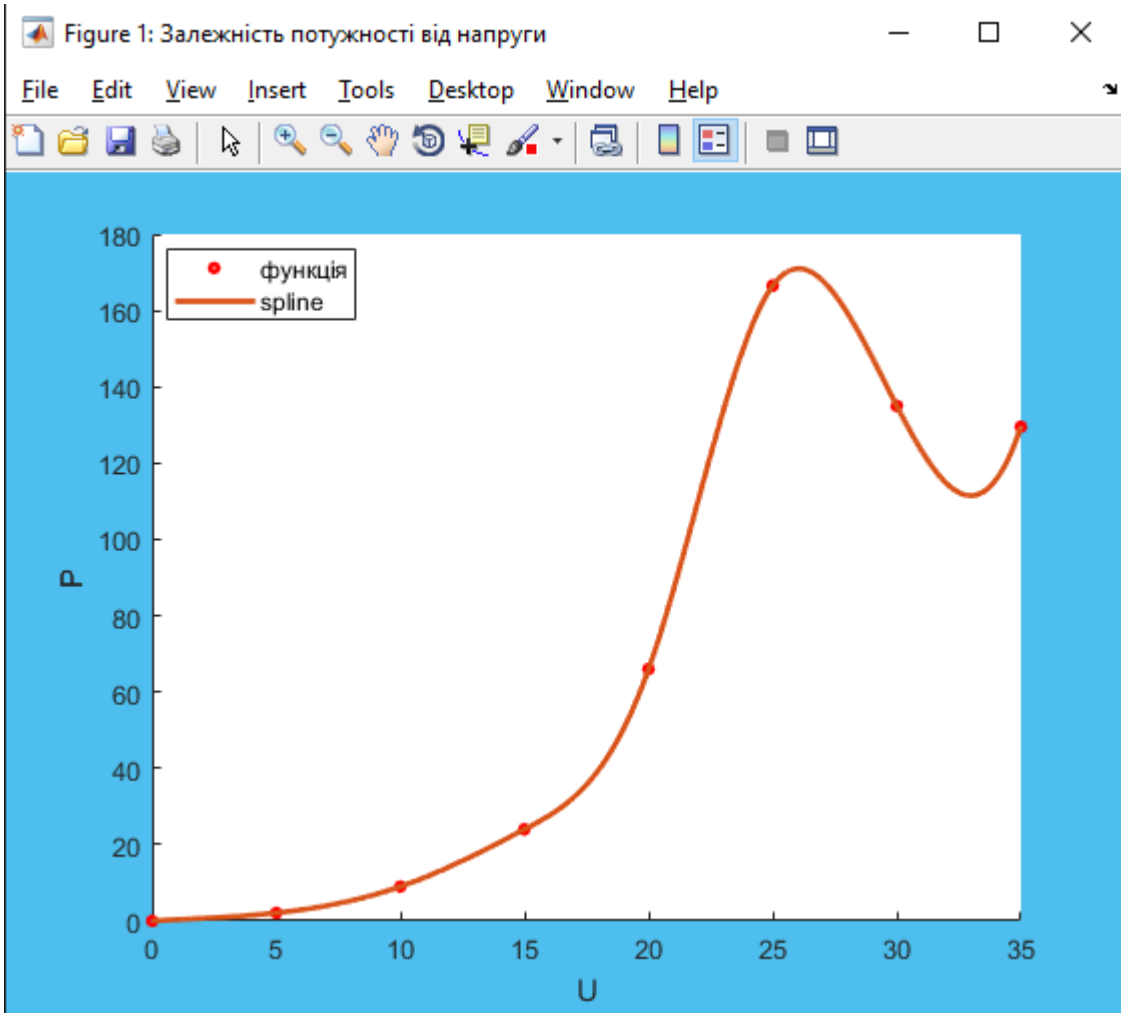


Рис. 3.14. Апроксимація залежності потужності від напруги

ВИСНОВКИ

У ході реалізації дипломної роботи та проведенні експерименту для знаходження табличних даних і апроксимації їх сплайнами, хотілося б зазначити, що РТС елементи є температурно залежними компонентами, опір яких різко зростає протягом декількох рядів стрибків за певних температур, завдяки методу апроксимації сплайнами, ми можемо добуди за прикладом однієї величини, будь-які інші з мінімальною або взагалі відсутньою похибкою у значенні іншої величини, і це ми змогли візуалізувати завдяки системі Scilab, яка використовувалась в даній роботі. Ми також змогли знайти рішення наступних завдань:

- провели огляд та аналітику літератури, теорію та методи візуалізації апроксимуючих сплайнів;
- реалізували інтерполяцію сплайнами в системі SciLab;
- протестували і довели актуальність апроксимації сплайнами на прикладі проведеного експерименту з нагрівним елементом.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1.В.С. Асламова, И.В. Васильев, О.А. Засухина Оптимизация технологических процессов – Ангарск, АГТА, 2005г., 104 с.

2.Б.П. Довгий, А.В. Ловейкін, Є.С. Вакал, Ю.Є. Вакал. Сплайн-функції та їх застосування / – К.:Видавницвто-поліграфічний центр «Київський університет», 2016. – 117 с.

3.К.Де Бор Практическое руководство по сплайнам. Пер. С англ. – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.

4.Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

5.Е.Р. Алексеев, О.В. Чеснокова, Е.А. Рудченко. Scilab: Решение инженерных и математических задач / – М.: ALT Linux ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 260с. : ил. : 8 с. цв. вклейки. – (Библиотека ALT LINUX). ISBN 978-5-94774-890-1.

6.Бердышев В.И., Петрак Л.В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 1999.

7.Інтернет ресурс https://www.scilab.org.

8.В.Г. Маценко. Математичне моделювання: навчальний посібник / – Чернівці: Чернівецький національний університет, 2014. – 519 с. ISBN 978-966-423-294-1.

9.І.В. Шелевицький, М.О. Шутко, О.О. Колганова Г63 Сплайни в цифровій обробці даних і сигналів. 2007р. – 232 с., іл. ISBN 078-966-2915-86-0.

10.И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, С.В. Рыков, Е.Д. Скобов. Методы оптимизации в примерах в пакете MatchCad 15. Ч. I: Учеб. Пособие / – СПб.:НИУ ИТМО, ИХиБТ, 2014. – 166 с.

11.Верюжский Ю.В., Голышев А.Б., Колчунов Вл.И., Кюева Н.В., Лисицин Б.М., Машков И.Л., Яковенко И.А. Справочное пособие по строительной механике. В двух томах. Том II: Учебное пособие. – М.: Издательство АСВ, 2014 – 432 с.

12.Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

13.Квасов Б.И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 306 с. – ISBN 5-9221-0733-X.

14.Половко А.М., Бутусов П.Н. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 320с.: ил. ISBN 5-94157-493-2.

15.Л.В. Крилик, І.В. Богач, М.О. Прокопова. Обчилювальна математика. Інтерполяція та апроксимація табличних даних: навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2013. – 111 с.

ДОДАТОК А

Алгоритм реалізації кубічної сплайн-інтерполяції

