МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
ФІЗИКО-ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр

«Математичне моделювання електромагнітних полів в регулярних хвилеводах з перерізом у вигляді хреста та сніжинки Коха методом R-функцій»

Виконав: студент 2 курсу, групи НФ-63
Ярмак К. В.
спеціальність:
105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Прикладна фізика
енергетичних систем
Керівник: проф. Максименко-Шейко К. В.

Рецензент:

Харків – 2018 рік

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Факультет фізико-енергетичний

Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магістр

Спеціальність 105 прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ проф.Немченко К.Е.

підпис

“____” _____20___року

З А В Д А Н Н Я
НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ

Ярмак Кирило Валерійович

1. Тема роботи «Математичне моделювання електромагнітних хвиль у регулярних хвилеводах з перерізом у вигляді хреста та сніжинки Коха методом R-функцій»

керівник роботи проф. Максименко-Шейко К.В.

затверджені наказом по університету від “ 24 ” жовтня 2018 року № 0210-05/1991

2. Строк подання студентом роботи 30 листопада 2018 року

3. Перелік питань, які необхідно вирішити

Розробити алгоритм моделювання електромагнітних полів у хвилеводах, провести дослідження електромагнітних хвиль ТЕ- та ТН- типів у хвилеводах

різних конфігурацій, провести порівняння методів побудови рівнянь границь хвилеводів.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми, узгодження, закріплення за кафедрою
2	Робота над літературою та іншими джерелами
3	Затвердження теми на кафедрі
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6	Написання третього розділу
7	Завершення написання дипломної роботи(висновки і література)
8	Подача науковому керівнику, доробка зауважень
9	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
10	Попередній захист на кафедрі
11	Захист

5. Дата видачі завдання 12 вересня 2018 року

Студент _____ **Ярмак К.В.**

підпис

Керівник роботи _____ **Максименко-Шейко К.В.**

підпис

РЕФЕРАТ

Магістерська робота виконана студентом Ярмаком Кирилом Валерійовичем на тему: «Математичне моделювання електромагнітних полів у регулярних хвилеводах з перерізом у вигляді хреста та сніжинки Коха методом R-функцій».

Дипломна робота представлена на 93 сторінках, складається з вступу, 3 розділів та висновків, містить 26 малюнків, 2 таблиці, 1 додаток, список використаних джерел, 36 джерел.

Об'єктом дослідження дипломної роботи є електромагнітні хвилі ТЕ - та ТН - типів в регулярних хвилеводах з поперечним перерізом у вигляді фрактала.

Предметом дипломної роботи є створення програмних засобів для вирішення задач Діріхле та Неймана в хвилеводах з заданим поперечним перерізом.

Мета роботи полягає в знаходженні власних значень для досліджуваних хвиль шляхом вирішення задач Діріхле та Неймана.

В роботі досліджені електромагнітні хвилі ТЕ- і ТН- типів, створені програмні засоби для вирішення задач Діріхле та Неймана в хвилеводах з фрактальним перетином і отримані власні значення та власні функції для досліджуваних видів хвиль. Продемонстровані переваги методу R-функцій у вирішенні завдань подібного

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ХВИЛЕВОД, ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВІЛІ, ВЛАСНІ ЧИСЛА, ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ, ЗАДАЧА НЕЙМАНА, ПОПЕРЕЧНИЙ ПЕРЕРІЗ, МЕТОД РІТЦА, R-ФУНКЦІЇ, БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ, МНОЖИНА, ФРАКТАЛИ, ХАУСДОРФОВА РОЗМІРНІСТЬ, СНІЖИНКА КОХА, ХРЕСТ КОХА.

ABSTRACT

Master's work performed by Yarmak Kirill Valeriyovich on the topic: «Mathematical modeling of electromagnetic fields in regular waveguides in the form of a Koch cross and Koch snowflake using the R-function method».

The diploma work is presented on 93 pages, consists of an introduction, 3 chapters and a conclusion, includes 26 drawings, 2 tables, 1 appendix, list of references, 36 sources.

The object of the research of the diploma work are the electromagnetic waves TE - and TH - types in regular waveguides with a cross section in the form of a fractal.

The subject of the diploma work is the creation of software for solving the Dirichlet and Neumann problems in waveguides with a given cross section.

The aim of the work is to find the eigenvalues for the waves under study by solving the Dirichlet and Neumann problems.

In this work, electromagnetic waves of TE- and TH-types are investigated, software tools are created for solving the Dirichlet and Neumann problems in waveguides with a fractal section, and eigenvalues and eigenfunctions are obtained for the studied wave types. The advantages of the R-functions method in solving problems of this kind are demonstrated.

KEYWORDS: WAVEGUIDE, ELECTROMAGNETIC WAVES, EIGENVALUES, DIRICHLET PROBLEM, NEUMANN PROBLEM, CROSS-SECTION, RITZ METHOD, R-FUNCTIONS, BOOLEAN FUNCTION, PLURAL, FRACTALS, HAUSDORFF DIMENSION, KOCH SNOWFLAKE, KOCH CROSS.

РЕФЕРАТ

Магистерская работа выполнена студентом Ярмаком Кириллом Валерьевичем на тему: «Математическое моделирование электромагнитных полей в регулярных волноводах в виде креста и снежинки Коха методом R-функций».

Дипломная работа представлена на 93 страницах, состоит из введения, 3 глав и заключения, включает 26 рисунков, 2 таблицы, 1 приложение, список использованных источников, 36 источников.

Объектом исследования дипломной работы являются электромагнитные волны ТЕ - та ТН - типов в регулярных волноводах с поперечным сечением в виде фрактала.

Предметом дипломной работы является создание программных средств для решения задач Дирихле и Неймана в волноводах с заданным поперечным сечением.

Цель работы заключается в нахождении собственных значений для исследуемых волн путем решения задач Дирихле и Неймана.

В работе исследованы электромагнитные волны ТЕ- и ТН- типов, созданы программные средства для решения задач Дирихле и Неймана в волноводах с фрактальным сечением и получены собственные значения и собственные функции для исследуемых видов волн. Продемонстрированы преимущества метода R-функций в решении задач подобного рода.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ВОЛНОВОД, ЕЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ, СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА, ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ, ЗАДАЧА НЕЙМАНА, ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ, МЕТОД РИТЦА, R-ФУНКЦИИ, БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ, МНОЖЕСТВО, ФРАКТАЛЫ, ХАУСДОРФОВА РАЗМЕРНОСТЬ, СНЕЖИНКА КОХА, КРЕСТ КОХА.

ЗМІСТ

ВСТУП 8
1 ІДЕАЛЬНІ ХВИЛЕВОДІ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ 10
1.1. Хвилеводи. Загальна інформація 10
1.2. Перші фрактали та Хаусдорфова розмірність 14
1.3. Рівняння Максвелла 15
1.4. Ідеальні хвилеводи та їх характеристики 21
2 R-ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ 26
2.1. Булеві функції та їх геометрична інтерпретація 26
2.2. Описове і формальне визначення R-функцій 31
2.3. Основні досить повні системи R-функцій, їх логічні, алгебраїчних і диференціальних властивості 34
2.4. Нормалізовані рівняння геометричних об'єктів 40
2.5. Побудова симетричних функцій для симетричних геометричних об'єктів 46
2.6. Поняття структури розв’язку. Структури розв'язків основних типів крайових задач для рівнянь другого порядку 51
2.7. Методи розв'язання крайових задач 57
3 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ У РЕГУЛЯРНИХ ХВИЛЕВОДАХ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ 63
3.1. Знаходження власних значень у хвилеводі для різних типів хвиль у системі ПОЛЕ 63
3.2. Процес Рітца в проблемі власних чисел 63
3.3. Побудова рівнянь границь сніжинки та хреста Коха 70
3.4. Знаходження власних значень для хвиль ТН – типу 72
3.5. Знаходження власних значень для хвиль ТЕ – типу 78
ВИСНОВКИ 85
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 86
ДОДАТОК А 89

ВСТУП

Дослідження хвилеводів розпочалося у першій половині XX сторіччя. З постійним розвитком та удосконаленням засобів радіозв'язку, радіолокації, радіопеленгації неодмінно збільшувались робочі частоти, а разом з ними збільшувались втрати на випромінення. Тому, актуальності набула проблема мінімізації цих втрат при передачі електромагнітних хвиль. Вирішенням цієї проблеми стало створення закритих ліній передач, які зосереджують коливання у обмеженому просторі. Ці лінії представляють собою однозв'язні або багатозв'язні хвилеводи різноманітних поперечних перерізів.

Хвилеводи можна розділити на два типи: екрановані та неекрановані. Екрановані хвилеводи мають стінки, які добре відбивають хвилі, що розповсюджуються, завдяки чому потік потужності хвилі зосереджений всередині хвилеводу. Металеві хвилеводи і коаксіальні кабелі з наскрізними отворами-щілинами на екрані служать для побудови щілинних антен і випромінюючих кабелів.

У відкритих (неекранованих) хвилеводах локалізація поля зазвичай обумовлена явищем повного внутрішнього відбиття від меж розділу двох середовищ (в діелектричних хвилеводах і оптоволоконних світловодах), або від областей з плавно мінливими параметрами середовища (наприклад, іоносферний хвилевід, атмосферний хвилевід, підводний звуковий канал, градієнтне оптоволокно). Відкриті планарні хвилеводи оптичного діапазону використовуються для побудови різних інтегральних оптоелектронних пристроїв.

Серед всього різноманіття типів поперечних перерізів, найбільш цікавими з точки зору теорії R-функцій є перерізи у вигляді фракталів. Фрактали відомі вже майже століття, добре вивчені і мають численні застосування в житті. В основі цього явища лежить дуже проста ідея: нескінченна по красі і різноманітності множина фігур, які можна отримати з відносно простих конструкцій за допомогою всього двох операцій – копіювання і масштабування. Розрізняють динамічні та геометричні фрактали.

Фрактали використовуються в теорії інформації при розробці методів стиснення даних (наприклад, при стисненні графічних даних у більшості випадків застосовується властивість самоподібності фракталів – для запам'ятовування невеликого фрагмента малюнка і перетворення, за допомогою яких можна отримати інші частини, потрібно набагато менше пам'яті, ніж для зберігання всього файлу). В умовах сучасної тенденції до зростання обсягу різного роду даних застосування фрактального стиснення становить інтерес. Проте, теорія фракталів може мати і інші науково-технічні застосування. Вже зараз фрактальні структури можна спостерігати в різних областях електротехніки і радіотехніки.

Фрактальні антени – відносно новий клас електрично малих антен (ЕМА), що принципово відрізняються своєю геометрією від відомих рішень. По суті, традиційна еволюція антен базувалась на евклідовій геометрії, що оперує об'єктами цілочисленної розмірності (лінія, коло, еліпс, параболоїд і т.п.). Моделювання та експерименти показують, шо фрактальні антени дозволяють отримати практично той самий, як і у звичайних антен, коефіцієнт посилення. Однак габарити фрактальних антен набагато менше, відповідно і розмір радіоелектронного виробу може бути зменшений, а це важливо для мобільних пристроїв. Вважається, що вивчення можливостей застосування фракталів в приймально-передавальних пристроях почалося в 80-х роках XX століття.

На даний момент існує велика кількість робіт, пов’язаних із відшуканням власних чисел та власних функцій хвилеводів. Розроблено методи моделювання власних магнітних і електричних типів хвиль у електромагнітних хвилеводах. Проте ці методи являються важкими для розуміння та використання. В цих методах використовується складний математичний апарат. Тому метою даної дипломної роботи являється демонстрація переваг методу R-функцій для математичного моделювання електромагнітних полів та для розв’язання задачі пошуку власних чисел та власних функцій хвилеводів з фрактальним типом поперечного перерізу.

1 ІДЕАЛЬНІ ХВИЛЕВОДИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.1. Хвилеводи. Загальна інформація

1.1.1. Історична довідка

Хвилеводом прийнято називати безперервну систему матеріальних поверхонь, що забезпечує поширення хвиль в заданому напрямку.

Це визначення охоплює сукупність різноманітних систем, що забезпечують спрямоване поширення електромагнітних хвиль. Деякі найбільш поширені хвилеводи зображені на рис.1.1. Можна виділити ряд класів хвилеводів, які відрізняються специфічними особливостями поширення хвиль. До їх числа можна віднести:

1) Багатодротові і коаксіальні лінії.

2) Порожнисті хвилеводи з металевими стінками.

3) Хвилеводи з діелектричними і металевими сповільнюючими елементами.

4) Різного роду планарні системи (мікрополоскові, щілинні, компланарні).

5) Діелектричні хвилеводи, в тому числі оптичні волоконні світловоди, планарні і градієнтні хвилеводи інтегральної оптики.

Поява хвилеводів виходить з того факту, що передача електромагнітних хвиль по дротам стає непридатною, коли довжина хвилі порівняна з відстанню між дротами. У подібному випадку дроти просто працюють як антена і випромінюють електромагнітну енергію. Рішення цієї проблеми полягає у використанні металевої труби. Електромагнітна хвиля не має можливості проникнути крізь досить товсту металеву стінку хвилеводу. Однак виникає проблема того, що хвиля може відбиватися на різких поворотах труби або в місцях зміни її розмірів. Тим не менш, вдається сконструювати хвилевід таким чином, щоб забезпечити ефективну передачу електромагнітної хвилі. Хвилеводи з'явилися відразу ж після винаходу радіолокації як один з необхідних елементів радіолокаційної станції.

Поряд з електромагнітними хвилеводами існують також акустичні хвилеводи. Наочним прикладом служать переговорні труби, які

застосовуються на сучасних судах, дублюючи електронні переговорні пристрої при їх відмові.

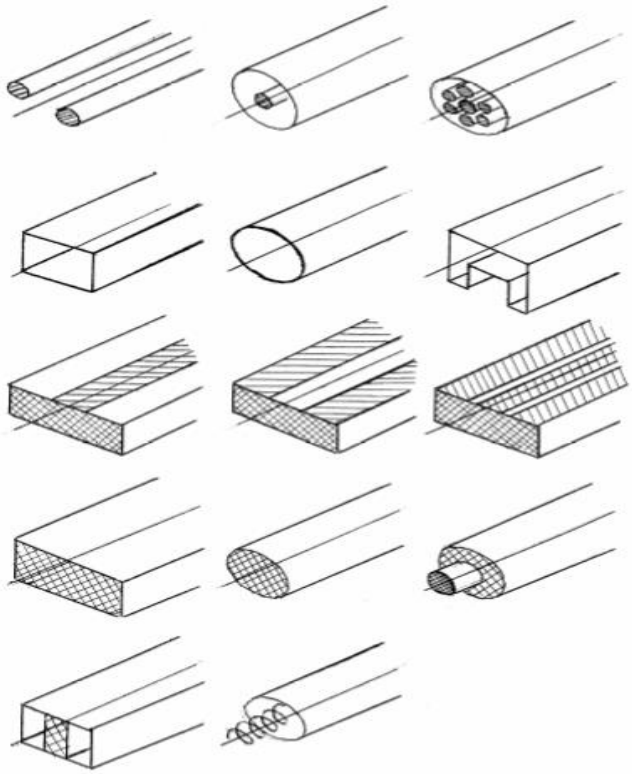


Рис.1.1. Хвилеводи різних типів: 1 – дводротова лінія, 2 – коаксіальна лінія, 3 – багатодротовий кабель, 4 – полий прямокутний хвилевід, 5 – полий круглий хвилевід, 6 – П-подібний хвилевід, 7 – мікрополоскова лінія, 8 – щілинна лінія, 9 – компланарний хвилевід, 10 – плоский діелектричний хвилевід, 11 – круглий діелектричний хвилевід, 12 – двошаровий волоконний хвилевід, 13 – прямокутний хвилевід з діелектричною вставкою, 14 – круглий хвилевід з металевою уповільнюючою спіраллю.

Вперше конструкція для передачі хвиль була запропонована англійським фізиком Джозефом Джоном Томсоном у 1893 році, а першим її принцип експериментально перевірив англійський фізик і винахідник Олівер Лодж в 1894 році. Першим математичний аналіз ходу електромагнітних хвиль в металевому циліндрі виконав британський фізик і механік, лорд Релей у 1897 році [1].

У процесі ретельного вивчення звукових хвиль (поверхневих акустичних хвиль), Релей опублікував повний математичний аналіз принципу їх поширення у своєму фундаментальному дослідженні «Теорія звуку» [2].

Надалі, у 20-ті роки двадцятого століття почалося вивчення діелектричних хвилеводів (в тому числі і оптичних волокон). Кілька вчених, серед яких найбільш відомими були британський фізик і механік Релей, німецький фізик-теоретик і математик Зоммерфельд, а також нідерландський фізик Дебай [3]. Фундаментальні дослідження привели до того, що в 1960-ті роки скловолокна стали привертати до себе особливу увагу у зв'язку з можливостями їх використання для передачі даних та забезпечення зв'язку.

1.1.2. Типи хвилеводів

Хвилеводи можна розділити на два типи: екрановані і неекрановані. Екрановані хвилеводи мають стінки, які добре відбивають хвилі, які розповсюджуються, завдяки чому потік потужності хвилі зосереджений всередині хвилеводу. Як правило, такі хвилеводи виконані у вигляді порожнистих або заповнених середовищем зі спеціально підібраними параметрами трубок. Поперечний переріз цих трубок має форму кола, еліпса, квадрата, що пов'язано з більшою конструктивною простотою, хоча для спеціальних цілей використовуються хвилеводи з іншими формами поперечного перерізу. Щоб хвиля по мірі поширення у хвилеводі не відбивалася в зворотному напрямку, хвилевід виконують регулярним: форма і розміри поперечного перерізу, а також фізичні властивості матеріалів повинні бути постійні уздовж довжини хвилеводу. Оскільки хвиля відбивається від стінок екранованого хвилеводу, то в поперечному напрямку виникає стояча хвиля з певним складом мод.

Для передачі електромагнітних хвиль використовуються металеві трубки, порожні або заповнені діелектриком. Також використовуються коаксіальні та багатожильні екрановані кабелі, які відносять до дротових ліній передачі. Термін «радіочастотний хвилевід» (з англ. radiofrequency guide, позначення RG) підкреслює призначення та відмінність від дротових ліній

передачі постійного струму і струму промислової частоти, а також від низькочастотних комунікаційних кабелів. Металеві хвилеводи і коаксіальні кабелі з наскрізними отворами-щілинами на екрані служать для побудови щілинних антен і випромінюючих кабелів.

У відкритих (неекранованих) хвилеводах локалізація поля зазвичай обумовлена явищем повного внутрішнього відбиття від межі розділу двох середовищ (в діелектричних хвилеводах і оптоволоконних світловодах), або від областей з плавно мінливими параметрами середовища (наприклад, іоносферний хвилевід, атмосферний хвилевід, підводний звуковий канал, градієнтне оптоволокно). Поле локалізується переважно всередині спеціально призначеної для цього області поперечного перерізу хвилеводу і швидко убуває за межами цієї області. Завдяки цьому хвиля каналізується у хвилеводі. Відкриті планарні хвилеводи оптичного діапазону використовуються для побудови різних інтегральних оптоелектронних пристроїв.

Акустичні відкриті хвилеводи служать основою пристроїв на поверхневих акустичних хвилях, у таких хвилеводах ультразвукова хвиля поширюється вздовж межі розділу середовищ з різними акустичними властивостями.

1.1.3. Деякі властивості хвилеводів

У хвилеводах, як в системах з розподіленими параметрами, можливе існування дискретного (при не дуже сильному поглинанні) набору (ансамблю) типів коливань (мод), кожен тип коливань поширюється зі своїми фазовими і груповими швидкостями. Всі моди мають дисперсію, тобто їх фазові швидкості залежать від частоти і відрізняються від групових швидкостей.

В екранованому хвилеводі фазові швидкості зазвичай перевищують швидкість поширення плоскої однорідної хвилі у заповненому середовищі (швидкість світла, швидкість звуку), ці хвилі називаються швидкими. При неповному екрануванні вони можуть просочуватися крізь стінки хвилеводу, перевипромінюючи в навколишній простір. Це так звані витікаючі хвилі. У

відкритих хвилеводах, як правило, поширюються повільні хвилі, амплітуди яких швидко зменшуються при віддаленні від направляючого каналу.

Кожна мода характеризується граничною частотою ω_k, так званою критичною частотою; мода може поширюватися і переносити вздовж хвилеводу потік енергії тільки на частотах ω, що перевищують ω_{kr}. Проте в деяких випадках (багатодротові лінії передачі, порожнисті акустичні хвилеводи) існують моди, для яких $\omega_{kr} = 0$, їх називають головними або квазістатичними.

1.2. Перші фрактали та Хаусдорфова розмірність

В даний час фрактали широко застосовуються в радіотехніці при проектуванні антенних пристроїв (крива Коха і килим Серпінського) і хвилеводів (сніжинка Коха), в комп'ютерній графіці і при стисненні зображень. У фізиці фрактали природним чином виникають при моделюванні нелінійних процесів, таких, як турбулентна течія рідини, складні процеси дифузії-адсорбції і т. п. Фрактали використовуються при моделюванні пористих матеріалів, наприклад, в нафтохімії. У біології вони застосовуються для моделювання популяцій і для опису систем внутрішніх органів (система кровоносних судин). Великий інтерес викликають завдання математичного моделювання фізико-механічних полів в об'єктах фрактальної природи.

Визначення фрактала, сформульоване Мандельбротом, звучить так: "фракталом називається структура, що складається з частин, які в якомусь сенсі подібні цілому" [22]. Найбільш наочними є геометричні фрактали [23,24]. Саме з них і починалася історія фракталів. Перші ідеї фрактальної геометрії виникли в 19 столітті, коли Кантор за допомогою простої рекурсивної процедури перетворив лінію в набір незв'язаних точок (так званий пил Кантора або множина Кантора). Він брав відрізок, видаляв центральну третину, а після цього повторював те ж саме з відрізками. Пеано намалював особливий вид лінії. На першому кроці він брав відрізок і замінював його на 9 відрізків, довжиною в 3 рази меншою, ніж довжина вихідного відрізка. Потім

він робив те ж саме з кожним відрізком утвореної лінії. Крива Пеано і пил Кантора виходили за межі звичайних геометричних об'єктів. Вони не мали чіткої розмірності. Пил Кантора будувалася начебто на підставі одновимірної прямої, але утвореної з точок (розмірність 0). А крива Пеано будувалася на підставі одновимірної лінії, а в результаті утворювала площину. Для самоподібних множин розмірність Хаусдорфа вираховується наступним чином: якщо множина розбивається на n частин, подібних початковій множині з коефіцієнтами $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$, то його розмірність S є рішенням рівняння $r_1^S + r_2^S + r_3^S + ... + r_n^S = 1$. Наприклад, розмірність Хаусдорфа множини Кантора дорівнює $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ (розбивається на дві частини, коефіцієнт подібності 1/3), а розмірність Хаусдорфа трикутника Серпинського — $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ (розбивається на 3 частини, коефіцієнт подібності 1/2).

У всіх детермінованих фракталах самоподібність проявляється на всіх рівнях. Це означає, що незалежно від того, наскільки здійснюється наближення до фракталу, видно все той же візерунок. Детерміновані фрактали утворюються в процесі ітерації, яка застосовує основний малюнок до ініціатора, після чого застосовує його до результату і так далі. Зазвичай ітерують детерміновані фрактали 5-7 разів, щоб отримати чітке зображення.

Однак В.Л.Рвачов в своїх роботах (наприклад, [8]), визначаючи до опису типи геометричних об'єктів, виключив з розгляду такі «геометричні монстри, як Канторова множина, килим Серпинського» та інші об'єкти фрактальної геометрії. В [19-21] зроблені спроби побудови окремих випадків рівнянь границь деяких фрактальних об'єктів. У даній роботі на основі нових конструктивних засобів теорії R-функцій [8, 17] розроблено методики і побудовані рівняння ряду об'єктів фрактальної геометрії.

1.3. Рівняння Максвелла

Теоретичне дослідження електромагнітних хвиль базується на добре відомих рівняннях Максвелла. В якості загальних посібників з теорії

електромагнітних хвиль в різних хвилеводах можна рекомендувати [4,5]. Тут обмежимося лише короткими нагадуваннями основних співвідношень.

Рівняння Максвелла пов'язують між собою чотири векторні величини, що характеризують електромагнітне поле матеріального середовища : напруженості електричного і магнітного поля, $\vec{E}$ і $\vec{H}$, і вектори електричної і магнітної індукції $\vec{D}$ і $\vec{B}$. В системі СГС рівняння Максвелла мають вигляд:

$$rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}\,, \qquad div\vec{D} = 4\pi\rho$$

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,, \qquad div\vec{B} = 0$$

В рівняння Максвелла також входять густина електричного заряду ρ і щільність електричного струму $\vec{j}$. З рівняннями Максвелла спільні такі загальні властивості електромагнітних процесів, як збереження заряду та збереження енергії. Закони збереження в диференціальній формі мають вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + div\vec{S} = 0.$$

В останньому рівнянні W - щільність електромагнітної енергії, а $\vec{S}$ - щільність її потоку (вектор Умова – Пойнтинга). Як відомо

$$W = \frac{(\vec{E},\vec{D}) + (\vec{H},\vec{B})}{8\pi}, \qquad \vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E},\vec{H}] \tag{1.1}$$

При розгляді хвиль у хвилеводах матеріальні середовища зазвичай можна вважати лінійними, ізотропними, однорідними і такими, що не мають дисипацію. Для таких середовищ матеріальні рівняння найбільш прості:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}\,, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

де електрична і магнітна проникності ε і μ - дійсні скалярні константи.

В лінійних середовищах завдяки принципу суперпозиції, будь-який сигнал можна розглядати як суму кінцевого чи нескінченного числа монохроматичних хвиль, що мають різні частоти і поширюються незалежно.

При дослідженні монохроматичних дійсних полів будемо користуватися комплексним записом у вигляді:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\left[\vec{E}(\vec{r})\exp(-i\omega t)+\vec{E}^{*}(\vec{r})\exp i\omega t\right] \qquad (1.2)$$

Аналогічне подання мають також місце для векторних полів $\vec{H}(\vec{r},t),\vec{D}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t)$. При цьому величини $\vec{E}(\vec{r}),\vec{H}(\vec{r}),\vec{D}(\vec{r}),\vec{B}(\vec{r})$ є вже не миттєвими значеннями полів, а комплексними амплітудами, причому як модуль, так і фаза комплексної амплітуди залежать від просторових координат. Не повинні викликати збентеження негативні значення амплітуд полів $\vec{E}(\vec{r})$ та ін. Це означає, що коливання в розглянутій точці відбуваються в протифазі щодо обраної (опорної) тимчасової залежності. Тут і надалі в якості основної експоненціальної залежності ми розглядаємо $\exp(-i\omega t)$.

При цьому у відсутності джерел (тобто, коли $\rho\equiv 0$, $\vec{j}\equiv 0$) рівняння Максвелла для комплексних амплітуд монохроматичного поля зводяться до вигляду

$$rot\vec{H}=-ik\varepsilon\vec{E}, \qquad div\vec{E}=0 \qquad (1.3)$$
$$rot\vec{E}=-ik\mu\vec{H}, \qquad div\vec{H}=0$$

де скалярну величину $k=\omega/c$ називають хвильовим числом. Нагадаємо, що хвильове число обернено пропорційне довжині хвилі у вакуумі λ_0: $k=2\pi/\lambda_0$.

Для монохроматичних полів представляють інтерес не миттєві значення густини енергії і вектору Умова – Пойнтинга (вони, як і раніше, відшукуються за формулами (1.1)), а значення $\langle W\rangle_t$ і $\langle\vec{S}\rangle_t$, усереднені по періоду коливань. З урахуванням (1.2) для них мають місце формули:

$$\langle W\rangle_t=\frac{1}{16\pi}(\varepsilon|\vec{E}|^2+\mu|\vec{H}|^2)$$

$$\langle\vec{S}\rangle_t=\frac{c}{16\pi}\{[\vec{E},\vec{H^*}]+[\vec{E^*},\vec{H}]\}=\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\vec{E},\vec{H^*}]$$

де ε і μ, згідно з домовленістю, дійсні величини.

При аналізі конкретних електродинамічних задач необхідне завдання початкових і граничних умов. Для гармонійних коливань задавати початкові умови не потрібно – в цьому випадку процеси є квазістаціонарними. Граничні умови – ось що визначає складність і різноманітність завдань про поширення хвиль у хвилеводах. Вибором відповідних систем координат можна домогтися серйозного спрощення граничних умов.

1.3.1. Рівняння Максвелла у криволінійних ортогональних координатах

Подання рівнянь Максвелла в криволінійних координатах корисно при розв'язанні крайових задач методом розділення змінних. Нагадаємо спочатку визначення векторних операцій в криволінійних ортогональних координатах [6,7]. Нехай координати точки $\vec{s}$ в просторі задані трійкою чисел x_1, x_2, x_3, а координати точки $(\vec{s}+\vec{ds})$ - трійкою $(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$. Для квадрата вектора малого $\vec{ds}$ зміщення маємо

$$(\vec{ds})^2 = h_1^2(dx_1)^2 + h_2^2(dx_2)^2 + h_3^2(dx_3)^2 . \qquad (1.4)$$

Ортогональність координатної системи проявляється в тому, що в (1.4) відсутні змішані члени, пропорційні $dx_i dx_j$ $(i \neq j)$. Параметри h_i називаються параметрами Ламе. Часто вживаються циліндрична та сферична системи координат, для яких маємо відповідно:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 \qquad (h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + (r\sin\vartheta)^2 d\varphi^2 \qquad (h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\vartheta)$$

Нагадаємо визначення операції дивергенції. Дивергенція векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$, заданого як функція точки $\vec{r}$ - це межа, до якої прагне відношення потоку вектора через замкнену поверхню , що охоплює дану точку, до об'єму, замкненого всередині цієї поверхні:

$$div\vec{A} = \lim_{V_S \to 0} \frac{1}{V_s} \int_s \vec{A}\vec{n}dS , \qquad (1.5)$$

де $\vec{n}$ - одиничний вектор зовнішній нормалі до поверхні. Розглянемо в якості об'єму інтегрування елементарний паралелепіпед (рис.1.3):

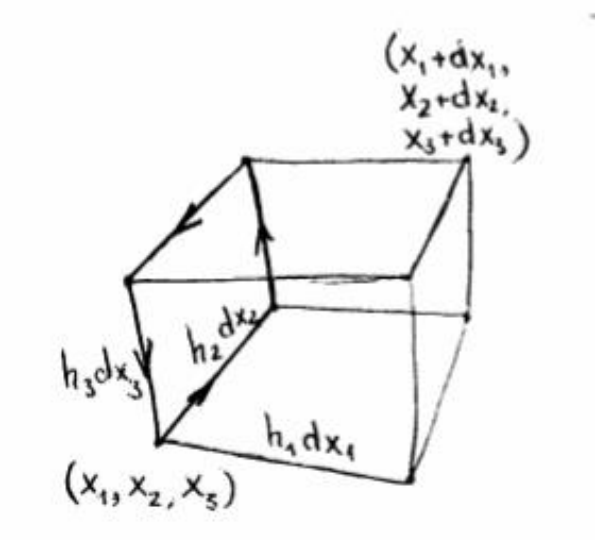


Рис.1.2. Елементарний паралелепіпед інтегрування

$$V_s = h_1 h_2 h_3 dx_1 dx_2 dx_3$$

Поверхневий інтеграл в (1.5) можна розбирати на шість доданків. Розглянемо два з них – інтеграли по площадкам $x_1 = const$ і $(x_1 + dx_1) = const$. З урахуванням лише малих величин першого порядку їх сума дорівнює величині

$$A_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3) h_2 dx_2 h_3 dx_3 - A_1(x_1, x_2, x_3) h_2 dx_2 h_3 dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 A_1) dx_1 dx_2 dx_3$$

Підсумовуючи по трьом парам площадок, отримаємо:

$$\int_s \vec{A}\vec{n} dS = \frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 A_1) dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 h_1 A_2) dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 A_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

У результаті знаходимо:

$$div\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 A_3)\right) \qquad (1.6)$$

Тепер нагадаємо визначення і правило обчислення ротора. Якщо векторне поле $\vec{A}$ є ротор векторного поля $\vec{B}$, то $\vec{A} = rot\vec{B}(\vec{r})$, за визначенням, компоненти ротора визначаються як межа відношення циркуляції вектору $\vec{B}$, взятій по контуру щодо орієнтованої площадки, до її площі:

$$A_1 = \lim_{S_{23} \to 0} \frac{1}{S_{23}} \int_{C_{23}} \vec{B} d\vec{l}$$

подібні співвідношення маємо і для інших компонент. Площадка S_{23} перпендикулярна координат лінії x_1. Обхід C_{23} контуру проводиться за

правилом правого гвинта (проти годинникової стрілки). У разі, якщо мала площадка – «чотирикутник», сторони якого орієнтовані вздовж координатних ліній (рис.1.2), легко знайти, що

$$S_{23} = h_2 h_3 dx_2 dx_3$$

$$\int_{C_{23}} \vec{B} d\vec{l} = B_2(x_2, x_3) h_2 dx_2 + B_3(x_2 + dx_2, x_3) h_3 dx_3 - B_2(x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) h_2 dx_2 -$$

$$- B_3(x_2, x_3 + dx_3) h_3 dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 B_3) dx_2 dx_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}(h_2 B_2) dx_2 dx_3$$

Таким чином, для компоненти ротора A_1 маємо вираз:

$$A_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} h_3 B_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} h_2 B_2\right) \qquad (1.7)$$

Формули для інших компонент ротора аналогічні і отримуються циклічною перестановкою індексів $1 \to 2 \to 3 \to 1$:

$$A_2 = \frac{1}{h_3 h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3} h_1 B_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} h_3 B_3\right) \qquad A_3 = \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_2 B_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} h_1 B_1\right)$$

Строгий математичний аналіз цілком узгоджується з наведеними тут в порядку нагадування елементарними міркуваннями. Він тільки дозволяє стверджувати, що формули (1.6) і (1.7) справедливі незалежно від способу граничного переходу, зокрема, від форми поверхонь і контурів.

Використовуючи формули (1.6) і (1.7), можемо записати в криволінійних координатах рівняння Максвелла для монохроматичних полів (1.3):

$$ik\mu h_2 h_3 H_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} h_3 E_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} h_2 E_2$$

$$-ik\varepsilon h_2 h_3 E_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} h_3 H_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} h_2 H_2$$

$$ik\mu h_3 h_1 H_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} h_1 E_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} h_3 E_3$$

$$-ik\varepsilon h_3 h_1 E_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} h_1 H_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} h_3 H_3$$

$$ik\mu h_1 h_2 H_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} h_2 E_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} h_1 E_1$$

$$-ik\varepsilon h_1 h_2 E_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} h_2 H_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} h_1 H_1$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 E_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 h_1 E_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 E_3) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 h_1 H_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 H_3) = 0$$

В результаті отримана система з восьми рівнянь для шести незалежних компонент поля – невідомих функцій координат. На перший погляд вона є перевизначеною. Однак не всі рівняння Максвела незалежні між собою.

1.4. Ідеальні хвилеводи та їх характеристики

Розглянемо поперечний переріз регулярного багатозв'язного (трьохзв'язного) хвилеводу довільної геометрії. Символами Ω, $\partial\Omega$ і S позначаються поперечний переріз хвилеводу, зовнішній контур, котрий обмежує цей переріз, і бічна поверхня хвилеводу відповідно. Внутрішні границі багатозв`язного хвилеводу позначимо через $\partial\Omega_i$. Таким чином, $\partial\Omega = \left(\bigcup_i \partial\Omega_i\right) \bigcup \partial\Omega_0$.

Нехай стінки хвилеводу виконані з ідеально провідникового матеріалу з питомою об'ємною провідністю $\sigma \to \infty$. Комплексна амплітуда будь-якої складової електромагнітного поля у випадку неоднорідної плоскої лінійно поляризованої хвилі, що розповсюджується вздовж осі z, має вигляд

$$\overline{A} = A_0(x, y)\exp(-i\gamma z) \qquad (1.8)$$

де γ - поздовжнє хвильове число. Електромагнітний процес в області (вакуум), вільної від джерел, описується рівнянням Максвелла

$$rot\overline{H} = i\omega\varepsilon_0\overline{E}, \qquad rot\overline{E} = -i\omega\mu_0\overline{H}$$

де ω - частота коливань, $\overline{E}$, $\overline{H}$ - комплексні амплітуди електричного і магнітного полів:

$$\begin{Bmatrix} E(t) \\ H(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{E} \\ \overline{H} \end{Bmatrix} \exp i\omega t$$

З (1.8) можна встановити взаємозв'язок між поздовжніми і поперечними складовими електромагнітного поля:

$$\overrightarrow{E_x} = \frac{-i}{k^2-\gamma^2}\left(\gamma\frac{\partial\overrightarrow{E_z}}{\partial x}+\omega\mu_0\frac{\partial\overrightarrow{H_z}}{\partial y}\right)$$

$$\overrightarrow{E_y} = \frac{-i}{k^2-\gamma^2}\left(\gamma\frac{\partial\overrightarrow{E_z}}{\partial y}-\omega\mu_0\frac{\partial\overrightarrow{H_z}}{\partial x}\right)$$

$$\overrightarrow{H_x} = \frac{i}{k^2-\gamma^2}\left(\omega\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E_z}}{\partial y}-\gamma\frac{\partial\overrightarrow{H_z}}{\partial x}\right)$$

$$\overrightarrow{H_y} = \frac{-i}{k^2-\gamma^2}\left(\omega\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E_z}}{\partial x}+\gamma\frac{\partial\overrightarrow{H_z}}{\partial y}\right)$$

Тут $g = \sqrt{k^2-\gamma^2}$ - поперечне хвильове число; $k = \sqrt{\varepsilon\mu} = \omega/c$, де c - швидкість світла у вакуумі. Таким чином, чотири компоненти електромагнітного поля виражаються через дві інші незалежні складові. При цьому можливі наступні основні випадки.

1) Хвилі Е-типу, або ТН-хвилі ($H_z = 0$). Поздовжня складова електричного поля $u^e \equiv E_z$ має задовольняти двовимірному рівнянню Гельмгольця з однорідними крайовими умовами Діріхле:

$$\frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^e}{\partial y^2}+(k^2-\gamma^2)u^e = 0 \qquad \text{при} \qquad (x,y)\in\Omega\subset R^2, \tag{1.9}$$

$$u^e\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

2) Хвилі Н-типу, або ТЕ-хвилі ($E_z = 0$). Поздовжня складова магнітного поля $u^m \equiv H_z$ задовольняє двовимірному рівнянню Гельмгольця з однорідними крайовими умовами Неймана :

$$\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^m}{\partial y^2}+(k^2-\gamma^2)u^m = 0 \qquad \text{при} \qquad (x,y)\in\Omega\subset R^2, \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial u^m}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0.$$

3) Поперечно-електромагнітні, або ТЕМ-хвилі ($H_z = E_z = 0$). Існування такого типу хвиль можливо тільки в багатозв'язних структурах. У цьому випадку

компоненти електромагнітного поля задовольняють двовимірному рівнянню Лапласа з умовою Діріхле:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{при} \quad (x,y)\in\Omega\subset R^2,$$

$$u^e\Big|_{\partial\Omega_i}=\Psi_i, \qquad i=\overline{1,N}.$$

Тут $N\geq 2$, і хоча б дві постійні Ψ_i не дорівнюють одна одній.

Ненульові рішення задач (1.9) , (1.10) можливі лише при певних значеннях параметра $g=\sqrt{k^2-\gamma^2}$, які називаються власними значеннями оператора Лапласа

$$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Сукупність всіх власних значень оператора називається спектром. Оскільки оператор Лапласа з однорідними крайовими умовами Діріхле або Неймана є самоспряженим і позитивно визначеним, тобто

$$\int_\Omega v\Delta u dxdy=\int_\Omega u\Delta v dxdy$$

$$\int_\Omega u\Delta u dxdy\geq C\int_\Omega u^2 dxdy, \quad C=const>0,$$

для всіх інтегрованих з квадратом у Ω функцій $u\in L_2(\Omega)$. Внаслідок цього оператор Лапласа має дискретний чисельний спектр власних чисел

$$0<\xi_0\leq\xi_1\leq\ldots\leq\xi_k\leq\ldots$$

(для задачі Діріхле) та

$$0\leq\xi_0\leq\xi_1\leq\ldots\leq\xi_k\leq\ldots$$

(для задачі Неймана). Кожному власному значенню відповідає одне або декілька рішень ψ_k, які називаються власними функціями оператора Лапласа. В останньому випадку власне значення вважається виродженим з кратністю, рівній числу лінійно незалежних власних функцій, відповідних даному значенню. Власні функції оператора Лапласа ортогональні:

$$\int_\Omega \psi_m\psi_n^* dxdy=0, \qquad m\neq n,$$

де символ * означає комплексне спряження. З цього випливає ортогональність електромагнітних полів різних типів вільних хвиль у хвилеводі.

Поперечне хвильове число g залежить лише від геометрії поперечного перерізу хвилеводу і від індексів вибраного типу (форми) хвилі і зовсім не залежить від частоти. Згідно з визначенням поперечного хвильового числа g, якщо $k > g$, то поздовжнє хвильове число γ є дійсним, що означає можливість поширення відповідного типу коливань у вигляді хвиль, які біжать вздовж у осі z. При досить великих довжинах хвиль генератора $\lambda = 2\pi / k$ може виявитися, що $k < g$ (уявне поздовжнє хвильове число γ) , тоді замість біжучих хвиль у хвилеводі будуть існувати затухаючі коливання з амплітудою, яка експоненціально зменшується по координаті z. Значення довжини хвилі генератора, відповідне випадку $k = g$, називається критичною довжиною хвилі λ_c для даного типу коливань в досліджуваному хвилеводі. Очевидно,

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{g}$$

Довжина хвилі в хвилеводі з ідеально провідними стінками завжди перевершує довжину хвилі у вільному просторі, так як хвилі Е - і Н-типу поширюються з фазовими швидкостями v_p, більшими, ніж швидкість світла у вакуумі:

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1-(\lambda-\lambda_c)^2}}$$

На практиці інтерес в першу чергу представляють коливання з мінімальними поперечними хвильовими числами, що забезпечують найбільші значення критичної довжини хвилі. Засобами варіаційного числення показується [8] , що основною хвилею будь-якого порожнього хвилеводу , що відповідає максимальному значенню λ_{c0}, завжди є хвиля Н-типу. При $\lambda > \lambda_{c0}$ поширення хвиль в лінії передачі неможливо . В діапазоні $\lambda_{c1} < \lambda < \lambda_{c0}$ у хвилеводі може поширюватися тільки один, основний тип хвилі. Такий режим

називається одномодовим, а інтервал $(\lambda_{c1},\lambda_{c0})$ – робочим інтервалом довжин хвиль. На практиці ширину цього діапазону вибирають дещо менше теоретичної від $\lambda_{c1}/0.95$ до $\lambda_{c0}/1.25$. Це пов'язано з тим, що поблизу критичної довжини хвилі збільшується згасання основного типу хвилі λ_{c0}, а поблизу виникає небезпека порушення вищих типів хвиль.

Характеристичний опір хвилеводу визначається як відношення поперечних складових векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$:

$$Z_c = \frac{\sqrt{\overrightarrow{E_x^2}+\overrightarrow{E_y^2}}}{\sqrt{\overrightarrow{H_x^2}+\overrightarrow{H_y^2}}}$$

Відповідно до формул переходу для хвиль Е-типу і Н-типу, відповідно:

$$Z_c^E = Z_0\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}\ ,\ Z_c^H = \frac{Z_0}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}}$$

де $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$ - характеристичний опір вакууму.

2 R-ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

2.1. Булеві функції та їх геометрична інтерпретація

Нехай $\Im$ — множина, що називається унітарною, з елементів якої складаються всі розглянуті в даній ситуації множини, а $\varnothing$ - порожня множина (тобто множина, що не містить жодного елемента).

Множина $A \cap B$, звана перерізом, складається з усіх тих елементів , які належать A і B одночасно.

Множина $A \cup B$, звана сполукою (об'єднанням), складається з усіх тих елементів, які належать хоча б одній з множин A або B.

Множина $\overline{A}$, звана доповненням, складається з усіх елементів, які не належать A.

Наведемо алгебраїчні властивості цих операцій.

Комутативність:

1. $A \cap B \equiv B \cap A$. 2. $A \cup B \equiv B \cup A$.

Асоціативність:

3. $A \cap (B \cap C) \equiv (A \cap B) \cap C$. 4. $A \cup (B \cup C) \equiv (A \cup B) \cup C$.

Дистрибутивність:

5. $A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$. 6. $A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Ідемпотентність:

7. $A \cap A \equiv A$. 8. $A \cup A \equiv A$.

Закон подвійного заперечення:

9. $\left(\overline{\overline{A}}\right) \equiv A$.

Правила де Моргана:

10. $\overline{A \cap B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}$. 11. $\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cap \overline{B}$.

Закон логічного протиріччя:

12. $A \cap \overline{A} \equiv \varnothing$.

Закон виключеного третього:

13. $A \cup \overline{A} = \Im$.

Операції з унітарною і порожньою множинами:

14. $\Im \cap A = A$. 15. $\Im \cup A = \Im$. 16. $\varnothing \bigcap A \equiv \varnothing$.

17. $\varnothing \cup A \equiv A$. 18. $\overline{\varnothing} \equiv \Im$. 19. $\overline{\Im} \equiv \varnothing$.

Зокрема, якщо унітарна множина складається з єдиного елемента "1", а пуста — "0", то відповідні наведені вище операції можна розглядати як звичайні функції виду $F : B_2^n \to B_2$, де B_2 — множина, що складається з двох елементів $B_2 = \{0,1\}$. Такі операції називаються операціями двозначної логіки. У цьому випадку замість символів $\cap, \cup, \bar{}$ зазвичай використовують символи $\wedge, \vee, \bar{}$, а ці операції називають кон’юнкцією, диз'юнкцією і запереченням відповідно.

Операції, для яких справедливі властивості 1-19, визначають так звану булеву алгебру. Часто використовуються і інші операції двозначної логіки, які визначаються формулами:

$X - Y \equiv X \wedge \overline{Y}$ — різниця множин X і Y;

$X \to Y \equiv \overline{X} \vee Y$ — імплікація;

$X \sim Y \equiv \left(\overline{X} \vee Y\right) \wedge \left(X \vee \overline{Y}\right)$ — рівнозначність;

$X \bar{\sim} Y \equiv \left(\overline{X} \vee \overline{Y} \right) \wedge \left(X \vee Y\right)$ — заперечення рівнозначності;

$X / Y \equiv \overline{X \wedge Y}$ — операція Шеффера.

Таблиця 2.1.

Основні елементарні булеві функції можуть бути задані таблицею

X	Y	$\overline{X}$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \to Y$	$X \sim Y$	X / Y	$X \bar{\sim} Y$
0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0

Суперпозиції примітивів називаються елементарними булевими функціями. На відміну від розглянутих вище звичайних елементарних функцій неперервного аналізу, елементарні булеві функції збігаються з множиною всіх булевих функцій [9]. Кожну булеву функцію можна задати таблицею. Число різних булевих функцій, що залежать від аргументів, як легко підрахувати, дорівнює 2^{2^n}. В принципі, вивчення булевих функцій можна звести до вивчення відповідних таблиць. Однак цей шлях нереальний, так як навіть при порівняно невеликих n число таких таблиць дуже велике. Наприклад, при $n > 5 \quad 2^{2^n} > 4235000000$. Тому і був обраний аналітичний метод вивчення булевих функцій, заснований на введенні символіки для примітивів і побудові на її основі формул для всіх інших булевих функцій.

Ми вже знайомі з можливістю подання будь-якої булевої функції через $\wedge, \vee, \bar{}$ (в кон'юнктивній і диз'юнктивній нормальних формах [9]). Цей факт означає, що система

$$H = \left(X \wedge Y, X \vee Y, \overline{X}\right) \tag{2.1}$$

є повною системою булевих функцій (тобто множина $\mathrm{M}(H)$ H-реалізованих функцій є множиною всіх булевих функцій). Зазначена можливість подання булевих функцій в диз'юнктивній або кон’юнктивній нормальній формі зробила систему (2.1) найбільш часто вживаною.

Прикладами інших повних систем є:

$$H_1 = \left\{X \wedge Y, \overline{X}\right\}; \quad H_2 = \{X \setminus Y\}; \quad H_3 = \{X \vee Y, X \sim Y, 0\}.$$

Якщо в якості унітарної множини взяти площину, то можна дати наочну геометричну інтерпретацію булевими операціями у вигляді діаграм Ейлера-Венна (рис.2.1).

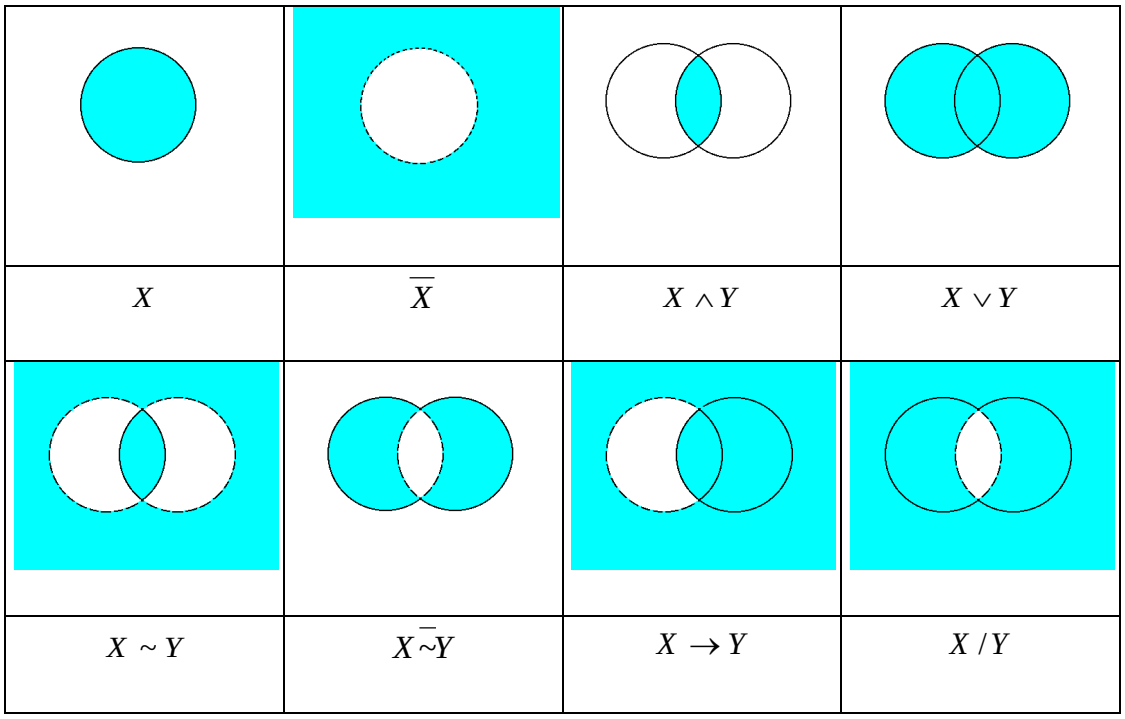


Рис.2.1. Діаграми Ейлера-Венна

Використовуючи ці діаграми, легко перевірити справедливість формули 1-19. Зауважимо, що ці властивості виписані з надлишковістю, частина з них є наслідком інших. Але такий запис дозволяє виявити повну симетрію властивостей 1-19 щодо символів $\cap$, $\cup$. Так, якщо в 1-19 замінити $\cap$ на $\cup$, $\cup$ на $\cap$, $\Im$ на $\varnothing$, $\varnothing$ на $\Im$, то отримаємо ті ж властивості 1-19.

Маючи символи логічних операцій (булевих операцій), можна написати формули, наприклад

$$X \vee (Y \wedge Z) \vee \left(\overline{X} \wedge Y\right); \quad X \vee \left(\overline{Y} \wedge \Im\right). \tag{2.2}$$

Формули, отримані в результаті наведеного вище перетворення символів $\cap$ на $\cup$, $\cup$ на $\cap$, $\Im$ на $\varnothing$, $\varnothing$ на $\Im$ (перетворення подвійності), називаються подвійними даними. Наприклад, подвійними для (2.2) є формули

$$X \wedge (Y \vee Z) \wedge \left(\overline{X} \vee Y\right); \quad X \wedge \left(\overline{Y} \vee \varnothing\right).$$

Рівність виду $F(X_1,...,X_m) \equiv \Phi(X_1,...,X_m)$ називається тотожністю, якщо вона справедлива для будь-яких значень $X_1,...,X_m \in \Im$. В результаті перетворення подвійності всяка тотожність перетвориться у тотожність. Формула $F(X_1,...,X_m)$ називається істотно залежною від $X_i, (i = 1,...,m)$, якщо

ніяким тотожним перетворенням не можна виключити жодного з аргументів X_i. Формула $F(X_1,...,X_m)$ називається самодвоїстною, якщо вона тотожно дорівнює подвійній їй формулі.

Прикладом самодвоїстної формули є $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$. У справедливості цього легко переконатися за допомогою діаграм Ейлера-Венна. Очевидно, що всі формули виду $F(X)$ є самодвоїстними. Легко перевірити, що серед формул, істотно залежать від двох аргументів, немає жодної самодвоїстної формули. Для трьох аргументів, як ми бачили, такі формули є.

Виникає питання: для яких m існують самодвоїстні формули виду $F(X_1,...,X_m)$, істотно залежать від $X_1,...,X_m$?

Це питання підтверджує істину, що навіть в найпростіших ситуаціях зустрічаються невирішені проблеми.

2.2. Описове і формальне визначення R-функцій

Розглянемо такі функції:

$$u_1 = xyz; \qquad v_1 = xyz + 1;$$

$$u_2 = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad v_2 = x + y - z - \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$u_3 = y\left(e^x - 1\right); \qquad v_3 = \left(e^x - x\right)y;$$

$$u_4 = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \qquad v_4 = \frac{xy}{x + y};$$

$$u_5 = x\,\mathrm{arctg}\left[\left(2^z - 1\right)y\right]. \qquad v_5 = (x+1)\,\mathrm{arctg}y.$$

Функції першої колонки — це R-функції. Будь-яку неперервну функцію будь-якого числа аргументів можна віднести до однієї з цих колонок. Спробуємо відповісти на питання: яка ознака відокремлює R-функції від не R-функцій, представлених у другій колонці?

Людина, що не має попереднього знайомства з R-функцій, навряд чи зможе відгадати «таємницю R-функцій». Між тим, ця ознака дуже проста: R-функції володіють тією властивістю, що завдання знаків аргументів однозначно визначає знак R-функції. Для u_1 ця властивість очевидна. Для того, щоб довести його справедливість для u_2 розглянемо прямокутний

трикутник зі сторонами $|x|,|y|$. Якщо $x, y > 0$, то модулі можна не писати, і тоді сума катетів більше гіпотенузи: $x + y > \sqrt{x^2 + y^2}$. Якщо x, y мають різні знаки, то $x + y$ різниця катетів, і тоді $\sqrt{x^2 + y^2} > x + y$. Якщо від'ємні x, y, то тим більше $\sqrt{x^2 + y^2} > x + y$. Знаки u_3, u_4 такі ж, як і у xy, а знак u_5 такий же, як у u_1. Це очевидно. Таким чином, для цих функцій можна скласти таблицю знаків.

Таблиця .2.2.

x	y	z	u_1, u_5	u_2	u_3, u_4
–	–	–	–	–	+
–	–	+	+	–	+
–	+	–	+	–	–
–	+	+	–	–	–
+	–	–	+	–	–
+	–	+	–	–	–
+	+	–	–	+	+
+	+	+	+	+	+

Якщо в цій таблиці замінити "–" на "0", а "+" на "1", то отримаємо таблиці трьох булевих функцій. Наприклад, функції u_2 відповідає кон'юнкція $X \wedge Y$, функції u_1 відповідає булева функція $X \sim Y \sim Z$.

Булеві функції, які відповідають R-функцій, називаються супроводжуючими булевими функціями. Неважко помітити, що одна і та ж булева функція може бути супроводжуючою для багатьох R-функцій. Наприклад, u_3, u_4 мають загальну супроводжуючу. Це ж стосується і функцій u_1, u_5.

Наведене вище описове визначення R-функцій можна формалізувати. Позначимо

$$S_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}.$$

Визначення. Функція $f(x_1,...,x_m): E^m \to E$ називається R-функцією, якщо існує така булева функція $F(X_1,...,X_m)$, що

$$S_2(f(x_1,...,x_m)) \equiv F(S_2(x_1),...,S_2(x_m)). \qquad (2.3)$$

Очевидно, що R-функції можуть бути названі R-операціями з алфавітом $E^1 = (-\infty, \infty)$.

Якщо назвати $S_2(t)$ булевим знаком величини t, то можна дати і таке визначення R-функцій: функція $f(x_1,...,x_m)$ називається R-функцією, якщо булев знак цієї функції дорівнює булевій функції булевих знаків аргументів $x_1,...,x_m$.

Звернемо увагу на те, що у формулі (2.3) оператор S_2, застосований до функції $f(x_1,...,x_m)$, як би "проникає" всередину до її аргументів, змінюючи при цьому f на F. Наприклад,

$$S_2\left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2}\right) = S_2(x) \wedge S_2(y); \quad S_2(xyz) = S_2(x) \sim S_2(y) \sim S_2(z).$$

Визначення. Множина R-функцій, що мають одну і ту ж супроводжуючу, називаються гілкою множини R-функцій.

Визначення. Система h називається достатньо повною системою R-функцій, якщо множина $\mathrm{M}(h)$ має не порожній переріз з кожною гілкою множини R-функцій.

Теорема. Нехай $h = \{\varphi_i\}$ є система R-функцій, а $H = \{\Phi_i\}$ — система відповідних супроводжуючих функцій. Тоді, якщо H — повна система булевих функцій, то h — достатньо повна система R-функцій (R-операцій) [9]. Наприклад, система

$$h_1 = \left\{x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, -x\right\} \qquad (2.4)$$

є досить повною, оскільки відповідна система булевих функцій

$$H_1 = \left\{X \wedge Y, \overline{X}\right\} \qquad (2.5)$$

є повною.

2.3. Основні досить повні системи R-функцій, їх логічні, алгебраїчних і диференціальних властивості

Вище зазначалося, що система $H = \{X \wedge Y, X \vee Y, \overline{X}\}$ є найбільш зручною і широко застосовуваною повною системою булевих функцій, тому природно розширити систему (2.4), для якої супроводжує є система (2.5), додавши до неї деяку R-диз'юнкцію. Дивлячись на рис.2.2, можна переконатися,

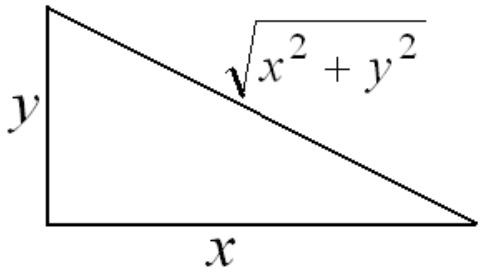


Рис.2.2. Геометричне підтвердження

що формула $x+y+\sqrt{x^2+y^2}$ є R-диз'юнкцією. В результаті отримуємо систему R_0:

$$\begin{cases} x \wedge_0 y \equiv x+y-\sqrt{x^2+y^2} \\ x \vee_0 y \equiv x+y+\sqrt{x^2+y^2} \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases},$$

де $\wedge_0, \vee_0, \bar{}$ — символи R-кон'юнкції, R-диз'юнкції і R-заперечення відповідно. Система R_0 є історично першою, конструктивно найбільш простою і тому найбільш часто використовуваною системою.

Більш загальною є система R_α:

$$\begin{cases} x \wedge_\alpha y \equiv \dfrac{1}{1+\alpha}(x+y-\sqrt{x^2+y^2-2\alpha xy}) \\ x \vee_\alpha y \equiv \dfrac{1}{1+\alpha}(x+y+\sqrt{x^2+y^2-2\alpha xy}) \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases} \qquad (2.7)$$

де $\alpha(x,y)$ — довільна функція, що задовольняє нерівностям $-1 < \alpha(x,y) \le 1$. До цих нерівностей для додання системі R_α симетрії щодо аргументів зазвичай додають умови

$$\alpha(x,y)\equiv\alpha(y,x)\equiv\alpha(\bar{x},y)\equiv\alpha(x,\bar{y}),\quad \forall x,y\in\Re, \tag{2.8}$$

які, втім, не є обов'язковими.

Зауважимо, що у формулах (2.7) позитивні множники $\frac{1}{1+\alpha}$ не впливають на знаки відповідних функцій і, отже, не мають відношення до зв'язку між R-функцій та супроводжуючими їх функцій алгебри логіки. Нижче буде показано, що вони впливають лише на певні властивості конструктивно-диференціального характеру.

Присутність у формулах (2.7) довільної функції α, що задовольняє зазначеним вище вимогам, означає, що цими формулами визначається пучок достатньо повних систем, з якого в різних додатках вибираються ті чи інші конкретні досить повні системи. Так, наприклад, при $\alpha=0$ отримуємо систему R_0, а при $\alpha=1$ — систему R_1:

$$\begin{cases} x\wedge_1 y\equiv\dfrac{1}{2}(x+y-|x-y|)\equiv\min(x,y)\\ x\vee_1 y\equiv\dfrac{1}{2}(x+y+|x-y|)\equiv\max(x,y).\\ \bar{x}\equiv -x \end{cases} \tag{2.9}$$

Припустимо, що $\alpha=\alpha(x,y)$ задовольняють умовам (2.8). Тоді справедливі наступні тотожності:

1. $\bar{\bar{x}}\equiv x$.
2. $x\wedge_\alpha y\equiv y\wedge_\alpha x$.
3. $x\vee_\alpha y\equiv y\vee_\alpha x$.
4. $\overline{x\wedge_\alpha y}\equiv\bar{x}\vee_\alpha\bar{y}$.
5. $\overline{x\vee_\alpha y}\equiv\bar{x}\wedge_\alpha\bar{y}$.
6. $x\wedge_\alpha y+x\vee_\alpha y\equiv\dfrac{2}{1+\alpha}(x+y)$.
7. $(x\wedge_\alpha y)(x\vee_\alpha y)\equiv\dfrac{2}{1+\alpha}xy$.
8. $x\wedge_\alpha y=0$ тоді і тільки тоді, коли $x=0,y\geq 0$ або $y=0,x\geq 0$.

9. $x \vee_\alpha y = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0, y \le 0$ або $y = 0, x \le 0$.

Функції системи R_1, у доповнення до властивостей 1-9, володіють також властивостями:

10. $x \wedge_1 x \equiv x$.

11. $x \vee_1 x \equiv x$.

12. $x \wedge_1 \bar{x} \equiv -|x|$.

13. $x \vee_1 \bar{x} \equiv |x|$.

14. $x \wedge_1 (y \wedge_1 z) \equiv (x \wedge_1 y) \wedge_1 z \equiv x \wedge_1 y \wedge_1 z$.

15. $x \vee_1 (y \vee_1 z) \equiv (x \vee_1 y) \vee_1 z \equiv x \vee_1 y \vee_1 z$.

16. $x \wedge_1 (y \vee_1 z) \equiv (x \wedge_1 y) \vee_1 (x \wedge_1 z)$.

17. $x \vee_1 (y \wedge_1 z) \equiv (x \vee_1 y) \wedge_1 (x \vee_1 z)$.

18. $(x \wedge_1 y) \vee_1 x \equiv x$.

19. $(x \vee_1 y) \wedge_1 x \equiv x$.

Переконаємося, наприклад, у справедливості властивості 17, яке, використовуючи (2.9), можемо записати у вигляді

$$\max(x, \min(y, z)) = \min(\max(x, y), \max(x, z)).$$

Для визначеності спочатку покладемо $x > y > z$, тоді $x \equiv x$.. Якщо $x < y < z,$ тоді $y \equiv y.$ При $y < z < x$ отримаємо $x \equiv x.$ Аналогічно можна розглянути і всі інші варіанти.

Недолік системи (2.9) — недиференційованість вхідних до неї двомісних операцій вздовж прямих $x = y$.

Доведемо теорему, яка дозволить здійснювати оцінювання значень результатів застосування R-операцій з R_α.

Теорема. Справедливі нерівності

$$x \wedge_\alpha y \le \min(x, y) = x \wedge_1 y, \quad x \vee_\alpha y \ge \max(x, y) = x \vee_1 y.$$

Доказ. Нехай $x < y$, тоді

$$x \wedge_\alpha y \equiv \frac{1}{1+\alpha}(x+y-\sqrt{x^2+y^2-2\alpha xy}) = \frac{1}{1+\alpha}\left(x+\alpha x+y-\alpha x-\sqrt{(y-\alpha x)^2+x^2\left(1-\alpha^2\right)}\right)$$

Так як $|\alpha| \le 1$, то $\sqrt{(y-\alpha x)^2+x^2\left(1-\alpha^2\right)} > y-\alpha x$, і ми отримуємо, що

$$x \wedge_\alpha y = \frac{1}{1+\alpha}\left((1+\alpha)x-\delta^2\right) < x,$$

де $\delta^2 = \sqrt{(y-\alpha x)^2+x^2\left(1-\alpha^2\right)} - y + \alpha x$.

Доказ нерівності $x \vee_\alpha y \ge \max(x,y)$ аналогічно попередньому.

Приклад. Нехай $y_1 = x^2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2x^2$. На рис.2.3, а), б) наведено графіки функцій $y = x^2 \vee_\alpha 1$, $y = (x^2 \vee_\alpha 1) \wedge_\alpha 2x^2$ відповідно для значень $\alpha = 0.1$ (пунктирні лінії) і $\alpha = 1$ (суцільна лінія). Вигляд цих графіків, використовуючи наведену теорему, можна передбачити до їх побудови.

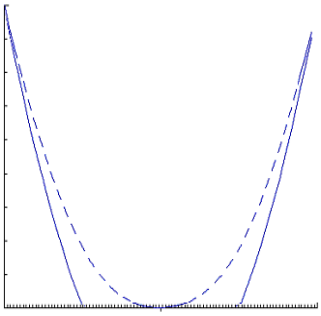


Рис.2.3.а) Графік функції 1.

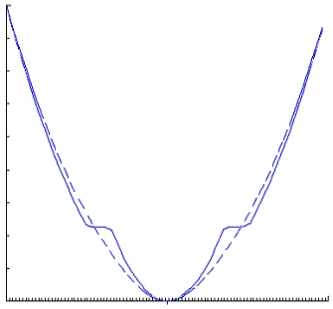


Рис.2.3.б) Графік функції 2.

До цих пір, кажучи про досить повні і інші системи R-операцій, ми звертали увагу лише на їх приналежність відповідним гілкам, які визначаються заданими булевими операторами функціями. При цьому, щоб скоротити в майбутньому обчислювальні витрати, прагнули до простоти одержуваних формул і зручності їх алгебраїчних властивостей. Проте не менш важливими є і диференціальні властивості введених R-операцій.

Згаданий вище множник $\frac{1}{1+\alpha}$ використовується при доведенні наступної теореми.

Теорема. Нехай $\sigma_1, \sigma_2 : E^2 \to E$ — диференційовані функції. Тоді, якщо $\alpha = \text{const}$, для будь-якого напрямку ℓ

$$\frac{\partial}{\partial \ell}(\sigma_1 \wedge_\alpha \sigma_2) = \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial \ell}, \text{ при } \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 > 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial \ell}, \text{ при } \sigma_2 = 0, \quad \sigma_1 > 0 \end{cases},$$

$$\frac{\partial}{\partial \ell}(\sigma_1 \vee_\alpha \sigma_2) = \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial \ell}, \text{ при } \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 < 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial \ell}, \text{ при } \sigma_2 = 0, \quad \sigma_1 < 0 \end{cases}.$$

Наступна теорема, сформульована для других похідних.

Теорема. Якщо $\alpha = \text{const}$ і $\dfrac{\partial^2 \sigma_i}{\partial \ell^2} \le 0 \ (i = 1,2)$, то $\dfrac{\partial^2}{\partial \ell^2}(\sigma_1 \wedge_\alpha \sigma_2) \le 0$.

Слід зазначити, що система R_0 є однією з найбільш простих, однак вхідні в неї R-операції $\wedge_0, \vee_0$ мають розриви похідних в точці $(0,0)$, що не у всіх ситуаціях допустимо.

Дійсно, $\dfrac{\partial}{\partial x}(x \wedge_0 y) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\dfrac{\partial}{\partial x}(x \vee_0 y) = 1 - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Якщо в цих формулах перейти до полярних координат $x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi$, то одержимо $\dfrac{\partial}{\partial x}(x \wedge_0 y) = 1 - \cos\varphi$; $\dfrac{\partial}{\partial x}(x \vee_0 y) = 1 - \sin\varphi$. Звідси видно, що граничні значення похідної при $r \to 0$ залежать від кута, під яким точка наближається до початку координат. Цей недолік легко усунути, якщо скористатися тим, що при множенні на позитивні множники R-операції не змінюють знак, і, отже, не виходять за межі відповідних гілок. Так, якщо помножити $x \wedge_0 y$ і $x \vee_0 y$ на $\left(x^2 + y^2\right)^{m/2}$, то прийдемо до системи R_0^m:

$$\begin{cases} x \underset{0}{\overset{m}{\wedge}} y \equiv (x + y - \sqrt{x^2 + y^2})\left(x^2 + y^2\right)^{m/2} \\ x \underset{0}{\overset{m}{\vee}} y \equiv (x + y + \sqrt{x^2 + y^2})\left(x^2 + y^2\right)^{m/2} \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases}.$$

Якщо, наприклад, у формулі $x \underset{o}{\overset{m}{\wedge}} y$ перейти до полярних координат, то одержимо $x \underset{0}{\overset{m}{\wedge}} y = r^{m+1}(\cos\varphi + \sin\varphi - 1)$, і при $r = 0$ приватні похідні аж до порядку m будуть безперервними. Аналогічний результат отримуємо і для $x \underset{0}{\overset{m}{\vee}} y$. Тим не менш, система R_0 значно частіше використовується, ніж система R_0^m, і не тому, що вона дещо простіше, а насамперед завдяки своїм додатковим корисним властивостям, про яких буде сказано надалі.

Система R_ρ:

$$\begin{cases} x \wedge_\rho y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2 + \dfrac{SR}{8\rho^2}\left(SR + |SR|\right)} \\ x \vee_\rho y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2 + \dfrac{SR}{8\rho^2}\left(SR + |SR|\right)}, \\ \bar{x} = -x \qquad\qquad SR = \rho^2 - x^2 - y^2 \end{cases} \tag{2.10}$$

де ρ — радіус округлення кутів. Проведемо дослідження формули (2.10) для використання при сполученні двох пересічних прямих залежно від кута між ними. Нехай $f_1 = x \geq 0$ і $f_2 = y \geq 0$, тобто кут розчину — прямий. Тоді маємо

$$x \wedge_\rho y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{8\rho^2}\left(\rho^2 - x^2 - y^2\right)\left(\left|\rho^2 - x^2 - y^2\right| + \rho^2 - x^2 - y^2\right)}. \tag{2.11}$$

Після перетворень в околиці сполучення (2.11), де $x^2 + y^2 < \rho^2$, отримаємо нормалізовану функцію, якій відповідає дуга окружності радіуса з центром в точці (ρ,ρ), яка спрягає розглянуті прямі. Дійсно,

$$x + y - \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{4\rho^2}\left(\rho^2 - x^2 - y^2\right)^2} =$$

$$= x + y - \frac{1}{2\rho}\left[\sqrt{4\rho^2x^2 + 4\rho^2y^2 + \rho^4 + x^4 + y^4 - 2\rho^2x^2 - 2\rho^2y^2 + 2x^2y^2}\right] =$$

$$= x + y - \frac{1}{2\rho}\sqrt{\left(\rho^2 + x^2 + y^2\right)^2} = x + y - \frac{1}{2\rho}\left(\rho^2 + x^2 + y^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2\rho}\left[2\rho x + 2\rho y - \rho^2 - x^2 - y^2\right] = \frac{1}{2\rho}\left[\rho^2 - (x-\rho)^2 - (y-\rho)^2\right].$$

Покажемо, що при куті між цими прямими $\neq 90^\circ$, спрягання по $\wedge_\rho$ дає дугу еліпса, симетричну відносно бісектриси кута розчину, а не дугу кола, як можна було б припустити. Якщо $f_1^2 + f_2^2 \le \rho^2$ і $f_1 = \frac{y - kx}{\sqrt{1+k^2}}$, $f_1 = \frac{y - kx}{\sqrt{1+k^2}}$, то одержимо

$$f_1 \wedge_\rho f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \frac{1}{4\rho^2}\left(\rho^2 - f_1^2 - f_2^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\rho}\left[\rho^2 - (f_1 - \rho)^2 - (f_2 - \rho)^2\right] = \frac{1}{2\rho}\left[\rho^2 - f_1^2 - \rho^2 + 2f_1\rho - f_2^2 - \rho^2 + 2f_2\rho\right] =$$

$$= \frac{1}{2\rho}\left[- f_1^2 - f_2^2 - \rho^2 + 2f_1\rho + 2f_2\rho\right] = \frac{2y}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{\rho^2}{2\rho} - \frac{2y^2 + 2k^2x^2}{\left(1+k^2\right)2\rho} =$$

$$= \frac{1}{2\rho\left(k^2+1\right)}\left(4\rho y\sqrt{1+k^2} - \rho^2\left(1+k^2\right) - 2y^2 - 2k^2x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho\left(k^2+1\right)}\left(-(y-R)^2 - k^2x^2 + \frac{R^2}{2}\right) = \frac{2}{\rho\left(k^2+1\right)R^2k^2}\left(-\frac{(y-R)^2}{\frac{R^2k^2}{2}} - \frac{x^2}{\frac{R^2}{2}} + 1\right),$$

де $R = \rho\sqrt{1+k^2}$.

2.4. Нормалізовані рівняння геометричних об'єктів

Визначення. Рівняння $\omega(P) = 0$ межі ГО Ω називається нормалізованим до m-го порядку, якщо функція $\omega(P)$ задовольняє умовам

$$\omega(P)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial\omega}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 1, \frac{\partial^k\omega}{\partial\nu^k}\Big|_{\partial\Omega} = 0, (k = 2,3,\ldots,m). \qquad (2.12)$$

Умови (2.12) означають, що вздовж нормалі, проведеної в точці $P_0 \in \partial\Omega$, функція $\omega(P)$ приблизно дорівнює відстані $r = r(P, \partial\Omega)$ від межі $\partial\Omega$ ГО до точок цієї нормалі. Дійсно, розкладаючи функцію ω в ряд в околиці точки $P_0 \in \partial\Omega$ за напрямом нормалі ν, отримуємо

$$\omega(P) = r + \frac{1}{(n+1)!}\frac{\partial^{m+1}\omega(P_0 + \theta r\nu)}{\partial\nu^{m+1}}r^{m+1},$$

де $0 < \theta < 1, \nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots), r = \|P_0 - P\|$. Очевидно, що нормальне рівняння межі ГО є нормалізованим до будь-якого порядку. Однак недоліком нормального

рівняння $f(P)=0$ є те, що функція $f(P)$ у внутрішніх точках ГО не завжди диференціюється.

Методика побудови рівнянь меж ГО, описана в [9, 10], дозволяє забезпечити виконання умови

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}\neq 0. \tag{2.13}$$

Дійсно, якщо $\Sigma_i=[\sigma_i(x,y)\geq 0]$ і $\left.\frac{\partial\sigma_i}{\partial\nu_i}\right|_{\partial\Sigma_i}\neq 0$ (це умова для опорних функцій зазвичай легко виконати), де ν_i — нормаль до $\partial\Sigma_i$, то при використанні достатньо повних систем R-функцій R_α, R_p у тих точках $\partial\Omega$, де одночасно $\omega=0$ і $\sigma_i=0$ отримуємо

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=\pm\left.\frac{\partial\sigma_i}{\partial\nu_i}\right|_{\partial\Omega}\neq 0.$$

Якщо прийняти, що нормаль ν спрямована в область, де $\omega>0$, то умову (2.13) можна уточнити: $\left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}>0$. Маючи рівняння $\omega_1=0$, таке, що $\left.\frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}>0$, неважко побудувати рівняння $\partial\Omega$ $\omega=0$, нормалізоване до першого порядку.

Теорема. Якщо $\omega_1\in C^m$ задовольняє умовам $\omega_1|_{\partial\Omega}=0$ і $\left.\frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}>0$, то функція

$$\omega\equiv\frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2+(\nabla\omega_1)^2}}\in C^{m-1} \tag{2.14}$$

задовольняє умовам нормалізованності до першого порядку у всіх точках елементів межі $\partial\Omega$ ГО, де визначена нормаль.

Доказ. З умови $\omega_1|_{\partial\Omega}=0$ випливає, що на $\partial\Omega$ функція ω зберігає стале значення. Відомо, що градієнт функції нормальний до її еквіпотенціалей. Отже, в силу умови $\left.\frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}>0$, нормаль ν має напрям вектора $grad\omega_1$. Тому $\nu=\frac{\nabla\omega_1}{|\nabla\omega_1|}, \frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}=|\nabla\omega_1|$. Диференціюючи (2.14), отримуємо

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}\left[\omega_1^2 + (\nabla\omega_1)^2\right]^{-1/2} + \omega_1\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\omega_1^2 + (\nabla\omega_1)^2\right]^{-1/2}\Bigg|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}\left|\nabla\omega_1\right|^{-1}\Bigg|_{\partial\Omega} = 1.$$

Із доказів цієї теореми випливає, що вираз у знаменнику формули (2.14) можна замінити будь-яким іншим, виразом , який не обертається у нуль, що збігається на $\partial\Omega$ з $\left|\nabla\omega_1\right|^{-1}$. Це дозволяє застосовувати таку формулу:

$$\omega \equiv \frac{\omega_1}{\left|\nabla\omega_1\right|\,|_{\partial\Omega}}, \qquad (2.15)$$

у припущенні, що $\left|\nabla\omega_1\right|\,|_{\partial\Omega} \neq 0$ і є проста можливість продовжити $\left|\nabla\omega_1\right\|_{\partial\Omega}$ всередину області Ω так, що це продовження не звертається в нуль. Наприклад $\omega_1 = y - \varphi(x), \quad \left|\nabla\omega_1\right| = \sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}$, то нормалізоване рівняння знаходимо за формулою

$$\omega = \frac{y-\varphi(x)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}}.$$

Аналогічно, якщо $\omega_1 = x - \psi(y), \quad \left|\nabla\omega_1\right| = \sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2}$, можемо написати

$$\omega = \frac{x-\psi(y)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2}}.$$

За цими формулами зручно призводити до нормалізованого виду функції, задані явно. Однак для функцій $\omega(x,y)$ складного виду безпосереднє застосування формул (2.14)-(2.15) пов'язане зі значними обчислювальними труднощами. Тому на практиці частіше застосовується інший, більш економний метод, що базується на властивостях деяких систем R-операцій, що дозволяє, нормалізувавши опорні функції (примітиви), перенести цю їх властивість на рівняння відповідного складного ГО.

Скажемо кілька слів про нормалізацію примітивів. Для таких простих областей, як напівплощина, смуга, шар, коло, сфера та багатьох інших,

нормалізовані рівняння виходять шляхом введення простих нормувальних множників.

Наприклад, нормалізоване рівняння кола можна записати одним з трьох способів:

$$\frac{R^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0\,, \quad \frac{R^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{3R^2 + x^2 + y^2}} = 0\,. \quad \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2R} = 0\,,$$

Перше з цих рівнянь має розрив в початку координат, тому ми його розглядати не будемо. Друге з них до цього часу застосовувалося найбільш часто. Проте при $R \to 0$ воно, всупереч очікуванням, не переходить у нормальне рівняння точки, яке має вигляд $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$. І лише третє рівняння задовольняє всім умовам: безперервності, диференційовності, і переходу до нормального рівняння точки при $R \to 0$. Для горизонтальної смуги нормалізовані рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{b^2 - y^2}{2b} = 0\,, \qquad \frac{b^2 - y^2}{\sqrt{3b^2 + y^2}} = 0\,.$$

Аналіз цих рівнянь аналогічний попередньому. Друге з рівнянь при $b \to 0$ переходить в нормальне рівняння $|y| = 0$ осі абсцис.

Теорема. Нехай $\{\Sigma_i = (\sigma_i \geq 0)\}$ є деяка система ГО, рівняння меж яких $\sigma_i = 0$ нормалізовані до першого порядку: $\frac{\partial \sigma_i}{\partial \nu_i} = 1$ на $\partial\Sigma_i$. Тоді при використанні систем R-функцій R_α, R_p для побудови функції $\omega = f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k)$ буде виконуватися умова нормалізованості $\left.\frac{\partial \omega}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 1$, де ν — нормаль до $\partial\Omega$, спрямована в область $\Omega = (\omega \geq 0)$.

Доказ цієї теореми наведено в [9]. Таким чином, якщо рівняння $\sigma_i = 0$ опорних областей нормалізовані до першого порядку, то автоматично виявляється нормалізованим і рівняння $\omega(P) = 0$ межі складної області Ω.

Однак описаний алгоритм побудови нормалізованих рівнянь може не спрацювати в точках стику елементів, навіть якщо в цих точках межа є

гладкою. При цьому у всіх інших точках ГО рівняння $\omega = 0$ буде нормалізованим. Простежимо це явище на прикладі.

Приклад. Нехай $\Omega = \Sigma_1 \wedge \Sigma_2$, де $\Sigma_1 = \left(\frac{y - x^3}{\sqrt{1 + 9x^4}} \geq 0 \right)$ — область, розташована вище кубічної параболи, $\Sigma_2 = (y \geq 0)$ — верхня півплощина. Кожна з нерівностей нормалізована на межі відповідної області. Очевидно, що межа $\partial\Omega$ — гладка. Рівняння $\partial\Omega$ можна записати у вигляді

$$\omega \equiv \frac{y - x^3}{\sqrt{1 + 9x^4}} \wedge_\alpha y \equiv \frac{1}{1 + \alpha} \left[\frac{y - x^3}{\sqrt{1 + 9x^4}} + y - \sqrt{\left(\frac{y - x^3}{\sqrt{1 + 9x^4}} \right)^2 + y^2 - 2\alpha y \frac{y - x^3}{\sqrt{1 + 9x^4}}} \right] = 0.$$

Тоді $\left. \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{2 - \sqrt{2 - 2\alpha}}{1 + \alpha}$. Таким чином, похідна по нормалі до $\partial\Omega$ в точці $(0,0)$ дорівнює одиниці, якщо $\alpha = 1$. Але якщо взяти $\alpha \equiv 1$, то це буде означати, що ми вирішили скористатися R-операцією $x \wedge_1 y$, яка призводить до недиференціюємості функції ω в межах розглянутої області. В інших же точках $\partial\Omega$ умова $\frac{\partial \omega}{\partial \nu} = 1$ виконується при будь-яких значеннях $\alpha < 1$. Для усунення цього недоліку виберемо функцію α, що задовольняє умові $|\alpha| < 1$, так, щоб при $P \to (0,0)$ $\alpha \to 1$. Реалізувати це можна різними способами, наприклад, представивши α формулою $\alpha = \left(1 + \left(\frac{y - x^3}{\sqrt{1 + 9x^4}} \right)^2 + y^2 \right)^{-1}$. При такому підході величина α, що входить у систему

$$\{R_\alpha\} = \begin{cases} \omega_1 \wedge_\alpha \omega_2 = \frac{1}{1 + \alpha} \left(\omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\alpha\omega_1\omega_2} \right) \\ \omega_1 \vee_\alpha \omega_2 = \frac{1}{1 + \alpha} \left(\omega_1 + \omega_2 + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\alpha\omega_1\omega_2} \right) \end{cases},$$

залежить від опорних функцій. Таке подання особливо зручно в тих випадках, коли точки стику елементів межі заздалегідь невідомі або їх складно визначити. Тобто α можна вибирати у вигляді

$$\alpha = \left(1 + \omega_1^2 + \omega_2^2 \right)^{-1}.$$

Очевидно, що при такому виборі α умова $\alpha < 1$ виконується скрізь, за винятком точок стику елементів $\omega_1 = 0$ і $\omega_2 = 0$, де $\alpha = 1$.

Приклад. Написати нормалізоване у всіх регулярних точках межі рівняння ГО, зображеного на рис. 2.4.

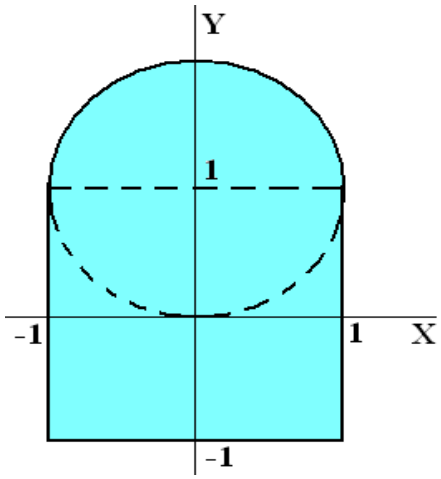
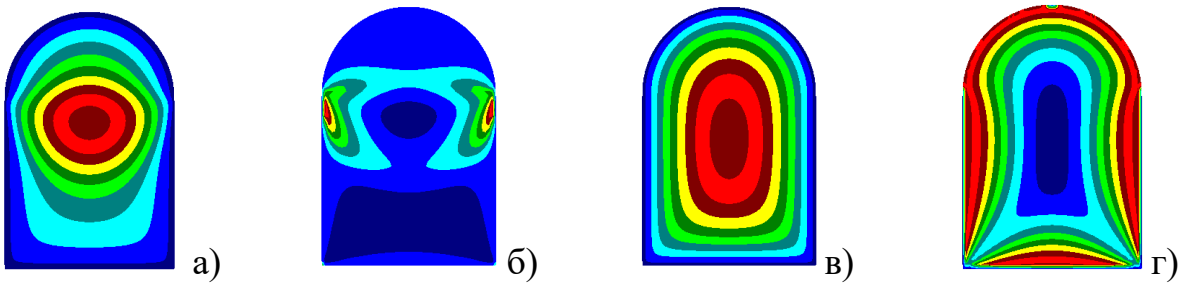


Рис. 2.4. Межі рівняння ГО.

В якості опорних областей вибираємо

$$\Sigma_1 = \left[\frac{1-x^2}{2} \geq 0\right],\ \Sigma_2 = \left[\frac{1-y^2}{2} \geq 0\right],\ \Sigma_3 = \left[\frac{1-x^2-(y-1)^2}{2} \geq 0\right].$$

Всі наведені нерівності нормалізовані. Логічну формулу для ГО Ω будуємо у вигляді $\Omega = (\Sigma_1 \wedge \Sigma_2) \vee \Sigma_3$. Якщо при побудові рівняння межі ГО замінити символи $\wedge, \vee$ на $\wedge_0, \vee_0$, то отримаємо функцію ω, для якої умову нормалізованості в точках $(-1,1), (1,1)$ буде порушено, хоча в цих точках межа побудованої області є гладкою. Це явище досить яскраво відображено як на картині ліній рівня функції ω (рис.2.5, а), так і на картині ліній рівня $\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2$ (рис.2.5, б). Якщо ж замінити символи $\wedge_0, \vee_0$ на $\wedge_\alpha, \vee_\alpha$, де $\alpha = \frac{1}{1+\omega_1^2+\omega_3^2}$, то отримаємо результат, представлений на рис.2.5, в, г, який ілюструє поведінку функції ω після усунення дефекту, пов'язаного з порушенням її нормалізованості в точках $(-1,1),\ (1,1)$.



а) б) в) г)

Рис.2.5. Функції після усунення дефекту порушення нормалізованості.

2.5. Побудова симетричних функцій для симетричних геометричних об'єктів

Феномен симетрії, який спостерігається в природі, починаючи з молекул, кристалів, рослинного і тваринного світу, був запозичений і перенесений людиною в архітектуру, будівництво, машинобудування не тільки з розумінь естетики, а й для досягнення раціональності, стійкості, надійності , полегшеності і здешевлення будівель, споруд, машин, механізмів та інших конструкцій і виробів. Все це знайшло відображення в геометрії, алгебрі, аналізі, інших розділах математики і стимулювало вивчення законів симетрії, методів їх опису і застосування, постановку нових проблем. Багато народів з найдавніших часів володіли уявленням про симетрію в широкому сенсі - як еквівалент врівноваженості і гармонії.

Відбиття - найбільш відомий різновид симетрії (рис.2.6, а). Поняття дзеркальної симетрії має фундаментальне значення для математичної теорії симетрії, але роль його в науці незрівнянно ширше. Як приклад можна привести відкритий Пастером зв'язок між обертанням поляризованого світла, розчинами деяких хімічних речовин і відсутністю дзеркальної симетрії в формах кристалів, що випадають з цих розчинів. Пояснення спостережуваного Пастером ефекту полягає в тому, що якщо і кристал, і розчин обертають площину поляризації світла, то окремі молекули досліджуваної речовини не можуть володіти дзеркальною симетрією.

Будь-який геометричний об’єкт (ГО), який необмежено повторюється в просторі через визначену відстань дозволяє отримати симетрію, відому під назвою трансляції, або паралельного перенесення (рис.2.6, б).

У калейдоскопі симетрія створюється за допомогою двох дзеркал, які перерізаються під належно обраним кутом. При цьому можна створити конфігурації, що володіють поворотною і дзеркальній симетрією (рис.2.6, в). Це означає, що зовнішній вигляд візерунка не зміниться, якщо його повернути на певний кут навколо осі, що проходить через центр. Якщо кут повороту дорівнює 90^o, то, щоб зробити повний оберт на 360^o, необхідно зробити один за іншим чотири оберти. У цьому випадку вісь називається віссю симетрії четвертого порядку. Якщо кут повороту дорівнює 60^o, то вісь називається віссю симетрії шостого порядку і так далі.

Існують також геометричні об'єкти з поворотною симетрією, що не володіють площинами дзеркальної симетрії. Дитяча вертушка (рис.2.6, г) може служити прикладом фігури з поворотною симетрією, але не володіє площинами симетрії, тому що фігура заснована на обертальних рухах лише в одну сторону (без відображення).



а) б) в) г)

Рис.2.6. Приклади симетрії.

Метод R-функцій дозволяє будувати для складних геометричних об'єктів рівняння їх меж виду $\omega(x,y,z)=0$, де $\{\omega(x,y,z)\}$ - елементарні функції, представлені єдиним аналітичним виразом. При цьому важливо, наскільки простими з обчислювальної точки зору виявляються формули $\omega(x,y,z)$. Цікавими в цьому аспекті є геометричні об'єкти, що володіють симетрією. Так, в зворотній задачі аналітичної геометрії виникла проблема побудови рівнянь складних геометричних об'єктів, що складаються з елементів, що багато разів повторюються з тих чи інших законів симетрії.

Розглянемо ГО Ω, що складається з системи ГО $\Sigma_i = (\sigma_i(x,y) \geq 0)$, де $\sigma_i(x,y) = \omega_0(x - hi, y)$, $i \in Z$, розташованих з періодом h $(h > 2r)$ уздовж осі абсцис.

Класична схема застосування теорії R-функцій.

Нехай $\Sigma_1 = \lfloor \sigma_1 \equiv a^2 - x^2 \geq 0 \rfloor$, $\Sigma_2 = \lfloor \sigma_2 \equiv b^2 - y^2 \geq 0 \rfloor$ - вертикальна і горизонтальна нескінченні смуги, переріз яких представляє заданий прямокутник, а отвори Σ_i визначаються як

$$\Sigma_i = \{\sigma_i \equiv r^2 - (x - hi)^2 - y^2 \geq 0\}, \quad i = 3,...,m..$$

Отже, область Ω можна задати логічною формулою

$$\Omega = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \left(\bigcap_{i=3}^{i=m} \overline{\Sigma_i} \right)$$

За допомогою R-функцій область, зображену на рис.2.7, можна завдати нерівністю

$$\Omega = \left[\omega \equiv (\sigma_1 \wedge_\alpha \sigma_2) \wedge_\alpha \left(\overline{\sigma_3} \wedge_\alpha ... \wedge_\alpha \overline{\sigma_m} \right) \geq 0 \right]. \qquad (2.16)$$

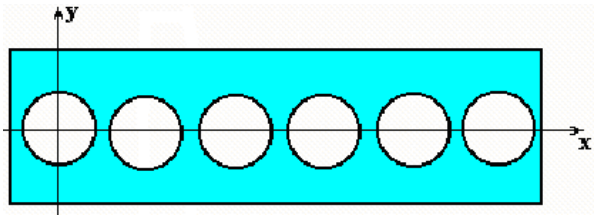


Рис.2.7. Задана область.

Таким чином, приходимо до громіздкої формули (2.16) з великим числом R-операцій, зростаючим з ростом числа отворів. Ще більш складні формули отримаємо, слідуючи описаному підходу, якщо отвори розташуємо періодично по двом або більшій кількості напрямків або кіл. Тим часом, інформація про всі сукупності отворів цілком визначається рівнянням одного отвору і типом симетрії (трансляції заданого типу), а також формою тієї області, в яку вони укладені. Як врахувати цей фактор, щоб отримати максимально просте рівняння?

Перетворення координат для побудови рівнянь, відповідних ГО з симетрією трансляції вздовж прямої.

Теорема 1. Нехай трансляційна область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x,y) \geq 0]$ ($\sigma_0(x,y) \in C^m(R^2)$) симетрична щодо осі Oy і може бути укладена в вертикальну смугу $-a < x < a,$ а області $\Sigma_i = [\sigma_0(x - hi, y) \geq 0],\ i \in Z$ отримані в результаті перетворення переносу області Σ_0 вздовж осі абсцис на величини , кратні $h > 2a$. Тоді рівняння межі $\partial\Omega$ області $\Omega = \bigcup_{i \in Z} \Sigma_i$ має вигляд

$$\omega(x,y) \equiv \sigma_0(\mu(x,h), y) = 0,$$

де

$$\mu(x,h) = \frac{h}{\pi} \arcsin\left\{ \frac{\sin\left(\frac{x\pi}{h}\right) C_m(a,h) S_1(a,h)}{S_1(a,h) C_m(a,h) + [1 - S_1(a,h)] p^{m+1}(x,a,h)} \right\}, \qquad (2.17)$$

$$S_1(a,h) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a\pi}{2h}\right),\ \ C_m(a,h) = 2^{m+1} \cos^{2(m+1)}\left(\frac{a\pi}{h}\right),$$

$$p(x,a,h) = |S_2(x,a,h)| - S_2(x,a,h), \qquad S_2(x,a,h) = \sin^2\left(\frac{a\pi}{h}\right) - \sin^2\left(\frac{x\pi}{h}\right).$$

Графік функції (2.17) при $h = 2,\ \ a = 0.5$ наведено на рис.2.8.

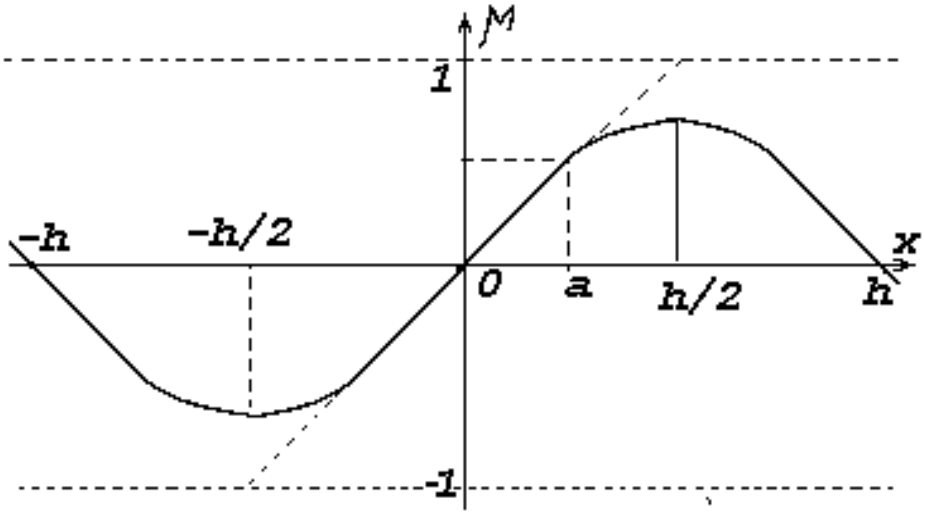


Рис.2.8. Графік функції μ від x.

Доведення. Якщо $k = 2l$ ($l \in Z$), то при $x \in (2lh - a, 2lh + a)$ функція $\mu_n(x,h)$ є лінійною. Функція $\omega(x,y) \equiv \sigma_0(x - 2lh, y)$ на цих інтервалах має нулі, які утворюють межу трансляційної області. Якщо ж $k = 2l + 1$ ($l \in Z$), то при $x \in ((2l+1)h - a, (2l+1)h + a)$ функція $\omega(x,y)$ приймає вид $\omega(x,y) \equiv \sigma_0(-x + (2l+1)h, y)$,

тобто є дзеркальним відображенням трансльованої області $\Sigma_0 = [\sigma_0(x,y) = 0]$. Оскільки $\sigma_0(-x,y) = \sigma_0(x,y)$, то функція $\omega(x,y) \equiv \sigma_0(x-(2l+1)h, y)$ і її нулі утворюють межу трансльованої області $\Sigma_{2l+1}(l \in Z)$. При $x \in [kh+a, (k+1)h-a]$ ($k \in Z$) функція $\omega(x,y)$ не має нулів, так як за припущенням $|\mu_n(x,h)| > a$. Таким чином, рівняння задовольняється лише в точках межі $\partial\Omega$ області Ω. Теорема доведена.

На практиці зручно замість функції (2.17) користуватися частковими сумами ряду Фур'є для функції

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\frac{h}{2} \le x \le \frac{h}{2}, \\ h-x, & \frac{h}{2} \le x \le h, \\ -h-x, & -h \le x \le -\frac{h}{2}. \end{cases}$$

Тоді

$$\mu(x,h) = \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin \frac{(2i-1)x\pi}{h}.$$

При цьому, однак, необхідно пам'ятати, що використання цих часткових сум може привести до значних похибок при малому числі доданків.

Перетворення координат для побудови рівнянь, відповідних ГО з точковою симетрією циклічного типу. Нехай $\Sigma_0 = [\sigma_0(x,y) \ge 0]$ є деяка область. Тоді $\Sigma_1 = [\sigma_1(x,y) \equiv \sigma_0(x-r_0, y) \ge 0]$ є результат зміщення цієї області на відстань r_0 уздовж осі абсцис. Поставимо задачу: написати рівняння $\omega(x,y) = 0$ межі $\partial\Omega$ ГО $\Omega = \bigcup_{k=1}^{k=n} \Sigma_k$, що є з'єднанням n областей Σ_i $(i = 1,...,n)$, отриманих в результаті повороту області Σ_1 навколо початку координат на кути $\frac{2\pi k}{n}$ $(k = 0,1,...,n-1)$.

Теорема 2. Нехай трансляційна область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x,y) \ge 0]$ симетрична щодо осі абсцис ($\sigma_0(x,y) \in C^m(R^2)$), а область $\Sigma_1 = [\sigma_0(x-r_0, y) \ge 0]$ може бути розміщена усередині сектора $-\alpha \le \theta \le \alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{n}$.

Області $\Sigma_k = \left[\sigma_0\left(r\cos(\theta - 2\pi k/n) - r_0, r\sin(\theta - 2\pi k/n)\right) \geq 0\right]$ $k = 0,1,...,n-1$ отримані в результаті повороту області $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ навколо початку координат на кути $2\pi k/n$ ($k = 0,1,...,n-1$). Тоді рівняння межі $\partial\Omega$ області $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1}\Sigma_k$ має вигляд

$$\omega(x,y) \equiv \sigma_0(r\cos\mu(\theta,n) - r_0, r\sin\mu(\theta,n)) = 0, \quad \left(r = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = arctg\,\frac{y}{x}\right), \qquad (2.18)$$

Доказ. При $\theta \in \left(\left(2\pi k/m\right) - \alpha, \left(2\pi k/m\right) + \alpha\right)$ $(k = 0,1,...,m-1)$ функція $\mu_n(\theta,m)$ є лінійною і рівняння (2.17) можна переписати у вигляді $\omega(x,y) \equiv \sigma_0\left(r\cos\left((-1)^k\left(\theta - 2\pi k/m\right)\right) - r_0, r\sin\left((-1)^k\left(\theta - 2\pi k/m\right)\right)\right) = 0$. Оскільки область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x,y) \geq 0]$ є симетричною відносно осі Ox, то рівняння (2.17) описує межу області Ω, отриманої в результаті перетворення повороту області Σ_0 навколо початку координат на кути $2\pi k/m$ $(k = 0,1,...,m-1)$. При $\theta \in \left(\left(2\pi k/m\right) + \alpha, \left(2\pi(k+1)/m\right) - \alpha\right)$ $(k = 0,1,...,m-1)$ функція $\omega(x,y)$ виду (2.18) не має нулів, так як за припущенням $|\mu_n(\theta,m)| > \alpha$. Таким чином, рівняння (2.18) задовольняється лише в точках межі області Ω. Теорема доведена.

На практиці часто зручно замість функції $\mu(\theta,n)$ користуватися частковими сумами ряду Фур'є, як наближеннями функції

$$\mu(n\theta) = \frac{8}{n\pi}\sum_k (-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\dfrac{n\theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}.$$

Вся інформація записана в буквених параметрах, що дозволяє, автоматизувати процес трансляції для n-кутника.

2.6. Поняття структури розв’язку. Структури розв'язків основних типів крайових задач для рівнянь другого порядку

Математичні моделі силових, деформаційних, температурних, електростатичних та електродинамічних, гідродинамічних та інших полів, як правило, мають вигляд

$$\begin{cases} Au = f, \\ L_i u \mid_{\partial\Omega_i} = \varphi_i, \quad i = 1,...,N, \end{cases} \tag{2.19}$$

де A і L_i — оператори, що діють, відповідно, всередині області Ω й на її граничних ділянках $\partial\Omega_i$ (не обов'язково різних), f і φ_i — відомі функції (збудники поля), а u — шукана функціональна компонента. У залежності від характеру розглянутих фізичних полів, u може бути скаляром (температура, електричний або магнітний потенціал, функція струму), вектором (швидкість, напруженість електричного або магнітного поля), тензором (деформація, напруги) або мати більш складний характер. Так, наприклад, в задачах термомеханіки, магнітної гідродинаміки, електропружності і багатьох інших необхідно одночасно розглядати поля різної фізичної природи, що знаходяться у взаємодії між собою. У відповідності з цим (2.19) може представляти собою систему рівнянь. Оператор A акумулює основні фізичні закони, що керують цими полями, і представляє їх в математичній формі. Характер фізичного поля залежить, однак, не тільки від цих фізичних законів, але також від форми областей , в яких ці поля порушуються, форми граничних ділянок, законів взаємодії тіла, що міститься в області Ω, з зовнішнім середовищем.

Серед труднощів, які виникають у процесі побудови математичних моделей, є одна специфічна, пов'язана з побудовою функцій з заданими властивостями на заданих ГО. Суть цієї проблеми полягає в тому, що в моделі (2.19) присутні два різних види інформації: аналітична (A і L_i, f і φ_i) і геометрична (форма Ω і $\partial\Omega_i$). Будь-який метод розв'язування крайової задачі повинен спільно переробляти обидва види інформації, що вимагає перетворення геометричної інформації до аналітичного вигляду.

В таких класичних методах, як метод розділення змінних або метод інтегральних перетворень, форма областей і ділянок їх меж враховується шляхом вдалого вибору координатних систем, в методі конформних відображень — при побудові відображає функції, варіаційних методах — вдалим вибором координатних послідовностей. Методи сіток і кінцевих

елементів гранична інформація враховується шляхом розгляду вузлів, близьких до межі, тобто на дискретному рівні. У RFM облік геометричної інформації здійснюється більш ясно і досить просто. Так, наприклад, рішення крайової задачі Діріхле, в якій задані граничні значення шуканої функції $u\,|_{\partial\Omega} = \varphi$, явно міститься в пучку, представленому формулою $u = \varphi + \omega\Phi$.

Однак у постановці крайових задач можуть бути задані на межі не значення функцій чи їхніх часткових похідних, а деякі вирази, що їх містять. У таких випадках з'являється проблема побудови так званих структур розв'язків.

Визначення. Формула $u = B(\Phi)$, де Φ — елемент деякої множини M, а $B: \mathrm{M} \to X(\Omega)$, називається структурою розв'язку, що враховує умови $L_i u \Big|_{\partial\Omega_i} = \varphi_i, \quad i = 1,...,N$ і визначеної на M, якщо для всіх $\Phi \in \mathrm{M}$ $L_i B(\Phi) \Big|_{\partial\Omega_i} = \varphi_i, \quad i = 1,...,N$.

У загальному випадку GSS мають вигляд

$$u = B\left(A, L_j, \omega, \omega_1, ..., \omega_N\right)[\Phi] + B_0\left(A, L_j, \omega, \omega_1, ..., \omega_N\right)\left[f, \varphi_j\right], \qquad (2.20)$$

де $j \in (1,...,N)$. В круглих дужках перераховуються всі ті фактори, на підставі яких будуються оператори B, B_0, а у квадратних — ті, на які вони впливають, при цьому вони будуються так, щоб при будь-якому виборі $[\Phi]$ та $\left[f, \varphi_j\right]$ задовольняти ті чи інші умови крайової задачі (2.19).

У тих рідкісних випадках, коли вдається задовольнити всім цим умовам, отримуємо точний розв'язок; якщо це задовільнення розуміється в деякому узагальненому сенсі, то розв'язок виявляється наближеним.

У разі, коли формула (2.20) задовольняє лише рівнянню $Au = f$, її називають загальним розв'язком:

$$u = B(A, \omega)[\Phi] + B_0(A, \omega)[f].$$

У цьому випадку невизначені компоненти Φ повинні вибиратися з умови задовільнення $L_i u \Big|_{\partial\Omega_i} = \varphi_i, \quad i = 1,...,N$. Застосовувані для цієї мети методи

прийнято називати методами типу Трефтца. Однак загальними розв'язками можна скористатися лише у небагатьох випадках, для деяких типів рівнянь (наприклад, рівняння Лапласа, Пуассона, деяких класичних задач механіки, електростатики і т. д.). Тому в МСЕ і RFM в більшості випадків застосовують структури, що задовольняють всім (загальні структури) або частини (часткові структури) граничним умовам, тобто структури вигляду

$$u = B\left(L_j, \omega, \omega_1, ..., \omega_N\right)[\Phi] + B_0\left(L_j, \omega, \omega_1, ..., \omega_N\right)[\varphi_j].$$

Природно, чим складніше крайові умови, тим складніше вид структур. Особливо часто зустрічаються так звані крайові задачі змішаного типу, коли на одній частині межі задані граничні умови одного типу, на іншому — іншого і т. д.

Розглянемо структури для різних типів граничних умов.

1. Крайова задача Діріхле $u\,|_{\partial\Omega_i} = \varphi_i$.

Структура розв'язку, як показано Канторовичем, має вигляд

$$u = \frac{\sum \varphi_i \omega_i^{-1}}{\sum \omega_i^{-1}} + \omega\Phi.$$

2. Крайова задача Неймана $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Продовжимо граничні умови всередину області: $-D_1 u = \varphi + \omega\Psi$. Нехай $u = \Phi_1 + \omega\Psi_1$. Тоді $-D_1\Phi_1 - \Psi_1 D_1\omega - \omega D_1\Psi_1 = \varphi + \omega\Psi$. Враховуючи, що $D_1\omega = 1 + \omega\chi$, одержимо $-D_1\Phi_1 - \Psi_1 = \varphi + \omega\Phi_2$. Звідси $\Psi_1 = -D_1\Phi_1 - \varphi - \omega\Phi_2$. І остаточно, $u = \Phi_1 + \omega\left(-D_1\Phi_1 - \varphi - \omega\Phi_2\right)$.

3.Крайова задача третього типу $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu} + hu\right|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Продовжимо граничні умови всередину області: $-D_1 u + hu = \varphi + \omega\Psi$. Нехай $u = \Phi_1 + \omega\Psi_1$. Тоді $-D_1\Phi_1 - D_1\left(\omega\Psi_1\right) + h\Phi_1 + h\omega\Psi_1 = \varphi + \omega\Psi$. Враховуючи, що $D_1\omega = 1 + \omega\chi$, одержимо $-D_1\Phi_1 - \Psi_1 + h\Phi_1 = \varphi + \omega\Phi_2$. Звідси $\Psi_1 = -D_1\Phi_1 - \varphi + h\Phi_1 - \omega\Phi_2$. І остаточно, $u = \Phi_1 + \omega\left(-D_1\Phi_1 - \varphi + h\Phi_1 - \omega\Phi_2\right)$.

4. Крайова задача змішаного типу. $\left\{ u\ |_{\partial\Omega_1} = \varphi_1; \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu \ \Big|_{\partial\Omega_2} = \varphi_2 \right.$.

Розглянемо два способи побудови GSS.

Перший спосіб. Уявімо $u = \omega_1\Phi + \varphi_1,\ \Phi = \Phi_1 + \omega_2\Psi_1$.

Тоді $u = \omega_1\Phi_1 + \omega_1\omega_2\Psi_1 + \varphi_1$. Продовжимо граничні умови всередину області: $-D_1^2 u + hu = \varphi_2 + \omega_2\Psi_2$. Тоді

$-D_1^2(\omega_1\Phi_1) - \omega_1\Psi_1 D_1^2(\omega_2) - \omega_2 D_1^2(\omega_1\Psi_1) - D_1^2(\varphi_1) + h(\omega_1\Phi_1 + \omega_1\omega_2\Psi_1 + \varphi_1) = \varphi_2 + \omega_2\Psi_2.$

$-D_1^2(\omega_1\Phi_1) - (\omega_1 + \omega_2)\Psi_1 - D_1^2(\varphi_1) + h(\omega_1\Phi_1 + \varphi_1) = \varphi_2 + \omega_2\Phi_2$. Звідси

$\Psi_1 = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2}\left[-\varphi_2 - \omega_2\Phi_2 - D_1^2(\omega_1\Phi_1) - D_1^2(\varphi_1) + h(\omega_1\Phi_1 + \varphi_1) \right]$. І остаточно,

$u = \omega_1\Phi_1 + \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\left[-\varphi_2 - \omega_2\Phi_2 - D_1^2(\omega_1\Phi_1) - D_1^2(\varphi_1) + h(\omega_1\Phi_1 + \varphi_1) \right] + \varphi_1$.

Зауважимо, що при $h = 0$ отримаємо структуру для змішаної задачі виду

$$u\ |_{\partial\Omega_1} = \varphi_1; \frac{\partial u}{\partial \nu}\ \Big|_{\partial\Omega_2} = \varphi_2.$$

Другий спосіб. Скористаємося для кожної ділянки границі своєю структурою: $u_1 = \varphi_1 + \omega_1\Phi_1,\ u_2 = \Phi_2 + \omega_2\left(-D_1^{(2)}\Phi_2 - \varphi_2 + h\Phi_2 - \omega_2\Phi_{22} \right)$, де $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_{22}$ — довільні функції (невизначені компоненти GSS), а $D_1^{(2)} = (\nabla\omega_2, \nabla)$. Враховуючи, що в першу GSS похідні не входять, а в другій вони мають перший порядок, скориставшись формулою склеювання, отримуємо $u = \frac{u_1\omega_2^2 + u_2\omega_1}{\omega_1 + \omega_2^2}$.

Для переважної більшості наближених методів характерно зведення нескінченновимірної задачі до скінченновимірної. У даному випадку це досягається поданням невизначеної компоненти Φ, що входить в GSS у вигляді полінома $\Phi(x) \approx \Phi_N(x) = \sum_{i=1}^{N} C_i\psi_i(x)$, де $\{\psi_i\}$ — відомі елементи деякого функціонального простору M, що містить Φ, утворюють в ньому повну (в тому чи іншому сенсі) послідовність. Наприклад, якщо Φ є функція з $C^k(\Omega \cup \partial\Omega)$, $H^k(\Omega \cup \partial\Omega)$ або іншого аналогічного простору, то в якості $\{\psi_i\}$

можна взяти поліноми (степеневі, тригонометричні, Чебишева, Лежандра, Ерміта і т. д.) або сплайни. Якщо підставимо $\Phi_N(x)=\sum_{i=1}^{N}C_i\psi_i(x)$ в GSS, то прийдемо до формули виду $u=B_1(x,C_1,...,C_N)$, а для лінійних крайових умов — до формули $u=\sum_{i=1}^{N}C_i\chi_i(x)+\chi_0(x)$, де $\{\chi_i(x)\}$ — відома функціональна послідовність. Відзначимо, що тепер в якості невизначеною компоненти виступає вектор $(C_1,..C_N)$. Використовуючи неоднорідну частину $\chi_0(x)$, легко перейти від крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами до крайової задачі $Av=f_1;\ L_iv=0\ (i=1..m)$ з однорідними крайовими умовами. Для цього достатньо зробити заміну шуканої функції $u=v+\chi_0(x)$, а потім ввести позначення $f_1=f-A\chi_0(x)$.

Перехід до однорідних крайових умов часто має принципове значення. По-перше, простір функцій, які відповідають однорідним крайовим умовам (якщо вони, звичайно, лінійні), є лінійним функціональним простором, що важливо з точки зору теорії. По-друге, завдання стає істотно простіше з алгоритмічної точки зору.

Форма $u=\sum_{i=1}^{N}C_i\chi_i(x)+\chi_0(x)$ подання наближеного рішення характерна не тільки для методу R-функцій, але і практично для всіх наближених методів. Для варіаційних методів можливість побудови формул такого виду для практично будь-яких типів крайових умов та ГО, що надається методом R-функцій означає подолання основних труднощів, що виникають при побудові координатних функцій.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів $C_1,..,C_N$ можуть бути використані методи штрафів, колокацій, Бубнова-Гальоркіна, Трефтца, Рітца, найменших квадратів та ін. Розглянемо методи Рітца і найменших квадратів [15,16]. поліномів – це моменти згаданих функцій).

2.7. Методи розв'язання крайових задач

2.7.1. Метод найменших квадратів

Нехай функція

$$u = B_1(x, C_1, \ldots, C_N)$$

задовольняє всім крайовим умовам задачі. Підставивши її в рівняння $Au - f = 0$, знайдемо нев'язку

$$\delta(x, C_1, \ldots, C_N) = AB_1(x, C_1, \ldots, C_N) - f(x), \quad x \in \Omega$$

Необхідно вибрати постійні $C_1,\ldots,C_N$ так, щоб отримати нев'язку, яка найменш ухиляється від нуля.

Зажадаємо, щоб квадрат норми нев'язки по метриці

$$I(C_1, \ldots, C_N) = \left\| \delta(x, C_1, \ldots, C_N) \right\|^2_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \delta^2(x, C_1, \ldots, C_N) d\Omega$$

був мінімальний. Відповідна система рівнянь для знаходження C_j має вигляд:

$$\frac{\partial I}{\partial C_k} = 2 \int_\Omega \delta(x, C_1, \ldots, C_N) \frac{\partial \delta(x, C_1, \ldots, C_N)}{\partial C_k} d\Omega = 0$$

Якщо, як це зазвичай необхідно робити на практиці, для обчислення інтегралів вдатися до деякої квадратурної формули

$$\int_\Omega f(x) d\Omega \approx \sum_{j=1}^{N_1} \alpha_j f(x^j),$$

то прийдемо до системи

$$\sum_{j=1}^{N_1} \alpha_j \delta(x, C_1, \ldots, C_N) \frac{\partial \delta(x, C_1, \ldots, C_N)}{\partial C_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, N).$$

2.7.2. Метод Рітца

Цей метод – один з найбільш уживаних. У ньому крайова задача замінюється задачею про мінімум деякого функціонала I(u).

Якщо крайові умови лінійні і однорідні, то множина функцій, що відповідають їм, утворює лінійний простір $X(\Omega)$. Припустимо, що оператор A позитивний на $X(\Omega)$, тобто

$$(Au, u) \geq 0, \quad \forall u \in X(\Omega), \quad u \neq 0.$$

(Величина (Au,u) зазвичай пропорційна енергії, необхідної для збудження поля u(x).) Поле, відповідне рівнянню Au=f, повідомляє мінімум функціоналу:

$$I(u) = (Au,u) - 2(u,f) = \|u\|_A^2 - 2(u,f).$$

Дійсно, якщо існує точне рішення u_0, тобто якщо $Au_0 \equiv f$, то

$$I(u) = \|u\|_A^2 - 2(u,Au_0) = \|u\|_A^2 - 2(u,u_0)_A + \|u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 = \|u-u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$$

Звідси видно, що екстремум функціонала I(u) досягається при $u=u_0$. У результаті однорідності крайових умов $\chi_0(x) \equiv 0$. Тоді

$$I(C_1,...,C_N) = \left\| \sum_{j=1}^{N} C_j \chi_j(x) \right\|_A^2 - 2\sum_{j=1}^{N} C_j(\chi_j, f).$$

Прирівнявши нулю приватні похідні $\frac{\partial I}{\partial C_k}$, одержимо лінійну систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{N} (A\chi_j, \chi_k) C_j = (\chi_k, f) \quad (k = 1,...,N),$$

звану системою Рітца. Визначник цієї системи відмінний від нуля, якщо система $\{\chi_j\}$ лінійно незалежна. Якщо до того ж система $\{\chi_j\}$ повна в $X(\Omega)$ нормі $\|\cdot\|_A$ і виконується умова коерцитивності $(Au,u) \geq \gamma\|u\|^2, \gamma = const > 0$ (тобто оператор A є позитивно визначеним на $X(\Omega)$), то існує єдиний розв'язок u_0 крайової задачі і

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} C_j \chi_j(x) - u_0(x) \right\|_A \underset{N\to\infty}{\to} 0.$$

Для практичного застосування варіаційних методів виявляється важливим вміння відрізнити природні граничні умови від головних. Якщо порядок оператора A дорівнює 2m, а порядок кожного граничного оператора L_i дорівнює, відповідно, $m_i, i = 0..m-1$ (граничні оператори розташовані по мірі зростання їх порядків, тобто $m_i \leq m_{i+1}$), тоді крайові умови $L_j u = 0$ з порядком оператора $0 \leq m_j < m$ будуть головними (стійкими) граничними умовами, а

крайові умови $L_j u = 0$ з порядком оператора $m \le m_j < 2m$ — природними (умови трансверсальності).

Покажемо, що для рівняння $-\Delta u = f(P)$ гранична умова задачі Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0 \qquad (2.21)$$

природня. Нехай функції u і v задовольняють умові (2.55). Тоді

$$(-\Delta u, v) = -\int_\Omega v \Delta u d\Omega,$$

і за формулою Гріна

$$(-\Delta u, v) = \int_\Omega gradu * gradv d\Omega - \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

В силу умови (2.21), остаточно маємо:

$$(-\Delta u, v) = \int_\Omega gradu * gradv d\Omega;$$

права частина останньої рівності симетрична відносно u і v. Тепер

$$(Au, u) = \int_\Omega (gradu)^2 d\Omega,$$

причому останній вираз має сенс і позитивно для будь-якої безперервно диференційованої в $\overline{\Omega}$ функції, незалежно від того, задовольняє вона умові (2.21), чи ні.

Функціонал F(u) тепер можна представити у вигляді

$$F(u) = (Au, u) - 2(f, u) = \int_\Omega [(gradu)^2 - 2fu] d\Omega.$$

Будемо розглядати цей функціонал на множині всіх двічі безперервно диференціюємих $\overline{\Omega}$ функцій, не припускаючи, що ці функції задовольняють яким-небудь крайовим умовам, і нехай функція $u_0(P)$ реалізує мінімум F(u) на зазначеному множині. Позначимо через t довільне дійсне число і через $\eta(P)$ — довільну функцію, двічі безперервно диференційовану в $\overline{\Omega}$. Очевидно, $F(u_0 + t\eta) \ge F(u_0)$. Якщо функція η фіксована, то $F(u_0 + t\eta)$ функція незалежної змінної t; остання нерівність означає, що ця функція має мінімум при t=0. Але тоді необхідно

$$\frac{d}{dt}F(u_0+t\eta)\Big|_{t=0}=0.$$

Знайдемо

$$F(u_0+t\eta)=F(u_0)+2t\int_\Omega(gradu_0*grad\eta-f\eta)d\Omega+t^2\int_\Omega(grad\eta)^2d\Omega.$$

Диференціюючи по t, вважаючи $t=0$ і прирівнюючи нулю отриманий результат, отримаємо

$$\int_\Omega(gradu_0*grad\eta-f\eta)d\Omega=0 \qquad (2.22)$$

За формулою Гріна

$$\int_\Omega gradu_0*grad\eta d\Omega=-\int_\Omega\eta\Delta u_0 d\Omega+\int_S\eta\frac{\partial u_0}{\partial n}dS,$$

і рівність (2.22) приймає вигляд

$$-\int_\Omega\eta(\Delta u_0+f)d\Omega+\int_S\eta\frac{\partial u_0}{\partial n}dS=0.$$

В силу довільності функції $\eta(P)$ отримуємо

$$\Delta u_0+f=0 \text{ в } \Omega \text{ і } \frac{\partial u_0}{\partial n}\Big|_S=0,$$

що і потрібно було довести.

Ефективність використання структурних формул у поєднанні з наведеними методами істотно залежить від вибору апроксимуючих поліномів $\{\psi_j\}$. Оператор B структури рішення, впливаючи на ці поліноми, «деформує» їх у послідовність $\{\chi_j\}$, і тому від апроксимаційних властивостей функцій $\{\chi_j\}$ істотно залежить характер наближення до розв'язання крайової задачі. Від послідовності $\{\chi_j\}$ залежить також обумовленість і деякі інші характеристики матриці $\{a_{ij}\}$ системи алгебричних рівнянь для визначення сталих C_j. Зокрема, якщо число N постійних C_j велике, то обсяг обчислень може виявитися неприйнятним внаслідок дефіциту пам'яті ЕОМ. Більшість із згаданих методів такі, що коефіцієнти a_{ij} і є інтегралами (або сумами з

великим числом доданків) по області Ω. Ці труднощі можна значною мірою зменшити, якщо в якості функцій ψ_j вибирати фінітні функції з носіями малого діаметра. Тоді число ненульових елементів матриці $\{a_{ij}\}$ складе не N^2, як у загальному випадку, а αN, $\alpha = const$. Їх частка в загальному числі елементів дорівнює αN^{-1}, і, отже, зменшується з ростом N. Крім того, обчислення кожного коефіцієнта матриці $\{a_{ij}\}$ полягає в обчисленні інтеграла не по всій області Ω, а тільки по перерізу носіїв функцій ψ_j. Правда, при цьому виграш буде лише в тому випадку, якщо з зменшенням області інтегрування не доведеться зменшувати його крок. Це обумовлює додаткові вимоги до функцій ψ_j, а саме: під знак інтегралів, через які виражені коефіцієнти a_{ij}, функції ψ_j входять співмножники виду $Q\psi_j R\psi_k$, де Q і R – відомі лінійні диференціальні оператори, порядок яких залежить від порядку рівняння $Au = f$ і вибраного методу. Тому, щоб конструктивний апарат не залежав від порядку крайової задачі, бажано мати можливість легко обчислювати значення не тільки функцій ψ_j, але і їх похідних до будь-якого порядку. Крім того, оскільки квадратурні формули зазвичай орієнтуються на апроксимацію підінтегральних функцій (не рахуючи вагових) поліномами, бажано, щоб легко обчислювалися і інтеграли від добутків цих функцій на поліноми (для степеневих поліномів – це моменти згаданих функцій).

Зазначені вище труднощі вдається в значній мірі подолати, якщо використовувати в якості апроксимуючих поліномів сплайни.

При вирішенні крайових задач математичної фізики широко використовуються проекційні та варіаційні методи. На практиці вони почали застосовуватися раніше методів сіткового типу, однак по мірі ускладнення вирішуваних завдань у все більшій мірі виявлялися їхні серйозні недоліки: труднощі побудови координатних функцій, що задовольняють заданим граничним умовам при скільки-небудь складною формою області, і трудомісткість обчислення квадратур.

Протягом кількох десятиліть вважалося (і про це писали багато авторів), що перша з цих проблем практично нездолання. Таке твердження стимулювало, з одного боку, розвиток і використання теорії сіткових методів, методу кінцевих елементів та інших методів, в яких гранична інформація враховується наближено, а з іншого — пошук таких підходів, в яких крайові умови були б природними і їх можна було б не задовольняти.

3 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ У РЕГУЛЯРНИХ ХВИЛЕВОДАХ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ

3.1. Знаходження власних значень у хвилеводі для різних типів хвиль у системі ПОЛЕ

У цьому розділі приведенні результати знаходження власних значень для регулярних хвилеводів з поперечним перерізом у вигляді хреста та сніжинки Коха методом R-функцій. Для розв'язання ряду задач ми скористались структурою розв'язку за методом Рітца. Розрахунки проведені у системі ПОЛЕ для хвилеводів наступних поперечних перерізів:

- Сніжинка Коха зі значенням параметра $k = 1$;
- Сніжинка Коха зі значенням параметра $k = 4$;
- Сніжинка Коха на сторонах квадрата зі значенням параметра $k = 2$;
- Хрест Коха на сторонах трикутника зі значенням параметра $k = 2$;
- Хрест Коха на сторонах квадрата зі значенням параметра $k = 2$;
- Хрест Коха на сторонах квадрата зі значенням параметра $k = 3$;

Головною метою є демонстрація переваг методу R-функцій у вирішенні крайових задач Діріхле та Неймана. У якості базисних функцій було обрано поліноми Чебишева чотирнадцятого ступеня.

3.2. Процес Рітца в проблемі власних чисел

Нехай A - обмежений знизу оператор:

$$(Au,u) \geq k\|u\|^2 .$$

Знаходження власних чисел оператора A легко зводиться до відшукання власних чисел позитивно визначеного оператора. Дійсно, нехай c - будь-яке число, більше $|k|$. Рівняння

$$Au - \lambda u = 0,$$

визначальне власні числа оператора A, перепишемо у вигляді

$$\tilde{A}u-\tilde{\lambda}u=0,$$

де $\tilde{A}u=Au+cu, \tilde{\lambda}=\lambda+c$. Оператор $\tilde{A}$ позитивно визначений так як

$$(\tilde{A}u,u)=(Au,u)+c(u,u)\geq(c+k)\|u\|^2, \tag{3.1}$$

а $c+k>0$. Якщо $\tilde{\lambda}$ - власне число оператора $\tilde{A}$, то $\lambda=\tilde{\lambda}-c$ - власне число оператора A, і навпаки. Тому в подальшому ми будемо вважати, що A - позитивно визначений оператор. Покладемо

$$d=\inf_{u\in D_A}\frac{(Au,u)}{(u,u)}$$

Тут d є найменше власне число оператора A, якщо існує елемент u_0 такий, що

$$d=(Au_0,u_0)/(u_0,u_0).$$

Якщо допустити, що такий елемент існує, то визначення найменшого власного числа оператора A зводитися до визначення точної нижньої межі функціоналу (3.1) або, що те ж саме, до визначення точної нижньої межі функціоналу

$$(Au,u)$$

при додатковій умові

$$(u,u)=1. \tag{3.2}$$

Покажемо, що це завдання можна вирішити процесом Рітца. Візьмемо послідовність координатних елементів φ_n, $n=1,2,\ldots$, які підлягають трьом вимогам: 1) $\varphi_n\in D_A$, $n=1,2,\ldots$, 2) при будь-якому n елементи $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ лінійно незалежні; 3) система $\{\varphi_n\}$ повна по енергії. Покладемо

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k, \tag{3.3}$$

де a_k - постійні коефіцієнти. Виберемо ці коефіцієнти так, щоб u_n задовольняло співвідношенню (3.2) і щоб величина (Au_n, u_n) була мінімальною. Справа зводитися до того, щоб знайти мінімум функції n змінних

$$(Au_n, u_n) = \sum_{k,m=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_m) a_k a_m,$$

пов'язаних рівнянням

$$(u_n, u_n) = \sum_{k,m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m) a_k a_m = 1. \tag{3.4}$$

Для вирішення цього завдання скористаємося методом невизначених множників Лагранжа. Складемо функцію $\Phi = (Au_n, u_n) - \lambda(u_n, u_n)$, де λ - невизначений поки чисельний множник, і прирівнюємо нулю її приватні похідні за коефіцієнтами a_m. Це приведе нас до системи рівнянь

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left[(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda (\varphi_k, \varphi_m) \right] = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Система (3.5) лінійно однорідна щодо невідомих, які не можуть одночасно звернутися в нуль - в іншому випадку було б порушено рівняння (3.4). Звідси випливає, що визначник системи (3.5) повинен звернутися в нуль; це дає нам рівняння для λ:

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda(\varphi_1, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_1) - \lambda(\varphi_2, \varphi_1) & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_1) - \lambda(\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) - \lambda(\varphi_1, \varphi_2) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda(\varphi_2, \varphi_2) & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_2) - \lambda(\varphi_n, \varphi_2) \\ \hdotsfor{4} \\ (A\varphi_1, \varphi_n) - \lambda(\varphi_1, \varphi_n) & (A\varphi_2, \varphi_n) - \lambda(\varphi_2, \varphi_n) & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{3.6}$$

Як було зазначено вище, при будь-якому n елементи $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ лінійно незалежні; тоді рівняння (3.6) буде точно n-го ступеня, так як коефіцієнт при $(-1)^n \lambda^n$ є визначник Грама елементів $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Звідси випливає, що рівняння (3.6) має рівно n коренів. Нехай λ_0 - будь-який з цих коренів. Підставивши його в систему (3.5), ми зробимо її визначник рівним нулю, і ця система буде

мати нетривіальні рішення. Нехай $a_k^{(0)}$, $k=1,2,\ldots,n$, - таке рішення. Тоді $\mu a_k^{(0)}$, де μ - довільний чисельний множник, також задовольняє системі (3.5). Підставивши $\mu a_k^{(0)}$ у (3.4), ми знайдемо значення μ. Замінивши тепер позначення $\mu a_k^{(0)}$ на $a_k^{(0)}$, ми можемо в подальшому під $a_k^{(0)}$ розуміти те рішення системи (3.5), яке задовольняє рівняння (3.4). Підставивши в (3.5) $\lambda=\lambda_0$ і $a_k=a_k^{(0)}$, ми отримаємо тотожність, яку записуємо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)}(A\varphi_k,\varphi_m)=\lambda_0\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)}(\varphi_k,\varphi_m), \qquad m=1,2,\ldots,n$$

Помножимо її на $a_m^{(0)}$ і просумуємо її по всім m. Ми отримаємо тоді

$$\sum_{k,m=1}^{n}(A\varphi_k,\varphi_m)a_k^{(0)}a_m^{(0)}=\lambda_0\sum_{k=1}^{n}(\varphi_k,\varphi_m)a_k^{(0)}a_m^{(0)}.$$

В силу рівняння (3.4) права частина останньої рівності дорівнює λ_0; ліва його частина дорівнює $(Au_n^{(0)},u_n^{(0)})$, де

$$u_n^{(0)}=\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)}\varphi_k .$$

Таким чином ,

$$\lambda_0=(Au_n^{(0)},u_n^{(0)}). \qquad (3.7)$$

Формула (3.7) показує, що рівняння (3.6) має лише дійсні корені, якщо оператор A симетричний. Далі, одна з функцій $u_n^{(0)}$ реалізує мінімум величини (3.3). Формула (3.7) показує тепер, що цей мінімум дорівнює найменший з коренів рівняння (3.6).

Із зростанням n вказаний мінімум, який ми нижче будемо позначати через $\lambda_n^{(0)}$, не збільшується; в той же час він не менше величини d. Звідси випливає, що при $n\to\infty$ величина $\lambda_n^{(0)}$ прагне до межі, яка більше або дорівнює d. Доведемо, що ця межа дорівнює d; цим буде виправдано застосування методу Рітца в проблемі власних значень принаймні для того

випадку, коли справа йде про визначення найменшого власного числа. Введемо енергетичні добуток і норму, вважаючи, як зазвичай,

$$[u,v]=(Au,v); \qquad |u|^2=(Au,u).$$

За визначенням точної нижньої межі при будь-якому $\varepsilon>0$ існує функція $u'\in D_A$ така, що $(u',u')=1$ і

$$d\le(Au',u')<d+\varepsilon,$$

або, що те ж саме,

$$\sqrt{d}\le|u'|<\sqrt{d+\varepsilon}.$$

Так як послідовність $\varphi_n(P),\ n=1,2,\ldots,$ є повною по енергії, то можна знайти елемент u'_N виду

$$u'_N=\sum_{k=1}^{n}b_k\varphi_k, \qquad b_k=const,$$

так, щоб $|u'-u'_N|<\sqrt{\varepsilon}$.

Звідси

$$|u'_N|\le|u'|+\sqrt{\varepsilon}<\sqrt{d+\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon}$$

або

$$(Au_n^{(0)},u_n^{(0)})<(\sqrt{d+\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon})^2.$$

З (3.1) випливає, що $\|u'_N-u'\|\le\frac{1}{\sqrt{d}}|u'_N-u'|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}$. Звідси $\|u'_N\|\ge\|u'\|-\sqrt{\varepsilon/d}=1-\sqrt{\varepsilon/d}$ і, відтак,

$$d\le\frac{(Au'_N,u'_N)}{(u'_N,u'_N)}=\frac{|u'_N|^2}{\|u'_N\|^2}<\frac{(\sqrt{\varepsilon+d}+\sqrt{\varepsilon})^2}{(1-\sqrt{\varepsilon/d})^2}=d+\eta,$$

де η прагне до нуля разом з ε. Далі, $\lambda_N^{(0)}$ є мінімум виразу виду $(Au_N, u_N)/(u_N, u_N)$, $u_N = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$, тому, зокрема,

$$d \le \lambda_N^{(0)} \le \frac{(Au'_N, u'_N)}{(u'_N, u'_N)} < d + \eta . \tag{3.8}$$

Якщо $n \ge N$, то $\lambda_n^{(0)} \le \lambda_N^{(0)}$, і, відтак $d \le \lambda_n^{(0)} < d + \eta$. Остання нерівність показує, що

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_N^{(0)} = d,$$

що й потрібно було довести.

Займімося тепер визначенням наступних власних чисел. Щоб отримати наближене значення другого власного числа, будемо шукати мінімум скалярного добутку (3.3) при додаткових умовах $(u_n, u_n) = 1$ і

$$(u_n^{(0)}, u_n) = \sum_{k,m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m) a_k^{(0)} a_m = 0,$$

де $u_n^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \varphi_k$ є наближене значення першої нормованої власної функції оператора A. За методом Лагранжа складаємо вираз

$$(Au_n, u_n) - \lambda(u_n, u_n) - 2\mu(u_n, u_n^{(0)})$$

і прирівнюємо нулю його приватні похідні по a_k. Це приводить нас до системи

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k \left[(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m) \right] - \mu(\varphi_k, \varphi_m) a_k^{(0)} \right\} = 0 \tag{3.9}$$

Обидві частини рівняння (3.9) помножимо на $a_m^{(0)}$ і просумуємо по m:

$$\sum_{k,m=1}^{n} a_k a_m^{(0)} \left[(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m) \right] - \mu \sum_{k,m=1}^{n} a_k^{(0)} a_m^{(0)} (\varphi_k, \varphi_m) = 0 \tag{3.10}$$

Друга сума, як неважко побачити, дорівнює $(u_n^{(0)}, u_n^{(0)}) = 1$. У першій сумі замінимо індекс m на k і навпаки і просумуємо спершу по k, потім по m. Ми приводимо тоді першу суму до виду

$$\sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \left[(A\varphi_m, \varphi_k) - \lambda(\varphi_m, \varphi_k) \right]$$

Внутрішня сума дорівнює

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \left[(\varphi_k, A\varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m) \right]$$

або, так як оператор A симетричний,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \left[(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m) \right].$$

У силу рівнянь (3.5), яким задовольняють числа $a_k^{(0)}$ при $\lambda = \lambda_n^{(0)}$, останній вираз дорівнює

$$\left(\lambda_n^{(0)} - \lambda\right) \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \left(\varphi_k, \varphi_m\right) = \left(\lambda_n^{(0)} - \lambda\right) \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \varphi_k, \varphi_m \right) = \tag{3.11}$$

$$= \left(\lambda_n^{(0)} - \lambda\right) \left(u_n^{(0)}, \varphi_m\right) = \left(\lambda_n^{(0)} - \lambda\right) \left(\varphi_m, u_n^{(0)}\right).$$

Вираз (3.11) набуває вигляду

$$\left(\lambda_n^{(0)} - \lambda\right) \sum_{k=1}^{n} a_m (\varphi_m, u_n^{(0)}) = \left(\lambda_n^{(0)} - \lambda\right) \left(u_n, u_n^{(0)}\right),$$

що дорівнює нулю в силу (3.8). Тепер з (3.10) випливає, що $\mu = 0$, і система (3.9) збігається з системою (3.5). Звідси, як і вище, робимо висновок, що шуканий мінімум дорівнює λ, яке є коренем рівняння (3.6). Неважко побачити, що на цей раз потрібно взяти другий за величиною корінь вказаного рівняння.

3.3. Побудова рівнянь границь сніжинки та хреста Коха

Розглянемо, як будується крива Коха. Процес її побудови виглядає наступним чином: беремо одиничний інтервал, поділяємо на три рівні частини і замінюємо середній інтервал рівностороннім трикутником без цього сегмента. В результаті утворюється ламана, що складається з чотирьох ланок довжини 1/3. На наступному кроці повторюємо операцію для кожного з чотирьох отриманих ланок. Отримана крива є кривою Коха. Крива Коха ніде не має дотичних, тобто ніде не диференціюється, хоча скрізь неперервна. Крива Коха не спрямляється, не має самоперетинів. Вона має фрактальну розмірність, яка дорівнює $\frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26$, оскільки вона складається з чотирьох рівних частин, кожна з котрих подібна всій кривій з коефіцієнтом подібності 1/3. Виконаємо побудову на інтервали $-3a \le x \le 3a$. Тоді

$$\omega_0 = -y \ge 0;\ \omega_1 = \omega_0 \vee_0 (f_1 \wedge_0 f_2) \ge 0;$$

$$f_1 = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}\right) \ge 0;\quad f_2 = \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}\right) \ge 0;$$

$$\omega_{21} = \omega_1\left(3(x + 2a),\ 3y\right) \ge 0;$$

$$\omega_{22} = \omega_1\left(3\left(\frac{x + a/2}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ 3\left(-(x + a/2)\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}\right)\right) \ge 0;$$

$$\omega_2 = \left(\omega_{21}(x, y) \vee_0 \omega_{22}(x, y)\right) \wedge_0 \left(\omega_{21}(-x, y) \vee_0 \omega_{22}(-x, y)\right) \ge 0;$$

$$\omega_{k1} = \omega_{k-1}\left(3(x + 2a),\ 3y\right) \ge 0;$$

$$\omega_{k2} = \omega_{k-1}\left(3\left(\frac{x + a/2}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ 3\left(-(x + a/2)\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}\right)\right) \ge 0;$$

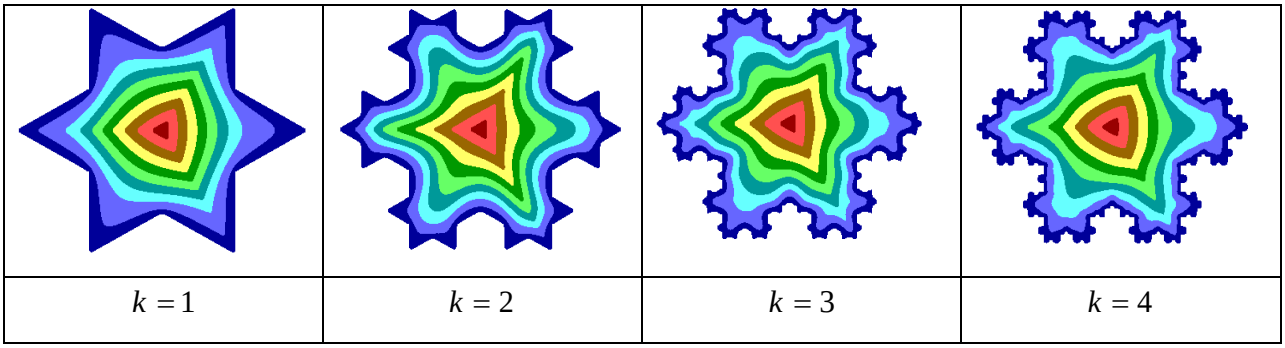
$$\omega_k = \left(\omega_{k1}(x, y) \vee_0 \omega_{k2}(x, y)\right) \wedge_0 \left(\omega_{k1}(-x, y) \vee_0 \omega_{k2}(-x, y)\right) \ge 0\ \ (k = 3,4,\ldots).$$

Три копії кривої Коха, побудовані (вістрями назовні) на сторонах правильного трикутника, утворюють замкнену криву, яка називається сніжінкою Коха. Сніжинка Коха або тріада Коха є математичною моделлю кривої узбережжя, з якою працював Річардсон. Розмірність сніжинки Коха складає $\frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26$. Звідси випливає, що сніжинка Коха являє собою лінію нескінченної

довжини, що обмежує кінцеву площу. Знаючи рівняння кривої Коха $\omega_k(x,y)\ge 0$, можна побудувати рівняння сніжинки Коха (рис.3.1), виконавши такі перетворення:

$$\omega S_k = \omega_k\left(r\sin\mu,\ \ r\cos\mu - R\right)\ge 0, \qquad (3.12)$$

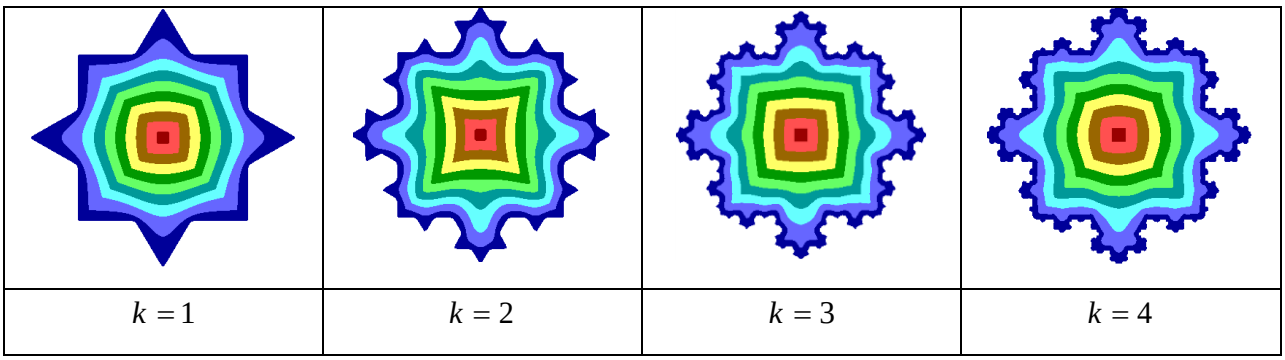
де $\mu(n\theta)=\frac{2}{n}\arcsin\left(\sin\frac{n\theta}{2}\right)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = arctg\,\frac{y}{x}$, R — радіус окружності, вписаної в правильний n-кутник зі стороною, рівною відрізку, на якому будується крива Коха.



$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$

Рис.3.1. Картини ліній рівня функцій $\omega S_k(x,y)\ge 0$, що задає сніжинку Коха на сторонах правального трикутника для різних значень k.

Користуючись цією методикою, можна будувати сніжинки Коха на сторонах різних правильних багатокутників, наприклад, на сторонах квадрата (рис.3.2).



$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$

Рис.3.2. Сніжинка Коха на сторонах квадрата для різних значень k.

Можна побудувати хрест Коха на сторонах квадрата, при цьому проводячи побудову всередину квадрата. Для цього виконаємо побудову кривої Коха, замінюючи середній інтервал рівностороннім трикутником,

орієнтованим вниз. Повторюємо операцію для кожної з чотирьох одержаних ланок, і т. д. Метод R-функцій дозволяє легко отримати таку криву, взявши заперечення функції, побудованої раніше для сніжинки Коха.

Знаючи рівняння переорієнтованої кривої Коха, можна побудувати рівняння хреста Коха (рис.3.3), виконавши перетворення, аналогічні (3.12).

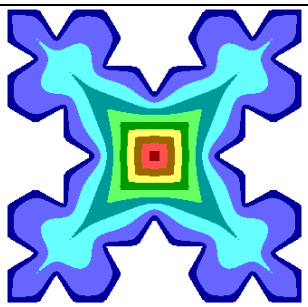
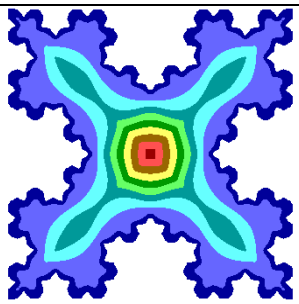
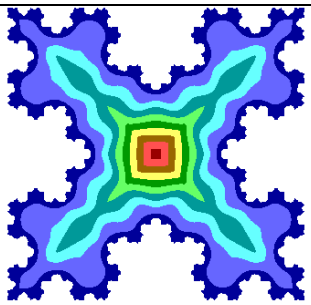
		
$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$

Рис.3.3. Хрест Коха на сторонах квадрата для різних значень k.

3.4. Знаходження власних значень для хвиль ТН – типу

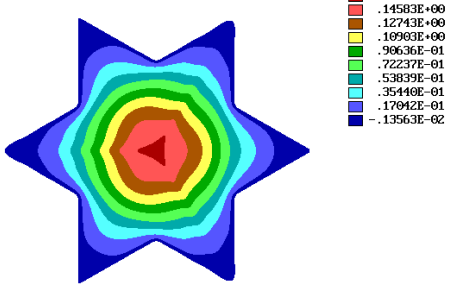
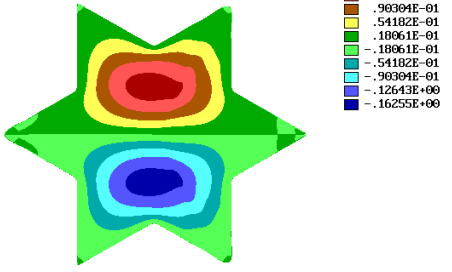
Для знаходження власних значень ТН-хвиль необхідно розв'язати двовимірне рівняння Гельмгольця з однорідними крайовими умовами Діріхле:

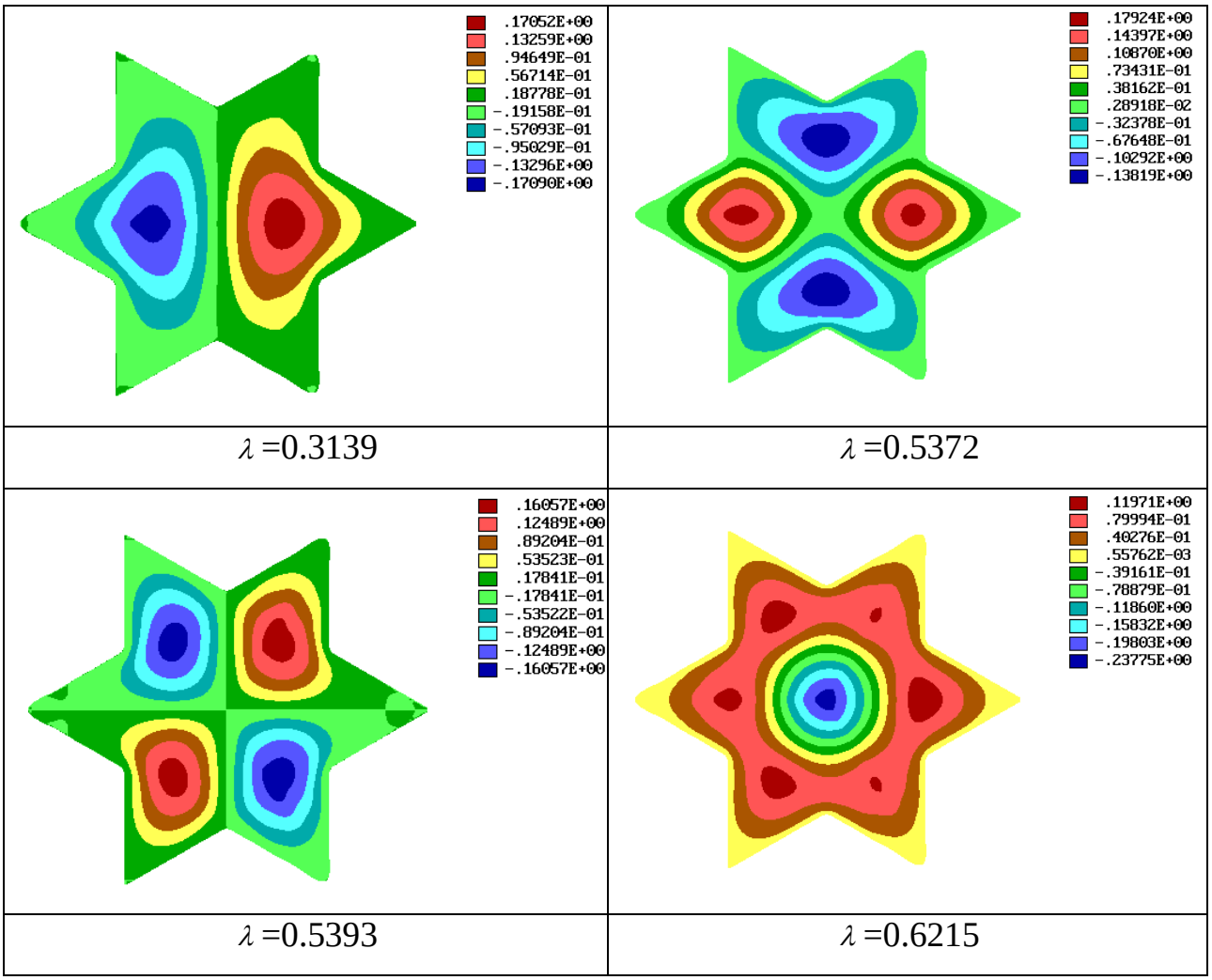
$$\frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^e}{\partial y^2} + (k^2 - \gamma^2)u^e = 0 \qquad \text{при} \qquad (x, y) \in \Omega \subset R^2,$$

$$u^e\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Структура розв'язання матиме вигляд: $u = \omega P$. Користуючись методом Рітца отримаємо власні функції та власні значення для наступних хвилеводів:

Хвилевод з поперечним перерізом у вигляді сніжинки Коха, побудованої на сторонах трикутника, для параметру подрібненості $k = 1$ (рис.3.4).

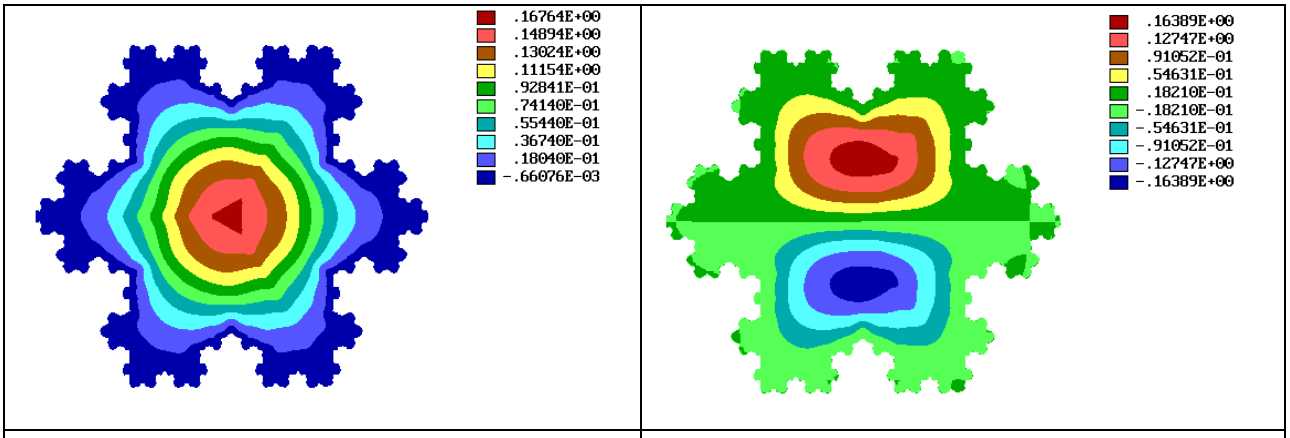
	
λ =0.1284	λ =0.3112



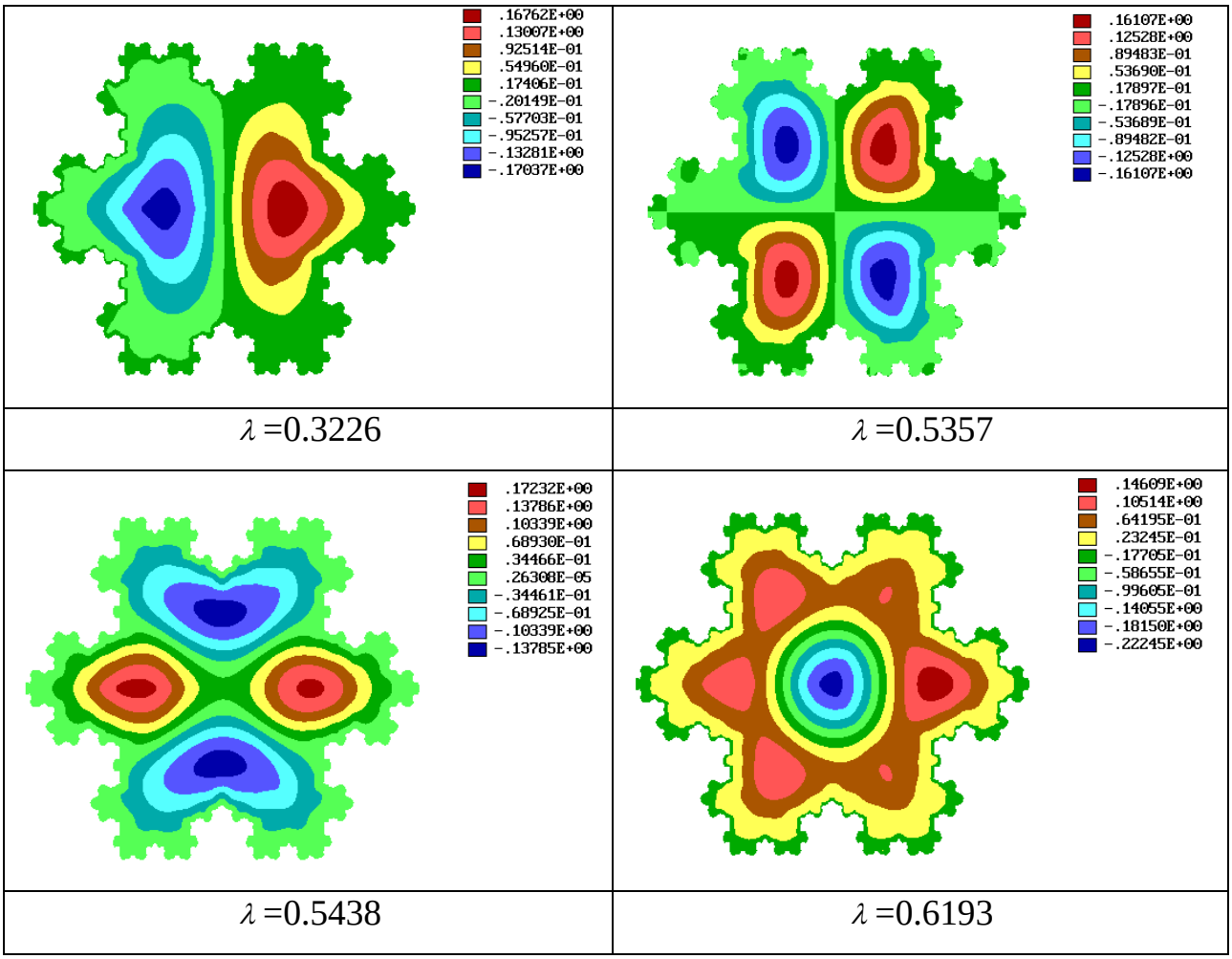
λ =0.3139	λ =0.5372
λ =0.5393	λ =0.6215

Рис.3.4. Картина власних функцій та власні числа хвилеводу (сніжинка Коха) зі значенням параметру подрібненості $k=1$.

Хвилевод з поперечним перерізом у вигляді сніжинки Коха, побудованої на сторонах трикутника, для параметру подрібненості $k=4$ (рис.3.5).



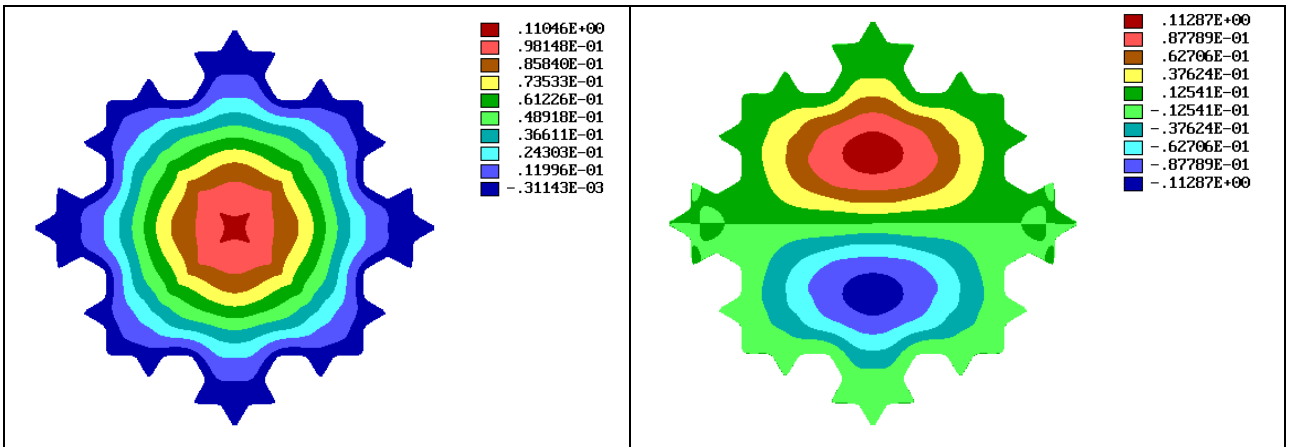
λ =0.1309	λ =0.3157



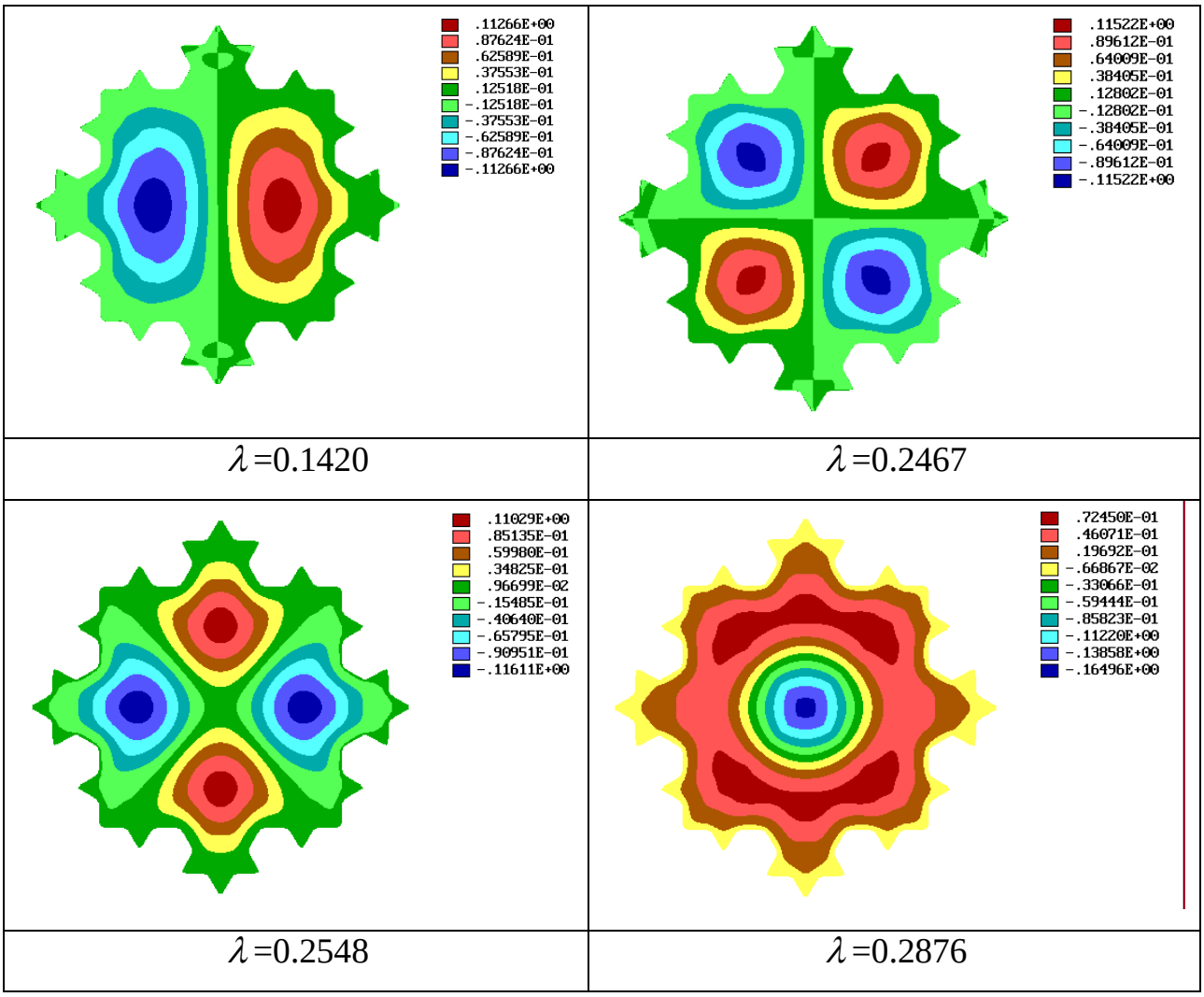
λ =0.3226	λ =0.5357
λ =0.5438	λ =0.6193

Рис.3.5. Картина власних функцій та власні числа хвилеводу (сніжинка Коха) зі значенням параметру подрібненості $k = 4$.

Хвилевод з поперечним перерізом у вигляді сніжинки Коха, побудованої на сторонах квадрата, для параметру подрібненості $k = 2$ (рис.3.6).



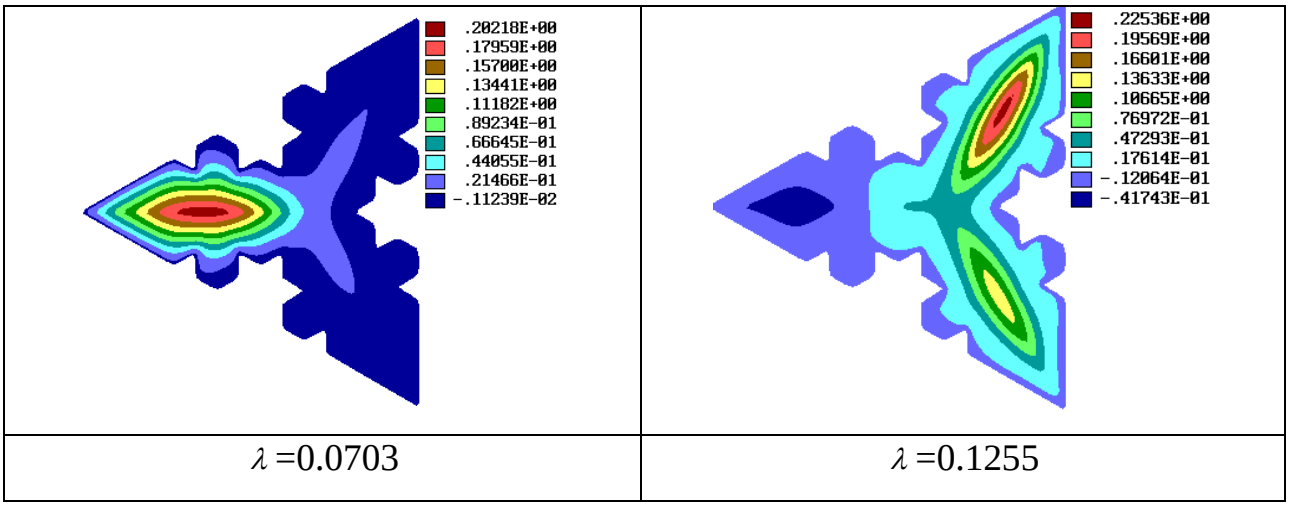
λ =0.0577	λ =0.1406



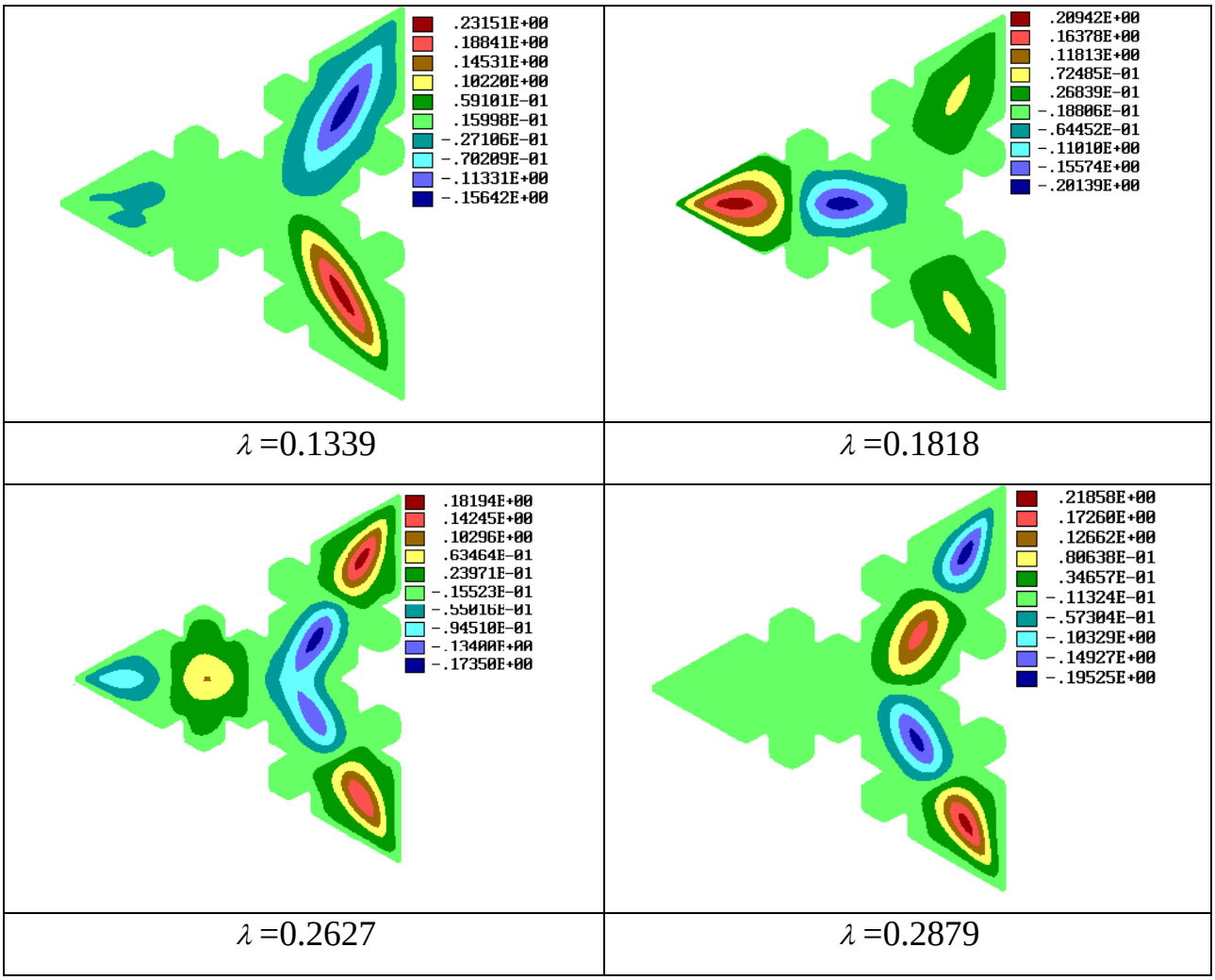
λ =0.1420	λ =0.2467
λ =0.2548	λ =0.2876

Рис.3.6. Картина власних функцій та власні числа хвилеводу (сніжинка Коха на сторонах квадрата) зі значенням параметру подрібненості $k = 2$.

Хвилевод з поперечним перерізом у вигляді хреста Коха, побудованої на сторонах трикутника для параметру подрібненості $k = 2$ (рис.3.7).



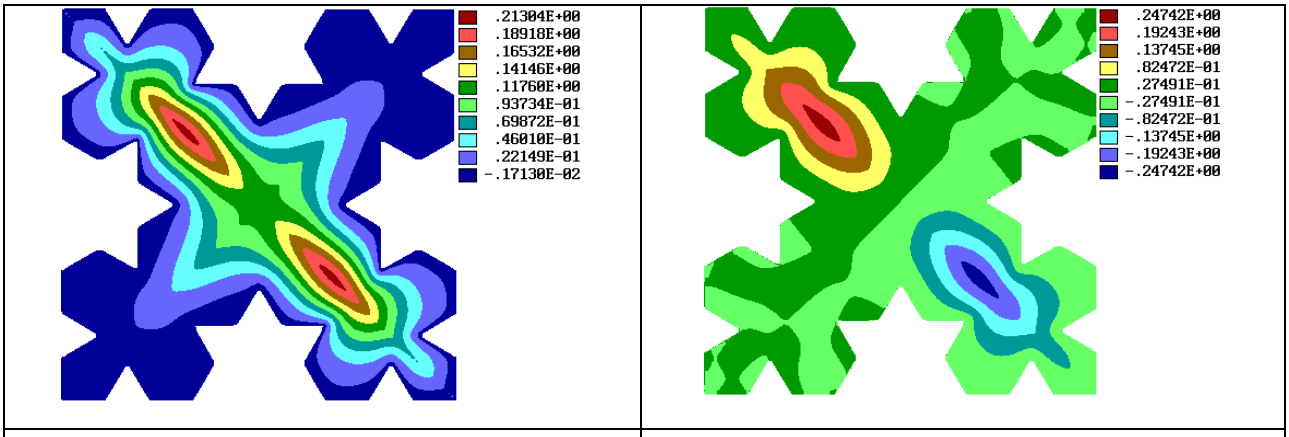
λ =0.0703	λ =0.1255



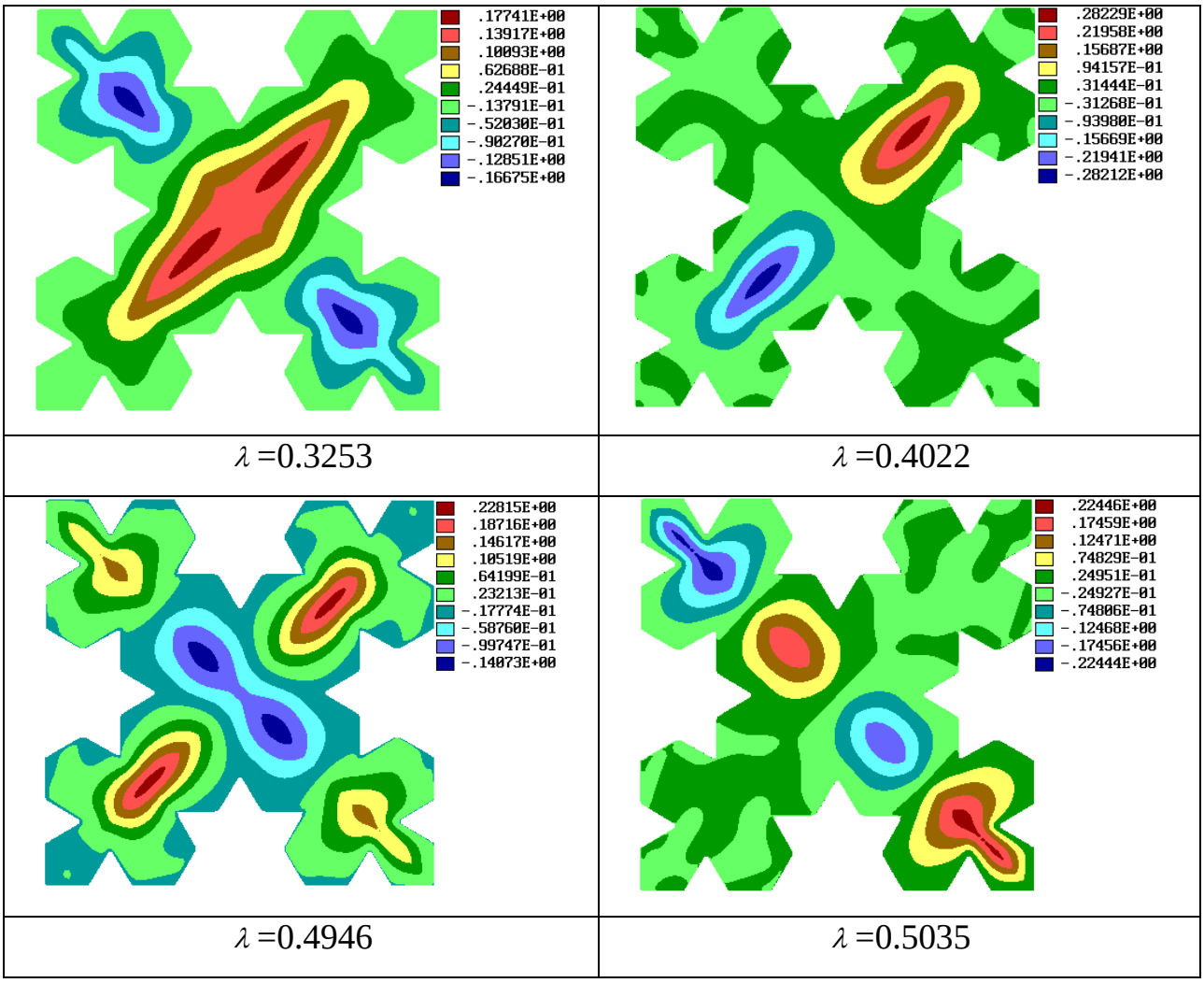
λ =0.1339	λ =0.1818
λ =0.2627	λ =0.2879

Рис.3.7. Картина власних функцій та власні числа хвилеводу (хрест Коха на сторонах трикутника) зі значенням параметру подрібненості $k = 2$.

Хвилевод з поперечним перерізом у вигляді хреста Коха, побудованої на сторонах квадрата для параметру подрібненості $k = 2$ (рис.3.8).



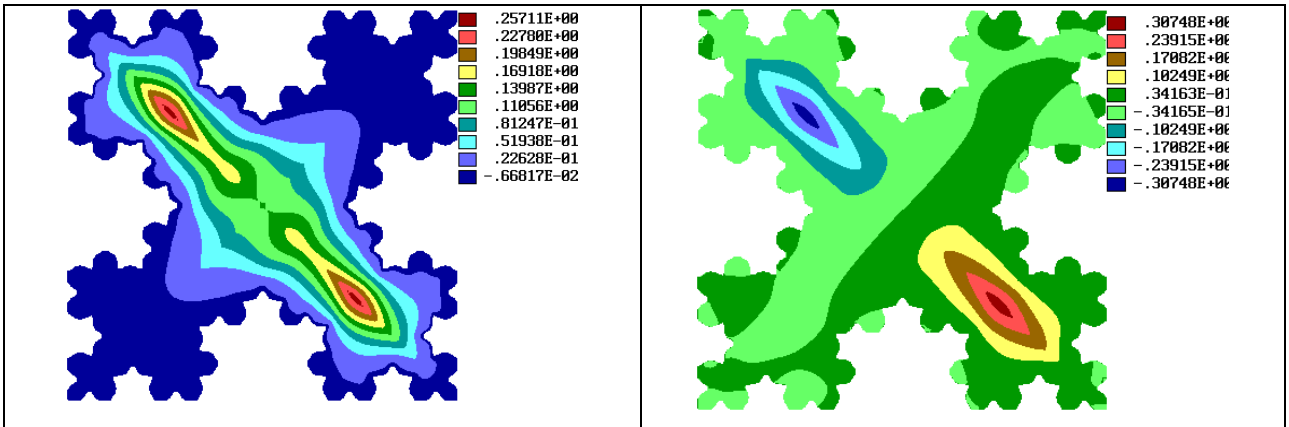
λ =0.1866	λ =0.3253



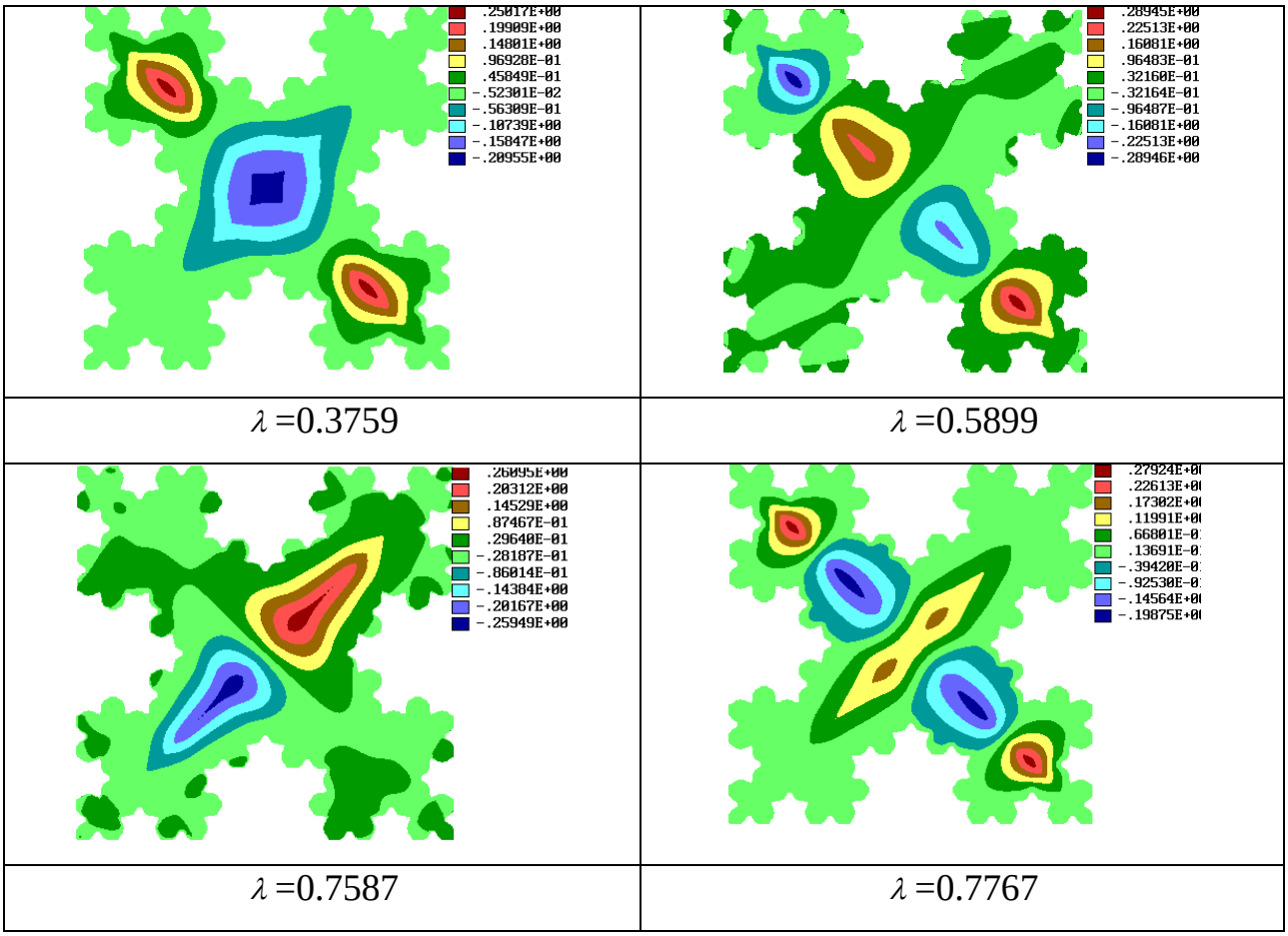
λ =0.3253	λ =0.4022
λ =0.4946	λ =0.5035

Рис.3.8. Картина власних функцій та власні числа хвилеводу (хрест Коха на сторонах квадрата) зі значенням параметру подрібненості $k = 2$.

Хвилевод з поперечним перерізом у вигляді хреста Коха, побудованої на сторонах квадрата для параметру подрібненості $k = 3$ (рис.3.9).



λ =0.2207	λ =0.2378



λ =0.3759 | λ =0.5899

λ =0.7587 | λ =0.7767

Рис.3.9. Картина власних функцій та власні числа хвилеводу (хрест Коха на сторонах квадрата) зі значенням параметру подрібненості $k = 3$ (рис.3.9).

3.5. Знаходження власних значень для хвиль ТЕ – типу

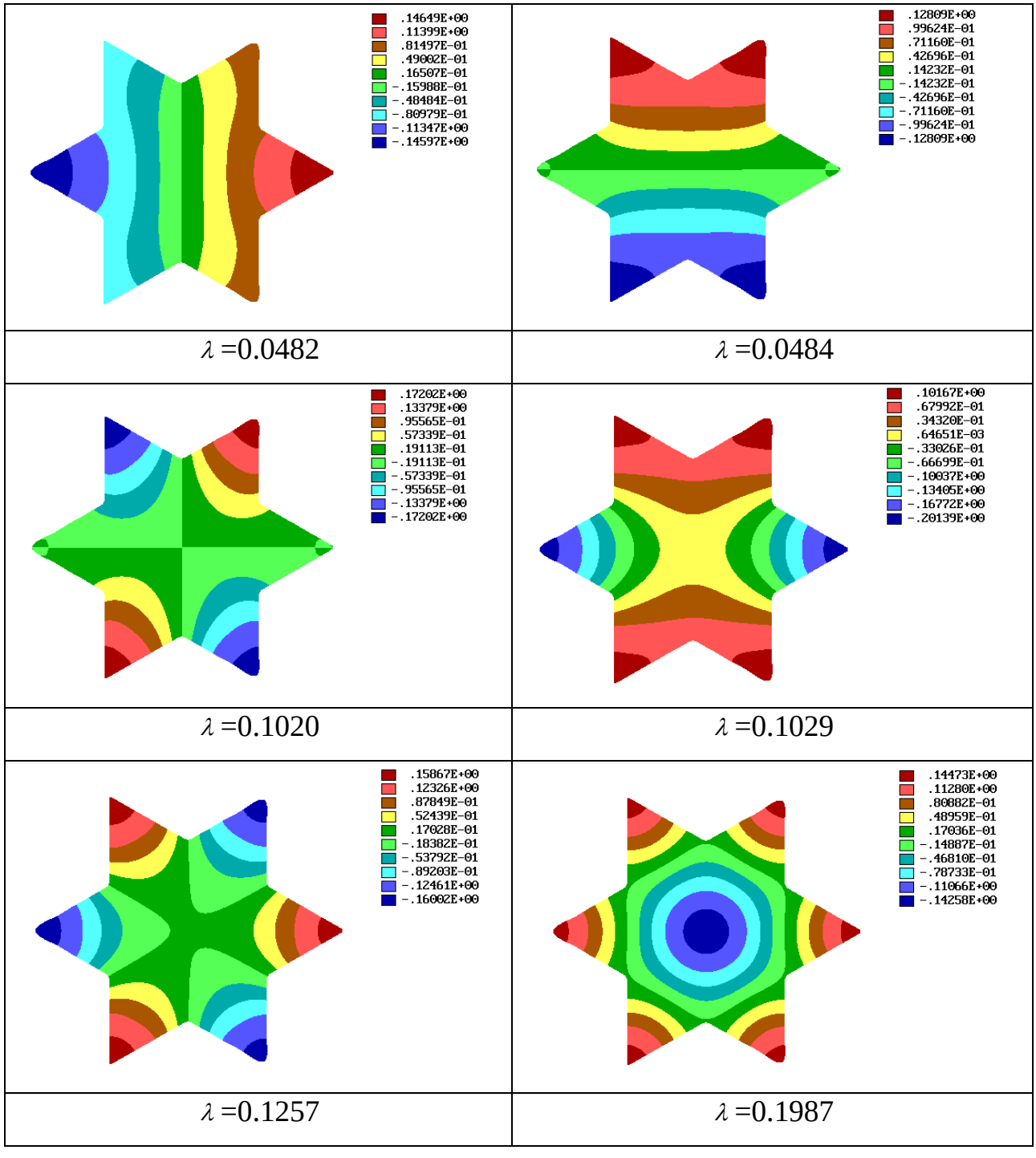
Для знаходження власних значень ТН-хвиль необхідно розв'язати двовимірне рівняння Гельмгольця з однорідними крайовими умовами Неймана:

$$\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^m}{\partial y^2} + (k^2 - \gamma^2)u^m = 0 \qquad \text{при} \qquad (x, y) \in \Omega \subset R^2,$$

$$\left.\frac{\partial u^m}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Структура розв'язання матиме наступний вигляд : $u = P$, оскільки умова рівності нулю похідної по нормалі для задачі Неймана є природньою. Користуючись методом Рітца, отримаємо власні функції та власні значення для наступних хвилеводів:

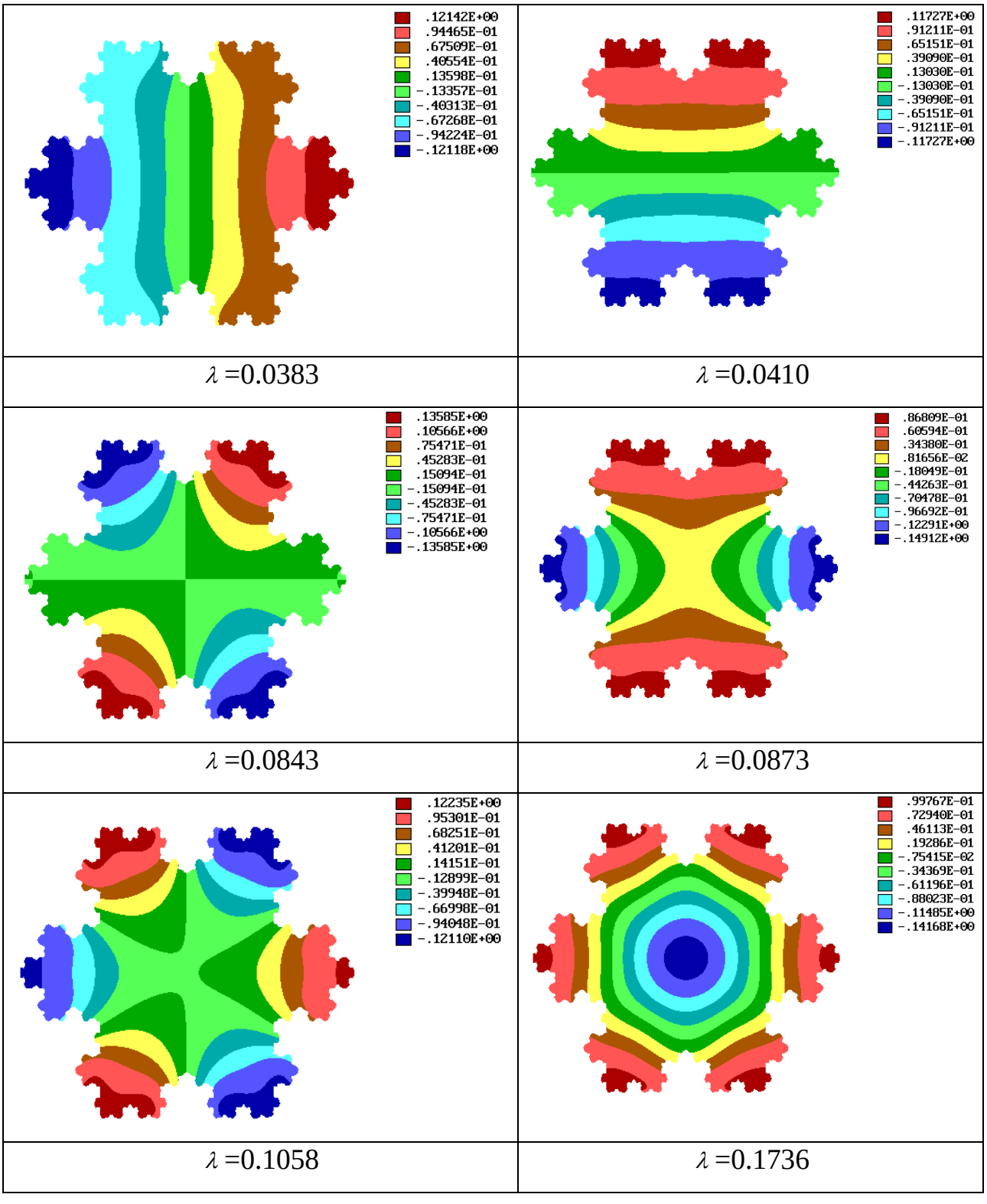
Хвилевод з поперечним перерізом у вигляді сніжинки Коха, побудованої на сторонах трикутника, для параметру подрібненості $k=1$ (рис.3.10).



λ =0.0482	λ =0.0484
λ =0.1020	λ =0.1029
λ =0.1257	λ =0.1987

Рис.3.10. Картина власних функцій та власні числа хвилеводу (сніжинка Коха) зі значенням параметру подрібненості $k=1$.

Хвилевод з поперечним перерізом у вигляді сніжинки Коха, побудованої на сторонах трикутника для параметру подрібненості $k=4$ (рис.3.11).



λ =0.0383 | λ =0.0410

λ =0.0843 | λ =0.0873

λ =0.1058 | λ =0.1736

Рис.3.11. Картина власних функцій та власні числа хвилеводу (сніжинка Коха) зі значенням параметру подрібненості $k = 4$.

Хвилевод з поперечним перерізом у вигляді сніжинки Коха, побудованої на сторонах квадрата для параметру подрібненості $k = 2$ (рис.3.12).

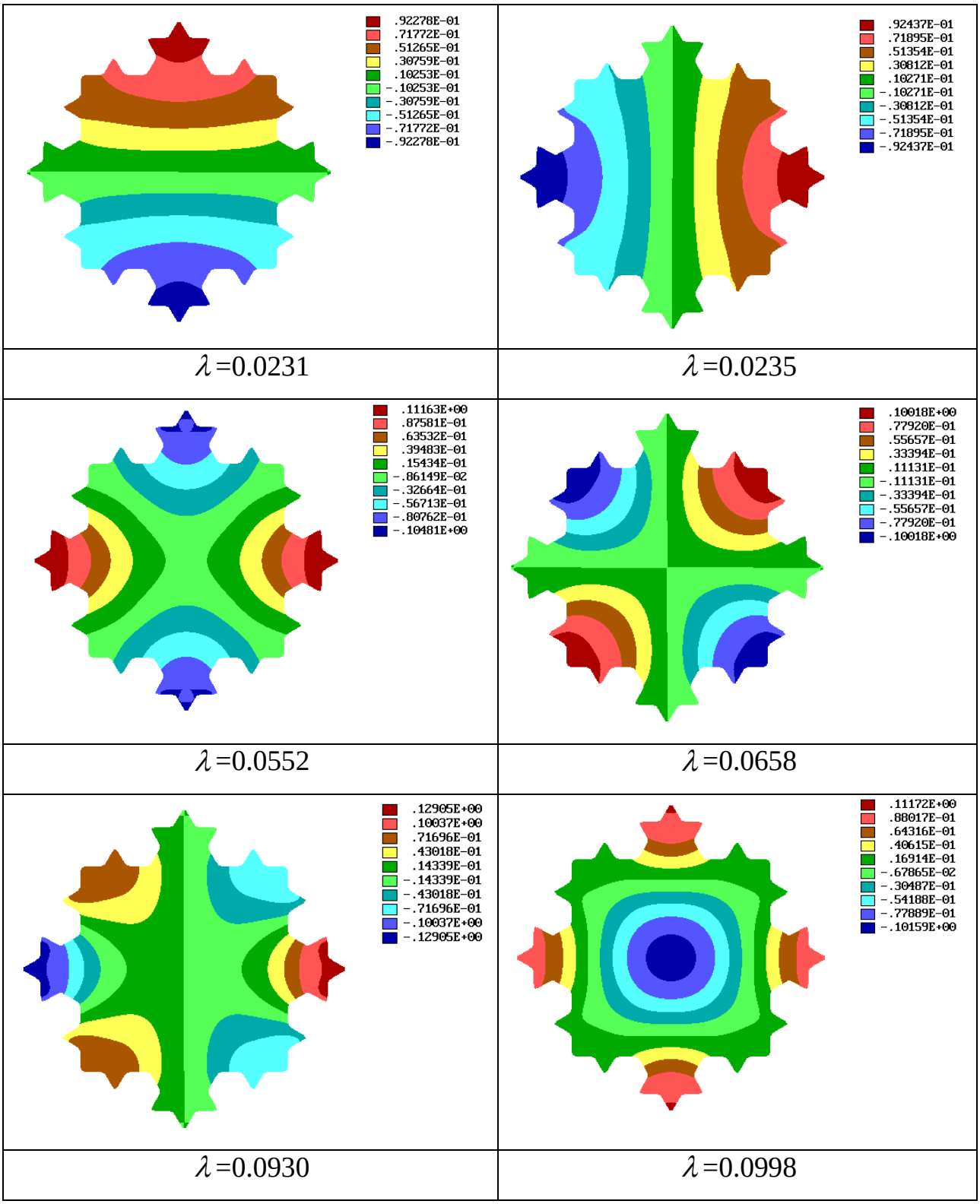
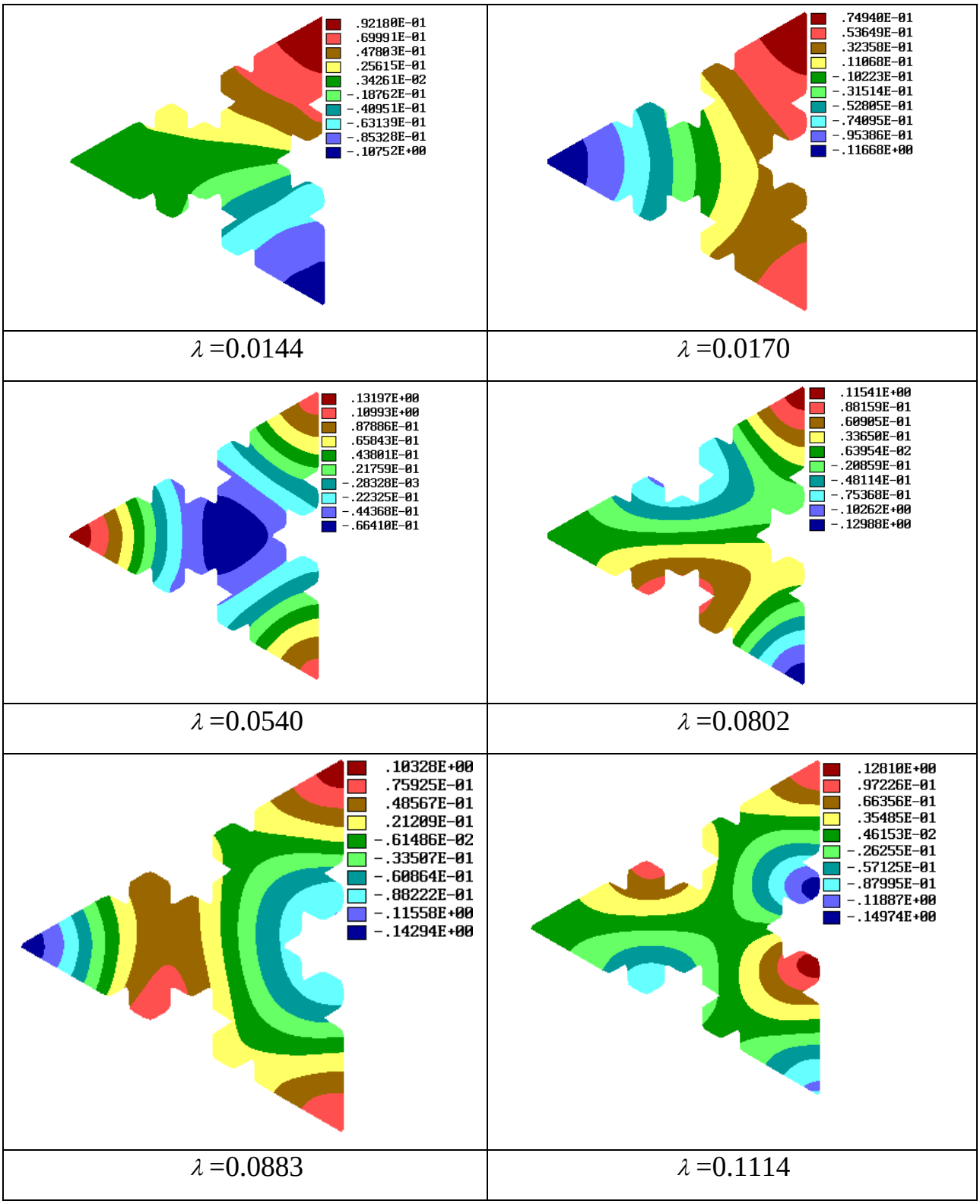


Рис.3.12. Картина власних функцій та власні числа хвилеводу (хрест Коха на сторонах квадрата) зі значенням параметру подрібненості $k = 2$.

Хвилевод з поперечним перерізом у вигляді хреста Коха, побудованого на сторонах трикутника для параметру подрібненості $k = 2$ (рис.3.13).



λ =0.0144	λ =0.0170
λ =0.0540	λ =0.0802
λ =0.0883	λ =0.1114

Рис.3.13. Картина власних функцій та власні числа хвилеводу (хрест Коха на сторонах трикутника) зі значенням параметру подрібненості $k = 2$.

Хвилевод з поперечним перерізом у вигляді хреста Коха, побудованого на сторонах квадрата для параметру подрібненості $k = 2$ (рис.3.14).

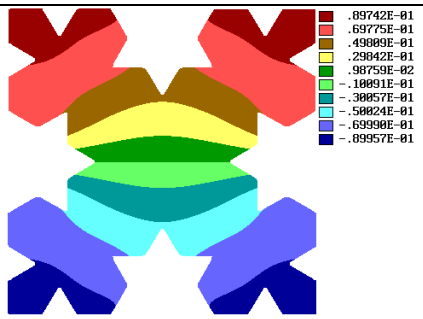
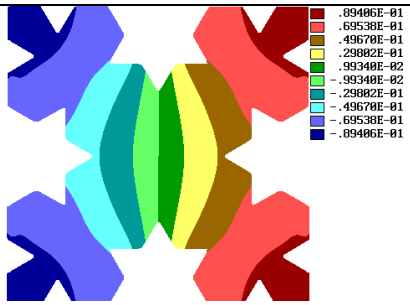
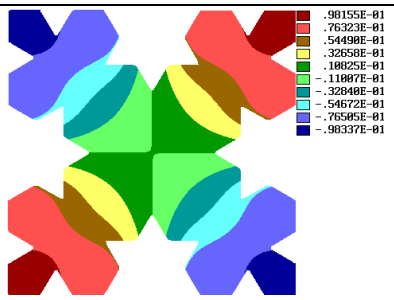
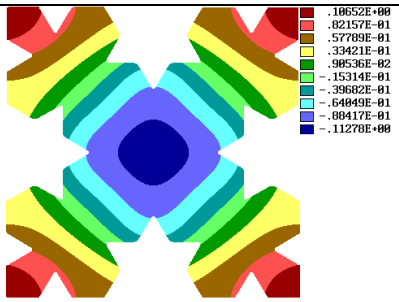
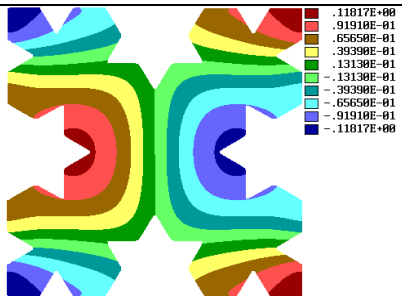
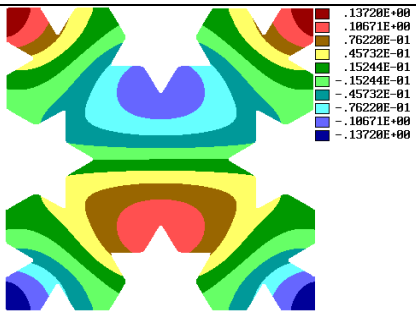
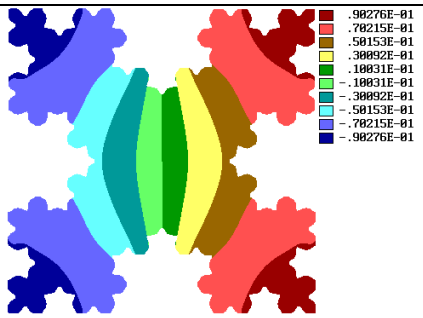
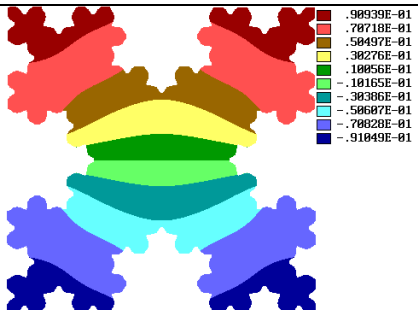
	
λ =0.0226	λ =0.0227
	
λ =0.0310	λ =0.1056
	
λ =0.1844	λ =0.1984

Рис.3.14. Картина власних функцій та власні числа хвилеводу (хрест Коха на сторонах квадрата) зі значенням параметру подрібненості $k = 2$.

Хвилевод з поперечним перерізом у вигляді хреста Коха, побудованого на сторонах квадрата для параметру подрібненості $k = 3$ (рис.3.15).

	
λ =0.0228	λ =0.0230

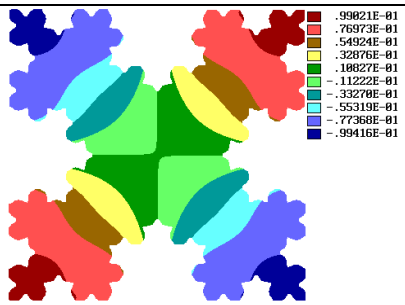
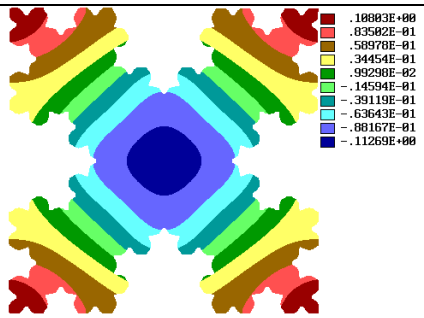
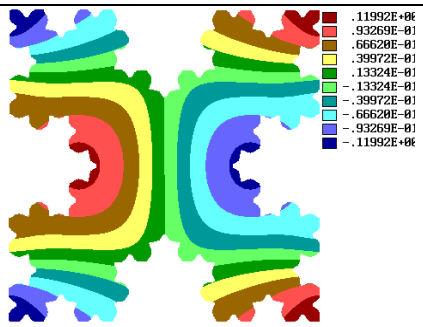
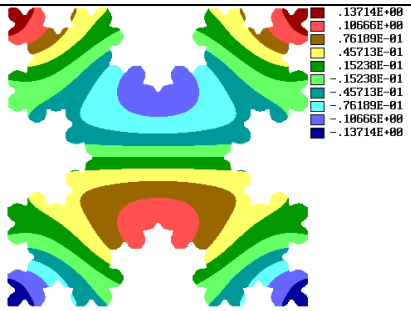
	
λ =0.0313	λ =0.1061
	
λ =0.1842	λ =0.1995

Рис.3.15. Картина власних функцій та власні числа хвилеводу (хрест Коха на сторонах квадрата) зі значенням параметру подрібненості $k = 3$.

Усі картини власних функцій підкреслюють, що процес відбувається фізично. Лінії рівня поблизу границі співпадають з напрямком нормалі. Можемо зробити висновок, що метод R-функцій стосовно розв'язання подібних задач продемонстрував свою дієздатність, бо він точно задовольняє граничним умовам та уникає особливостей у кутових точках.

ВИСНОВКИ

В магістерській роботі розвивається науковий напрямок в математичному моделюванні геометричних об'єктів та фізичних полів на основі методу R-функцій. При цьому удосконалювалися як конструктивні засоби теорії R-функцій, так і методики проведення обчислювальних експериментів в задачах дослідження полів у хвилеводах неканонічних форм.

1. Використаний метод побудови нормалізованих рівнянь геометричних об'єктів з циклічним типом симетрії на основі перетворень координат і суперпозицій з періодичними функціями. Це дозволило істотно скоротити кількість операцій, в тому числі, реалізувати побудову рівнянь сніжинки та хреста Коха для різних значень параметру подрібненості без застосування R-операцій.

2. Знайдено ТЕ- і ТН-хвилі в регулярних хвилеводах з поперечними перерізами у вигляді фракталів. Отримано власні значення і власні функції. Всі розрахунки були виконані в умовах експлуатації системи ПОЛЕ, розробленої в Інституті проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України.

3. На основі проведених досліджень розроблено методику проведення обчислювальних експериментів при розв’язанні цілого ряду задач. Показано, що метод R-функцій є ефективним методом вирішення задач розрахунку хвилеводів з формою поперечного перерізу у вигляді сніжинки Коха та хреста Коха.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Калинин В. А., Лобов Г. Д., Штыков В. В. Радиофизика для инженеров / Под ред. С.И. Баскакова. — М.: Изд-во МЭИ, 1994. — 130 с. — 500 экз.
2. Шаров Г.А. Волноводные устройства сантиметровых и миллиметровых волн. — М.: Горячая линия - Телеком, 2015. — 640 с. — 500 экз. — ISBN 978-5-9912-0473-6.
3. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1973, 607 с.
4. Вайнштейн Л.А.Электромагнитные волны.М.: Радио и связь, 1988, 440 с.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.2. М.: Изд-во Московского университета, 2000, 417 с.
6. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд-во АН СССР, 1961, 426 с.
7. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Наука, 1981.
8. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К., Наук. думка, 1982. – 522с.
9. Рвачев В.Л. Методы алгебры логики в математической физике. – К., Наук. думка, 1982. – 259с.
10. Никольский С.М. О продолжении функции многих переменных с сохранением дифференциальных свойств // Мат. сб. – 1956. – т.40, №2. – С.243-268.
11. Бабич В.М. К вопросу о распространении функций // Успехи мат. наук. – 1953. – т.8, вып.2. - С.111-113.
12. Рвачев В.Л. Слесаренко А.П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. - К., Наук. думка, 1977. – 287с.
13. Рвачев В.Л. Слесаренко А.П. Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена. - К., Наук. думка, 1977. – 287с.
14. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М., Наука, 1970. – 511 с.

15. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. – М., Наука, 1966. – 432 с.
16. Hestenes M.R. Extension of the range differeable function // Duke Math. J. – 1941. – v.8, N1. – Pp. 183-192
17. Максименко-Шейко К.В. R-функції в математичному моделюванні геометричних об’єктів і фізичних полів; Монографія. – Харків, ІПМаш НАН України, 2009. – 306 с. – Рос. мовою.
18. Кравченко В.Ф., Басараб М.А. Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики.
19. Maksimenko-Sheyko K. V., Sheyko T.I. Mathematical modeling of geometric fractals using R-functions. – Cybernetics and Systems Analysis. — 2012. — Vol. 48, Issue 4. — Pp. 614-620.
20. Максименко-Шейко К.В., Толок А.В., Шейко Т.И. R-функции в фрактальной геометрии. – Информационные технологии (г. Москва). — №7, 2011. — с. 24-27.
21. Максименко-Шейко К.В., Толок А.В., Шейко Т.И. R-функции как аппарат в приложениях фрактальной геометрии. — Прикладная информатика (г. Москва). — 2010. —№6 (30). — С. 21-27.
22. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М.: «Институт компьютерных исследований», 2002.
23. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. — М.: «Мир», 1993.
24. Федер Е. Фракталы. — М: «Мир», 1991.
25. А. А. Кириллов Повесть о двух фракталах. — Летняя школа «Современная математика». — Дубна: 2007.
26. Фоменко А. Т. Наглядная геометрия и топология. — М.: изд-во МГУ, 1993.
27. Фракталы в физике. Труды 6-го международного симпозиума по фракталам в физике, 1985. — М.: «Мир», 1988.

28. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. — Ижевск: «РХД», 2001.
29. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории.
30. Мандельброт Бенуа, Ричард Л. Хадсон (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах = The Misbehavior of Markets. — М.: «Вильямс», 2006. — С. 400. — ISBN 5-8459-0922-8
31. Абачиев С. К. Радужная фрактальность треугольника Паскаля.
32. Григорьев А.Д. Электродинамика и техника СВЧ / А.Д.Григорьев // М., Высшая школа. — 1990. — 335 с.
33. Волноводы с поперечным сечением сложной формы / Под ред. В.М. Седых // Харьков, Вища школа. — 1979. — 128 с.
34. Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики / В.В.Никольский // М., Наука. — 1967. — 459 с.
35. Кравченко В.Ф. Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики / В.Ф.Кравченко, М.А.Басараб // М., Физматлит. — 2004. — 308 с.
36. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г.Михлин // М., Наука. — 1970. — 512 с.

ДОДАТОК А

```
ХВИЛЕВОД ХРЕСТ КОХА
DECLARE
        pol0 h,rr1,no;        modul ro,teta;        sf p1;
function
        f1=(x*sqrt(3)-y+3*sqrt(3))/2; f2=(-x*sqrt(3)-y+3*sqrt(3))/2; w1=((-
y)!(f1&f2));
function
        w12=su(3*x,3*y,w1);
function
        w2l=su(x+6,y,w12);
function
w2lv=su((x+1.5)/2+(y-1.5*sqrt(3))*sqrt(3)/2, -(x+1.5)*sqrt(3)/2+(y-
1.5*sqrt(3))/2,w12);
function
      wl2=w2l!w2lv;
function
        wp2=su(-x,y,wl2);
function
        w22=(wl2&wp2);    >!!!!!;
function
        w2=su(y,-x,w22);
function
        muv=2/no*arsin(sin(no*teta/2)); sxv=ro*cos(muv)-9;  syv=ro*sin(muv);
function
        wS=su(sxv,syv,w2); >!!!!;
omega
        w=-wS;>w=w33;
function
        om=w; u1=om*p1;>u1=p1;
function
        u=sum(1,0,u1);
PROGRAM
        >filexy(s2,fw);
        gauss(s1,fa);         time;  ats;    new;
        gauss(s1,fb);         time;  val;    paus;
        pr1;    filexy(s2,fu);
        pr1;    filexy(s2,fu);
        pr1;    filexy(s2,fu);
        pr1;    filexy(s2,fu);
        pr1;    filexy(s2,fu);
        pr1;    filexy(s2,fu);
```

```
        pr1;   filexy(s2,fu);
        pr1;   filexy(s2,fu);
        pr1;   filexy(s2,fu);
        fa(u1)=u1(i,2)*u1(j,2)+u1(i,3)*u1(j,3);
        fb(u1)=u1(i)*u1(j);
        fu(u)=u;   fw(w)=w;
end
VALUE
CONST=1,1,1,2,100,2,1;
TABL=14,1,1,1,1, 0,1,1,0,0;
pps=-18,-18,0,0, -18,0,0,16, 0,0,16,16, 0,-18,16,0;
pp1=-18,-18,16,16;  s1=20,pps; s2=100,pp1;
p1=1,pp1;   no=3; h=6; pp=100,pp1;   rr1=0.5;
END
ХВИЛЕВОД СНІЖИНКА КОХА K=1
DECLARE
        sf p1;
        pol0 no;
        modul ro,teta;
function
        w0=-y;
        f1=(x*sqrt(3)-y+3*sqrt(3))/2;
        f2=(-x*sqrt(3)-y+3*sqrt(3))/2;
        w1=(-y)!(f1&f2);
function
        w11=su(y,x,w1);
>**********************************;
function
        w12=su(3*x,3*y,w1);
function
        w2l=su(x+6,y,w12);
function
        w2lv=su((x+1.5)/2+(y-1.5*sqrt(3))*sqrt(3)/2,
        -(x+1.5)*sqrt(3)/2+(y-1.5*sqrt(3))/2,w12);
function
      wl2=w2l!w2lv;
function
        wp2=su(-x,y,wl2);
function
        w22=wl2&wp2; >!!!!!!!;
function
        w2=su(y,x,w22);
>**********************************;
```

```
function
        w23=su(3*x,3*y,w2);
function
                w3l=su(x+6,y,w23);
function
        w3lv=su((x+1.5)/2+(y-1.5*sqrt(3))*sqrt(3)/2,
        -(x+1.5)*sqrt(3)/2+(y-1.5*sqrt(3))/2,w23);
function
       wl3=w3l!w3lv;
function
        wp3=su(-x,y,wl3);
function
        w33=wl3&wp3;
function
        w3=su(y,x,w33);

>*********************************************;
function
        w34=su(3*x,3*y,w3);
function
        w4l=su(x+6,y,w34);
function
        w4lv=su((x+1.5)/2+(y-1.5*sqrt(3))*sqrt(3)/2,
        -(x+1.5)*sqrt(3)/2+(y-1.5*sqrt(3))/2,w34);
function
       wl4=w4l!w4lv;
function
        wp4=su(-x,y,wl4);
function
        w44=wl4&wp4;
function
        w4=su(y,x,w44);            >n!!!!!;
function
                pi=3.1415926;
        fv=teta*no/2;
muv=8/pi/no*(sin(fv)-sin(3*fv)/9+sin(5*fv)/25-
        sin(7*fv)/49+sin(9*fv)/81-sin(11*fv)/11/11+
        sin(13*fv)/13/13-sin(15*fv)/15/15+sin(17*fv)/17/17-
        sin(19*fv)/19/19+sin(21*fv)/21/21-sin(23*fv)/23/23);

        >muv=2/no*arsin(sin(no*teta/2));
        sxv=ro*cos(muv)-5.2;  >R=9!!!!!;
        syv=ro*sin(muv);
```

```
function
        wS=su(sxv,syv,w11);

omega
        w=wS;
function
        om=w;
        u1=om*p1;>u1=p1;
function
        u=sum(1,0,u1);
PROGRAM
        >filexy(s2,fw);
        gauss(s1,fa);        time;  ats;    new;
        gauss(s1,fb);        time;  val;
        pr1;   filexy(s2,fu);
        pr1;   filexy(s2,fu);
        pr1;   filexy(s2,fu);
        pr1;   filexy(s2,fu);
        pr1;   filexy(s2,fu);
        pr1;   filexy(s2,fu);
        pr1;   filexy(s2,fu);
        fa(u1)=u1(i,2)*u1(j,2)+u1(i,3)*u1(j,3);
        fb(u1)=u1(i)*u1(j);
        fu(u)=u;    fw(w)=w;
end
VALUE
CONST=1,1,1,3,200,2,1;
TABL=14,1,1,1,1, 0,1,1,0,0;
no=3;
pr=-10.4,-10.4,10.4,10.4;
ppr=-10.4,-10.4,0,0, -10.4,0,0,10.4,  0,-10.4,10.4,0, 0,0,10.4,10.4;
p1=1,pr;
s1=20,ppr;
s2=100,pr;
END
ХВИЛЕВОД СНІЖИНКА КОХА НА СТОРОНАХ КВАДРАТА K=4
DECLARE
        >trig p1;      sf p1;
        pol0 h,rr1,no;
        modul ro,teta;
function
        w0=-y;
        f1=(x*sqrt(3)-y+3*sqrt(3))/2;
```

```
        f2=(-x*sqrt(3)-y+3*sqrt(3))/2;
        w1=(-y)!(f1&f2);
>**************************************;
function
        w12=su(3*x,3*y,w1);
function
        w2l=su(x+6,y,w12);
function
        w2lv=su((x+1.5)/2+(y-1.5*sqrt(3))*sqrt(3)/2,
        -(x+1.5)*sqrt(3)/2+(y-1.5*sqrt(3))/2,w12);
function
      wl2=w2l!w2lv;
function
        wp2=su(-x,y,wl2);
function
        w22=wl2&wp2; >!!!!!!!;
function
        w2=su(y,x,w22);
>**************************************;
function
        w23=su(3*x,3*y,w2);
function
                w3l=su(x+6,y,w23);
function
        w3lv=su((x+1.5)/2+(y-1.5*sqrt(3))*sqrt(3)/2,
        -(x+1.5)*sqrt(3)/2+(y-1.5*sqrt(3))/2,w23);
function
      wl3=w3l!w3lv;
function
        wp3=su(-x,y,wl3);
function
        w33=wl3&wp3;
function
        w3=su(y,x,w33);

>**********************************************;
function
        w34=su(3*x,3*y,w3);
function
        w4l=su(x+6,y,w34);
function
        w4lv=su((x+1.5)/2+(y-1.5*sqrt(3))*sqrt(3)/2,
        -(x+1.5)*sqrt(3)/2+(y-1.5*sqrt(3))/2,w34);
```

```
function
      wl4=w4l!w4lv;
function
        wp4=su(-x,y,wl4);
function
        w44=wl4&wp4;
function
        w4=su(y,x,w44);           >n!!!!!;
function
                pi=3.1415926;
        fv=teta*no/2;
muv=8/pi/no*(sin(fv)-sin(3*fv)/9+sin(5*fv)/25-
        sin(7*fv)/49+sin(9*fv)/81-sin(11*fv)/11/11+
        sin(13*fv)/13/13-sin(15*fv)/15/15+sin(17*fv)/17/17-
        sin(19*fv)/19/19+sin(21*fv)/21/21-sin(23*fv)/23/23);

        >muv=2/no*arsin(sin(no*teta/2));
        sxv=ro*cos(muv)-9;  >R=9!!!!!;
        syv=ro*sin(muv);
function
        wS=su(sxv,syv,w2);

omega
        w=wS;
function
        om=w;
        u1=om*p1;>u1=p1;
function
        u=sum(1,0,u1);
PROGRAM
        >filexy(s2,fw);
        gauss(s1,fa);        time;  ats;    new;
        gauss(s1,fb);        time;  val;
        pr1;   filexy(s2,fu);
        pr1;   filexy(s2,fu);
        pr1;   filexy(s2,fu);
        pr1;   filexy(s2,fu);
        pr1;   filexy(s2,fu);
        pr1;   filexy(s2,fu);
        pr1;   filexy(s2,fu);
        fa(u1)=u1(i,2)*u1(j,2)+u1(i,3)*u1(j,3);
        fb(u1)=u1(i)*u1(j);
        fu(u)=u;    fw(w)=w;
```

```
end
VALUE
CONST=1,1,1,2,200,2,1;
TABL=16,1,1,1,1, 0,1,1,0,0;
h=6;rr1=0.5;no=4;
pr=-14,-14,14,14;
ppr=-14,-14,0,0, -14,0,0,14,  0,-14,14,0, 0,0,14,14;
p1=1,pr;
s1=20,ppr;
s2=100,pr;
END
```