МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут комп’ютерної фізики та енергетики

Кафедра фізики нетрадиційних енерготехнологій та екології

Пояснювальна записка

до дипломної роботи

за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр»

на тему: **«Обчислення матричних коефіцієнтів Брагінського для плазми в магнітному термоядерному реакторі»**

Виконав: студент 4 курсу, групи НФ-41
Колесник Віталій Віталійович

Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

Освітня програма: Прикладна фізика енергетичних систем

Керівник: к.ф.-м.н, доцент
Марущенко Ілля Миколайович

Рецензент:

Харків – 2021 року

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Інститут Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра фізики нетрадиційних енерготехнологій та екології
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) бакалавр
Спеціальність 105. «Прикладна фізика та наноматеріали»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ **В. І. ТКАЧЕНКО**
підпис ініціали, прізвище

"____" _____2021__року

З А В Д А Н Н Я
НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ (ПРОЕКТ)

_____Колесник Віталій Віталійович_____
(прізвище, ім'я, по батькові студента)

1. Тема роботи «Обчислення матричних коефіцієнтів Брагінського для плазми в магнітному термоядерному реакторі»

керівник роботи Марущенко І. М., доцент, кандидат фіз.-мат. наук_____
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від "___"_____20__ року №___

2. Строк подання студентом роботи 21.05.2021_____

3. Перелік питань, які потрібно розробити
Виявлення можливих альтернативних джерел, які зможуть забезпечити великі індустріальні центри електроенергією. Розгляд токамака та стеларатора. Виявлення технічних успіхів, яких вдалося досягнути у термоядерній енергетиці на сьогодні. Проблеми процесів перенесення, а саме, неокласичне перенесення. Розгляд задачі Спітцера, та її перетворення на систему алгебраїчних рівнянь завдяки методу Брагінського. Урахування релятивістської теорії для електронів та нерелятивістської для іонів. Переогляд матричних коефіцієнтів Брагінського з додаванням гібридного підходу. Отримуються численні порівняння коефіцієнтів Брагінського, отриманих гібридним підходом з тими, що отримані нерелятивістським підходом._____
_____
_____
_____

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1.	Вибір теми дипломної роботи, узгодження.
2.	Затвердження теми дипломної роботи на кафедрі.
3.	Робота над літературою.
4.	Написання вступу.
5.	Написання першого розділу.
6.	Написання другого розділу.
7.	Проведення математичного аналізу.
8.	Висновки після математичного аналізу.
9.	Написання третього розділу.
10.	Написання висновків до дипломної роботи.
11.	Перевірка дипломної роботи науковим керівником.
12.	Попередній захист дипломної роботи.
13.	Захист дипломної роботи.

5. Дата видачі завдання 15.01.2021

Студент _____ **В. В. Колесник**
підпис ініціали, прізвище

Керівник роботи _____ **І. М. Марущенко**
підпис ініціали, прізвище

РЕФЕРАТ

Колесник В. В. Обчислення матричних коефіцієнтів Брагінського для плазми в магнітному термоядерному реакторі.

Дипломна робота представлена на 48 сторінках; складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку літератури; використано література

Мета роботи: отримати формули для обчислення матричних елементів Брагінського з урахуванням релятивістської кінетики електронів.

Об’єкт дослідження: гаряча плазма в магнітному термоядерному реакторі.

Предмет дослідження: теорія неокласичного перенесення у гарячій плазмі.

Мета дослідження: стандартний спосіб обчислення матричних елементів Брагінського використано як взірець для отримання відповідних релятивістських формул. В роботі використовується гібридний підхід, за якого електрони розглядаються як повністю релятивістські частинки з рівноважною функцією розподілу Максвелла-Юттнера, а іони – як класичні частинки. Також вважалось, що всі макроскопічні потоки повільні порівняно зі швидкістю світла.

Наукова новизна одержаних результатів: вперше отримано вирази для матричних елементів Брагінського з урахуванням релятивізму електронів.

Апробація отриманих результатів: результати роботи будуть представлені на конференції “Фізико-технічні проблеми енергетики та шляхи їх вирішення 2021”, що відбудеться у червні 2021 року.

SUMMARY

Kolesnik V.V. Calculations of Braginsky matrix coefficients for plasma in magnetic thermonuclear reactor.

Thesis consist of 48 pages; introduction, three chapters, conclusions and bibliography, used literature.

The aim: to obtain formulas for calculating the matrix elements of Braginsky, including the relativistic kinetics of electrons.

The object of research: hot plasma in a magnetic thermonuclear reactor.

The subject of research: the theory of neoclassical transfer inside the hot plasma.

The aim of the research: the standard method of calculating the matrix elements of Braginsky is used as a model of obtaining appropriate relativistic formulas.

The work uses a hybrid approach where electrons are considered as fully relativistic particles with the function of the Maxwell-Juttner distribution, and the ions are considered as classical particles.

All the macroscopic fluxes are known to be slower compared to the speed of light.

The scientific novelty of the study: For the first time equations were obtained for matrix elements of Braginsky based on the relativism of electrons.

The validation of the results: results will be presented at the conference "Physical and technical energy issues and how to solve them 2021", to be held in June 2021.

Зміст

Вступ 8

Розділ 1. Генерація електроенергії шляхом термоядерного синтезу 14

1.1 Термоядерний синтез як джерело енергії 14

1.2 Токомаки і стеларатори 15

1.3 Сучасний стан термоядерних досліджень 19

Висновки до розділу 1 21

Розділ 2. Повздовжні потоки і неокласичне перенесення 23

2.1 Процеси перенесення в токамаках 23

2.2 Кінетичне рівняння Больцмана 26

2.3 Матричні елементи Брагінського 31

Висновки до розділу 2 33

Розділ 3. Обчислення матричних елементів Брагінського 34

3.1 Мотивація для урахування релятивізму в процесах перенесення 34

3.2 Релятивістська кінетика електронів 36

3.3 Метод Брагінського: розкладання в ряд 39

3.4 Релятивістський кулонівський оператор 41

3.5 Матричні елементи Брагінського та їх обчислення 43

Висновки до розділу 3 44

Загальні висновки 46

Перелік використаних джерел 47

Вступ

Актуальність теми. Електроенергія сьогодні стала невід'ємною частиною життя людини, від її доступності залежить сама можливість існування людства. Електроенергія є головним елементом технологій, від неї залежить медицина, транспорт і навіть виробництво продуктів харчування. Таким чином, пошук відповідних джерел енергії є найбільш фундаментальною задачею людства. Протягом останніх століть, від самого початку промислової революції, такими джерелами енергії були горючі корисні копалини. Але їх ресурси на Землі обмежені, а час впровадження нових технологій вироблення електроенергії вимірюється щонайменше десятиріччями, тому проблема пошуку надійних новітніх джерел енергії з кожним роком стає все більш актуальним. Більш того, екологічні проблеми, пов'язані з глобальним потеплінням, змушують нас відмовлятися від викиду CO_2 в атмосферу, тобто потребують відмовитися від викопних джерел енергії задовго до того, як їх ресурси будуть вичерпані. Згідно з оцінками Nature[1], для того, щоб обмежити ріст температури у XXI столітті величиною в 1.5°C, необхідно повністю закрити теплові електростанції і перейти на екологічно чисті джерела енергії. Вже існують міжнародні договори по обмеженню використання викопного палива[2]. Крім того, останні десятиріччя у світі є тенденція по скороченню розповсюдження традиційної ядерної енергетики. Так, нещодавно Германія оголосила про повну відмову від ядерної енергії і закриття атомних електростанцій. Це пов'язано як з проблемою утилізації ядерних відходів, так і з побоюваннями щодо неконтрольованого розповсюдження ядерного палива, оскільки останнє може бути використане як вибухова речовина для нелегальної ядерної зброї. Таким чином, світ швидко рухається у напрямку повної відмови від основних енерготехнологій і джерел енергії. Але як у такому випадку задовільнити світовий попит на електроенергію, що збільшується з кожним роком? Головними претендентами на центральне місце у енергетиці майбутнього є так звані поновлювані джерела енергії: вітрова, сонячна та інші. Їх переваги очевидні і уряди

багатьох розвинутих країн вже давно впровадили так звані “зелені тарифи” для державної підтримки усіх, хто розвиває або використовує технології поновлюваних джерел енергії. Але, при всіх своїх беззаперечних перевагах, ці джерела мають одну особливість, що дещо обмежує їх застосовність. Як вітрові, так і сонячні електростанції – це “ферми”, що складаються з великої кількості окремих вітряків, або сонячних панелей, об’єднаних в одну мережу. Більш того, кожен окремий вітряк майже ніколи не виходить на максимальну потужність – кількість виробленої енергії залежить від сили вітру, а якщо вітер стає дуже сильним, то вітряк зовсім відключають, щоб уникнути його механічного руйнування. Також і сонячні панелі майже ніколи не працюють на повну потужність, і кількість виробленої ними енергії залежить від того, скільки енергії сонячного випромінювання сягають поверхні землі в даному місці. Наслідком є те, що така “ферма” – це мережа, що складається із окремих стохастичних джерел енергії, кожне з яких виробляє потужність, що швидко змінюється у широких межах. Така електростанція виробляє кількість енергії, що сильно залежить від погодних умов і часу суток, і при цьому ніколи не виходить на максимальну потужність, тобто проектна потужність повинна бути в разі більшою за очікувану. Але все не так погано і такі електростанції добре працюють у сільських районах, що доведено їх використанням, наприклад, у Германії, яка є одним із світових лідерів у впровадженні поновлюваних джерел енергії у національну енергетичну мережу[3]. На даний момент технології вітряної і сонячної енергетики активно розповсюджуються у світі і мають велике майбутнє. Але, зважаючи на вищесказане, вони не дуже добре застосовані для забезпечення електричною енергією великих індустріальних центрів, що потребують постійного забезпечення великою потужністю електроенергії у будь-який час, незалежно від часу доби, погодних умов або пори року. Для таких цілей більш відповідною є традиційна електростанція, що завжди виробляє однакову потужність. Станом на кінець 2016 року відсотковий внесок тепловими електростанцій у виробництво електричної енергії складав 60,9% [4]. Але що робити, якщо всі теплові електростанції будуть закриті?

Єдиним відомим на сьогодні джерелом енергії, що відповідає вимогам “зеленого світу” і при цьому може бути реалізованим у форматі традиційної електростанції, є енергія термоядерного синтезу. На рівні ідеї це електростанція, що виробляє електричну енергію у традиційний спосіб, завдяки турбінам і паровому циклу, а джерелом тепла є термоядерний реактор. Головною перевагою термоядерного реактора перед іншими технологіями великомасштабного вироблення енергії є його екологічність і безпечність. Паливом для термоядерного синтезу на основі дейтерій-тритієвої (D-T) реакції є іони водню (дейтерій D доступний у необмеженій кількості в океані у вигляді молекул “важкої води” D_2O, а тритій T може вироблятися прямо у реакторі із літію Li, що також є у великій кількості як у земній корі, так і в океані), а кінцевими продуктами реакцій є гелій He, інертний газ. Термоядерний реактор також є абсолютно безпечним, тому що під час його роботи паливо знаходиться у вакуумній камері і його загальна маса настільки мала, що навіть якщо б трапився вибух, він не зміг би задати суттєвої шкоди навіть самому реактору, не кажучи вже про те, що такий вибух фізично неможливий, тому що для ядерного синтезу відсутні ланцюгові реакції або якісь інші механізми неконтрольованих ядерних реакцій. Навпаки, реактор потребує постійної уваги, щоб не дати ядерним реакціям загаснути.

Загалом існує дві основні концепції термоядерної енергетики: інерційний синтез і магнітний синтез.

Інерційний синтез оснований на швидкому стисканні маленької капсули з воднево-літієвим паливом, що призводить до створення необхідних умов для ядерного синтезу і подальшого вибуху. Але кількість палива в капсулі настільки мала, що вибух не може пошкодити не тільки вакуумну камеру, но і високотехнологічне обладнання в її середині, і призводить лише до її нагріву. При цьому швидкість стискання повинна бути настільки великою, щоб паливо встигло повністю вигоріти перш ніж капсула розлетиться у наслідок вибуху, і саме інерція руху стискання дає

для цього потрібний час. На даний момент найбільш сучасним пристроєм, що використовується для дослідження інерційного синтезу, є NIF (National Ignition Facility) у Ліверморській національній лабораторії імені Лоуренса, США. Для стискання капсули там використовуються неодимові лазери. Втім, основна проблема цього напрямку полягає в тому, що на сьогоднішній день відсутні лазери з потрібною комбінацією довжини хвилі, потужності і часу перезарядки, а інші способи стискання капсули мають свої недоліки.

Магнітний синтез заснований на ідеї утримання плазми у магнітному полі. Відомо, що заряджені частинки рухаються вздовж магнітних силових ліній по ларморівським кружкам, тобто по гвинтовий траєкторії, тож, якщо замкнути силові лінії магнітного поля, то частинки будуть рухатися у замкненому просторі. Так виникає тороїдна геометрія магнітного поля. Насправді, силові лінії замикаються після кінцевої кількості обходів тора лише у дуже спеціальних випадках, а в загальному випадку вони ніколи не замикаються, створюючи, таким чином, магнітні поверхні. З точки зору класичної фізики, для того, щоб два іони вступили в ядерну реакцію, необхідно, щоб їх енергія центра мас була більшою ніж максимальна кулонівська енергія відштовхування. Це задає дуже високий поріг – приблизно 288 кеВ. Насправді, завдяки квантовим ефектам, все не так погано. Оскільки ядра атомів за деяких умов поводяться як хвилі, то з одного боку стає можливим підбар’єрне тунелювання, а з іншого боку виникають резонансні ефекти, що значно збільшують ймовірність ядерної реакції між іонами. Але у будь-якому разі достатньої кількості ядерних реакцій в одиниці об’єму реактора за одиницю часу можна досягти лише у гарячій плазмі з достатньою кількістю високоенергетичних іонів.

Таким чином, питання нагріву плазми є одним із найбільш важливих для магнітного термоядерного реактора. З іншого боку, особливої важливості набуває також розуміння процесів, що призводять до охолодження плазми, і одним із таких процесів є неокласичне перенесення.

У магнітному термоядерному синтезі також можна виділити два основних кандидата на роль майбутнього термоядерного реактора: токамак і стеларатор. Токамак використовує електричний струм для створення полоїдного магнітного поля, а тороїдне поле створюється зовнішніми магнітними котушками, і саме їх комбінація створює необхідні магнітні поверхні. У стелараторах магнітні поверхні повністю створюються зовнішніми магнітними котушками. Перевагою останнього підходу є те, що плазма в стелараторах спокійніша, менш турбулентна, і вони виглядають дуже перспективними реакторами для другого покоління термоядерних електростанцій. Найбільшим і найсучаснішим стеларатором на сьогодні є W-7X, розташований у Грайфсвальді, Германія. Але токамаки значно дешевші у виробництві, вони опереджають стеларатори на кілька десятиліть і саме вони на сьогодні є найбільш перспективним кандидатом в термоядерні реактори для перших термоядерних електростанцій. Електричний струм у токамаках, крім того, що грає важливу роль у створенні магнітних поверхонь, є також джерелом нестабільності плазми, а також є одним із джерел нагріву плазми завдяки джоулевому теплу. З фізичної точки зору, поздовжній електричний є дифузійним процесом і належить до процесів перенесення. Найбільший токамак у світі, ITER, зараз знаходиться у стані будування. Він розташований поблизу міста Кадараш, Франція, і очікується, що він почне працювати вже у 2025 році. Учасниками міжнаціонального проекту ITER є США, Канада, Євросоюз, Японія, Китай, Росія, Індія та Північна Корея.

Розуміння процесів перенесення знаходиться у самому центрі проблеми створення ефективного магнітного термоядерного реактора, і саме одному із аспектів процесів перенесення присвячена дана дипломна робота. При застосуванні кінетичного рівняння Больцмана для задачі про поздовжнє перенесення виникає складне інтегро-диференціальне рівняння. Розкладанням функції розподілу в ряд по поліномам Соніна його можна перетворити на систему алгебраїчних рівнянь. При цьому, в якості коефіцієнтів виникають так звані матричні елементи Брагінського.

Вони добре відомі і описані в літературі, але традиційний підхід нехтує релятивізмом електронів. Загалом, релятивістські ефекти в термоядерній плазми в деяких задачах враховуються уже давно, але процеси перенесення до останнього часу вважалися такими, що керуються повільними, нерелятивістськими електронами. Тільки в останні роки відбувається усвідомлення, що термоядерні пристрої досягли таких високих робочих температур, за яких урахування релятивістських ефектів кінетики електронів стає необхідним навіть для процесів перенесення. Задача даної роботи полягає в тому, щоб розглянути можливість обчислення матричних елементів Брагінського з урахуванням релятивістської кінетики електронів, і отримати формули для їх обчислення.

Розділ 1. Генерація енергії шляхом термоядерного синтезу

1.1 Термоядерний синтез як джерело енергії

Коли два ядра легких хімічних елементів наближаються один до одного на таку відстань, за якої ядерні сили тяжіння переважають сили електромагнітного відштовхування, ядра обох атомів з'єднуються і створюють зіставне ядро, яке відразу розпадається на інші, стабільні ядра. Якщо серед продуктів такої ядерної реакції є частинка, що складається із більшої кількості нуклонів, ніж будь-яка із вихідних частинок, то така ядерна реакція називається реакцією ядерного синтезу. Частинки, що були утворені в результаті ядерного синтезу, мають меншу сумарну масу ніж частинки до ядерної реакції. Ця різниця мас, згідно з формулою [5]Ейнштайна $E = mc^2$, відповідає різниці в енергії зв'язку між первісними частинками і продуктами реакції, і вона перетворюється на енергію, що розподіляється між продуктами реакції у вигляді кінетичної енергії. Нижче наведено перелік основних ядерних реакцій, цікавих для термоядерної енергетики:

$$D + D \rightarrow n(2.45MeV) + He^3(0.87MeV)(50\%)$$

$$D + D \rightarrow p(3.02MeV) + T(1.01MeV)(50\%)$$

$$D + T \rightarrow n(14.1MeV) + He^4(3.5MeV)$$

$$D + He^3 \rightarrow p(14.68MeV) + He^4(3.67MeV)$$

$$p + B^{11} \rightarrow 3He^4(8.7MeV)$$

Для того, щоб відбувся захват однієї частинки іншою завдяки ядерним силам, перша частинка повинна мати відповідний прицільний параметр. Для опису ймовірності ядерної реакції використовують таке поняття, як переріз реакції. Чим більше переріз реакції, тим більшою є мішень і тим легше в неї влучити. Зрозуміло, що переріз реакції залежить від відносної швидкості частинок, що взаємодіють.

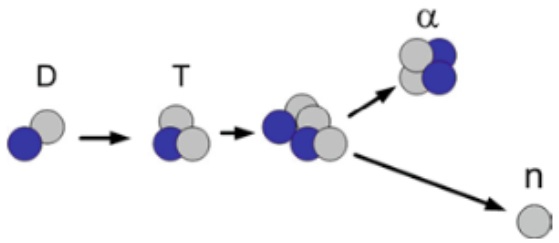


Рис.1. D-T реакція.

Виявляється, що в доступному нам на даному етапі розвитку технологій інтервалі температур (15-30 кеВ) саме D-T реакція (рис.1) має найбільший переріз реакції, і тому її легше реалізувати, ніж будь-яку іншу.

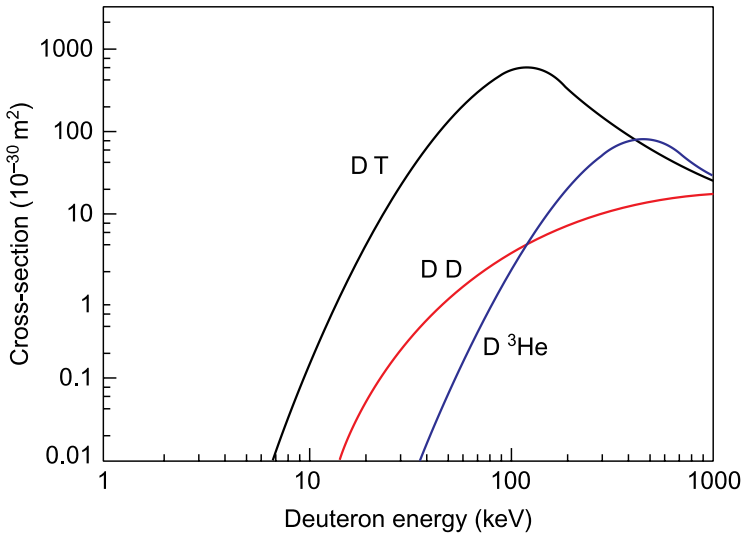


Рис.2. Переріз реакції для трьох основних термоядерних реакцій.

Тож, незважаючи на те, що порівняно з іншими термоядерними реакціями D-T реакція має найбільшу кількість недоліків, саме її реалізація є головною метою для першого покоління термоядерних електростанцій.

1.2 Токамаки і стеларатори

Стеларатор та токамак – це замкнуті магнітні ловушки тороїдальної форми для утримування гарячої плазми магнітним полем, запобігаючи прямому контакту плазми

із внутрішніми стінками, у яких можна створити бажані умови для проведення керованого термоядерного синтезу і використовувати їх як реактор. Термоядерний реактор для електростанції повинен мати великі габарити, значно більші, ніж будь-який існуючий токамак або стеларатор, і першим пристроєм, що має необхідні для виробництва енергії розміри, буде експериментальний токамак ITER, що знаходиться у фазі будування.

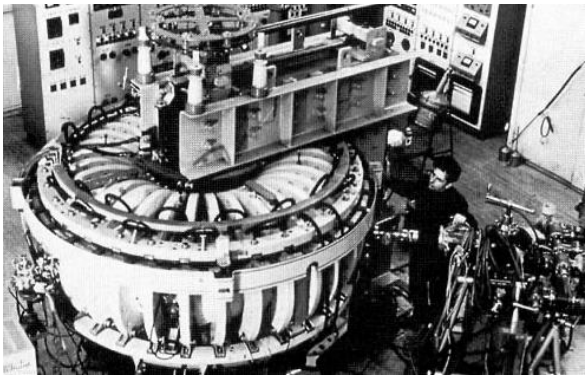


Рис.3. Один з перших токамаків створених в інституті ім. Курчатова.

Токамак [6] – це абревіатура, що розшифровується як «тороїдна камера з магнітними котушками». Призначення токамаку - забезпечення утримання іонів водню у вакуумній камері за допомогою магнітного поля достатньо довго, щоб значна частина іонів встигла вступити в ядерну реакцію. Яка саме кількість реакцій синтезу повинна мати місце – це визначається умовами, за яких технологія стає енергетично вигідною. Особливість протікання термоядерних реакцій з точки зору енергетики полягає в тому, що нам потрібно постійно підтримувати паливо при дуже високій температурі (температура 15 кеВ – це приблизно 150 мільйонів градусів Цельсія), а використання зовнішнього нагріву плазми вже само потребує значної енергії, що знижує ефективність реактора як джерела енергії. Але в D-T плазмі ядерні реакції синтезу самі по собі є джерелом нагріву, оскільки у відповідних ядерних реакціях 4/5 всієї енергії уносить альфа-частинка (ядро гелія-4), що захоплюється магнітним полем і прогріває плазму. Таким чином, теоретично можна досягти такої інтенсивності реакцій, за якої зовнішній нагрів буде непотрібним, і всі втрати на випромінювання і

радіальне перенесення будуть компенсовані енергією альфа-частинок. Така ситуація називається запаленням плазми. Якщо запалити плазму, то вона буде підтримувати свою температуру завдяки прогріву альфа-частинками, а нейтрони і випромінювання будуть нагрівати першу стінку реактора і бланкет. Таким чином, термоядерний реактор стає джерелом тепла для термоядерної електростанції, яка це тепло перетворює на електричну енергію. Частина цієї електричної енергії буде затрачуватися на підтримання роботи важливих компонентів реактора, таких як, наприклад, надпровідні магнітні котушки в кріостаті, а остаток буде зливатися в національну мережу. На сьогоднішній день ще не вдалося отримати запалення плазми, оскільки перший токамак потрібного розміру знаходиться лише на стадії будування, і деякі інші параметри, такі як потужність магнітного поля або час утримання потребують максимального рівня розвитку технологій, які з'явилися лише в останні 10-20 років, але розрахунки показують, що ця мета може бути досягненою вже в наступному поколінні токамаків (після ITER).

Перший токамак Т-1 (1955 р.) був збудований у СРСР в Інституті атомної енергії, авторами фізико-технічної частини були Н. А. Явлінський, І. М. Головін, Л. А. Арцимович. Справжній прорив відбувся у 1968 р., коли було оголошено, що в Курчатовському інституті на Т-3 вченим вдалося досягти температури плазми 0.5 КеВ та приблизної щільності плазми у $5*10^{19}$ $м^{-3}$ (час утримання – 20 мс). Від того часу і до тепер саме токамаки стали пріоритетним напрямком в термоядерних дослідженнях.

Токамаки другого покоління мали наступні характеристики плазми: температура 2-3 КеВ, щільність плазми $>10^{20}$ $м^{-3}$. Основними перевагами токамаків другого покоління стали методи додаткового нагріву плазми та система керування плазмового потоку.

Третє покоління[20] токамаків (90-ті роки) почалося зі збільшення розмірів тору (до 3 метрів), основними задачами стали розробка новітніх надпровідних магнітних

систем, удосконалення систем для роботи з тритієм, дистанційне керування деяких процесів.

Створення першого міжнародного експериментального термоядерного реактору для генерації електроенергії (ITER) було вирішено зробити на основі JET як найбільш успішного на сьогодні токамаку. Створення експериментального термоядерного реактору було вирішено почати у Франції (дослідницький центр «CEA-Cadarache»), приблизна дата завершення будівництва і отримання першої плазми - 2025 рік, а приблизна дата виходу на повну потужність і початку роботи з тритієм - 2035 рік.

Стеларатор отримав свою назву від зірок, які отримують енергію завдяки процесам термоядерного синтезу у своїх надрах. Принципова відмінність роботи стеларатора від токамака полягає у тому, що в стелараторі потрібна конфігурація магнітного поля повністю генерується зовнішніми котушками, завдяки чому в стелараторі не потрібний великий поздовжній струм і, відповідно, відсутні проблеми з турбулентністю плазми, завдяки чому він може підтримувати безперервний режим роботи. Перші стеларатори не мали суттєвих відмінностей один від одного, до появи так званого «торсатрона». Торсатрон відрізнявся від традиційних стелараторів тим, що мав 2 типи обмотки: внутрішню гвинтову і зовнішню. Недоліком стелараторів довгий час була складність магнітних котушок і дуже обмежені можливості корегувати конфігурацію магнітного поля для отримання кращого утримання. Але у XXI столітті покращення точності комп'ютерних моделей і підвищення обчислювальних потужностей дозволило більш точно прораховувати потрібну форму магнітних котушок, а ідея модульних котушок (нелінійні вигнуті у складну форму кільця) в стелараторі нового покоління Wandelstein 7X призвела до нового імпульсу в розвитку стелараторів.

1.3 Сучасний стан термоядерних досліджень

Спочатку розглянемо метод утримання плазми, а саме – магніти. Для швидкого затискання використовують імпульсні магніти, що живляться від конденсаторної батареї. Конденсатори заряджаються за низької вхідної потужності близько хвилини, але потім раптово розряджаються. Батареї мають високу вихідну потужність протягом мілі- або мікросекунд. Під час проектування магнітних котушок було виявлено, що більш ефективними є магнітні котушки з водяним охолодженням.

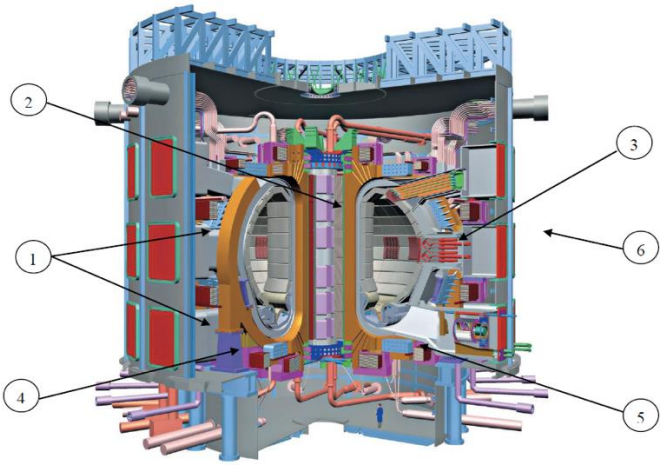


Рис.4. Схема реактору ИТЕР у розрізі: 1 – котушка полоїдного магнітного поля; 2 – центральний соленоїд (індуктор); 3 – вакуумна камера; 4 – котушка тороїдного магнітного поля; 5 – дивертор; 6 – кріостат;

Магнітні котушки [7] з водяним охолодженням виділяються тим, що вимагають великої кількості електроенергії та охолодженої води. Якщо порівнювати їх з надпровідними магнітами, то вони мають ряд переваг:

- Не потребують ізоляції та кріогенного охолодження.
- Зручні у будуванні пристроя та під час обслуговування.
- Практично не здатні завадити процесам у плазмі.
- Мають високу стійкість до впливу нейтронів.

У котушках такого типу існують також незначні відхилення магнітного поля від бажаної форми, що називається похибками поля. Подібна похибка може трохи зіпсувати константу плазми. Для того, щоб мінімізувати польові похибки виконуються такі дії:

- Дуже обережне намотування котушки.
- Вирівнювання котушки (з точністю до мм).
- З ціллю вирівняти струми в котушках їх з'єднують послідовно.

Проблема нагрівання плазми вирішується декількома способами. Є внутрішні джерела нагріву: це, перш за все, омічний нагрів та нагрів альфа-частинками. В якості зовнішніх джерел енергії використовуються такі процеси як інжекція нейтральних атомів та поглинання електронами або іонами радіохвиль з відповідними резонансними частотами.

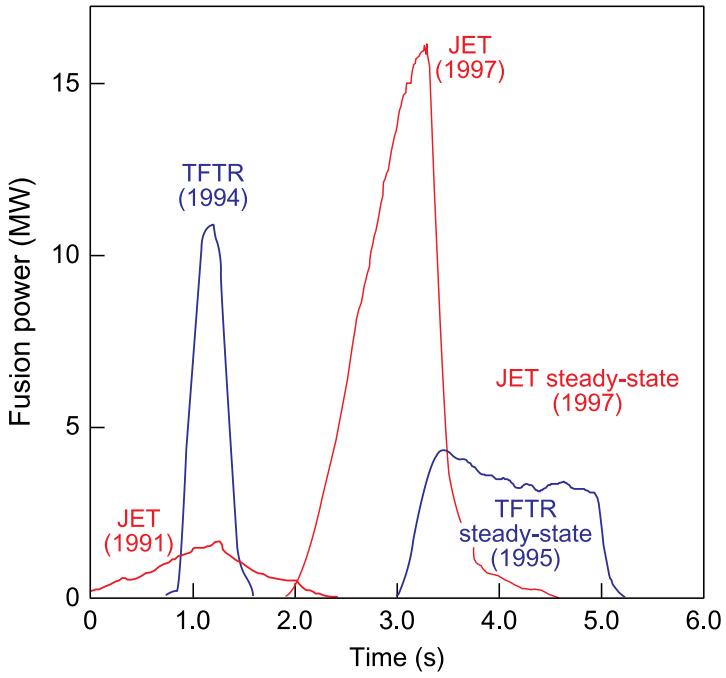


Рис.5. Потужність енергії термоядерного синтезу, отримана у великих токамаках.

Теоретична можливість отримання енергії із вакуумної камери магнітного реактора була доведена у середині 90-х років у експериментах з трітієм у трьох великих токамаках JET (Велика Британія), TFTR (США) та JT-60 (Японія).

Вони зафіксували значний вихід енергії, але тільки протягом короткого часу, тому що час утримання був дуже обмежений, і параметри цих токамаків були занадто далекими від запалювання плазми. Втім, після цих експериментів, теоретична можливість отримувати енергію у контрольований спосіб в магнітному термоядерному реакторі не викликає сумнівів.

Наступним кроком в термоядерних дослідженнях повинна стати технічна можливість перетворити токамак на джерело енергії – саме така задача стоїть перед токамаком ITER, початок роботи якого запланований на 2025 рік[21]. Якщо ця мета буде досягненою, то наступним кроком буде будування демонстраційної електростанції (проект DEMO) і потім комерційних термоядерних електростанцій.

Висновки до розділу 1

Через глобальне потепління перестають працювати теплові електростанції, внесок яких у світову енергетику ~60%. Та через забрудненість навколишнього середовища відпрацьованим ядерним паливом виникає потреба зупинити роботу ядерних електростанцій, які теж мають велику потужність. Тобто, світ втрачає потужні джерела електроенергії, а попит на електроенергію зростає з кожним роком.

Світові потреби електроенергії починають задовольняти сонячна енергетика, вітрова, гідроенергетика та ін. Але коли потрібне джерело електроенергії, здатне забезпечувати великі індустріальні центри постійною подачею електроенергії з великою потужністю. То з відомих альтернативних джерел електроенергії підходить тільки одне – енергія термоядерного синтезу.

Енергія термоядерного синтезу, відповідає нормам зеленої електроенергії. Крім того для реакцій термоядерного синтезу потрібне паливо (Li, H), яке знаходиться у великих об’ємах.

Розділ 2. Поздовжні потоки і неокласичне перенесення

2.1 Процеси перенесення в токамаках

Оскільки процес термодинамічного синтезу повинен бути вигідним у використанні, основною задачею стає самозапалення плазми, для цього потрібно щоб нагрів плазми альфа-частинками повністю компенсував втрати на випромінювання, теплопровідність та інші механізми втрати енергії. Досягнення автономної роботи з самозапаленням призводить до вимоги достатньої величини часу утримання. У свою чергу розуміння та контроль обмеження енергії є завданням теорії транспорту[7].

У плазмі є три важливі види перенесення:

- Класичний транспорт.
- Неокласичний транспорт.
- Аномальний транспорт.

Для досягенння запалення плазми необхідно, щоб виконувався критерій Лоусона, що для D-T реакції може бути записаний як $n_e\tau_E \geq 10^{-20}$ с/м^3. Досягнення запалювання плазми потребує певного балансу щільності плазми і енергетичного часу утримання (це час, протягом якого енергія “живе” у плазмі завдяки магнітному утриманню). Розрахунки показують, що потрібний час утримання енергії складає $\tau_E \approx 1$ с. В ITER очікуване значення часу утримання буде сягати $\tau_E \approx 3.6$ с.

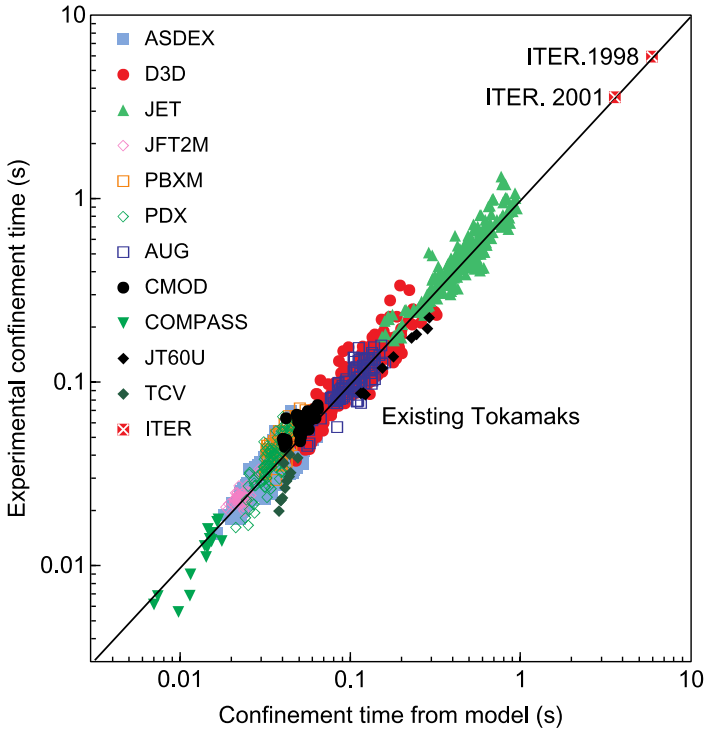


Рис.6. Енергетичний час утримання в токамаках: теоретичні та експериментальні дані.

Класичний транспорт пов'язаний з рухом частинок вздовж магнітного поля по ларморівським кружкам. Аномальний транспорт пов'язаний з турбулентністю плазми, дає доволі великий внесок у процеси перенесення. Неокласичний транспорт – це транспорт, який виникає через потребу використовувати у класичному транспорті ефекти тороїдної геометрії. Неокласичний транспорт містить опис двох рідин, який включає питомий опір, в'язкість та теплопровідність. Для отримання коефіцієнту дифузії потрібно вивести рівняння напівпроходу, так як формула обчислення коефіцієнта дифузії має вигляд:

$$D = \frac{(\Delta l)^2}{\tau} \qquad (2.1.1)$$

де τ – це середній час між зіткненнями, Δl – середній розмір кроку між зіткненнями.

По-перше, час напівпроходу можна визначити користуючись рівністю $\tau_{1/2} = l/v_{||}$, у нашому випадку $l(r) \approx \pi R_0 q(r)$. Отже маємо час напівпроходу:

$$\tau_{1/2}(r) = \frac{\pi R_0 q}{v_{||}} \qquad (2.1.2)$$

По-друге, потрібно одержати середній розмір кроку:

$$\tau_{1/2}(\Delta l)^2 = 2\frac{q^2}{\omega_{ci}^2}\frac{\left(v_{||}^2+v_{\perp}^2\right)^2}{v_{||}^2} \approx 4\frac{q^2 v_{Ti}^2}{\omega_{ci}^2} \qquad (2.1.3)$$

де було виконане наближення $v_{\perp}^2/2 \approx v_{||}^2 \sim v_{Ti}^2/2$.

Дифузія відбувається під час електрон-іонних зіткнень. Для отримання коефіцієнта дифузії в неокласичному випадку розглядається випадкова прогулянка неокласичної частинки. Одержане рівняння коефіцієнта дифузії:

$$D_n^{(NC)} = \frac{(\Delta l)_e^2}{\bar{\tau}_{ei}} = 4q^2\left(\frac{2m_e T_e}{e^2 B_0^2 \bar{\tau}_{ei}}\right) = 4q^2 D_n^{(CL)} \qquad (2.1.4)$$

Звідси можна побачити, що неокласичний коефіцієнт дифузії відрізняється від класичного випадку приблизно у 30 разів ($\sim 4q^2$). Цей висновок також можна використати для опису теплової дифузії, яка визначається за допомогою зіткнення частинок:

$$\chi_e^{(NC)} \sim q^2 \chi_e^{(CL)} \sim q^2 \frac{r_{Le}^2}{\bar{\tau}_{ee}}$$

$$\chi_i^{(NC)} \sim q^2 \chi_i^{(CL)} \sim q^2 \frac{r_{Li}^2}{\bar{\tau}_{ii}} \qquad (2.1.5)$$

Напруженість магнітного поля токамаку є слабкою з зовнішньої сторони тора та сильною з внутрішньої, причиною цього є $B \approx B_{\phi} \approx B_0(R_0/R)$. Через нерівномірність у напруженості трапляються частинки, які починають рухатися з зовнішньої сторони тора з малим співвідношенням $v_{||}/v_{\perp}$ та відображаються дзеркально, через те, що паралельний рух накручує їх до внутрішньої сторони тора.

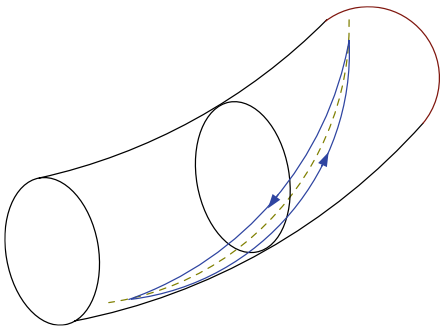


Рис.6. Траєкторія захоплених частинок в тороїдальній магнітній пасці.

На зовнішній стороні тора частинки потрапляють у «пастку». Внаслідок відбивання від області сильного магнітного поля вони відхиляються від магнітної поверхні на півширину “банана”, тобто значно сильніше, ніж на ларморівський радіус, як незахоплені, або “пролітні” частинки. Відповідно, у наслідок зіткнень з іншими частинками вони мають значно більший шаг дифузії, і неокласичне перенесення, що здійснюється захопленими частинками в токамаках і стелараторах, є на кілька порядків сильнішим за класичне перенесення.

2.2 Кінетичне рівняння Больцмана

Будемо користуватися нековаріантним формулюванням релятивістської кінетики. Через наступні переваги:

- Достатнім є опис фізичних процесів у лабораторній системі відліку.
- Під час виконання граничного переходу к нерелятивістському випадку більша ймовірність, що відповідні величини не завжди співпадають.

Відмова від вимог інваріантності усіх рівнянь відносно перетворень [8]Лоренца допомагає значно спростити багато визначень, та привести їх до виду, який буде максимально схожим на відповідні нерелятивістські формулювання. Тому кінетичне рівняння у нековаріантній формі має вигляд[9]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\right) f(x,p) = C(x,p) \qquad (2.2.1)$$

Тут:

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E} + \left(\frac{e}{c}\right)\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \qquad (2.2.2)$$

– сила, яка діє на частинку.

Це рівняння потрібно розв'язати відносно функції розподілу, яка може бути знайдена, як мале відхилення від рівноваги:

$$f_e = f_{e0} + f_{e1} \qquad (2.2.3)$$

Де функція розподілу Максвелла:

$$f_{e0} = \frac{n_e}{\pi^{3/2} v_{te}^3} e^{-v^2/v_{te}^2} \qquad (2.2.4)$$

Інтегруючи це кінетичне рівняння (2.2.1) за швидкістю з ваговим множником, в якості якого потрібно брати зіткненневі інваріанти (число частинок, імпульс, енергія), можна отримати, відповідно, основні рівняння перенесення:

- рівняння збереження числа частинок.
- рівняння збереження імпульса.
- рівняння збереження енергії.

Скористуємося таким видом законів збереження:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\boldsymbol{V}) = 0$$

$$\frac{\partial mn\boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{\Pi} = ne(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}) + \int mvC(f)d^3v$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3nT}{2} + \frac{mn\boldsymbol{V}}{2}\right) + \nabla \cdot \boldsymbol{Q} = enE \cdot V + \int \frac{mv^2}{2} C(f)d^3v \qquad (2.3.1)$$

де $\Pi_{jk} \equiv \langle mnv_j v_k \rangle_f$ – потік імпульсу. $\boldsymbol{Q} = \frac{mn\langle v^2 \boldsymbol{v} \rangle_f}{2}$ – потік енергії.

Можна виконати деякі перетворення, щоб отримати рівняння моменту рідини для щільності, для швидкості потоку та температури. Система рівнянь рідини має вигляд:

$$а) \left.\frac{dn_a}{dt}\right|_a + n_a \nabla \cdot \boldsymbol{V}_a = 0$$

$$б) m_a n_a \left.\frac{d\boldsymbol{V}_a}{dt}\right|_a = -\nabla p_a - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_a + e_a n_a (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}_a \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{R}_a$$

$$в) \frac{3}{2} n_a \left.\frac{dT_a}{dt}\right|_a + p \nabla \cdot \boldsymbol{V}_a = -\nabla \cdot \boldsymbol{q}_a - \boldsymbol{\pi}_a : \nabla \boldsymbol{V}_a + Q_a \qquad (2.3.2)$$

де $\boldsymbol{\pi} : \nabla \boldsymbol{V} = \frac{\pi_{ij} \partial V_k}{\partial x_j}$, $\left.\frac{d}{dt}\right|_a = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}_a \cdot \nabla\right)$ є швидкістю змін, які відчуває рідинний елемент.

Рівняння безперервності (2.3.2, а), має характеристики, які показують, що рівняння не стисливе. Рівняння імпульсу (2.3.2, б), є подібним до рівняння Нав'є-Стокса для рідини, з додавання сили Лоренца та міжвидової сили тертя. Рівняння (2.3.2, в), яке демонструє нагрівання адіабатичним стисненням, тут виявляється розбіжність швидкості потоку (у другому доданку). Якщо зіткнення високе, можна закрити систему рівнянь рідини (2.3.2), використовуючи метод розроблений Чапменом та Енскогом з незначними покращеннями. Основною ідеєю цього метода є припущення про високі зіткнення. Тобто частота зіткнень вважається настільки високою, що локальна термодинамічна рівновага досягається швидше ніж розслаблення макроскопічних градієнтів за рахунок транспорту. Тобто виконуються такі умови:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ll v, \ \lambda \ll L \qquad (2.3.3)$$

де $\lambda = \frac{v_T}{\nu}$ – середній вільний пробіг. $L = \nabla^{-1}$– шкала довжин варіації макроскопічних параметрів плазми. Через те, що у намагніченій плазмі повздовжні та перпендикулярні градієнти часто відрізняються, тому вводимо $L_\parallel$ – паралельну шкалу довжин, та $L_\perp$– перпендикулярну. Враховуючи, що гірочастота набагато більша за частоту зіткнень ($L_\parallel \Delta = v/\Omega \ll 1$) та, що Ларморівський радіус менший ніж середній вільний пробіг ($\rho \ll \lambda$), то порядок перпендикулярний до поля може бути розслабленим:

$$\lambda \ll L_\parallel, \quad \delta \equiv \frac{\rho}{L_\perp} \qquad (2.3.4)$$

Розглядаємо рівняння Власова:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f_a + \frac{e_a}{m_a}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \boldsymbol{v}} = 0 \qquad (2.3.5)$$

де E, B– загальні електричні та магнітні поля.

Та вводимо у нього оператор зіткнень, який зводиться з ефектів електромагнітних коливань або зіткнень короткого діапазону на функції розподілу:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} C_a(f_a) = \frac{\partial f_a}{\partial t}\Big|_{\text{зіткнення}} \qquad (2.3.6)$$

Цей об’єкт переходить у праву частину рівняння Власова, або кінетичного рівняння:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f_a + \frac{e_a}{m_a}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \boldsymbol{v}} = C_a(f_a) \qquad (2.3.7)$$

Тепер починаємо розглядати плазму з малим радіусом Лармора, тобто умови, які відповідають (2.3.4). Та оцінимо відносну величину доданків у кінетичному рівнянні (2.3.7):

$$C_a(f_a) + \Omega_e(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{v}) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla f_e - \frac{e\boldsymbol{E}}{m_e} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \boldsymbol{v}} + \frac{\partial f_e}{\partial t} \qquad (2.3.8)$$

де $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}/B$ та $\Omega_e = \frac{e_e B}{m_e} = -eB/m_e$Члени з ліва мають порядок: $v_e \sim v_{ei}$та Ω_e. Перші два члени з права мають порядок: $\upsilon_{Te}/L_{\parallel}$.

Тепер ми маємо рівняння де великі доданки зібрані з лівого боку, а малі – з правого. Ми відповідно розширюємо функцію розподілу:

$$f_e = f_{e0} + f_{e1} \ldots \qquad (2.3.9)$$

Для найнижчого порядку у $\lambda/L_{\parallel}$та $\rho/L_{\perp}$повинна зникнути ліва частина у (2.3.8), що робиться для Максвеліану[10]:

$$f_{e0}(v) = n_e \left(\frac{m_e}{2\pi T_e}\right)^{3/2} e^{-m_e \upsilon^2/2T_e} \qquad (2.3.10)$$

Оскільки при цьому для f_{e0} зникають обидва члени у операторі зіткнення $C_e(f_{e0}) = C_{ee}(f_{e0}) + C_{ei}(f_{e0})$та магнітний член. Вводячи сферичні координати $(\upsilon, \theta, \varphi)$у просторі швидкостей, суміщеному з магнітним полем, можемо переписати магнітний член у (2.3.8):

$$C_e(f_{e0}) + \Omega_e \frac{\partial f_{e0}}{\partial \varphi} = 0 \qquad (2.3.11)$$

У наступному порядку маємо:

$$C_e(f_{e1}) + \Omega_e(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{v}) \frac{\partial f_{e1}}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{Q}(\upsilon) \qquad (2.3.12)$$

де $C_e(f_{e1}) = C_{ee}^{i}(f_{e1}) + C_{ei}(f_{e1})$– сума лінеаризованого оператора зіткнення. Також ввели «термодинамічні сили»:

$$\boldsymbol{\Omega}(\upsilon) = \left[\boldsymbol{A}_1 + \left(\frac{m_e \upsilon^2}{2T_e} - \frac{5}{2}\right)\boldsymbol{A}_2\right] f_{e0} \qquad (2.3.13)$$

де $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$– термодинамічні сили, виконують функцію рушія транспорту, та мають вигляд:

$$\boldsymbol{A}_1 = \nabla ln p_e + eE/T_e$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \nabla lnT_e \qquad (2.3.14)$$

2.3 Матричні елементи Брагінського

Зосередимося на законах паралельного транспорту, та збережемо лише паралельні градієнти у вихідному члені праворуч (2.3.12). але на відміну від попередньої задачі будемо враховувати як електрон-іонні зіткнення так і електрон-електронні. Тоді кінетичне рівняння (2.3.12) приймає вигляд[11]:

$$C_e^l(f_{e1}) = \upsilon_{\parallel}\left[\boldsymbol{A}_{1\parallel} + \left(\frac{m\upsilon^2}{2m} - \frac{5}{2}\right)\boldsymbol{A}_{2\parallel}\right] f_{e0} \qquad (2.3.15)$$

Отримане рівняння ще називають «задача Спітцера». А ліва частина є повним лінеаризованим оператором зіткнення:

$$C_e^l(f_{e1}) = C_{ee}(f_{e1}, f_{e0}) + C_{ee}(f_{e0}, f_{e1}) + \nu_{ei}L(f_{e1}) \qquad (2.3.16)$$

Підхід Брагінського до розв'язування кінетичних задач шляхом розширення функції розподілу в ряд ортогональних многочленів. Цей підхід має перевагу у систематичності та можливості досягнення результатів з будь-якою точністю. Функцію розподілу можна розширити за допомогою повного набору функцій, дуже зручним повним набором є поліноми Соніна або узагальнені поліноми Лагера[12]:

$$L_j^{(m)}(x) = \frac{1}{j!}\frac{e^x}{x^m}\frac{d^j}{dx^j}\left(x^{j+m}e^{-x}\right) \qquad (2.3.17)$$

де $j = 0, 1$ ...– ціле число. $m = 3/2$ – верхній індекс. Тоді поліном приймає вигляд:

$$L_0^{\left(\frac{3}{2}\right)}(x) = 1$$

$$L_1^{\left(\frac{3}{2}\right)}(x) = \frac{5}{2} - x$$

$$L_2^{\left(\frac{3}{2}\right)}(x) = \frac{35}{8} - \frac{7x}{2} + \frac{x^2}{2} \qquad (2.3.18)$$

Поліном Соніна є ортогональним:

$$\int_0^\infty L_j^{(m)}(x)\, L_k^{(m)}(x) x^m e^{-x} dx = \frac{\Gamma(j+m+1)}{j!}\delta_{jk} \qquad (2.3.19)$$

де$\Gamma(x)$ – гама-функція, яка задовільняє рівності:$\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

Поліноми Соніна спеціально розроблені для вирішення проблем кінетичного транспорту, таких як інтеграл:

$$\int f_a(v) v_\parallel L_j^{(3/2)}(x_a^2) d^3v \qquad (2.3.20)$$

де $x_a^2 = \frac{m_a v^2}{2T_a}$ потік частинок (а), якщо $j = 0$ та дорівнює негативному тепловому потоку (поділеному на T), якщо $j = 1$. Якщо f_{a1} розширюється, то:

$$f_{a1} = f_a - f_{a0} = f_{a0} \frac{m_a v_\parallel}{T_a} \sum_j u_{aj} L_j^{(3/2)}(x_a^2) \qquad (2.3.21)$$

Два перші коефіцієнти u_{aj} відносяться до середньої паралельної швидкості ($V_\parallel$) та до провідного теплового потоку ($q_\parallel$):

$$а) u_{a0} = V_{a\parallel}$$

$$б) u_{a0} = -\frac{2q_{a\parallel}}{5p_a} \qquad (2.3.22)$$

Тепер визначаємо елементи матриці Брагінського оператора зіткнення:

$$а) M_{ab}^{jk} = \frac{\tau_{ab}}{n_a} \int v_\parallel L_j^{\left(\frac{3}{2}\right)}(x_a^2) C_{ab}\left[\frac{m_a v_\parallel}{T_a} L_j^{\left(\frac{3}{2}\right)}(x_a^2) f_{a0}, f_{b0}\right] d^3v \qquad (2.3.23)$$

$$б) N_{ab}^{jk} = \frac{\tau_{ab}}{n_a} \int v_\parallel L_j^{(3/2)}(x_a^2) C_{ab}\left[f_{b0}, \frac{m_b v_\parallel}{T_b} L_j^{(3/2)}(x_b^2) f_{b0}\right] d^3v$$

де $\tau_{ab} = 3\pi^{1/2}/4\hat{\nu}_{ab}$.

Розрахунок матричних елементів проводиться за допомогою функції генерації для поліномів Соніна:

$$(1-\gamma)^{-m-1}e^{-\frac{xy}{1-y}} = \sum_{j=0}^{\infty} y^j L_j^{(m)}(x) \qquad (2.3.24)$$

Висновки до розділу 2

Транспорт у термоядерних реакціях є невід'ємною частиною. Процеси перенесення є видом транспорту, та виступають механізмом втрати енергії, що і привертає до себе увагу. Оскільки є декілька видів процесів перенесення, ми звертаємо увагу на вид, який здійсню великий вклад – це неокласичне перенесення.

Неокласичне перенесення призводить до необхідності розглянути кінетичне рівняння, щоб описати потік частинок. Але під час підстановки усіх операторів зіткнення ми одержуємо «задачу Спітцера», що представляє собою інтегро-диференційне рівняння. Завдяки розкладу по поліномам Соніна вдається отримати вираз, де завдяки матричним коефіцієнтам Брагінського задача Спітцера перетворюється на систему звичайних алгебраїчних рівнянь.

Розділ 3. Обчислення матричних елементів Брагінського

3.1 Мотивація для урахування релятивізму в процесах перенесення

Релятивістська форма кінетичного рівняння вперше з'явилася у класичній роботі 1956 року Бєляєва та Будкера[13]. Після того було багато досліджень, присвячених релятивістській теорії перенесення, у тому числі робота Джавахішвілі та Цинцадзе 1973 року, у якій класична теорія перенесення Брагінського була узагальнена на випадок повністю релятивістської плазми зі збереженням лоренц-інваріантності, з особливою увагою до ультра-релятивістського випадку. Орієнтація цих досліджень на ультра-релятивістський випадок вказує на те, що областю їх застосовності є наперед усе астрофізика, де релятивістські швидкості мають не тільки заряджені частинки, но також і макроскопічні потоки частинок, енергії і тепла, а надмірна складність рівнянь повністю релятивістської теорії робить їх не дуже популярними для опису термоядерної плазми, де сама необхідність релятивістського опису не очевидна. Температури, з якими мали справу в токамаках і стелараторах того часу, коли закладалися основи класичної і неокласичної теорії перенесення у замагніченій плазмі (тобто у 60-ті та 70-ті роки минулого століття), були настільки малими, що було очевидно, що в релятивістському описі плазми немає потреби. Релятивістська кінетика застосовувалась для окремих явищ у термоядерній плазмі, пов'язаних зі швидкими електронами, що набувають релятивістських швидкостей. Але такі частинки відповідають хвостам функції розподілу, а процеси перенесення – це такі процеси, у яких беруть участь майже всі частинки, і тому вони визначаються насамперед тепловими електронами, що довгий час вважалися гарантовано нерелятивістськими. Тому, коли наприкінці 60-х років з'явилась неокласична теорія перенесення, де неокласичні ефекти пов'язані з тороїдальною геометрією, характерною для термоядерних пристроїв, вона була повністю нерелятивістською.

Але, якщо обчислити теплову швидкість за стандартною нерелятивістською формулою $v_{te} = 2T_e/m_e$, то ми отримаємо, що для електронів вже за температури 25

кеВ теплова швидкість сягатиме швидкості світу, а це означає, що в такій плазмі велика кількість електронів буде мати швидкості, порівняні зі швидкістю світла, і за таких температур кінетику електронів вже потрібно розглядати як релятивістську.

Релятивістська кінетика електронів була отримана наприкінці 60-х років у роботах Морозова і Соловйова, а на початку 80-х років, більш строго, у роботах Літлджона [14]. Крім того, добре відомо, що функцією розподілу для ансамблю релятивістських частинок, що знаходяться у стані рівноваги, є не функція розподілу Максвелла, а так звана функція Юттнера-Максвелла:

$$f_{MJ}(u) = \frac{n}{4\pi m^2 cTK_2(\mu)} e^{-\mu\gamma} \qquad (3.1.1)$$

де $\mu = mc^2/T$, $\gamma = \sqrt{1 + u^2/c^2}$ – релятивістська константа Лоренца і $K_2(\mu)$ – модифікована функція Бесселя другого роду. Її характерною особливістю є те, що, на відміну від функції Максвелла, її форма залежить від температури. Оскільки швидкість частинок не може перевищувати швидкості світла, то за високих температур при збільшенні температури на хвості функції розподілу з'являється горб, а теплове ядро функції розподілу просідає. Математично це можна показати, переписавши цю функцію в іншому вигляді:

$$f_{MJ}(u) = C_{MJ}(\mu) \frac{n}{\pi^{3/2} u_t^3} e^{-\mu(\gamma-1)},$$

де $\mu(\gamma - 1) = \frac{u^2}{u_t^2}\frac{2}{\gamma+1}$ та $C_{MJ}(\mu) = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\frac{e^{-\mu}}{K_2(\mu)} \simeq 1 - \frac{15}{8\mu}$.

За температури $T_e = 25$ кеВ функція $\mathrm{C}_{MJ}(\mu) \approx 0.91$ для електронів. Але це загальний множник для функції розподілу. Це означає, що окрім ефектів, що пов'язані з релятивістською гамою в кінетичній енергії, тобто з хвостами функції розподілу, можуть існувати також ефекти, пов'язані з просіданням теплового ядра функції розподілу. А це означає, що вплив релятивістської кінетики на процеси перенесення електронів є можливим.

Наприкінці 80-х років, коли почали працювати великі токамаки JET (Велика Британія)[15], TFTR (США) та JT-60 (Японія), і почалася робота по проектуванню ITER[16], почали з’являтися поодинокі роботи, у яких розроблялася релятивістська теорія перенесення саме для замагніченої термоядерної плазми. Найбільш важливою роботою цього періоду стала робота Браамса і Керні 1989 року, у якій розв’язана задача релятивістського обчислення поздовжнього електричного струму. В роботі не враховуються неокласичні ефекти, але там отримані дуже зручні формули для кулонівського оператора, що дозволяють перейти до слабо-релятивістського наближення, який нас цікавить. Також тут необхідно відзначити роботу Балеску і Меттенса 1990 року. Але лише у 2010-ті роки, з початком будівництва ITER, проблема урахування релятивістських ефектів в теорії перенесення почала дійсно набувати актуальність. Все частіше автори почали відчувати необходність виходити за границі нерелятивістського наближення при обчисленні окремих величин і процесів, почали з'являтися відносно систематичні спроби будування релятивістської теорії перенесення, а у 2018 році були опубліковані результати числового обчислення, отримані за допомогою першого повністю релятивістського транспортного коду, що повністю підтвердили результати роботи, згідно з якими вплив релятивістських ефектів на неокласичні потоки в беззіткневому режимі стеларатора є помітним за температур 40-60 кеВ і складається із двох конкуруючих ефектів, що діють у протилежних напрямках: просідання теплового ядра функції розподілу при збільшенні температури проявляється першим і призводить до зменшення радіальних потоків, а при подальшому збільшенні температури на перший план виходять ефекти, пов’язані з хвостами функції розподілу, що призводить до збільшення радіальних потоків.

3.2 Релятивістська кінетика електронів

В роботі [17] було показано, що дрейфово-кінетичне рівняння для релятивістських електронів може бути записано у такому вигляді:

$$V(f_{e1}) - C_e(f_{e1}) = -\dot{\rho}\left[A_1 + \left(\kappa - \frac{5}{2} - \mathcal{R}\right)A_2\right]f_{e0} + bv_{\parallel}A_3 f_{e0} \qquad (3.2.1)$$

де $V(f_{e1})$ – релятивістський оператор Власова, $C_e(f_{e1})$ – лінеарізований кулонівський оператор зіткнень, а A_i – так звані термодинамічні сили:

$$A_1(\rho) = \frac{p_e'}{p_e} - \frac{e\Phi_e'}{T_e};\ A_2(\rho) = \frac{T_e'}{T_e};\ A_3(\rho) = -\frac{e}{T_e}\frac{\langle \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\rangle}{\langle B^2\rangle} \qquad (3.2.2)$$

де $\dot{\rho} = (\boldsymbol{V}_{dr}\cdot\nabla\rho)$ – радіальна компонента дрейфової швидкості, $p_e = n_e T_e$ – термодинамічний тиск плазми, $\boldsymbol{E}$ – індуктивне електричне поле, штрих означає похідну $d/d\rho$.

Тут було використано наближення, в якому нехтується лоренц-інваріантністю, тобто макроскопічні потоки електронів, енергії та тепла вважаються малими порівняно зі швидкістю світла, але кінетика електронів повністю релятивістська. Під останнім мається на увазі, що електрони рухаються по ларморівським кружкам з дуже великою швидкістю, і після усереднення по періоду ларморівського руху ми отримаємо релятивістські рівняння для дрейфового руху центра ларморівського кружка.

Якщо проінтегрувати кінетичне рівняння за імпульсами, отримаємо рівняння балансу для числа частинок (електронів). Воно також називається рівнянням безперервності і показує, що зміна щільності з часом у будь-якому елементі об’єму плазми з необхідністю пов’язана з потоком частинок у плазмі. Така ситуація пов’язана з тим, що частинки не можуть з’являтися та зникати – їх число зберігається, і якщо змінюється число частинок в однієї частині плазми, то воно зміниться і в іншій частині, щоб сума залишилася незмінною, тобто виникає потік частинок.

Якщо тепер домножити кінетичне рівняння на імпульс електрона $m\boldsymbol{u}$ і проінтегрувати його за імпульсами, отримаємо рівняння балансу імпульсу з відповідними потоками, а якщо домножити кінетичне рівняння на енергію

релятивістського електрона $\mu(\gamma-1)$, то ми отримаємо рівняння балансу енергії з відповідними потоками.

В рамках обраного підходу, визначення потоків були обрані таким чином, щоб математична структура відповідних рівнянь перенесення (балансу частинок, імпульса та енергії) була, наскільки це можливо, ідентична структурі відповідних нерелятивістських рівнянь. Таким чином були отримані наступні вирази для потоків.

Потік числа частинок (електронів):

$$\mathbf{\Gamma}_e = \int d^3u\boldsymbol{v}f_e \qquad (3.2.3)$$

Потік енергії електронів:

$$\mathbf{Q}_e = \int d^3u\boldsymbol{v}m_ec^2(\gamma-1)f_e \qquad (3.2.4)$$

Потік тепла, що переноситься електронами:

$$\boldsymbol{q}_e = \boldsymbol{Q}_e - \left(\tfrac{5}{2}+\mathcal{R}\right)T_e\mathbf{\Gamma}_e \qquad (3.2.5)$$

У виразі для потока тепла в явній формі з'явилась релятивістська поправка $\mathcal{R}T_e\Gamma_e$, де величина $\mathcal{R}$ була визначена як:

$$\mathcal{R}(\mu_r) = \mu_r\left(\frac{K_3(\mu_r)}{K_2(\mu_r)}-1\right)-\frac{5}{2} = \frac{15}{8\mu_r}+\cdots(\mu_r \gg 1) \qquad (3.2.6)$$

Вираз для потока тепла вище отриманий із такого розміркування, що потік енергії складається із двох компонент: потік тепла $\boldsymbol{q}_e$ і конвективний потік енергії $\boldsymbol{I}_e$, що у свою чергу складається із двох компонент - потік внутрішньої енергії ансамбля частинок, $W_e = (3/2)n_eT_e$, і потік тепла, n_eT_e, що переноситься плазмою, що рухається зі швидкістю $\boldsymbol{V}_e = \mathbf{\Gamma}_e/n_e$. Таким чином, $\boldsymbol{I}_e = \boldsymbol{V}_eW_e + T_e\mathbf{\Gamma}_e$, і для потока енергії ми отримаємо $\boldsymbol{Q}_e = \boldsymbol{q}_e + \boldsymbol{V}_eW_e + T_e\mathbf{\Gamma}_e$. Відповідно, потік тепла можна виразити як $\boldsymbol{q}_e = \boldsymbol{Q}_e - (\boldsymbol{V}_eW_e + T_e\mathbf{\Gamma}_e)$, і ми отримаємо вишенаведений вираз для потока тепла.

3.3 Метод Брагінського: розкладання в ряд

Як ми вже знаємо, метод Брагінського полягає у розкладанні функції розподілу у ряд за поліномами Соніна[18], які виявилися ідеально застосовними для формулювання потоків. Якщо ми скористаємось поліномами Соніна для релятивістських потоків, то ми не зможемо обмежитися лише першими членами, і це призведе до того, що формули будуть приблизними. Але, на щастя, існують більш загальні поліноми, що називаються узагальненими поліномами Лягерра, які так само добре застосовні для релятивістських потоків у вищеозначеному формулюванні, як поліноми Соніна для нерелятивістських потоків.

Ми будемо використовувати узагальнені поліноми Лагерра: $L_n^{(\alpha)}(\kappa)$, де $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$, $L_1^{(\alpha)}(x) = \alpha + 1 - x$ і т.д. Тут $\alpha = \frac{3}{2} + \mathcal{R}$ та $\kappa = \mu_r(\gamma - 1)$. Тепер можна записати поздовжні потоки у загальному вигляді як:

$$n_e V_{\|i}^e = \int d^3u v_\| L_i^{(\alpha)}(\kappa) f_e \qquad (3.3.1)$$

При $i = 0$ цей вираз можна ідентифікувати з потоком частинок:

$$n_e V_{\|0}^e = \int d^3u v_\| f_e = \Gamma_\|^e \qquad (3.3.2)$$

де $V_{\|0}^e$– поздовжня швидкість потоку електронів. Відповідно, $i = 1$ відповідає потоку тепла (поділеному на температуру):

$$n_e V_{\|1}^e = -\int d^3u \left(\kappa - \frac{5}{2} - \mathcal{R}\right) v_\| f_e = -q_\|^e / T_e \qquad (3.3.3)$$

Оскільки лише перша лежандрова гармоніка входить у паралельні потоки, можна замінити f_{e1} на $\xi f_{e1}^{(1)}$, де $\xi = u_\|/u$, а верхній індекс означає першу лежандрову гармоніку (в подальшому цей індекс ми будемо опускати). Відповідно, функцію f_{e1} зручно представити як розкладання в ряд по узагальненим поліномам Лягерра:

$$f_{e1} = \frac{m_e u}{T_e} w(\kappa) f_{e0}(\kappa) \sum_i a_i V_{\|i}^e L_i^{(\alpha)}(\kappa) \qquad (3.3.4)$$

Вагова функція $w(\kappa)$ тут потрібна для того, щоб інтеграл (3.3.1) зводився до умови нормування узагальнених поліномів Лягерра,

$$\int_0^\infty dx\, L_i^{(\alpha)}(x) L_j^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} = \frac{\Gamma(i+\alpha+1)}{i!}\delta_{ij} \qquad (3.3.5)$$

де $\Gamma(n)$ – гамма-функція.

Після відповідного обчислення, отримаєм такий вираз для вагової функції:

$$w(\kappa) = \kappa^{\mathcal{R}} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{3/2} C_{eMJ}^{-1}(\kappa) \qquad (3.3.6)$$

Відповідно, коефіцієнти розкладання дорівнюють:

$$a_i = \frac{3(2i)!!}{(2i+3)!!} \frac{\Gamma\left(i+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(i+\frac{5}{2}+\mathcal{R}\right)} \qquad (3.3.7)$$

Тепер запишемо релятивістські сили поздовжнього кулонівського тертя через зіткнення за допомогою узагальнених поліномів Лягерра:

$$n_e F_{\parallel j}^e = \int d^3u m_e u_\parallel L_j^{(\alpha)}(\kappa) \left(C^{ee}(\xi f_{e1}, f_{e0}) + C^{ee}(f_{e0}, \xi f_{e1}) + C^{ei}(\xi f_{e1}, f_{e0})\right) \qquad (3.2.13)$$

Кулонівський оператор $C^{ee}(f_e)$ тут складається із трьох частин[18]: диференціальний оператор $C^{ee}(\xi f_{e1}, f_{e0})$ відповідає за дифузію і тертя для *e/e* зіткнень, інтегральний оператор $C^{ee}(f_{e0}, \xi f_{e1})$ - за збереження імпульсу для *e/e* зіткнень, а оператор *e/i* зіткнень $C^{ei}(\xi f_{e1}, f_{i0})$ розглядається у наближенні Лоренца.

Використовуючи визначення для f_{e1} (3.2.6) і властивості кулонівського оператора, отримаєм формулу (3.2.13) у такому вигляді:

$$n_e F_{\parallel j}^e = \sum_i a_j V_{\parallel j}^e \left[\frac{n_e}{\tau_{ee}}\left(M_{ij}^{ee} + N_{ij}^{ee}\right) + \frac{n_e}{\tau_{ei}} M_{ij}^{ei}\right], \qquad (3.2.14)$$

де відповідні матричні елементи дорівнюють:

$$M_{ij}^{ee} = \frac{\tau_{ee}}{n_e}\int d^3u\, u_\parallel L_i^{(\alpha)}(\kappa) C^{ee}\left(\frac{m_e u}{T_e}\xi w L_i^{(\alpha)}(\kappa) f_{e0}, f_{e0}\right),$$

$$N_{ij}^{ee} = \frac{\tau_{ee}}{n_e}\int d^3u\, u_\parallel L_i^{(\alpha)}(\kappa) C^{ee}\left(f_{e0}, \frac{m_e u}{T_e}\xi w L_i^{(\alpha)}(\kappa) f_{e0}\right),$$

$$M_{ij}^{ei} = \frac{\tau_{ee}}{n_e}\int d^3u\, u_\parallel L_i^{(\alpha)}(\kappa) C^{ee}\left(\frac{m_e u}{T_e}\xi w L_i^{(\alpha)}(\kappa) f_{e0}, f_{e0}\right).$$

(3.2.15)

Тут τ_{ee} – час зіткнення для *e/e* зіткнень, а τ_{ei} – відповідно, для *e/i* зіткнень. Це шукомі релятивістські формули для матричних елементів Брагінського.

3.4 Релятивістський кулонівський оператор

Матричні елементи дозволяють переформулювати кінетичну задачу для поздовжнього струму у систему алгебраїчних рівнянь, а визначення для відповідних матричних елементів наведені вище, див. (3.2.15). Для їх обчислення необхідно знайти потрібну форму релятивістського оператора зіткнень. Ми скористуємося наближенням[18].

Диференціальний оператор $C^{ee}(\xi f_{e1}, f_{e0})$ складається із двох частин, одна з яких описує дифузію і тертя за модулем імпульсу (або швидкості у нерелятивістському випадку), а інша – розсіювання по куту.

$$C^{ee}\left(\xi f_{e1}, f_{e0}\right) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial}{\partial u}u^2\left(D_{uu}^{ee}(u)\frac{\partial f_{e1}}{\partial u} - F_u^{ee}(u) f_{e1}\right) + \frac{1}{u^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, D_{\theta\theta}^{ee}(u)\frac{\partial f_{e1}}{\partial\theta}\right)$$

(3.4.1)

де $D_{uu}^{ee}(u)$ та $F_u^{ee}(u)$ – коефіцієнти дифузії та тертя за імпульсом, а $D_{\theta\theta}^{ee}(u)$ – коефіцієнт дифузії за пітч-кутом.

Коефіцієнт дифузії для *e/e* зіткнень:

$$D_{uu}^{ee}(u) = \frac{4\nu_{e0}}{\sqrt{\pi}} C_{MJ}(\mu_r) \left(\frac{\gamma}{u^3} \int_0^u \left(2\gamma^2 c^2 j'_{0[2]02} - 8c^2 j'_{0[3]022} \right) \frac{u'}{\gamma'} e^{-\mu_r(\gamma'-1)} du' + \right.$$

$$\left. \frac{\gamma}{u^2} \int_u^\infty \left(2\gamma'^2 c^2 j_{0[2]02} - 8c^2 j_{0[3]022} \right) \frac{u'}{\gamma'} e^{-\mu_r(\gamma'-1)} du' \right) \qquad (3.4.2)$$

де $\gamma' = \gamma(u')$, u' - імпульси польових частинок, та ν_{e0} – частота *e/e* зіткнень. Крім того, тут використані спеціальні функції:

$$j_{0[2]02}(z) = \frac{(z\gamma - \sigma)}{4z},$$

$$j_{0[3]022}(z) = \frac{[-3z\gamma + (3+2z^2)\sigma]}{32z}, \qquad (3.4.3)$$

де $\sigma(z) = \ln(z + \gamma)$, $z = u/c$.

Коефіцієнт тертя *e/e* зіткнень може бути записаний [] як:

$$F_u^{ee}(u) = -\frac{m_e}{T_e} \frac{u}{\gamma} D_{uu}^{ee}(u) \qquad (3.4.4)$$

Коефіцієнт розсіювання за пітч-кутом дорівнює:

$$D_{\theta\theta}^{ee}(u) = \frac{4\nu_{e0}}{\sqrt{\pi}} C_{MJ}(\mu_r) \times \left(\frac{\gamma}{u} \int_0^u \left(\frac{1}{2}\gamma' - \left(\frac{c^2}{u^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) j'_{0[2]02} + \right. \right.$$

$$\left. \frac{4}{\gamma^2} \frac{c^2}{u^2} j'_{0[3]022} \right) \frac{u'^2}{\gamma'} e^{-\mu_r(\gamma'-1)} du' + \gamma \int_u^\infty \int_0^u \left(\frac{1}{2} \frac{\gamma'^2}{\gamma} - \left(\frac{c^2}{u^2} + \frac{u'^2}{u^2\gamma^2} \right) j_{0[2]02} + \right.$$

$$\left. \left. \frac{4}{\gamma^2} \frac{c^2}{u^2} j_{0[3]022} \right) \frac{u'^2}{\gamma'} e^{-\mu_r(\gamma'-1)} du' \right) \qquad (3.4.5)$$

Інтегральний оператор $C^{ee}(f_{e0}, \xi f_{e1})$ – це частина кулонівського оператора, що відповідає за збереження імпульсу. Ми не будемо тут його наводити, обмежившись лише посиланням на статтю[19].

Розсіювання на іонах можна з високою точністю розглядати у наближенні нерухомих іонів (тобто, $m_e/m_i \to 0$). У такому випадку оператор *e/i* зіткнень можна записати як:

$$C^{ei}(f_{e1}, f_{e0}) \simeq \nu_D^{ei}(u) \mathcal{L}(f_{e1}) \qquad (3.4.6)$$

де $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi}$ – оператор Лоренца, а $\nu_D^{ei}(u)$ – частота кулонівських *e/i* зіткнень. У наближенні великих швидкостей (швидкості електронів значно більші за швидкості іонів) рівняння для частоти зіткнень можна записати у вигляді:

$$\nu_D^{ei}(u) = \nu_{e0} Z_{eff} \frac{\gamma u_{te}^3}{u^3} \qquad (3.4.7)$$

де Z_{eff} – ефективний заряд іонів (для чистої водневої плазми він дорівнює 1).

3.5 Матричні коефіцієнти та їх обчислення

Очевидно, що урахування релятивістської кінетики електронів дуже суттєво ускладнює інтеграли, через які визначаються матричні елементи Брагінського. Теоретично, можливо отримати повні аналітичні вирази для розкладання всіх величин у ряд за малим параметром $1/\mu$, але наразі це виявилося дуже громіздкою задачею. Тому, з метою виконання цілей дипломної роботи, було виконано часткове спрощення виразів для матричних коефіцієнтів з подальшим обчисленням їх числових значень за допомогою комп'ютера.

Для отримання числових результатів довелося перейти від розмірних величин до безрозмірних наступним чином: імпульси u були виражені через $x = u/u_{te}$, коефіцієнт дифузії $D_{uu}^{ee}(u)$ через

$$\mathcal{D}_{uu}^{ee}(u) = \frac{\tau_{ee}}{u_{te}^2} D_{uu}^{ee}(u), \qquad (3.5.1)$$

а коефіцієнт тертя $F_u^{ee}(u)$ через:

$$\mathcal{F}_u^{ee}(u) = \frac{\tau_{ee}}{u_{te}} F_u^{ee}(u). \qquad (3.5.1)$$

Таким чином були виконані числові розрахунки матричних елементів для температури електронів 25 кеВ. Отримані результати представлено як відношення релятивістської поправки до відповідної нерелятивістської частини.

Для коефіцієнтів M_{ij}^{ee} (*e/e* зіткнення) отримано:

$\delta M_{00}^{ee(1)}/M_{00}^{ee(0)} \approx 0.45$	$\delta M_{01}^{ee(1)}/M_{01}^{ee(0)} \approx 0.63$	$\delta M_{02}^{ee(1)}/M_{02}^{ee(0)} \approx 0.06$
$\delta M_{10}^{ee(1)}/M_{10}^{ee(0)} \approx 0.27$	$\delta M_{11}^{ee(1)}/M_{11}^{ee(0)} \approx 0.37$	$\delta M_{12}^{ee(1)}/M_{12}^{ee(0)} \approx 0.38$
$\delta M_{20}^{ee(1)}/M_{20}^{ee(0)} \approx 0.33$	$\delta M_{21}^{ee(1)}/M_{21}^{ee(0)} \approx 0.26$	$\delta M_{22}^{ee(1)}/M_{22}^{ee(0)} \approx 0.29$

Для коефіцієнтів N_{ij}^{ee} (*e/e* зіткнення) отримано:

$\delta N_{00}^{ee(1)}/N_{00}^{ee(0)} \approx 0.40$	$\delta N_{01}^{ee(1)}/N_{01}^{ee(0)} \approx 0.11$	$\delta N_{02}^{ee(1)}/N_{02}^{ee(0)} \approx 0.43$
$\delta N_{10}^{ee(1)}/N_{10}^{ee(0)} \approx 0.14$	$\delta N_{11}^{ee(1)}/N_{11}^{ee(0)} \approx 0.35$	$\delta N_{12}^{ee(1)}/N_{12}^{ee(0)} \approx 0.19$
$\delta N_{20}^{ee(1)}/N_{20}^{ee(0)} \approx 0.75$	$\delta N_{21}^{ee(1)}/N_{21}^{ee(0)} \approx 0.17$	$\delta N_{22}^{ee(1)}/N_{22}^{ee(0)} \approx 0.23$

Для коефіцієнтів M_{ij}^{ei} (*e/i* зіткнення) отримано:

$\delta M_{00}^{ee(1)}/M_{00}^{ee(0)} \approx 0.24$	$\delta M_{01}^{ee(1)}/M_{01}^{ee(0)} \approx 0.11$	$\delta M_{02}^{ee(1)}/M_{02}^{ee(0)} \approx 0.09$
$\delta M_{10}^{ee(1)}/M_{10}^{ee(0)} \approx 0.11$	$\delta M_{11}^{ee(1)}/M_{11}^{ee(0)} \approx 0.15$	$\delta M_{12}^{ee(1)}/M_{12}^{ee(0)} \approx 0.07$
$\delta M_{20}^{ee(1)}/M_{20}^{ee(0)} \approx 0.09$	$\delta M_{21}^{ee(1)}/M_{21}^{ee(0)} \approx 0.07$	$\delta M_{22}^{ee(1)}/M_{22}^{ee(0)} \approx 0.10$

Результати показують, що релятивістські поправки до матричних елементів Брагінського будуть помітні вже при температурі електронів 25 кеВ.

Висновки до розділу 3

Нові формулювання релятивістської теорії перенесення в термоядерній плазмі дозволяють використовувати стандартні методи, що були розроблені для потреб нерелятивістської теорії, для обчислення різних величин з урахуванням релятивістських поправок. Це теоретично дає можливість використовувати старі комп'ютерні коди, що написані для нерелятивістської теорії, для обчислення нових формулювань теорії перенесення, що містить релятивістські ефекти, пов'язані з релятивістською кінетикою електронів. Отримані загальні вирази для визначення матричних елементів у релятивістському наближенні математично дуже схожі на

відповідні класичні вирази. Але для безпосереднього обчислення матричних елементів потрібні зовсім інші підходи, що пов’язано зі специфічною формою релятивістського кулонівського оператора зіткнень.

Отримано числові значення для перших релятивістських поправок в матричних елементах Брагінського. Показано, що вони можуть бути помітними вже за температури $T_e = 25$ кеВ і їх числові значення сягають десятків процентів порівняно з відповідними нерелятивістськими величинами.

Загальні висновки

В дипломній роботі було використано нові формулювання для релятивістського опису процесів перенесення у термоядерній плазмі для обчислення матричних елементів Брагінського. При отриманні формул для їх обчислення було використано стандартний метод Брагінського, з необхідними змінами, що пов’язані з особливостями релятивістських формулювань.

Загальні вирази для обчислення матричних елементів виявилися формально схожими на класичні вирази, але сам процес обчислення суттєво відрізняється, що пов’язано з дуже складною формою релятивістського кулонівського оператора зіткнень.

Підхід, що був застосований в роботі, передбачав розкладання кінцевих виразів у ряди по малому параметру (відношення електронної температури термоядерної плазми до енергії покою електронів), але виявилося, що аналітично це зробити дуже складно, тому для обчислення матричних елементів були застосовані числові методи.

Обчислення матричних елементів за температури електронів 25 кеВ дозволило оцінити релятивістські поправки порівняно з відповідними нерелятивістськими виразами. Результати обчислення показують, що вплив релятивізму на числові значення матричних елементів для характерних температур в ITER може бути помітним і в середньому складає десятки процентів.

Перелік використаних джерел

1. С. И. Брагинский. Явления переноса в плазме. – 1963, с.183.
2. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев. Неоклассическая теория диффузий//Вопросы теории плазмы – 1973, с.205-245.
3. Трубников Б.А. Столкновения частиц в полностью ионизированной плазме // Вопросы теории плазмы. – 1963, с.98-182.
4. Кадомцев Б.Б. Самоорганизация плазмы токамака // Известия вузов. Радио-физика. – 1986, с.1032-1040.
5. Трубников Б.А. Приведение кинетического уравнения в случае кулоновских столкновений к дифференциальному виду // ЖЭТФ. – 1958, с.1341-1343.
6. Трубников Б.А. Столкновения частиц в полностью ионизированной плазме // Вопросы теории плазмы. – 1963, с. 98-182.
7. Кадомцев Б.Б. Физика плазмы 1. – 1975, с.727.
8. F. L. Hinton, R. D. Hazeltine. Theory of Plasma Transport in Toroidal Confinement Systems// Reviews of Modern Physics. – 1975, с.239.
9. S.P. Hirshman, D.J. Sigmar. Neoclassical Transport of Impurities in Tokamak Plasmas// Nuclear Fusion – 1981, с.1079-1201.
10. P. Helander, D. Sigmar. Collisional Transport in Magnetized Plasmas. Cambridge University Press – 2002, с.292.
11. B.J. Braams, C.F.F. Karney. Conductivity of a relativistic plasma// Physics of Fluids B: Plasma Physics – 1989, с.1355-1368.
12. T. Metens, R. Balescu. Relativistic transport theory for a two-temperature magnetized plasma// Physics of Fluids B – 1990, с.2076-2090.

13. G. Kapper, S.V. Kasilov. Evaluation of relativistic transport coefficients and the generalized Spitzer function in devices with 3D geometry and finite collisionality// Physics of Plasmas– 2018, vol.25.

14. G. M. McCracken, P. Stott. Fusion: The Energy of the Universe. Academic Press – 2005, c.220.

15. F. F. Chen. An Indispensable Truth: How Fusion Power Can Save the Planet. – 2011, c.420.

16. J. P. Freidberg. Plasma physics and fusion energy. Cambridge University Press – 2007, c.690.

17. T. J. Dolan. Magnetic Fusion Technology// Springer-Verlag London – 2013, c.810.

18. Chen F.F. Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. 3rd ed. Los Angeles: Springer. – 2016, c.490.

19. Ariola M., Pironti A. Magnetic control of tokamak plasmas. 2nd ed. Springer, - 2016, c.203.

20. Mironov M.I., Zaitsev F.S., Gorelenkov N.N., Afanasyev V.I., Chernyshev F.V., Nesenevich V.G., Petrov M.P. Sawtooth mixing of alphas, knock-on D, and T ions, and its influence on NPA spectra in ITER plasma // Nuclear Fusion. – 2018, c.1-9.

21. Tani K., et. al. Application of a non-steady-state orbit-following Monte-Carlo code to neutron modeling in the MAST spherical tokamak // Plasma Physics and Controlled Fusion, Vol. 58. – 2016, c.105-110.

22. Hender T.C., et. al. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research //Tight aspect ratio tokamak reactors. – 1992, c. 399-404.